

ISSN 1683 - 4720

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ
НАУК УКРАИНЫ

Том 30
2016

Труды ИШММ, Том 30, 2016

ТРУДЫ

**ИНСТИТУТА
ПРИКЛАДНОЙ
МАТЕМАТИКИ И
МЕХАНИКИ**

УДК 517 : 519 : 531

У збірнику представлено роботи з широкого кола питань у раніх галузях математики, механіки і кібернетики: теорії функцій, теорії ймовірностей і математичної статистики, алгебри, диференціальних рівнянь, динаміки твердого тіла, теорії пружності та гірничої механіки, математичних і технічних проблем кібернетики та інформатики, теорії автоматів, діагностики дискретних і медичних систем, а також їх застосувань.

Для науковців, викладачів, аспірантів і студентів вузів відповідних спеціальностей.

Обсяг: 10 друк. арк.

В сборнике представлены работы по широкому кругу вопросов в разных областях математики, механики и кибернетики: теории функций, теории вероятностей и математической статистики, алгебры, дифференциальных уравнений, динамики твердого тела, теории упругости и горной механики, теории автоматов, диагностики дискретных и медицинских систем, а также их приложений.

Для научных работников, преподавателей, аспирантов студентов вузов соответствующих специальностей.

Объем: 10 п. листов.

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР: член-корр. НАН Украины, д. ф.-м. н. В.Я. Гутлянский

ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА: д. техн. н. В.Н. Ткаченко

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ: канд. ф.-м. н. О.В. Несмелова

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

д. ф.-м. н. А.Л. Зуев

д. ф.-м. н. С.Я. Махно

д. ф.-м. н. В.И. Рязанов

д. ф.-м. н. И.И. Скрыпник

канд. ф.-м. н. С.О. Чайченко

д. ф.-м. н. С.М. Чуйко

академик НАН Украины, д. ф.-м. н. В.П. Шевченко

д. ф.-м. н. А.Е. Шишков

д. ф.-м. н. В.Ф. Щербак

Адрес редколлегии:

84100 Славянск, ул. Добровольского, 1
Институт прикладной математики и механики НАН Украины,
Тел. (0626) 66 55 00

Утверждено к печати ученым советом
Института прикладной математики и механики
НАН Украины 16.12.2016 протокол № 12

Свидетельство о регистрации: серия КВ № 4844 от 01.02.2001 г.

© Институт прикладной математики и
механики НАН Украины, 2016

Научное издание

ТРУДЫ
ИНСТИТУТА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
И МЕХАНИКИ НАН УКРАИНЫ

Том 30

Подписано в печать 25.12.2016

Институт прикладной математики и механики НАН
Украины

84100, г. Славянск, ул. Добровольского, 1;
тел.: (0626) 66 55 00

Формат 60 x 84 1/8. Ум. адрук. арк. 10.
Друк лазерний. Зам № 5540. Тираж 100 прим.

Надруковано в ТОВ "ТехПринтЦентр"
Адреса: м. Слов'янск, вул. Батюка, 19,
тел.: +38 06262 3 20 99

Том 30
Славянск, 2016
Основан в 1997 г.

Т Р У Д Ы
ИНСТИТУТА
ПРИКЛАДНОЙ
МАТЕМАТИКИ
И МЕХАНИКИ

СО Д Е Р Ж А Н И Е

<i>НАУЧНАЯ БИОГРАФИЯ Гутлянского Владимира Яковлевича</i>	3
<i>O. S. Afanas'eva</i> Finite Lipschitz mappings on Finsler manifolds ..	13
<i>В. В. Билет, Р. Р. Салимов</i> Оценка площади образа круга для классов Соболева	21
<i>В. В. Грушкова, А. Л. Зуев</i> О задаче планирования движения нелинейной системы в окрестности заданной кривой	27
<i>И. В. Денег, Я. В. Заболотный</i> Обобщение некоторых результатов о неналегающих областях	43
<i>O. Dougoshay, M. Küçükaslan, J. Riihenta</i> First Baire class functions in the pluri-fine topology	53
<i>Р. М. Джафаров</i> О регулярности решения уравнения Пуассона в области, образованной пересечением шаров	61
<i>Н. В. Жоголева, В. Ф. Щербак</i> Идентификация параметров упругой связи осцилляторов Ван дер Поля	67
<i>Ю. Б. Зелинский, Х. К. Дакхил</i> Об одной задаче о тени для шаров фиксированного радиуса	75

<i>М. В. Краснощок</i> Перша початково-крайова задача для одно- мірного квазілінійного рівняння дробової дифузії	82
<i>О. О. Новіков, О. Г. Ровенська</i> Наближення класів функцій ви- сокої гладкості прямокутними сумами Фейєра	92
<i>Т. М. Осипчук</i> Задача о тени для областей на плоскости	100
<i>Е. А. Севостьянов, А. А. Маркиш</i> О равностепенной непрерыв- ности одного класса отображений, квазирегулярных в среднем .	106
<i>А. В. Стёпкин</i> Исследование структуры графа при помощи двух агентов	111
<i>А. Л. Таргонский</i> Одна экстремальная задача на равноугольных системах точек для частично неналегающих областей и открытых множеств	122
<i>С. М. Чуйко, О. В. Несмелова (Старкова), Д. В. Сысоев</i> Авто- номная периодическая задача для уравнения типа Хилла в част- ном критическом случае	133
<i>С. М. Чуйко, А. С. Чуйко, М. В. Дзюба</i> Регуляризация линейной нетеровой краевой задачи при помощи импульсного воздействия типа “interface conditions”	143
<i>В. С. Шпаковский</i> Гиперкомплексное представление аналитиче- ских решений одного уравнения гидродинамики	155

