УДК 539.3

Михайленко С. В.[1], к. ф.-м. н.

Стаціонарні розв'язки рівняння нелінійного осцилятора з моногармонічним збудженням

[1] Житомирський державний університет імені Івана Франка, 10008, м. Житомир, вул. Велика Бердичівська, 40
e-mail: s.mikhaylenko@ukr.net

S. V. Mikhaylenko[1], Ph. D.

Stationary solutions of equations for nonlinear oscillator with anharmonic perturbation

[1] Ivan Franko State University of Zhytomyr, 10008, Zhytomyr, Velyka Berdychivska Str., 40
e-mail: s.mikhaylenko@ukr.net

Пропонується метод побудови стаціонарних розв'язків рівняння, що описує поведінку осцилятора з лінійною дисипативною і квадратично-нелінійною консервативною характеристиками при моногармонічному навантаженні.
Ключові слова: нелінійний осцилятор, коефіцієнти Фур'є, моногармонічне навантаження, стаціонарні коливання,гармонічний баланс.

Stationary solutions of equations that describe the behavior of oscillator with a linear dissipative characteristic and a quadratic nonlinear conservative characteristic in a monoharmonic load are studied. The method is based on the representation of complex Fourier coefficients as functions of components of the complex loading amplitude. A general view of these functions appears when their invariance conditions regarding conversion shift over time are used. As a result, each complex Fourier coefficient is represented as the product of some complex value function of the square amplitude by the appropriate degree of the complex loading amplitude. This presentation of Fourier coefficients makes it possible to reduce an infinite system of equations of harmonic balance regarding the Fourier coefficients to the infinite system of equations regarding unknown functions of square of the loading amplitude. This system enables the construction of solutions in the form of series in even powers of the loading amplitude. The first approximation formula of the stationary solution of oscillator equation takes into account those terms of the complex Fourier series, which absolute values contain as the factors the loading amplitude degrees that are no greater than three. Each subsequent approximation specifies the complex harmonic amplitude of the previous approximation by using higher degrees of the loading amplitude, and two new harmonics are appeared.
Key Words: nonlinear oscillator, Fourier coefficient, monoharmonic load, stationary vibrations, harmonic balance.

Статтю представив д. ф.-м.н., проф. Жук Я. О.

1. Рівняння нелінійного осцилятора і система гармонічного балансу

Рівняння осцилятора з лінійною дисипативною і квадратично-нелінійною консервативною характеристиками при моногармонічному навантаженні має вигляд [1,2]:

$$\frac{d^2\varepsilon}{d\tau^2} + \delta_0 \frac{d\varepsilon}{d\tau} + \varepsilon - (f_1^{'} \cos \vartheta\tau - f_1^{''} \sin \vartheta\tau) = -d_0\varepsilon^2, \tau > 0, \quad (1)$$

де $\delta_0, \vartheta, f_1^{'}, f_1^{''}, d_0 = const$, причому $\delta_0 > 0, \vartheta > 0, d_0 \neq 0$.

У механіці, наприклад, таким осцилятором є стержень, один кінець якого закріплений, а інший з'єднаний з масою M . Матеріал стержня описується моделлю Фойгта з квадратичною пружністю і лінійною в'язкістю. Маса збуджується силою

$$F = F^{'} \cos \omega t - F^{''} \sin \omega t .$$

Рівняння (1) дістаємо з системи рівнянь

$$M\frac{d^2u}{dt^2} = F - \sigma S, \varepsilon = \frac{u}{l},$$

$$\sigma = E(\varepsilon + d_0\varepsilon^2) + \eta\frac{d\varepsilon}{dt}$$

шляхом уведення безрозмірних параметрів

$$\vartheta = \frac{\omega}{\omega_0}, \tau = \omega_0 t, \delta_0 = \frac{\eta\omega_0}{E},$$

$$f_1^{'} = \frac{F^{'}}{SE}, f_1^{''} = \frac{F^{''}}{SE},$$

де $\omega_0^2 = \dfrac{SE}{Ml}$.

Вище також позначено: u - зміщення маси, σ - механічне напруження, S - площа поперечного перерізу стержня, ε - деформація стержня, l - його довжина, E - модуль Юнга, η - коефіцієнт в'язкості, d_0 - коефіцієнт нілінійності.

