Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2017, том 12, № 3, 1–10

УДК 517.53

А. Й. Щехорський[1]***, О. Ф. Герус***[2]

[1,2] *(Житомирський державний університет ім. І. Франка, Житомир)*

[1] **shai.anatolij@yandex.ru**
[2] **ogerus@zu.edu.ua**

Контурно-тілесні властивості голоморфних функцій в опуклих областях багатовимірного комплексного простору

Присвячена 70-чу Професора Юрія Борисовича Зелінського

Для опуклих областей багатовимірного комплексного простору розв'язується питання про співвідношення між контурним та тілесним модулями неперервності голоморфних функцій.

We solve the problem on relation between the contour and solid modules of continuity of holomorphic functions defined in convex domains of multivariate complex space.

У даній роботі розв'язується питання про співвідношення між контурним та тілесним модулями неперервності голоморфних функцій, визначених в опуклих областях багатовимірного комплексного простору $\mathbb{C}^n$, що є багатовимірним аналогом відомого контурно-тілесного результату для голоморфних функцій комплексної змінної.

Нехай G — обмежена область в $\mathbb{C}^n$, $\overline{G}$ — її замикання в $\mathbb{C}^n$, ∂G — її межа, ΔG — її межа Шилова, $H(G)$ — алгебра всіх голоморфних і обмежених в G функцій, $A(G)$ — алгебра всіх голоморфних в G і неперервних на $\overline{G}$ функцій, $\mu(\delta)$ — нормальна мажоранта $[1, 2]$.

Для комплексної функції f, заданої і неперервної на $\overline{G}$, визначені відповідно контурний і тілесний модулі неперервності $\omega(\Delta G, f, \delta)$, $\omega(\overline{G}, f, \delta)$, а для довільної фіксованої точки $z^0 \in \partial G$ — локальні відповідно контурний і тілесний модулі неперервності $\omega(\Delta G, f, z^0, \delta)$, $\omega(\overline{G}, f, z^0, \delta)$.

У роботі [3] поставлена наступна проблема. Нехай G — обмежена область в $\mathbb{C}^n$, μ — функція типу модуля неперервності. Знайти замкнені підмножини S множини $\overline{G}$, для яких існує стала $C > 0$, залежна лише від G і S, така, що для довільної функції $f \in A(G)$ співвідношення $\omega(S, f, \delta) \leqslant \mu(\delta)$, $\delta > 0$, тягне за собою нерівність $\omega(\overline{G}, f, \delta) \leqslant C\mu(\delta)$, $\delta > 0$. Там же ця проблема була розв'язана у випадку, коли G — область Вейля, а $S = \Delta G$ — її межа Шилова, та наведені приклади областей G і голоморфних в них функцій, для яких модуль неперервності на межі Шилова ΔG є нескінченно малою вищого порядку, ніж модуль неперервності на $\overline{G}$.

В даній роботі ця проблема розв'язана для опуклих областей в $\mathbb{C}^n$, для яких доповнення $\partial G \setminus \Delta G$ задовольняє певну умову конусності.

Слідуючи [4, 5], межову точку опуклої області $G \subset \mathbb{C}^n$ називатимемо комплексною, якщо вона є точкою плоскої області, яка міститься на якійсь комплексній прямій і є підмножиною межі області G.

Теорема 1. ([4]) *Межова точка обмеженої опуклої області $G \subset \mathbb{C}^n$ не належить її межі Шилова тоді і тільки тоді, коли існує окіл $U \subset \partial G$ цієї точки, який складається лише з комплексних точок.*

Межа Шилова обмеженої опуклої області $G \subset \mathbb{C}^2$ допускає просте геометричне тлумачення: її доповнення $\partial G \setminus \Delta G$ складається з точок, в околі яких межа ∂G розшаровується на комплексні прямі, паралельні між собою. Нехай $\boldsymbol{a}$ — комплексний вектор, в напрямі якого відбувається вказане розшарування, z — комплексна точка на ∂G. Через $\mathbb{C}_{\boldsymbol{a},z}$ позначимо комплексну пряму з напрямним вектором $\boldsymbol{a}$, яка проходить через точку z. Оскільки G — опукла область, то множина $G_{\boldsymbol{a},z} := \partial G \cap \mathbb{C}_{\boldsymbol{a},z}$ — опукла область на прямій $\mathbb{C}_{\boldsymbol{a},z}$.