УДК 517.54

©2016. А. Л. Таргонский

ОДНА ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА НА РАВНОУГОЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ТОЧЕК ДЛЯ ЧАСТИЧНО НЕНАЛЕГАЮЩИХ ОБЛАСТЕЙ И ОТКРЫТЫХ МНОЖЕСТВ

Результаты этой работы получены в хорошо известном направлении геометрической теории функций комплексного переменного – экстремальных задач на классах непересекающихся областей. Его начало положено с классической работы Лаврентьева [1], в которой, в частности, был впервые решена задача о произведении конформных радиусов двух непересекающихся областей. Сейчас этот раздел геометрической теории функций комплексного переменного испытывает активное развитие. Основные классические результаты можно найти в работах [2]–[13]. Результаты этой работы усиливают некоторые результаты работы [7].

Ключевые слова: внутренний радиус области, квадратичный дифференциал, кусочно-разделяющее преобразование, функция Грина, равноугольная система точек, логарифмическая емкость, вариационная формула, неналегающие области, открытое множество, частично неналегающие области.

1. Основные определения.

Пусть \mathbb{N} , \mathbb{R} , \mathbb{C} – множество натуральных, действительных и комплексных чисел, соответственно, и $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$.

Пусть $n, m \in \mathbb{N}$. Систему точек

$$A_{n,2m-1} = \{a_{k,p} \in \mathbb{C} : k = \overline{1, n}, p = \overline{1, 2m-1}\},$$

будем называть $(n, 2m-1)$ -равноугольной системой точек на лучах, если для всех $k = \overline{1, n}$ справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} 0 < |a_{k,1}| < \dots < |a_{k,2m-1}| < \infty; \\ \arg a_{k,1} = \arg a_{k,2} = \dots = \arg a_{k,2m-1} = \frac{2\pi}{n}(k-1). \end{aligned} \quad (1)$$

Также, введем в рассмотрение следующую систему угловых областей:

$$P_k = \{w \in \mathbb{C} : \frac{2\pi}{n}(k-1) < \arg w < \frac{2\pi}{n}k\}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Обозначим два “управляющих”, функционала для произвольной $(n, 2m-1)$ -равноугольной системы точек на лучах

$$M(A_{n,2m-1}^{(1)}) = \prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^m \chi \left(|a_{k,2p-1}|^{\frac{n}{2}} \right) \cdot |a_{k,2p-1}|,$$

The author is grateful to Prof. A. Bakhtin for suggesting problems and useful discussions. This research is partially supported by Grant of Ministry of Education and Science of Ukraine (Project No. 0115U003027).

$$M \left(A_{n,2m-1}^{(2)} \right) = \prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^{m-1} \chi \left(\left| a_{k,2p} \right|^{\frac{n}{2}} \right) \cdot |a_{k,2p}|,$$

где $\chi(t) = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{t})$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Пусть D , $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ – произвольное открытое множество и $w = a \in D$, тогда $D(a)$ обозначает связную компоненту множества D , которая содержит точку a . Для произвольной системы точек $(n, 2m - 1)$ и открытого множества D , $A_{n,2m-1} \subset D$ обозначим через $D_k(a_{s,p})$ связную компоненту множества $D(a_{s,p}) \cap \overline{P}_k$, которая содержит точку $a_{s,p}$, $k = \overline{1, n}$, $s = k, k + 1$, $p = \overline{1, 2m - 1}$, $a_{n+1,p} := a_{1,p}$. Обозначим $D_k(0)$ (соответственно $D_k(\infty)$) связную компоненту множества $D(0) \cap \overline{P}_k$ (соответственно $D(\infty) \cap \overline{P}_k$), содержащую точку $w = 0$ (соответственно $w = \infty$).

Будем говорить, что открытое множество D , $\{0, \infty\} \cup A_{n,2m-1} \subset D$ удовлетворяет условию неналегания относительно системы точек $\{0, \infty\} \cup A_{n,2m-1}$ если:

$$\begin{aligned} & \left[D_k(a_{k,s}) \cap D_k(a_{k+1,p}) \right] \cup \left[D_k(0) \cap D_k(a_{k,p}) \right] \cup \left[D_k(0) \cap D_k(\infty) \right] \cup \\ & \cup \left[D_k(\infty) \cap D_k(a_{k,p}) \right] \cup \left[D_k(\infty) \cap D_k(a_{k+1,p}) \right] \cup \left[D_k(0) \cap D_k(a_{k+1,p}) \right] \cup \\ & \cup \left[D_k(a_{k,s}) \cap D_k(a_{k,u}) \right] \cup \left[D_k(a_{k+1,s}) \cap D_k(a_{k+1,u}) \right] = \emptyset, \end{aligned} \quad (2)$$

$k = \overline{1, n}$, $p, s, u = \overline{1, 2m - 1}$, $s \neq u$ для всех углов \overline{P}_k .

Систему областей $\{B_k\}_{k=1}^n$, $k = \overline{1, n}$, будем называть системой частично неналегających областей, если

$$D := \bigcup_{k=1}^n B_k, \quad (3)$$

и открытое множество D , удовлетворяет условию неналегания (2).

