Український математичний вісник
Том 13 **(2016)**, № 2, 148 – 156

Оценки произведения внутренних радиусов неналегающих областей

Александр К. Бахтин, Ярослав В. Заболотный

(Представлена В.Я. Гутлянским)

Аннотация. В данной работе рассматривается экстремальная проблема В.Н. Дубинина в геометрической теории функций комплексного переменного, связанная с оценкой некоторого функционала, заданного на системе неналегающих областей, и найдено ее частное решение.

2010 MSC. 30C75.

Ключевые слова и фразы. Неналегающие области, внутренний радиус, квадратичный дифференциал.

1. Обозначения и определения

Среди классических направлений геометрической теории функций комплексной переменной видное место занимает решение экстремальных задач на классах неналегающих областей. Первым значительным результатом по данной тематике была теорема Лаврентьева [1], где была поставлена и решена задача о максимуме произведения конформных радиусов двух односвязных неналегающих областей комплексной плоскости. Г. М. Голузин в работе [2] обобщил данную задачу на случай произвольного конечного числа взаимно неналегающих областей и получил ее полное решение для случая трех областей. Н. А. Лебедев в [3] рассматривал еще более общую задачу, а именно поставил вопрос максимуме произведения некоторых, вообще говоря, различных степеней конформных радиусов произвольного конечного числа областей. Задача Н. А. Лебедева не решена в общем виде до сих пор, известны только ее решения для частных случаев.

Удобным средством для описания экстремальных конфигураций областей являются квадратичные дифференциалы (см., например, [4]).

Статья поступила в редакцию 15.05.2016

ISSN 1810 – 3200.

Рассмотренные выше задачи относились к классу задач, полюсы соответствующих квадратичных дифференциалов которых фиксированы. В работе [5] П. М. Тамразов выдвинул идею, что значительный интерес представляют экстремальные задачи, полюсы соответствующих квадратичных дифференциалов которых не фиксированы, а обладают некоторой степенью “свободы”. Такие задачи получили название задач со “свободными” полюсами. Рассматривались также задачи, где часть полюсов фиксирована, а часть - свободна. Такие задачи получили название задач “смешанного” типа. По данной тематике отметим, например, работы [6]– [13].

Задача, которую мы рассматриваем в данной работе, относится к задачам “смешанного” типа, и была сформулирована в работе [7].

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{C}$ — множества натуральных и комплексных чисел соответственно, B — область в $\overline{\mathbb{C}}$, $a \in B$ — точка области B, $r(B, a)$ — внутренний радиус области B в точке a (см., напр. [7]– [8]).

Задача 1. Доказать, что максимум функционала

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}(B_0, a_0) \cdot \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k),$$

где B_0, B_1, B_2,...,B_n, $(n \geq 2)$ — попарно неналегающие области в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, $a_k \in B_k$, $k = \overline{0, n}$, и $0 < \gamma \leq n$, достигается для некоторой конфигурации областей, обладающей n-кратной симметрией.

На данный момент задача 1 также полностью не решена, известно только ее решения для некоторых частных случаев. Так, в работе [8] было получено решение задачи 1 при произвольном натуральном $n \geq 2$, но при условии $\gamma = 1$. Случай $n \geq 2$ и $0 < \gamma < 1$ был изучен в работе [11]. При существенном ограничении на расположение точек a_k, а именно, что максимальный угол с вершинами $(a_k; \widehat{a_0; a}_{k+1})$, $k = \overline{1, n}$, $a_{n+1} = a_1$, не превосходит $\frac{2\pi}{\sqrt{\gamma}}$ и при произвольном $n \geq 5$ задача 1 была решена в работе [13]. В работе [12] задача 1 была впервые решена при произвольном $\gamma > 1$ и без дополнительных ограничений, но начиная с некоторого, заранее неизвестного номера n. Было также получено ряд результатов при $\gamma > 1$ и фиксированных n, например, в работах [14]– [15].