Для $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ поряд з евклідовою нормою $\|z\|$ розглядатимемо норму $|||z||| := \max\limits_{1\leqslant q\leqslant n} |z_q|$.

Нехай $\vartheta_{z^0,z}$ — вектор в $\mathbb{C}^n$, колінеарний комплексній прямій, що проходить через точки z_0 та z. Через $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ позначатимемо скалярний добуток векторів ϑ_1, ϑ_2 в $\mathbb{C}^n$.

Для довільної дійсної функції $r(\zeta)$, визначеної в обмеженій області

$G \subset \mathbb{C}^n$, введемо на ∂G функцію [1,2]

$$B\left[z, r(\zeta)\right] := \varlimsup_{G \ni \zeta \to z} r(\zeta), \quad z \in \partial G.$$

Теорема 2. *Нехай G — обмежена опукла область в $\mathbb{C}^n$, $f \in H(G)$, z^0 — довільна фіксована точка на ΔG, $\mu(\delta)$ — нормальна мажоранта. Нехай при деякому $\beta \in (0,1)$ для точки $z \in \partial G \setminus \Delta G$ і комплексного вектора $\boldsymbol{a} \in \mathbb{C}^n$ виконуються умови $G_{\boldsymbol{a},z} \neq \varnothing$, $z^0 \notin \overline{G}_{\boldsymbol{a},z}$, $\partial G_{\boldsymbol{a},z} \subset \Delta G$,*

$$\left| Re\left(\vartheta_{z^0,p}, \vartheta_{z^0,w}\right)\right| \leqslant \beta, \quad \{p; w\} \subset \partial G_{\boldsymbol{a},z}. \tag{1}$$

Тоді: а) якщо

$$B\left[z, |f(\zeta)|\right] \leqslant \mu\left(\|z - z^0\|\right), \quad z \in \Delta G \setminus \{z^0\}, \tag{2}$$

то

$$|f(\zeta)| \leqslant C\mu\left(\|\zeta - z^0\|\right), \quad \zeta \in G,$$

де $C > 0$ залежить лише від мажоранти μ, β та розмірності простору n;
б) якщо $\alpha(\delta)$ — неспадна мажоранта, $|f(\zeta)| \leqslant 1$ $(\zeta \in G)$ і

$$B\left[z, |f(\zeta)|\right] \leqslant \mu\left(\|z - z^0\|\right) \alpha\left(\|z - z^0\|\right), \quad z \in \Delta G \setminus \{z^0\},$$

то

$$|f(\zeta)| \leqslant C'\mu\left(\|\zeta - z^0\|\right) A_{\alpha,\mu}\left(\|\zeta - z^0\|\right), \quad \zeta \in G,$$

де $C' > 0$ залежить лише від β, розмірності простору n та мажорант α, μ, а $A_{\alpha,\mu}$ — опукла нормальна мажоранта, побудована по α та μ в [2].

Доведення проведемо спочатку в $\mathbb{C}^2$ для функцій $f \in A(G)$. У цьому випадку $B\left[z, |f(\zeta)|\right] = |f(z)|$, $z \in \partial G$ і нерівність 2 набуває вигляду

$$|f(z)| \leqslant \mu\left(\|z - z^0\|\right), \quad z \in \Delta G \setminus \{z^0\}. \tag{3}$$

Оцінку (3) розповсюдимо на множину $\partial G \setminus \Delta G$ з підходящою сталою. Потім з оцінки (3) на всій межі ∂G за результатами роботи [6] випливатиме оцінка (2).