Пускай $r(B; a)$ – внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ относительно точки $a \in B$ (см. [4–7, 14]).

2. Результаты.

Предметом изучения данной работы являются следующие задачи.

Задача 1. Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$. Определить максимум функционала

$$J = (r(D, 0) \cdot r(D, \infty))^{\frac{n^2 \alpha}{4}} \cdot \prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^m r^\beta(D, a_{k,2p-1}) \cdot \prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^{m-1} r^\alpha(D, a_{k,2p}),$$

где $A_{n,2m-1}$ – произвольная $(n, 2m - 1)$ -равноугольная система точек, удовлетворяющая соотношению (1), D – произвольное открытое множество, удовлетворяющее соотношению (2), $0, \infty, a_{k,p} \in D \subset \overline{\mathbb{C}}$, и определить все экстремали ($k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, 2m - 1}$).

Задача 2. Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$. Определить максимум функционала

$$J = (r(B_0, 0) \cdot r(B_\infty, \infty))^{\frac{n^2\alpha}{4}} \cdot \prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^m r^\beta(B_{k,2p-1}, a_{k,2p-1}) \cdot \prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^{m-1} r^\alpha(B_{k,2p}, a_{k,2p}),$$

где $A_{n,2m-1}$ – произвольная $(n, 2m-1)$ -равноугольная система точек, удовлетворяющая соотношению (1), $\{B_0, B_{k,p}, B_\infty\}$ – произвольная система частично неналегающих областей, $0 \in B_0$, $\infty \in B_\infty$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, и определить все экстремали ($k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, 2m-1}$).

Теорема 1. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Тогда для произвольной $(n, 2m-1)$ -равноугольной системы точек, удовлетворяющей условию (1), и произвольного открытого множества D , удовлетворяющего условию неналегания (2) относительно системы точек $\{0, \infty\} \cup A_{n,2m-1}$, $0, \infty, a_{k,p} \in D \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, 2m-1}$, справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & (r(D, 0) \cdot r(D, \infty))^{\frac{n^2\alpha}{4}} \cdot \prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^m r^\beta(D, a_{k,2p-1}) \cdot \prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^{m-1} r^\alpha(D, a_{k,2p}) \leq \\ & \leq \left(\frac{n}{4}\right)^{n\alpha} \cdot \left(\frac{1}{2mn}\right)^{nm(\alpha+\beta)} \cdot \left(M(A_{n,2m-1}^{(1)})\right)^\beta \cdot \left(M(A_{n,2m-1}^{(2)})\right)^\alpha \times \\ & \quad \times \left(\frac{\alpha^\alpha}{|\sqrt{\alpha}-1||\sqrt{\alpha}-1|^2|\sqrt{\alpha}+1||\sqrt{\alpha}+1|^2}\right)^{\frac{mn}{2}}. \end{aligned}$$

Равенство достигается в неравенстве, когда открытое множество

$$D = \bigcup_{k,p} B_{k,p} \cup B_0 \cup B_\infty,$$

точки $a_{k,p}$ и области $B_0, B_\infty, B_{k,p}$ являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала

$$\begin{aligned} Q(w)dw^2 = & -w^{n-2}(1+w^n)^{2m-2} \times \\ & \times \frac{(\beta-\alpha) \left(\left(1-iw^{\frac{n}{2}}\right)^{4m} + \left(1+iw^{\frac{n}{2}}\right)^{4m} \right) - 2(\beta+\alpha)(1+w^n)^{2m}}{\left(\left(1-iw^{\frac{n}{2}}\right)^{4m} - \left(1+iw^{\frac{n}{2}}\right)^{4m} \right)^2} dw^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Теорема 2. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Тогда для произвольной $(n, 2m-1)$ -равноугольной системы точек, удовлетворяющей условию (1), и произвольной системе частично неналегающих областей $\{B_0, B_{k,p}, B_\infty\}$, удовлетворяющей условию (3), $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, 2m-1}$, $0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$,

$\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & (r(B_0, 0) \cdot r(B_\infty, \infty))^{\frac{n^2 \alpha}{4}} \cdot \prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^m r^\beta(B_{k,2p-1}, a_{k,2p-1}) \cdot \prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^{m-1} r^\alpha(B_{k,2p}, a_{k,2p}) \leq \\ & \leq \left(\frac{n}{4}\right)^{n\alpha} \cdot \left(\frac{1}{2mn}\right)^{nm(\alpha+\beta)} \cdot \left(M\left(A_{n,2m-1}^{(1)}\right)\right)^\beta \cdot \left(M\left(A_{n,2m-1}^{(2)}\right)\right)^\alpha \times \\ & \quad \times \left(\frac{\alpha^\alpha}{|\sqrt{\alpha}-1||\sqrt{\alpha}-1|^2|\sqrt{\alpha}+1||\sqrt{\alpha}+1|^2}\right)^{\frac{mn}{2}}. \end{aligned}$$

Равенство в этом неравенстве достигается, когда точки $a_{k,p}$ и области $B_0, B_\infty, B_{k,p}$ являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала (4).

3. Доказательства.