Введем некоторые обозначения. Согласно условию задачи 1, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$. Допустим, не уменьшая общности, что

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < ... < \arg a_n < 2\pi.$$

Далее, определим числа α_k, $k = \overline{1, n}$ следующим образом:

$$\alpha_1 := \frac{1}{\pi}\cdot(\arg a_2 - \arg a_1), \alpha_2 := \frac{1}{\pi}\cdot(\arg a_3 - \arg a_2)...$$
$$\alpha_n := \frac{1}{\pi}\cdot(2\pi - \arg a_n).$$

Пусть $\alpha_0 = \max\limits_k \alpha_k$. Таким образом, в работе [13] задача 1 была решена при любом натуральном $n \geq 5$, $0 < \gamma \leq n$ и при условии $0 < \alpha_0 \leq \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$.

2. Результаты и доказательства

В данной работе получен следующий результат:

Теорема 2.1. *Пусть B_0, B_1, B_2,...,B_n, $(n \geq 2)$ — попарно неналегающие области в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$, $a_1 = 1$, $a_k \in B_k$, $k = \overline{0,n}$, причем $r(B_0, a_0) \leq 1$. Тогда для любого натурального n, $n \geq 76$ и произвольного вещественного γ такого, что $1 < \gamma \leq n$ справедливо неравенство*

$$r^{\gamma}(B_0, a_0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq r^{\gamma}\left(D_0, 0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(D_k, d_k\right), \tag{2.1}$$

где d_k, D_k — соответственно полюса и круговые области квадратичного дифференциала

$$G(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}dw^2.$$

Доказательство. Заметим, что, учитывая результат работы [13], нам достаточно показать справедливость теоремы при условии $\alpha_0 > \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$.

Введем следующие обозначения. Так, пусть

$$I_n^0(\gamma) = r^{\gamma}\left(D_0, 0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(D_k, d_k\right). \tag{2.2}$$

Обозначим также

$$Q_n(\gamma) = \frac{\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}}{\frac{1}{n^n}\cdot\frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}}\cdot\left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}}. \tag{2.3}$$

Докажем сначала следующую лемму.

Лемма 2.1. *Пусть $n \geq 6$ — фиксированное натуральное число, $p \geq 1$, $\gamma > 1$ — некоторые вещественные числа, причем $\gamma \leq n$. Тогда для произвольной конфигурации неналегающих областей B_k и точек a_k $(k = \overline{0,n})$, таких, что $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$, $a_1 = 1$, $a_k \in B_k$, $k = \overline{0,n}$, для которой выполняются условия $r(B_0, a_0) \leq p$ и $\alpha_0 \geq \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$, справедливо неравенство:*

$$\frac{r^{\gamma}(B_0, a_0) \prod\limits_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)}{I_n^0(\gamma)} \leq p^{\gamma} Q_n(\gamma), \tag{2.4}$$

где $I_n^0(\gamma)$, $Q_n(\gamma)$ — см. соответственно (2.2), (2.3).

Если, к тому же, для некоторого γ_1 выполняется неравенство $p^{\gamma_1} Q_n(\gamma_1) \leq 1$, то для любого γ_2 такого, что $1 < \gamma_2 < \gamma_1$ будет выполняться неравенство $\frac{I_n(\gamma_2)}{I_n^0(\gamma_2)} < 1$.

Доказательство леммы 2.1. Сначала докажем неравенство (2.4). Как и в теореме 5.2.3 [12], получим равенство:

$$I_n^0(\gamma) = \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n + \frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}. \tag{2.5}$$

Заметим, что значение функционала $I_n^0(\gamma)$ в явном виде было также получено в работе [13].

Используем неравенство, полученное при доказательстве теоремы 3 работы [8].