Періодичні розв'язки рівняння (1) шукаємо у вигляді ряду Фур'є

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{\varepsilon_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[\varepsilon_n^{'}\cos n\vartheta\tau + \varepsilon_n^{''}\sin n\vartheta\tau] = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widetilde{\varepsilon}_n e^{in\vartheta\tau}.\end{aligned} \tag{2}$$

Тут

$$\begin{aligned}&\widetilde{\varepsilon}_n = \varepsilon_n^{'} + i\varepsilon_n^{''}, i = \sqrt{-1}, n \ge 1; \\ &\widetilde{\varepsilon}_{-n} = \overline{\widetilde{\varepsilon}}_n; \widetilde{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0.\end{aligned} \tag{3}$$

Риска зверху означає комплексно-спряжену величину.

Якщо підставити (2) в (1), увівши позначення

$$\widetilde{\theta}_n = 1 - (n\vartheta)^2 + i\delta_0 n\vartheta, \widetilde{f}_1 = f_1^{'} + if_1^{''}, \tag{4}$$

дістанемо

$$\begin{aligned}&\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widetilde{\theta}_n\widetilde{\varepsilon}_n e^{in\vartheta\tau} - (\overline{\widetilde{f}}_1 e^{-i\vartheta\tau} + \widetilde{f}_1 e^{i\vartheta\tau}) = \\ &= -\frac{d_0}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\widetilde{\varepsilon}_k\widetilde{\varepsilon}_l e^{i(k+l)\vartheta\tau}.\end{aligned} \tag{5}$$

Помножимо ліву та праву частини (5) на $\dfrac{\vartheta}{2\pi}e^{-in\vartheta\tau}$ і проінтегруємо по τ від 0 до $\dfrac{2\pi}{\vartheta}$. Після необхідних викладок дістанемо нескінчену систему нелінійних рівнянь відносно коефіцієнтів $\widetilde{\varepsilon}_n, n \ge 0$ з (2)

$$\widetilde{\theta}_n\widetilde{\varepsilon}_n - \widetilde{f}_n = -d_o[\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\widetilde{\varepsilon}_k\widetilde{\varepsilon}_{n-k} + \sum_{k=1}^{\infty}\overline{\widetilde{\varepsilon}}_k\widetilde{\varepsilon}_{n+k}], \tag{6}$$

$n = 0,1,2,...,$

де $\widetilde{f}_n = 0$, якщо $n \ne 1$.

2. Зображення коефіцієнтів Фур'є

Величина ε з (2) є стаціонарною реакцією осцилятора на моногармонічне навантаження

$$f_1(\tau) = f_1^{'}\cos\vartheta\tau - f_1^{''}\sin\vartheta\tau \tag{7}$$

з частотою ϑ і амплітудою навантаження $|f_1| = \sqrt{f_1^{'2} + f_1^{''2}}$.

Очевидно, що коефіцієнти в (2) є деякими функціями величин $f_1^{'}, f_1^{''}$

$$\widetilde{\varepsilon}_n = \widetilde{F}_n(f_1^{'}, f_1^{''}), n = 0,1,2... . \tag{8}$$

Ці функції мають бути інваріантними відносно перетворення зсуву у часі, а саме, у разі заміни в (7) і (2) τ на $\tau + \Delta\tau$

$$\begin{aligned}f_1(\tau + \Delta\tau) &= (f_1^{'}\cos\varphi - f_1^{''}\sin\varphi)\cos\vartheta\tau - \\ &- (f_1^{'}\sin\varphi + f_1^{''}\cos\varphi)\sin\vartheta\tau,\end{aligned}$$

$$\varepsilon(\tau + \Delta\tau) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widetilde{\varepsilon}_n e^{in\varphi}e^{in\vartheta\tau},$$

де $\varphi = \vartheta\Delta\tau$, і введення позначень

$$x = f_1^{'}\cos\varphi - f_1^{''}\sin\varphi, y = f_1^{'}\sin\varphi + f_1^{''}\cos\varphi \tag{9}$$

мають виконуватись рівності

$$\widetilde{\varepsilon}_n e^{in\varphi} = \widetilde{F}_n(x, y) \text{ або}$$

$$\widetilde{\varepsilon}_n = \widetilde{F}_n(x, y)e^{-in\varphi}, n = 0,1,2,..., \tag{10}$$

де $\widetilde{F}_n$ - ті самі функції, що й у (8).