Доказательство теоремы 1. Сразу отметим, что из условия неналегания следует, что $\text{cap } \overline{\mathbb{C}} \setminus D > 0$ и множество D имеет обобщенную функцию Грина $g_D(z, a)$,

$$\text{где } g_D(z, a) = \begin{cases} g_{D(a)}(z, a), & z \in D(a), \\ 0, & z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D(a)}, \\ \lim_{\zeta \rightarrow z} g_{D(a)}(\zeta, a), & \zeta \in D(a), z \in \partial D(a) \end{cases} \quad \text{— обобщенная функция Гри-}$$

на множества D относительно точки $a \in D$, и $g_{D(a)}(z, a)$ — функция Грина области $D(a)$ относительно точки $a \in D(a)$.

Далее, мы будем использовать методы работ [6, 7, 9]. Введем в рассмотрение следующие множества $E_0 = \overline{\mathbb{C}} \setminus D; \overline{U}_t = \{w \in \mathbb{C} : |w| \leq t\}, \Delta_t = \{w \in \mathbb{C} : |w| \geq \frac{1}{t}\}, E(a_{k,p}, t) = \{w \in \mathbb{C} : |w - a_{k,p}| \leq t\}, k = \overline{1, n}, p = \overline{1, 2m-1}, n \geq 3, n, m \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}_+$. Для достаточно малых $t > 0$ определим конденсатор

$$C(t, D, A_{n,2m-1}) = \{E_0, \overline{U}_t, \Delta_t, E_1, E_2\},$$

$E_1 = \bigcup_{k=1}^n \bigcup_{p=1}^m E(a_{k,2p-1}, t), E_2 = \bigcup_{k=1}^n \bigcup_{p=1}^{m-1} E(a_{k,2p}, t)$. Емкостью конденсатора $C(t, D, A_{n,2m-1})$ мы назовем величину (см. [5, 7])

$$\text{cap} C(t, D, A_{n,2m-1}) = \inf \int \int [(G'_x)^2 + (G'_y)^2] dx dy,$$

где нижняя грань берется по всем непрерывным и липшицевым в $\overline{\mathbb{C}}$ функциям $G = G(z)$, таким, что $G|_{E_0} = 0, G|_{E_1} = \sqrt{\beta}, G|_{E_2} = \sqrt{\alpha}, G|_{\overline{U}_t} = \frac{n}{2}\sqrt{\alpha}, G|_{\Delta_t} = \frac{n}{2}\sqrt{\alpha}$.

Будем называть модулем конденсатора величину

$$|C| = [\text{cap} C]^{-1}.$$

Согласно теореме 1 [6] имеем

$$|C(t, D, A_{n,2m-1})| = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2}{n(\alpha(n+2m-2) + 2m\beta)} \cdot \log \frac{1}{t} + M(D, A_{n,2m-1}) + o(1), \quad t \rightarrow 0, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} M(D, A_{n,2m-1}) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{4}{n^2 \cdot (\alpha(n+2m-2) + 2m\beta)^2} \cdot \left[\frac{\alpha n^2}{4} \log r(D, 0) + \right. \\ &+ \frac{\alpha n^2}{4} \log r(D, \infty) + \frac{\alpha n^2}{2} g_D(0, \infty) + n\sqrt{\alpha\beta} \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^m (g_D(0, a_{k,2p-1}) + g_D(\infty, a_{k,2p-1})) + \\ &+ n\alpha \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^{m-1} (g_D(0, a_{k,2p}) + g_D(\infty, a_{k,2p})) + \alpha \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^{m-1} \log r(D, a_{k,2p}) + \\ &+ \beta \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^m \log r(D, a_{k,2p-1}) + \beta \sum_{(k,2p-1) \neq (q,2s-1)} g_D(a_{k,2p-1}, a_{q,2s-1}) + \\ &+ \alpha \sum_{(k,2p) \neq (q,2s)} g_D(a_{k,2p}, a_{q,2s}) + 2\sqrt{\alpha\beta} \sum_{(k,2p) \neq (q,2s-1)} g_D(a_{k,2p}, a_{q,2s-1}) \Big]. \quad (6) \end{aligned}$$

Функция

$$z_k(w) = (-1)^k i \cdot w^{\frac{n}{2}},$$

реализует однолистное и конформное отображение области P_k на правую полу-плоскость $\operatorname{Re} z > 0$.

Тогда функция

$$\zeta_k(w) := \frac{1 - z_k(w)}{1 + z_k(w)} \quad (7)$$

отображает однолистно и конформно область P_k на единичный круг $U = \{z : |z| \leq 1\}$, $k = \overline{1, n}$.

Очевидно, что $\zeta_k(0) = 1$, $\zeta_k(\infty) = -1$, $k = \overline{1, n}$.

Определим $\omega_{k,p}^{(1)} := \zeta_k(a_{k,p})$, $\omega_{k-1,p}^{(2)} := \zeta_{k-1}(a_{k,p})$, $a_{n+1,p} := a_{1,p}$, $\omega_{0,p}^{(2)} := \omega_{n,p}^{(2)}$, $\zeta_0 := \zeta_n$ ($k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, 2m-1}$).