Для довільної точки $w \in \partial G \setminus \Delta G$ існує комплексний напрям $\boldsymbol{a} \in \mathbb{C}^2$, такий, що $G_{\boldsymbol{a},w} = \partial G \cap \mathbb{C}_{\boldsymbol{a},w}$ — область в $\mathbb{C}_{\boldsymbol{a},w}$, причому (див. [4]) $\partial G_{\boldsymbol{a},w} \subset \Delta G$. Тому з нерівності (3) випливає оцінка

$$|f(z)| \leqslant \mu\left(\|z - z^0\|\right), \quad z \in \partial G_{\boldsymbol{a},w} \setminus \{z^0\}.$$

Множина $G_{\boldsymbol{a},w}$ — аналітичний диск в $\mathbb{C}^2$ виду $\lambda \xrightarrow{L} (L_1(\lambda), L_2(\lambda)) \in G_{\boldsymbol{a},w}$, $\lambda \in D$, де D — опукла область в $\mathbb{C}$, L_1 і L_2 — комплексні лінійні перетворення в $\mathbb{C}$. На цьому аналітичному диску функція $f \in A(G)$ — аналітична. Аналітичність функції f в довільній точці $W_0 \in G_{\boldsymbol{a},w}$, що відповідає параметру λ_0, доводиться наступним чином. Оскільки G — опукла область, то існують послідовності z_n^1 і z_n^2, число $r > 0$, такі, що $z_n^1 \to 0$, $z_n^2 \to 0$ при $n \to \infty$ і $\forall n\ \forall \lambda : |\lambda - \lambda_0| < r$, $\left(L_1(\lambda) + z_n^1, L_2(\lambda) + z_n^2\right) \in G$. Функція $f \in A(G)$ на $G_{\boldsymbol{a},w}$ отримується як границя аналітичної функції

$$F(\lambda) := f_1\left(L_1(\lambda), L_2(\lambda)\right) = \lim_{n\to\infty} f\left(L_1(\lambda) + z_n^1, L_2(\lambda) + z_n^2\right).$$

За теоремою Вейєрштраса функція $F(\lambda)$ — аналітична в крузі $|\lambda - \lambda_0| < r$. Оскільки f — однозначна на G, то f — аналітична в $G_{\boldsymbol{a},w}$.

Коли $z^0 \in \partial G_{\boldsymbol{a},w}$, то завдяки умові (1) можна за допомогою ортогонального перетворення з центром в точці z^0 простору $\mathbb{C}^2$ помістити всі диски $G_{\boldsymbol{a},w}$ в деякий конус $|z_1 - z_1^0| \leqslant K|z_2 - z_2^0|$, $K > 0$ і застосувати результати роботи [7]. В результаті отримаємо оцінку з деякою сталою $C' > 0$, залежною лише від μ та β. Оскільки G — опукла область, то з ([6]) випливає, що $|f(\zeta)| \leqslant C'\psi(54)\mu\left(\|\zeta - z_1^0\|\right)$, $\zeta \in G$.

Перейдемо до доведення теореми 2 для опуклих областей довільної розмірності. Розповсюдимо оцінку (3) на множину $\partial G \setminus \Delta G$.

Коли $n > 2$, то не можна стверджувати, що для довільної комплексної точки $z \in \partial G$ і деякого вектора $\boldsymbol{a} \in \mathbb{C}^n$ справедливо $\partial G_{\boldsymbol{a},z} \subset \Delta G$.

Нехай W — довільна комплексна точка множини $\partial G \setminus \Delta G$. Тоді існує комплексна гіперплощина π^k, опорна до ∂G в точці W, максимальної розмірності k, така, що $\pi^k \cap \partial G$ — область в $\mathbb{C}^k$.