Шляхом виключення параметра φ з другого співвідношення (10) дістанемо рівняння

$$\frac{\partial\widetilde{\varepsilon}_n}{\partial f_1^{'}}f_1^{''} - \frac{\partial\widetilde{\varepsilon}_n}{\partial f_1^{''}}f_1^{'} + in\widetilde{\varepsilon}_n = 0,$$

загальний розв'язок якого має вигляд

$$\widetilde{\varepsilon}_n = \widetilde{E}_n(|f_1|^2)\widetilde{f}_1^n, n = 0,1,2,..., \tag{11}$$

де $\widetilde{E}_0$ - довільна дійсна, а $\widetilde{E}_1, \widetilde{E}_{2,...}$ - довільні комплекснозначні функції квадрата амплітуди навантаження.

Якщо в (6) скористатись представленням (11), то після скорочення на $\widetilde{f}_1^n$ дістанемо нескінченну систему рівнянь відносно величин $\widetilde{E}_n$

$$\begin{aligned}\widetilde{\theta}_n\widetilde{E}_n - \eta_n &= -d_0[\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\widetilde{E}_k\widetilde{E}_{n+k} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty}\overline{\widetilde{E}}_k\widetilde{E}_{n+k}|f_1|^{2k}], n = 0,1,2,....\end{aligned} \tag{12}$$

Тут $\eta_1 = 1$ і $\eta_n = 0$, якщо $n \neq 1$.

3. Розв'язання системи рівнянь (12)

Розв'язки системи (12) шукаємо у вигляді

$$\widetilde{E}_n = \widetilde{E}_n^{(0)} + \sum_{j=1}^{\infty} \widetilde{\alpha}_n^{(j)} |f_1|^{2j}, n = 0,1,2,\dots. \quad (13)$$

Якщо підставити (13) у (12) і зібрати коефіцієнти при однакових степенях амплітуди навантаження, то можна показати, що:

а) для величини $\widetilde{E}_0^{(0)}$ можливі два значення

$$\widetilde{E}_0^{(0)} = 0 \text{ та } \widetilde{E}_0^{(0)} = -\frac{2}{d_0}; \quad (14)$$

б) кожна наступна величина $\widetilde{E}_n^{(0)}$ визначається попередніми за формулою

$$\begin{aligned} \widetilde{E}_n^{(0)} &= \frac{1}{\widetilde{\theta}_n + d_0 \widetilde{E}_0^{(0)}} (\eta_n - \\ &- \frac{d_0}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \widetilde{E}_k^{(0)} \widetilde{E}_{n-k}^{(0)}), n \geq 1 \end{aligned} \quad (15)$$

(тут і нижче знак суми $\sum$ береться до уваги лише в тому разі, коли число над цим знаком не менше числа, що стоїть під ним), так

$$\begin{aligned} \widetilde{E}_1^{(0)} &= \frac{1}{\widetilde{\theta}_1 + d_0 \widetilde{E}_0^{(0)}}, \\ \widetilde{E}_2^{(0)} &= -\frac{d_0 (\widetilde{E}_1^{(0)})^2}{2(\widetilde{\theta}_2 + d_0 \widetilde{E}_0^{(0)})}, \\ \widetilde{E}_3^{(0)} &= -\frac{d_0 \widetilde{E}_1^{(0)} \widetilde{E}_2^{(0)}}{\widetilde{\theta}_3 + d_0 \widetilde{E}_0^{(0)}} \end{aligned} \quad (16)$$

і т.д.