Согласно формуле (7), получаем следующие асимптотические соотношения

$$\left| \zeta_k(w) - \zeta_k(a_{k,p}) \right| \sim \left[\frac{2}{n} \cdot \chi \left(\left| a_{k,p} \right|^{\frac{n}{2}} \right) |a_{k,p}| \right]^{-1} \cdot |w - a_{k,p}|,$$

$$w \rightarrow a_{k,p}, \quad w \in \overline{P}_k.$$

$$\left| \zeta_{k-1}(w) - \zeta_{k-1}(a_{k,p}) \right| \sim \left[\frac{2}{n} \cdot \chi \left(\left| a_{k,p} \right|^{\frac{n}{2}} \right) |a_{k,p}| \right]^{-1} \cdot |w - a_{k,p}|,$$

$$w \rightarrow a_{k,p}, \quad w \in \overline{P}_{k-1}, \quad k = \overline{1, n}, p = \overline{1, 2m-1}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \left| \zeta_k(w) - 1 \right| &\sim 2|w|^{\frac{n}{2}}, \quad w \rightarrow 0, w \in \overline{P}_k, k = \overline{1, n} \\ \left| \zeta_k(w) + 1 \right| &\sim 2|w|^{-\frac{n}{2}}, \quad w \rightarrow \infty, w \in \overline{P}_k, k = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (9)$$

Пусть, также, множество $\Omega_{k,p}^{(1)}$ является связной компонентой $\zeta_k(D \cap \overline{P}_k) \cup (\zeta_k(D \cap \overline{P}_k))^*$, содержащей точку $\omega_{k,p}^{(1)}$, а $\Omega_{k-1,p}^{(2)}$ – связной компонентой $\zeta_{k-1}(D \cap \overline{P}_{k-1}) \cup (\zeta_{k-1}(D \cap \overline{P}_{k-1}))^*$, содержащей точку $\omega_{k-1,p}^{(2)}$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, 2m-1}$, $\overline{P}_0 := \overline{P}_n$, $\Omega_{0,p}^{(2)} := \Omega_{n,p}^{(2)}$. Отметим, что $\Omega_{k,p}^{(s)}$ вообще говоря, многосвязные области, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, 2m-1}$, $s = 1, 2$. Пара областей $\Omega_{k-1,p}^{(2)}$ и $\Omega_{k,p}^{(1)}$ является результатом кусочно-разделяющего преобразования открытого множества D относительно семейства углов $\{P_{k-1}, P_k\}$, $\{\zeta_{k-1}, \zeta_k\}$ в точке $a_{k,p}$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, 2m-1}$. Пусть $\Omega_k^{(0)}$ – связная компонента $\zeta_k(D \cap \overline{P}_k) \cup (\zeta_k(D \cap \overline{P}_k))^*$, содержащая точку 1 , $k = \overline{1, n}$; $\Omega_k^{(\infty)}$ – связная компонента $\zeta_k(D \cap \overline{P}_k) \cup (\zeta_k(D \cap \overline{P}_k))^*$, содержащая точку -1 , $k = \overline{1, n}$. Семейство областей $\{\Omega_k^{(0)}\}_{k=1}^n$ является результатом кусочно-разделяющего преобразования открытого множества D относительно семейства углов $\{P_k\}_{k=1}^n$ и функций $\{\zeta_k\}_{k=1}^n$ в точке $w = 0$, $k = \overline{1, n}$; семейство областей $\{\Omega_k^{(\infty)}\}_{k=1}^n$ является результатом кусочно-разделяющего преобразования открытого множества D относительно семейства углов $\{P_k\}_{k=1}^n$ и функций $\{\zeta_k\}_{k=1}^n$ в точке $w = \infty$, $k = \overline{1, n}$.

Рассмотрим конденсаторы

$$C_k(t, D, A_{n,2m-1}) = (E_0^{(k)}, \overline{U}_t^{(k)}, \Delta_t^{(k)}, E_1^{(k)}, E_2^{(k)}),$$

где

$$\begin{aligned} E_s^{(k)} &= \zeta_k(E_s \cap \overline{P}_k) \cup [\zeta_k(E_s \cap \overline{P}_k)]^*, \\ \overline{U}_t^{(k)} &= z_k(\overline{U}_t \cap \overline{P}_k) \cup \{z_k(\overline{U}_t \cap \overline{P}_k)\}^*, \\ \Delta_t^{(k)} &= z_k(\Delta_t \cap \overline{P}_k) \cup \{z_k(\Delta_t \cap \overline{P}_k)\}^*, \end{aligned}$$

$k = \overline{1, n}$, $s = 0, 1, 2$, $\{P_k\}_{k=1}^n$ – система углов, соответствующая системе точек $A_{n,2m-1}$. Пусть операция $[A]^*$, определяет множество $A \subset \overline{\mathbb{C}}$, симметричное множеству A относительно единичной окружности $|w| = 1$. Из этого следует, что конденсатору $C(t, D, A_{n,2m-1})$, при кусочно-разделяющем преобразовании относительно углов $\{P_k\}_{k=1}^n$ и функций $\{\zeta_k\}_{k=1}^n$, соответствует множество конденсаторов $\{C_k(t, D, A_{n,2m-1})\}_{k=1}^n$, симметричных относительно $\{z : |z| = 1\}$. Согласно результатам работ [6, 7, 9], получаем, что

$$\text{cap} C(t, D, A_{n,2m-1}) \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \text{cap} C_k(t, D, A_{n,2m-1}). \quad (10)$$

Отсюда следует, что

$$|C(t, D, A_{n,2m-1})| \leq 2 \left(\sum_{k=1}^n |C_k(t, D, A_{n,2m-1})|^{-1} \right)^{-1}. \quad (11)$$