Доведемо, що $\partial\left(\pi^1 \cap \partial G\right) \subset \Delta G$. Нехай $\partial\left(\pi^1 \not\subset \partial G\right) \subset \Delta G$, тоді на множині $\partial\left(\pi^1 \cap \partial G\right)$ існує комплексна точка z (кожна точка ∂G (див. [4]) — дійсна або комплексна, а всі дійсні точки належать ΔG). Вона знаходиться в якійсь області комплексної прямої $\mathbb{C}_{\boldsymbol{a},z} \neq \pi^1$. Довівши, що прямі $\mathbb{C}_{\boldsymbol{a},z}$ і π^1 належать деякій комплексній гіперплощині π^m, $m > 1$, опорній до G в точці W, причому $\pi^m \cap \partial G$ — область в $\mathbb{C}^m$, отримаємо протиріччя з тим, що π^1 — опорна гіперплощина максимальної розмірності.

Нехай $\mathbb{C}_{\boldsymbol{a},z}$ і π^1 не містяться в жодній опорній комплексній площині. Тоді вони не містяться одночасно в жодній опорній дійсній гіперплощині (в протилежному випадку комплексна лінійна оболонка прямих

$\mathbb{C}_{\boldsymbol{a},z}$ і π^1 містилася б в опорній дійсній гіперплощині, тобто площина π^1 не мала б максимальної розмірності).

Через π^1 проведемо дійсну опорну гіперплощину Λ в G. Оскільки точка z міститься в $\mathbb{C}_{\boldsymbol{a},z}$ і $\mathbb{C}_{\boldsymbol{a},z} \not\subset \Lambda$, $z \in \Lambda$, то в $\mathbb{C}_{\boldsymbol{a},z}$ знайдуться дві точки, які лежать по різні боки гіперплощини λ, а це протирічить тому, що λ — дійсна опорна гіперплощина до G.

Таким чином, прямі $\mathbb{C}_{\boldsymbol{a},z}$ і π^1 належать якійсь комплексній опорній гіперплощині π^m (в комплексній оболонці $\mathbb{C}_{\boldsymbol{a},z}$ і π^1). Комплексна лінійна оболонка двох опуклих множин $\partial G \cap \pi^1$ і $\mathbb{C}_{\boldsymbol{a},z}$ належить, з одного боку, замиканню $\overline{G}$ опуклої області G, а з другого боку — гіперплощині π^m. Отже, $\pi^m \cap \partial G$ — область в $\mathbb{C}^m$.

Нарешті, оскільки $\partial\left(\pi^1 \cap \partial G\right) \subset \Delta G$, то оцінку (3) у випадку $k=1$ можна розповсюдити на множину $\pi^1 \cap \overline{G}$ з деякою константою аналогічно тому, як це робилось в $\mathbb{C}^2$.

У випадку $k=2$ доведення того, що $f \in \Lambda\left(\pi^2 \cap \partial G\right)$, здійснюється наступним чином. Нехай $\mathbb{C}^2 = \pi^2$ і W — довільна точка опуклої області $\pi^2 \cap \partial G$ в $\mathbb{C}^2$. Голоморфність функції f в точці W по змінних z_1, z_2 доводиться аналогічно тому, як це зроблено вище. За теоремою Гартогса [8] вона голоморфна по сукупності змінних в області $\pi^2 \cap \partial G$.

Доведемо, що $\Delta\left(\pi^2 \cap \partial G\right) \subset \Delta G$. Для цього досить довести, що кожна дійсна точка відносно $\partial^2 G = \partial\left(\pi^2 \cap \partial G\right)$ — дійсна і відносно ∂G. Коли z — деяка точка, дійсна відносно $\partial^2 G$ і комплексна відносно ∂G, то існує комплексна пряма $\mathbb{C}_{\boldsymbol{a},z} \not\subset \pi^2$, така, що z — внутрішня для $\mathbb{C}_{\boldsymbol{a},z}$. Аналогічно, як і у випадку $k=1$, доводиться, що існує комплексна опорна гіперплощина π^m в точці z $(m>k)$, така, що $\pi^m \cap \partial G$ — область в $\mathbb{C}^m$. Отримано протиріччя з тим, що гіперплощина π^2 — максимальної розмірності.