в) коефіцієнти $\widetilde{\alpha}_n^{(j)}$ знаходяться послідовно за формулою

$$\begin{aligned} \widetilde{\alpha}_n^{(j)} &= -\frac{d_0}{\widetilde{\theta}_n + d_0 \widetilde{E}_0^{(0)}} (\sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{\alpha}_k^{(j)} \widetilde{E}_{n-k}^{(0)} + \\ &+ \overline{\widetilde{E}}_j^{(0)} \widetilde{E}_{n+j}^{(0)} + \sum_{i=1}^{j-1} [\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \widetilde{\alpha}_k^{(j-i)} \widetilde{\alpha}_{n-k}^{(i)} + \\ &+ \overline{\widetilde{\alpha}}_i^{(j-i)} \widetilde{E}_{n+i}^{(0)} + \widetilde{\alpha}_{n+1}^{(j-i)} \overline{\widetilde{E}}_i^{(0)}] + \\ &+ \sum_{i=1}^{j-2} \sum_{k=1}^{j-i-1} \overline{\widetilde{\alpha}}_k^{(j-i-k)} \widetilde{\alpha}_{n+k}^{(i)}), \\ & n \geq 0, j \geq 1 \end{aligned} \quad (17)$$

у порядку збільшення j, так

$$\begin{aligned} \widetilde{\alpha}_n^{(1)} &= -\frac{d_0}{\widetilde{\theta}_n + d_0 \widetilde{E}_0^{(0)}} (\sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{\alpha}_k^{(1)} \widetilde{E}_{n-k}^{(0)} + \\ &+ \overline{\widetilde{E}}_1^{(0)} \widetilde{E}_{n+1}^{(0)}), n = 0,1,2,..., \end{aligned}$$

зокрема

$$\begin{aligned} \widetilde{\alpha}_0^{(1)} &= -\frac{d_0 |\widetilde{E}_1^{(0)}|^2}{1 + d_0 \widetilde{E}_0^{(0)}}, \\ \widetilde{\alpha}_1^{(1)} &= -\frac{d_0}{\widetilde{\theta}_1 + d_0 \widetilde{E}_0^{(0)}} (\widetilde{\alpha}_0^{(1)} \widetilde{E}_1^{(0)} + \overline{\widetilde{E}}_1^{(0)} \widetilde{E}_2^{(0)}) \end{aligned} \quad (18)$$

і т.д.

Коефіцієнти $\widetilde{E}_n^{(0)}, \widetilde{\alpha}_n^{(j)}$ з (13) визначаються формулами (15), (17) однозначно. Фактично можна будувати два розв'язки системи (12) залежно від того, якого значення (14) набуває величина $\widetilde{E}_0^{(0)}$.

4. Побудова стаціонарного розв'язку рівняння (1)

Назвемо $\widetilde{E}_n^{(0)}$ нульовим, а

$$\widetilde{E}_n^{(k)} = \widetilde{E}_n^{(0)} + \sum_{j=1}^{k} \widetilde{\alpha}_n^{(j)} |f_1|^{2j}, n = 0,1,2,... \quad (19)$$

k-им наближенням розв'язку системи (12), $k = 0,1,2, \dots$.

Якщо скористатись (19) у виразах для комплексних амплітуд (11), а потім у сумі (2), яку перепишемо у вигляді

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{2} + \mathrm{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{\varepsilon}_n e^{in\vartheta\tau},$$

де Re – дійсна частина, то немає сенсу утримувати в цій сумі доданки, абсолютні величини яких містять як множники $|f_1|^{2k+2}$ і вищі степені амплітуди навантаження.

У результаті з умови $2j + n \leq 2k + 1$ дістанемо

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{2} (\widetilde{E}_0^{(0)} + \sum_{j=1}^{k} \widetilde{\alpha}_0^{(j)} |f_1|^{2j}) + \\ &+ \mathrm{Re} \{ \sum_{n=1}^{2k+1} (\widetilde{E}_n^{(0)} + \\ &+ \sum_{j=1}^{[k - \frac{n-1}{2}]} \widetilde{\alpha}_n^{(j)} |f_1|^{2j}) \widetilde{f}_1^{\,n} e^{in\vartheta\tau} \} \end{aligned} \quad (20)$$

де $[k-\frac{n-1}{2}]$ - ціла частина.

Назвемо (20) k-им наближенням періодичного (стаціонарного) розв'язку рівняння (1). Згідно з (14) таких розв'язків два.

Як приклад, запишемо формулу 1-го наближення для випадку $\widetilde{E}_0^{(0)}=0$.