Формула (5) выражает асимптотику модуля конденсатора $C(t, D, A_{n,2m-1})$ при $t \rightarrow 0$. Используя соотношения (8), (9) и тот факт, что множество D удовлетворяет условию неналегания относительно системы точек $A_{n,2m-1}$, для конденсаторов $C_k(t, D, A_{n,2m-1})$, $k = \overline{1, n}$, мы получим аналогичные асимптотические представления

$$\begin{aligned} & |C_k(t, D, A_{n,2m-1})| = \\ & = \frac{1}{2\pi(\alpha(2m+n-2) + 2m\beta)} \log \frac{1}{t} + M_k(D, A_{n,2m-1}) + o(1), \quad t \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} M_k(D, A_{n,2m-1}) = & \frac{1}{2\pi(\alpha(2m+n-2) + 2m\beta)^2} \cdot \left[\alpha \log \frac{r(\Omega_k^{(0)}, 1)}{2} + \right. \\ & + \beta \sum_{p=1}^m \log \frac{r(\Omega_{k,2p-1}^{(1)}, \omega_{k,2p-1}^{(1)})}{\left[\frac{2}{n} \cdot \chi \left(|a_{k,2p-1}|^{\frac{n}{2}} \right) |a_{k,2p-1}| \right]^{-1}} + \alpha \sum_{p=1}^{m-1} \log \frac{r(\Omega_{k,2p}^{(1)}, \omega_{k,2p}^{(1)})}{\left[\frac{2}{n} \cdot \chi \left(|a_{k,2p}|^{\frac{n}{2}} \right) |a_{k,2p}| \right]^{-1}} + \\ & + \alpha \log \frac{r(\Omega_k^{(\infty)}, -1)}{2} + \beta \sum_{t=1}^m \log \frac{r(\Omega_{k,2t-1}^{(2)}, \omega_{k,2t-1}^{(2)})}{\left[\frac{2}{n} \cdot \chi \left(|a_{k+1,2t-1}|^{\frac{n}{2}} \right) |a_{k+1,2t-1}| \right]^{-1}} + \\ & \left. + \alpha \sum_{t=1}^{m-1} \log \frac{r(\Omega_{k,2t}^{(2)}, \omega_{k,2t}^{(2)})}{\left[\frac{2}{n} \cdot \chi \left(|a_{k+1,2t}|^{\frac{n}{2}} \right) |a_{k+1,2t}| \right]^{-1}} \right], \quad k = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

С помощью (12), мы получаем

$$\begin{aligned} |C_k(t, D, A_{n,2m-1})|^{-1} & = \frac{2\pi(\alpha(2m+n-2) + 2m\beta)}{\log \frac{1}{t}} \times \\ & \times \left(1 + \frac{2\pi(\alpha(2m+n-2) + 2m\beta)}{\log \frac{1}{t}} M_k(D, A_{n,2m-1}) + o\left(\frac{1}{\log \frac{1}{t}}\right) \right)^{-1} = \\ & = \frac{2\pi(\alpha(2m+n-2) + 2m\beta)}{\log \frac{1}{t}} - \left(\frac{2\pi(\alpha(2m+n-2) + 2m\beta)}{\log \frac{1}{t}} \right)^2 M_k(D, A_{n,2m-1}) + \\ & + o\left(\left(\frac{1}{\log \frac{1}{t}} \right)^2 \right), \quad t \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Используя соотношение (13), имеем

$$\sum_{k=1}^n |C_k(t, D, A_{n,2m-1})|^{-1} = \frac{2\pi n (\alpha(2m+n-2) + 2m\beta)}{\log \frac{1}{t}} - \left(\frac{2\pi (\alpha(2m+n-2) + 2m\beta)}{\log \frac{1}{t}} \right)^2 \cdot \sum_{k=1}^n M_k(D, A_{n,2m-1}) + o\left(\left(\frac{1}{\log \frac{1}{t}} \right)^2 \right), \quad t \rightarrow 0. \quad (14)$$

В свою очередь (14), позволяет получить следующее асимптотическое равенство

$$\left(\sum_{k=1}^n |C_k(t, D, A_{n,2m-1})|^{-1} \right)^{-1} = \frac{\log \frac{1}{t}}{2\pi n (\alpha(2m+n-2) + 2m\beta)} \times \left(1 - \frac{2\pi (\alpha(2m+n-2) + 2m\beta)}{n \log \frac{1}{t}} \cdot \sum_{k=1}^n M_k(D, A_{n,2m-1}) + o\left(\frac{1}{\log \frac{1}{t}} \right) \right)^{-1} = \frac{\log \frac{1}{t}}{2\pi n (\alpha(2m+n-2) + 2m\beta)} + \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^n M_k(D, A_{n,2m-1}) + o(1), \quad t \rightarrow 0. \quad (15)$$

Неравенства, (10) и (11), принимая во внимания (5) и (15), дают возможность заметить, что

$$\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{n (\alpha(n+2m-2) + 2m\beta)} \cdot \log \frac{1}{t} + M(D, A_{n,2m-1}) + o(1) \leq \leq \frac{\log \frac{1}{t}}{\pi n (\alpha(2m+n-2) + 2m\beta)} + \frac{2}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^n M_k(D, A_{n,2m-1}) + o(1). \quad (16)$$

Из соотношения (16), при $t \rightarrow 0$, мы получаем, что

$$M(D, A_{n,2m-1}) \leq \frac{2}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^n M_k(D, A_{n,2m-1}). \quad (17)$$