Оскільки $\Delta\left(\pi^2 \cap \partial G\right) \subset \Delta G$, то із (1) випливає, що для довільного комплексного вектора $\boldsymbol{a} \in \mathbb{C}^2$ і довільного $z \in \Delta\left(\pi^2 \cap \partial G\right)$, таких, що $\mathbb{C}_{\boldsymbol{a},z} \neq \varnothing$, $z^0 \notin \overline{G}_{\boldsymbol{a},z}$, $\partial\mathbb{C}_{\boldsymbol{a},z} \subset \Delta\partial^2 G$,

$$\left|Re\left(V_{z^0,p}, V_{z^0,w}\right)\right| \leqslant \beta, \quad \{p; w\} \subset \partial\mathbb{C}_{\boldsymbol{a},z}.$$

Теорема 2 в $\mathbb{C}^2$ вже доведена. Тому існує $C' > 0$, таке, що

$$|f(z)| \leqslant C'\psi(54)\mu\left(\|z-z^0\|\right), \quad z \in \pi^2 \cap \partial G, \tag{4}$$

звідки

$$|f(z)| \leqslant C'\psi(54)\mu\left(\|z-z^0\|\right), \quad z \in \partial G.$$

Оскільки G — опукла область, то з (3) випливає оцінка

$$|f(\zeta)| \leqslant C'\psi(54)\mu\left(\|\zeta - z^0\|\right), \quad \zeta \in G. \tag{5}$$

За індукцією оцінка виду (4) справедлива для довільного $k \in [1; n-1]$, тобто

$$|f(z)| \leqslant C'\psi^{k-1}(54)\mu\left(\|z - z^0\|\right), \quad z \in G.$$

Твердження а) теореми 2 доведене. Твердження б) виводиться з твердження а) аналогічно тому, як в [1, с. 72] із твердження а) теореми 2.1.1 виводилось її твердження б). Зауважимо, що в загальному випадку, коли $f \in H(G)$ доведення не зазнає істотних змін.

Із теореми 2 випливає аналогічне твердження для локальних модулів неперервності.

Теорема 3. *Нехай G — обмежена опукла область в $\mathbb{C}^n$, $f \in A(G)$, z^0 — довільна фіксована точка на ΔG, $\mu(\delta)$ — нормальна мажоранта і при деякому $\beta \in (0;1)$ комплексний вектор $\boldsymbol{a} \in \mathbb{C}^n$ і точка $z \in \partial G \backslash \Delta G$ задовольняють умови $G_{\boldsymbol{a},z} \neq \varnothing$, $z^0 \notin G_{\boldsymbol{a},z}$, $\partial G_{\boldsymbol{a},z} \subset \Delta G$,*

$$\left|Re\left(V_{z^0,p}, V_{z^0,w}\right)\right| \leqslant \beta, \quad \{p; w\} \subset \partial G_{\boldsymbol{a},z}. \tag{6}$$

Тоді: а) якщо $\omega(\Delta G, f, z^0, \delta) \leqslant \mu(\delta)$, $\delta > 0$, то $\omega(\overline{G}, f, z^0, \delta) \leqslant C\mu(\delta)$, $\delta > 0$, де $C > 0$ залежить лише від мажорант μ, β та розмірності простору n;
б) якщо $\alpha(\delta)$ — неспадна мажоранта, $|f(\zeta)| \leqslant 1$ в G і $\omega(\Delta G, f, z^0, \delta) \leqslant \mu(\delta)\alpha(\delta)$, $\delta > 0$, то $\omega(\overline{G}, f, z^0, \delta) \leqslant C'\mu(\delta)A_{\alpha,\mu}(\delta)$, $\delta > 0$, де $C' > 0$ залежить лише від мажорант μ, α, β та розмірності простору n.