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq 2^n \prod_{k=1}^{n} \alpha_k.$$

Согласно доказательству теоремы 5.2.3 [12], при условиях $\alpha_0\sqrt{\gamma} > 2$ и $r(B_0, a_0) \leq p$, получим следующее неравенство:

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant p^{\gamma} \cdot 2^n \alpha_0 \left(\frac{2 - \alpha_0}{n - 1}\right)^{n-1}$$
$$= p^{\gamma} \cdot 2^n \alpha_0 (2 - \alpha_0)^{n-1} (n-1)^{-(n-1)}.$$

С учетом последнего неравенства и равенства (2.5), получим следующую цепочку неравенств:

$$\frac{r^{\gamma}(B_0,a_0)\prod\limits_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)}{I_n^0(\gamma)}$$

$$\leqslant \frac{p^{\gamma}\cdot 2^n\cdot\alpha_0(2-\alpha_0)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}}{I_n^0(\gamma)}$$

$$\leqslant \frac{p^{\gamma}\cdot 2^n\cdot\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\left(2-\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}}{\left(\frac{4}{n}\right)^n\cdot\frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}}\cdot\left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}} = p^{\gamma}Q_n(\gamma).$$

Таким образом, неравенство (2.4) доказано.

Нетрудно заметить, что

$$\left[\ln\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}\right)\right]'_{\gamma} = \frac{n-\sqrt{\gamma}}{2\gamma(\sqrt{\gamma}-1)} > 0. \qquad (2.6)$$

Таким образом, числитель выражения $Q_n(\gamma)$ возрастает по γ при любом n.

Чтобы доказать, что знаменатель данного выражения убывает, достаточно показать убывание $I_n^0(\gamma)$.

$$\left(\ln I_n^0(\gamma)\right)' = \left(\frac{1}{n}\ln\left(\frac{4\gamma}{n^2-\gamma}\right)+\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\ln\left(\frac{n-\sqrt{\gamma}}{n+\sqrt{\gamma}}\right)\right).$$

Из вида производной выражения $\ln I_n^0(\gamma)$ следует, что функция $I_n^0(\gamma)$ убывает при фиксированном $n \geq 6$. Таким образом, на промежутке $\gamma \in (1;n]$ выполняется неравенство

$$I_n^0(\gamma_2) \leq I_n^0(\gamma_1).$$

Учитывая последнее неравенство и неравенство (2.6) получим, что функция $Q_n(\gamma)$ монотонно возрастает по γ на промежутке $(1;\gamma_1]$, а значит

$$\frac{I_n(\gamma_2)}{I_n^0(\gamma_2)} \leq p^{\gamma_2}Q_n(\gamma_2) < p^{\gamma_1}Q_n(\gamma_1) \leq 1.$$

Лемма доказана. □

Приступим теперь к доказательству теоремы 2.1. Рассмотрим для начала случай $\gamma = n$. Тогда, согласно лемме 2.1,

$$\frac{I_n(n)}{I_n^0(n)} \leq Q_n(n) = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}}{\frac{1}{n^n}\cdot\frac{\frac{4}{n}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}}\cdot\left(\frac{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)^{2\sqrt{n}}}$$

$$= \frac{1}{4}n^{\frac{3}{2}}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\left(\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}\right)^{\frac{n-1}{\sqrt{n}}}\left(\frac{\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}}{\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}}\right)^2.$$

Исследуем последнее выражение при $n \geq 76$. Последовательность $\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}$ возрастает к e, поэтому $\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2\sqrt{n}} < e^2$, а последовательность $\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2\sqrt{n}}$ возрастает к e^{-2}, следовательно

$$\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-2\sqrt{n}} \leq \left(1-\frac{1}{\sqrt{76}}\right)^{-2\sqrt{76}} < 8.3677.$$

Тогда $\frac{\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2\sqrt{n}}}{\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2\sqrt{n}}} < 8.3677e^2$.