Используя формулы (6), (12) и (17) имеем, что

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{4}{n^2 (\alpha(n+2m-2) + 2m\beta)^2} \cdot \left[\frac{\alpha n^2}{4} \log r(D, 0) + \frac{\alpha n^2}{4} \log r(D, \infty) + \frac{\alpha n^2}{2} g_D(0, \infty) + n\sqrt{\alpha\beta} \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^m (g_D(0, a_{k,2p-1}) + g_D(\infty, a_{k,2p-1})) + n\alpha \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^{m-1} (g_D(0, a_{k,2p}) + g_D(\infty, a_{k,2p})) + \alpha \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^{m-1} \log r(D, a_{k,2p}) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& +\beta \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^m \log r(D, a_{k,2p-1}) + \beta \sum_{(k,2p-1) \neq (q,2s-1)} g_D(a_{k,2p-1}, a_{q,2s-1}) + \\
& +\alpha \sum_{(k,2p) \neq (q,2s)} g_D(a_{k,2p}, a_{q,2s}) + 2\sqrt{\alpha\beta} \sum_{(k,2p) \neq (q,2s-1)} g_D(a_{k,2p}, a_{q,2s-1}) \Big] \leq \\
& \leq \frac{1}{\pi n^2 (\alpha(2m+n-2) + 2m\beta)^2} \cdot \sum_{k=1}^n \left[\alpha \log \frac{r(\Omega_k^{(0)}, 1)}{2} + \right. \\
& +\beta \sum_{p=1}^m \log \frac{r(\Omega_{k,2p-1}^{(1)}, \omega_{k,2p-1}^{(1)})}{\left[\frac{2}{n} \cdot \chi\left(|a_{k,2p-1}|^{\frac{n}{2}}\right) |a_{k,2p-1}| \right]^{-1}} + \alpha \sum_{p=1}^{m-1} \log \frac{r(\Omega_{k,2p}^{(1)}, \omega_{k,2p}^{(1)})}{\left[\frac{2}{n} \cdot \chi\left(|a_{k,2p}|^{\frac{n}{2}}\right) |a_{k,2p}| \right]^{-1}} + \\
& +\alpha \log \frac{r(\Omega_k^{(\infty)}, -1)}{2} + \beta \sum_{t=1}^m \log \frac{r(\Omega_{k,2t-1}^{(2)}, \omega_{k,2t-1}^{(2)})}{\left[\frac{2}{n} \cdot \chi\left(|a_{k+1,2t-1}|^{\frac{n}{2}}\right) |a_{k+1,2t-1}| \right]^{-1}} + \\
& \left. +\alpha \sum_{t=1}^{m-1} \log \frac{r(\Omega_{k,2t}^{(2)}, \omega_{k,2t}^{(2)})}{\left[\frac{2}{n} \cdot \chi\left(|a_{k+1,2t}|^{\frac{n}{2}}\right) |a_{k+1,2t}| \right]^{-1}} \right]
\end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned}
& (r(D, 0) \cdot r(D, \infty))^{\frac{n^2\alpha}{4}} \cdot \prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^m r^\beta(D, a_{k,2p-1}) \cdot \prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^{m-1} r^\alpha(D, a_{k,2p}) \leq \\
& \leq \left(\frac{n}{4}\right)^{n\alpha} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^{nm(\beta+\alpha)} \cdot \left(M(A_{n,2m-1}^{(1)})\right)^\beta \cdot \left(M(A_{n,2m-1}^{(2)})\right)^\alpha \times \\
& \times \prod_{k=1}^n \left[r^\alpha(\Omega_k^{(0)}, 1) \cdot \prod_{p=1}^m r^\beta(\Omega_{k,2p-1}^{(1)}, \omega_{k,2p-1}^{(1)}) \cdot \prod_{p=1}^{m-1} r^\alpha(\Omega_{k,2p}^{(1)}, \omega_{k,2p}^{(1)}) \times \right. \\
& \left. \times r^\alpha(\Omega_k^{(\infty)}, -1) \cdot \prod_{t=1}^m r^\beta(\Omega_{k,2t-1}^{(2)}, \omega_{k,2t-1}^{(2)}) \cdot \prod_{t=1}^{m-1} r^\alpha(\Omega_{k,2t}^{(2)}, \omega_{k,2t}^{(2)}) \right]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Доказательство теоремы заканчивается аналогично доказательству теорема 3.3.3 [7]. \square

Доказательство теоремы 2. В случае частично неналегающих областей, открытое множество введенное соотношением (3), удовлетворяет условию (2). Тогда, мы имеем

$$B_0, B_{k,p}, B_\infty \subset D, \quad k = \overline{1, n}, \quad p = \overline{1, 2m-1}. \quad (18)$$

Из (18), используя результаты работ [4, 5, 14], мы получаем

$$\begin{aligned} r(B_0, 0) &\leq r(D, 0), \quad r(B_\infty, \infty) \leq r(D, \infty), \\ r(B_{k,p}, a_{k,p}) &\leq r(D, a_{k,p}), \quad k = \overline{1, n}, p = \overline{1, 2m-1}. \end{aligned} \quad (19)$$