Від умови (6) в теоремі 3 відмовитись не можна. Це переконливо доводить приклад, наведений в роботі [3]. Нехай B — одинична куля в $\mathbb{C}^2$, $\Omega = \left\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |Imz_1| < |1 + Rez_1|\right\}$. Покладемо $G = B \cap \Omega$, $z^0 = (-1; 0)$. Очевидно, G — опукла область в $\mathbb{C}^2$. В [3] показано, що для функції $f(z_1, z_2) = (1 + z_1)^\alpha$, $\alpha \in (0; 1)$, вибрана та вітка, яка додатна при додатному $1+z_1$ і для якої $\omega(\overline{G}, f, z^0, \delta) \leqslant C\delta^\alpha$, $\delta > 0$, а вздовж межі Шилова $\partial B \cap \overline{\Omega}$ модуль неперервності "вдвічі кращий", тобто $\omega(\Delta G, f, z^0, \delta) \leqslant C'\delta^{2\alpha}$. Тут множина $\partial G \setminus \Delta G$ розшаровується на паралельні плоскі диски $z_2 \to (z_1, z_2)$, $|z_2| < \sqrt{1 - |z_1|^2}$ $\left(z_1 \in \overline{\Omega}, |z_1| < 1\right)$ з межами в ΔG. Проте ці диски не містяться в жодному конусі. Наприклад, диски з центром $(-1+\delta, 0)$ (δ — мале) знаходяться на віддалі δ від точки z^0 і мають радіус порядку $\sqrt{\delta}$.

Для білогарифмічно опуклих мажорант $\mu(\delta)$ теореми 2 і 3 справедливі в метриці $|||\bullet|||$ з константою $C = 1$.

Теорема 4. *Нехай G — обмежена опукла область в $\mathbb{C}^n$, $f \in H(G)$, z^0 — довільна фіксована точка на ΔG, $\mu(\delta)$ — білогарифмічно опукла мажоранта, для довільних $z \in \partial G \setminus \Delta G$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{C}^n$, таких, що $G_{\boldsymbol{a},z} \neq \varnothing$, $z^0 \notin \overline{G}_{\boldsymbol{a},z}$, $\partial G_{\boldsymbol{a},z} \subset \Delta G$, справедливе співвідношення*

$$0 < Re\left(V_{z^0,p}, V_{z^0,w}\right), \quad \{p; w\} \subset \partial G_{\boldsymbol{a},z}.$$

Тоді якщо

$$B\left[z, |f(\zeta)|\right] \leqslant \mu\left(|||z - z^0|||\right), \quad z \in \Delta G \setminus \{z^0\}, \tag{7}$$

то $|f(\zeta)| \leqslant \mu\left(|||\zeta - z^0|||\right)$, $\zeta \in G$.

Доведення проведемо в $\mathbb{C}^2$ для функцій $f \in A(G)$. Нехай W — довільна точка множини $\partial G \setminus \Delta G$, $\boldsymbol{a}$ — комплексний вектор в $\mathbb{C}^2$, такі, що $G_{\boldsymbol{a},w} = \varnothing$, $z^0 \notin \overline{G}_{\boldsymbol{a},w}$, $\partial G_{\boldsymbol{a},w} \subset \Delta G$. Розповсюдимо оцінку (7) на множину $\partial G \setminus \Delta G$, тобто доведемо її в точці W.

Виходячи з умови (1), дійсний конус, в якому міститься множина $\partial G_{\boldsymbol{a},w}$, можна за допомогою деякого ортогонального перетворення $\mathbb{C}^2$ з центром в точці z^0 перевести в конус $K = \left\{(z_1, z_2) : |z_1 - z_2| \leqslant |z_2^0|\right\}$. У цьому випадку пряма $\mathbb{C}_{\boldsymbol{a},w}$ паралельна осі z_1, а область $G_{\boldsymbol{a},w}$ міститься у площині комплексної змінної z_1.