Згідно з (16), (18)

$$\widetilde{E}_1^{(0)}=\frac{1}{\widetilde{\theta}_1},\widetilde{E}_2^{(0)}=-\frac{d_0}{2\widetilde{\theta}_2\widetilde{\theta}_1^{\,2}},$$

$$\widetilde{E}_3^{(0)}=\frac{d_0^{\,2}}{2\widetilde{\theta}_3\widetilde{\theta}_2\widetilde{\theta}_1^{\,3}}, \tag{21}$$

$$\widetilde{\alpha}_0^{(1)}=-\frac{d_0}{\left|\widetilde{\theta}_1\right|^2},\widetilde{\alpha}_1^{(1)}=\frac{d_0^2}{\widetilde{\theta}_1^{\,2}\left|\widetilde{\theta}_1\right|^2}(1+\frac{1}{2\widetilde{\theta}_2})$$

Якщо в (20) взяти $k=1$ і скористатись виразами (21), дістанемо

$$\varepsilon=-\frac{d_0}{2\left|\widetilde{\theta}_1\right|^2}\left|f_1\right|^2+$$
$$+\mathrm{Re}\{(\frac{1}{\widetilde{\theta}_1}+\frac{d_0^2\left|f_1\right|^2}{\widetilde{\theta}_1^{\,2}\left|\widetilde{\theta}_1\right|^2}(1+\frac{1}{2\widetilde{\theta}_2}))\widetilde{f}_1e^{i\vartheta\tau}-$$
$$-\frac{d_0}{2\widetilde{\theta}_2\widetilde{\theta}_1^{\,2}}\widetilde{f}_1^{\,2}e^{i2\vartheta\tau}+\frac{d_0^{\,2}}{2\widetilde{\theta}_3\widetilde{\theta}_2\widetilde{\theta}_1^{\,3}}\widetilde{f}_1^{\,3}e^{i3\vartheta\tau}\}$$

На закінчення відмітимо, що з кожним наступним наближенням стаціонарного розв'язку рівняння (1) уточнюються комплексні амплітуди гармонік попереднього наближення і з'являються дві нові гармоніки.

5. Висновки

Запропоновано метод знаходження стаціонарних розв'язків рівняння, що описує поведінку осцилятора з лінійною дисипативною і квадратично-нелінійною консервативною характеристиками при моногармонічному навантаженні

Метод ґрунтується на зображеннях комплексних коефіцієнтів Фур'є як функцій складових комплексної амплітуди навантаження. Загальний вигляд цих функцій з'ясовується з використанням умови їхньої інваріантності відносно перетворення зсуву у часі. У результаті кожен комплексний коефіцієнт Фур'є зображується як добуток деякої комплекснозначної функції квадрата амплітуди навантаження на відповідний степінь комплексної амплітуди навантаження. Таке представлення коефіцієнтів Фур'є дає можливість звести нескінченну систему рівнянь гармонічного балансу відносно коефіцієнтів Фур'є до нескінченної системи рівнянь відносно невідомих функцій квадрата амплітуди навантаження. Ця система допускає побудову розв'язків у вигляді рядів за парними степенями амплітуди навантаження.

Формулою першого наближення стаціонарного розв'язку рівняння осцилятора враховуються ті члени комплексного ряду Фур'є, абсолютні величини яких містять як множники степені амплітуди навантаження не вище третього. Тим самим враховуються нульова і перші три гармоніки. З кожним наступним наближенням уточнюються комплексні амплітуди гармонік попереднього наближення шляхом врахування вищих степенів амплітуди навантаження, і з'являються дві нові гармоніки.

Список використаних джерел

1. *Боголюбов Н.Н.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н.Боголюбов, Ю.А.Митропольский. – Москва: Наука, 1974. – 504 с..
2. *Карнаухов В. Г.* Термомеханическое поведение вязкоупругих тел при гармоническом нагружении / В.Г.Карнаухов, И.К.Сенченков, Б.П.Гуменюк – Киев: Наукова думка, 1985. – 288 с

References

1. BOGOLYUBOV N.N. & MITROPOLSKIJ Y.A.(1974) *.Asimptoticheskiye metodyi v teorii nelineynih kolebaniy* – Moskva: Nauka.
2. KARNAUKHOV V. G., SENCHENKOV I. K. & GUMENYUK B.P. (1985) *Termomekhanicheskoye povedeniye vyazkouprugih tel pry garmonicheskom nagrugenii..* Kiev: Naukova Dumka.

Надійшла до редколегії 22.09.15