Перемножая неравенства (19), можем сделать вывод, что

$$\begin{aligned} (r(B_0, 0) \cdot r(B_\infty, \infty))^{\frac{n^2\alpha}{4}} \cdot \prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^m r^\beta(B_{k,2p-1}, a_{k,2p-1}) \cdot \prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^{m-1} r^\alpha(B_{k,2p}, a_{k,2p}) &\leq \\ &\leq (r(D, 0) \cdot r(D, \infty))^{\frac{n^2\alpha}{4}} \cdot \prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^m r^\beta(D, a_{k,2p-1}) \cdot \prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^{m-1} r^\alpha(D, a_{k,2p}). \end{aligned}$$

При этом, используя теорему 1, получаем окончательный результат. \square

1. *Лаврентьев М. А.* К теории конформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. – 1934. – Т. 5. – С. 159–245.
2. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М: Наука, 1966. – 628 с.
3. *Бахтина Г. П.* Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – К., 1975. – 11 с.
4. *Дубинин В. Н.* Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – Т. 168. – С. 48–66.
5. *Дубинин В. Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. – 1994. – Т. 49, № 1(295). – С. 3–76.
6. *Дубинин В. Н.* Асимптотика модуля вырождающегося конденсатора и некоторые ее применения // Зап. науч. сем. ПОМИ. – 1997. – Т. 237. – С. 56–73.
7. *Бахтин А. К., Бахтина Г. П., Зелинский Ю. Б.* Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе. // Праці ін-ту мат-ки НАН Укр. – 2008. – Т. 73. – 308 с.
8. *Бахтин О. К.* Нерівності для внутрішніх радіусів неперетинних областей та відкритих множин // Укр. мат. журн. – 2009. – Т. 61, № 5. – С. 596–610.
9. *Дубинин В. Н.* О квадратичных формах, порожденных функциями Грина и Робена // Мат. сборник. – 2009. – Т. 200, № 10. – С. 25–38.
10. *Бахтин А. К., Вьюн В. Е., Трохимчук Ю. Ю.* Неравенства для внутренних радиусов неналегающих областей // Доп. НАН України. – 2007. – № 8. – С. 7–10.
11. *Таргонский А. Л.* Экстремальные задачи о частично неналегающих областях на римановой сфере // Доп. НАН України. – 2008. – № 9. – С. 31–36.
12. *Кузьмина Г. В.* Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы // Зап. науч. сем. ПОМИ. – 2001. – Т. 276. – С. 253–275.
13. *Емельянов Е. Г.* К задаче о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей // Зап. науч. сем. ПОМИ. – 2002. – Т. 286. – С. 103–114.
14. *Хейман В. К.* Многолистные функции. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – 180 с.
15. *Дженкинс Дж. А.* Однолистные функции и конформные отображения. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 256 с.
16. *Таргонский А. Л., Таргонская И. И.* Экстремальная задача для открытых множеств в случае бесконечно удаленной точки // Труды ИПММ НАН України. – 2015. – Т. 29. – С. 102–109.
17. *Таргонський А. Л., Таргонська І. І.* Одна екстремальна задача для функціоналу другого типу у випадку частинно-неперетинних областей // Аналіз та застосування. Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2015. – Т. 12, № 3. – С. 236–242.

18. *Targonskii A., Targonskaya I.* On the One Extremal Problem on the Riemann Sphere // International Journal of Advanced Research in Mathematics. – 2016. – V. 4. – P. 1–7.
19. *Targonskii A.* Extremal problem $(2n; 2m-1)$ -system points on the rays // An. St. Univ. Ovidius Constanta. – 2016. – V. 24, № 2. – P. 283–299.
20. *Targonskii A.* On the One Extremal Problem with the Free Poles on the Unit circle // International Journal of Advanced Research in Mathematics. – 2016. – V. 6. – P. 26–31.

A. L. Targonskii

One extremal problem on equiangular systems of points for partially non-overlapping domains and open sets.

Results of this work are received in the well-known direction geometrical theory of functions of the complex variable. It the direction is called – extremal problems on classes the non-overlapping domains. Its beginning is necessary with classical work Lavrentyeva [1] in which, in particular, was put for the first time also the task about work of conformal radiuses of two is solved non-overlapping domains. This section geometric theory function complex variable is experienced by active development now. It is possible to examine the main classical results in works [2]–[13]. Results it was succeeded to receive the strengthening results of work [7] in this work.

Keywords: *inner radius of domain, quadratic differential, piecewise-separating transformation, the Green function, radial systems of points, logarithmic capacity, variational formula, non-overlapping domains, open set, partially non-overlapping domains.*

А.Л. Таргонський

Одна екстремальна задача на рівнокутній системі точок.

Результати цієї роботи отримані у добре відомому напрямку геометричної теорії функцій комплексного змінного – екстремальним задачам на класах неперетинних областей. Його початок покладено з класичної роботи Лаврентьєва [1], у якій, зокрема, вперше розв’язана задача о добутку конформних радіусів двох неперетинних областей. Зараз цей розділ геометричної теорії функцій комплексного змінного перебуває у активному розвитку. Основні класичні результати можна знайти у роботах [2]–[13]. Результати цієї роботи посилюють деякі результати робіт [7].

Ключові слова: *внутрішній радіус області, квадратичний диференціал, кусково-поділяюче перетворення, функція Гріна, рівнокутна система точок, логарифмічна ємність, варіаційна формула, неперетинні області, відкрита множина, частинно неперетинні області.*

Житомирский государственный университет им. И. Франка,
Житомир
targonsk@zu.edu.ua

Получено 15.11.16