Таким образом,

$$Q_n(n) < \frac{1}{4}\cdot e^2\cdot 8.3677\cdot n^{\frac{3}{2}}\left(\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}\right)^{\frac{n-1}{\sqrt{n}}}$$

$$< 15.4677n^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{n-1}{\sqrt{n}}} < 15.4677n^{\frac{3}{2}}e^{-\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}}.$$

Учитывая, что при $n \geq 76$ выполняется неравенство $e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} < 1.1215$, окончательно получаем оценку

$$Q_n(n) < 17.5131n^{\frac{3}{2}}e^{-\sqrt{n}}.$$

Исследуем выражение $q(x) = x^{\frac{3}{2}}e^{-\sqrt{x}}$ при $x \in [76, +\infty)$.

$$(q(x))' = \sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{x}}{2}\right) < 0.$$

Выражение $q(n) = n^{\frac{3}{2}}e^{-\sqrt{n}}$ убывает при возрастании n. Так как при $n = 94$ справедливо неравенство $17.5131\cdot q(94) < 0.9827 < 1$, то при $n \geq 94$ имеем $Q_n(n) \leq Q_{94}(94) < 1$. Непосредственным вычислением выражения $Q_n(n)$ при $76 \leq n < 94$ получим, что

$Q_{76}(76) < 0.9639$; $Q_{85}(85) < 0.6879$;
$Q_{77}(77) < 0.9280$; $Q_{86}(86) < 0.6630$;
$Q_{78}(78) < 0.8935$; $Q_{87}(87) < 0.6390$;
$Q_{79}(79) < 0.8605$; $Q_{88}(88) < 0.6160$;
$Q_{80}(80) < 0.8287$; $Q_{89}(89) < 0.5939$;
$Q_{81}(81) < 0.7982$; $Q_{90}(90) < 0.5727$;
$Q_{82}(82) < 0.7689$; $Q_{91}(91) < 0.5522$;
$Q_{83}(83) < 0.7408$; $Q_{92}(92) < 0.5326$;
$Q_{84}(84) < 0.7138$; $Q_{93}(93) < 0.5137$.

Таким образом, при $n \geq 76$ выполняется неравенство $Q_n(n) < 1$. Из леммы 2.1 следует, что при данных n и при условии $r(B_0, a_0) \leq 1$ справедливо неравенство

$$\frac{r^n(B_0, a_0) \prod\limits_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)}{I_n^0(n)} < 1.$$

Тогда

$$r^n(B_0, a_0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) < I_n^0(n).$$

К тому же, по лемме 2.1, при $n \geq 76$ и при условии $r(B_0, a_0) \leq 1$ для любого γ такого, что $1 < \gamma \leq n$ будет выполняться неравенство (2.1).

Теорема 2.1 доказана. □

Из теоремы 2.1 получаем следующие результаты.

Справедливо следующее следствие.

Следствие 2.1. *Пусть B_0, B_1, B_2,...,B_n, — попарно неналегающие области в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $a_1 = 1$, $k = \overline{1, n}$, причем $B_0 \subset U$, где U — единичный круг. Тогда для любого натурального n, $n \geq 76$ и произвольного вещественного γ такого, что $1 < \gamma \leq n$ справедливо неравенство* (2.1).

Для доказательства данного следствия достаточно заметить, что из условия $B_0 \subset U$ следует, что $r(B_0, a_0) \leq 1$.

Имеет место и несколько более сильный результат.

Теорема 2.2. *Пусть B_0, B_1, B_2,...,B_n, $(n \geq 2)$ — попарно неналегающие области в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $a_1 = 1$, $k = \overline{1, n}$, $a_k \in B_k$,*

$k = \overline{0, n}$. *Тогда для любого натурального* n, $n \geq 76$ *существует такое положительное число* $\varepsilon(n)$, *что для произвольного вещественного* γ *такого, что* $1 < \gamma \leq n$ *справедливо неравенство* (2.1) *при условии* $r(B_0, a_0) \leq 1 + \varepsilon(n)$.

Доказательство. Для любого натурального n, $n \geq 76$ рассмотрим число $p(n) = \frac{1}{(Q_n(n))^{\frac{1}{n}}}$. За теоремой 2.1 $Q_n(n) < 1$, а значит $p(n) > 1$. Тогда при $\gamma = n$ и при условии $r(B_0, a_0) \leq p(n)$ в силу леммы 2.1 выполняется неравенство:

$$\frac{r^{\gamma}(B_0, a_0) \prod\limits_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)}{I_n^0(\gamma)} \leq p^n Q_n(n) \leq \left(\frac{1}{(Q_n(n))^{\frac{1}{n}}} \right)^n Q_n(n) = 1.$$

Таким образом, при $n \geq 76$ и $p(n) = \frac{1}{(Q_n(n))^{\frac{1}{n}}}$ по лемме 2.1 при любом $\gamma_2(n)$ таком, что $1 < \gamma_2(n) < n$ будет выполняться неравенство

$$\frac{I_n(\gamma_2(n))}{I_n^0(\gamma_2(n))} < 1.$$

Тогда в качестве $\varepsilon(n)$ можно взять любое $0 < \varepsilon < p(n) - 1$.

Теорема доказана. □

Заметим, что выражение $p(n)$ возрастает при $76 \leq n \leq 361$ и убывает при $n > 361$, причем $\lim\limits_{n \to \infty} (p(n) - 1) = 0$. Отсюда можно получить следующие оценки для $\varepsilon(n)$, в частности, при $104 \leq n \leq 6662$ в качестве $\varepsilon(n)$ можно взять число 0.01, при $192 \leq n \leq 865$ — число 0.02, при $n = 361$ — число 0.02246191.

Литература

[1] М. А. Лаврентьев, *К теории конформных отображений* // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР, **5** (1934), 159–245.

[2] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, М., Наука, 1966, 628 с.

[3] Н. А. Лебедев, *Принцип площадей в теории однолистных функций*, М., Наука, 1975, 336 с.

[4] Дж. А. Дженкинс, *Однолистные функции и конформные отображения*, М., Издательство иностр. лит., 1962, 256 с.

[5] П. М. Тамразов, *Экстремальные конформные отображения и по- люсы квадратичных дифференциалов* // Изв. АН СССР. Серия мат., **32** (1968), № 5, 1033–1043.

[6] Г. П. Бахтина, *Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях* : Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук, К., 1975, 11 с.

[7] В. Н. Дубинин, *Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного* // Успехи мат. наук, **49** (1994), № 1 (295), 3–76.

[8] В. Н. Дубинин, *Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении* // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР, **168** (1988), 48–66.

[9] V. N. Dubinin, *Condenser capacities and symmetrization in geometric function theory*, Birkhäuser/Springer, Basel, 2014, 344 p.

[10] Г. В. Кузьмина, *Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы* // Зап. науч. сем. ПОМИ, **276** (2001), 253–257.

[11] Г. В. Кузьмина, *Метод экстремальной метрики в задачах о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей при наличии свободных параметров* // Зап. науч. сем. ПОМИ, **302** (2003), 52–67.

[12] А. К. Бахтин, Г. П. Бахтина, Ю. Б. Зелинский, *Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе* // Праці ін-ту мат-ки НАН України, 2008, 308 с.

[13] Л. В. Ковалев, *К задаче об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности* // Дальневосточный матем. сборник, **2** (1996), 96–98.

[14] Я. В. Заболотний, *Застосування розділяючого перетворення в одній задачі про неперетинні області* // Доповіді НАН України, **9** (2011), 13–17.

[15] Я. В. Заболотний, *Задача про обчислення максимуму добутку внутрішніх радіусів неперетинних областей на комплексній площині* // Комплексний аналіз, теорія потенціалу і застосування. Збірник праць Ін-ту математики НАН України, К., Ін-т математики НАН України, **10** (2013), № 4-5, 557–564.

Сведения об авторах

Александр Константинович Бахтин,

Ярослав Владимирович Заболотный

Институт математики НАН Украины,
Киев, Украина
E-Mail: alexander.bahtin@yandex.ru,
yaroslavzabolotnii@mail.ru