Якщо μ — білогарифмічно опукла нормальна мажоранта, то за теоремою 2 існує стала $C > 0$, така, що

$$|f(z)| \leqslant C\mu\left(|||z - z^0|||\right), \quad z \in \overline{G}_{\boldsymbol{a},w}. \tag{8}$$

Якщо $\mu(\delta)$ не є нормальною мажорантою, то, як відомо, довільна білогарифмічно опукла мажоранта є нижньою огинаючою деякого сімейства білогарифмічно опуклих нормальних мажорант (див. [9]). Тому оцінка (8) справедлива і для білогарифмічно опуклих мажорант. За означенням норми $|||z - z^0||| = \max\left\{\left|z_1 - z_1^0\right|, \left|z_2 - z_2^0\right|\right\}$. Оскільки $\overline{G}_{\boldsymbol{a},w} \subset K$, то $|||z - z^0||| = |z_2^0|$, $z \in G_{\boldsymbol{a},w}$. Тому нерівність (7) для $f \in A(G)$ набуває вигляду

$$|f(z)| \leqslant \mu\left(|z_2^0|\right), \quad z \in \partial G_{\boldsymbol{a},w}.$$

Функція $|f(z_1, z_2)|$ — субгармонічна по z_1 в області $G_{\boldsymbol{a},w} \subset \mathbb{C}$. Враховуючи нерівність (8), вона обмежена зверху в $G_{\boldsymbol{a},w}$. Згідно принципу максимуму для субгармонічних функцій $|f(z_1, z_2)| \leqslant \mu\left(|z_2^0|\right), (z_1, z_2) \in G_{\boldsymbol{a},w}$ або $|f(z_1, z_2)| \leqslant \mu\left(|||z - z^0|||\right), z \in G_{\boldsymbol{a},w}$. Таким чином доведено, що $|f(z)| \leqslant \mu\left(|||z - z^0|||\right), z \in \partial G_{\boldsymbol{a},w} \setminus \{z^0\}$. Метод одновимірних комплексних перерізів дозволяє отримати аналогічну оцінку на всій області G.

В загальному випадку $f \in H(G)$, $G \subset \mathbb{C}^n$ доведення теореми 4 залишається без істотних змін.

Зауважимо, що в метриці $\| \bullet \|$ оцінка $|f(\zeta)| \leqslant \mu\left(|||\zeta - z^0|||\right), \zeta \in \partial G_{\boldsymbol{a},w} \setminus \{\zeta^0\}$ справедлива з константою, залежною від розмірності простору $\mathbb{C}^n$ ($\mathbb{C} = \psi(\sqrt{n})$).

З теореми 4 очевидним чином випливають наступні твердження.

Теорема 5. *Нехай G — обмежена опукла область в $\mathbb{C}^n$, $f \in A(G)$, μ — білогарифмічно опукла мажоранта, для довільного $z \in \partial G \setminus \Delta G$ і довільного комплексного вектора $\boldsymbol{a} \in \mathbb{C}^n$, таких, що $G_{\boldsymbol{a},z} \neq \varnothing$, $z^0 \notin \overline{G}_{\boldsymbol{a},z}$, $\partial G_{\boldsymbol{a},z} \subset \Delta G$ виконується нерівність*

$$0 < Re\left(V_{z^0,p}, V_{z^0,w}\right), \quad \{p; w\} \in \partial G_{\boldsymbol{a},z}.$$

Тоді з оцінки (7) випливає оцінка $\omega\left(\overline{G}, f, z^0, \delta\right) \leqslant \mu(\delta)$, $\delta > 0$.

Для доведення глобальних контурно-тілесних оцінок (теореми 6 — 8) необхідний принцип максимуму для модуля неперервності функції $f \in A(G)$ (див., напр., [2]).

Теорема 6. *Нехай G — обмежена опукла область в $\mathbb{C}^n$. Тоді для довільної функції $f \in A(G)$ і довільного $\delta > 0$ існує точка $z^0 \in \Delta G$, така, що $\omega\left(\overline{G}, f, \delta\right) = \omega\left(\overline{G}, f, z^0, \delta\right)$, $\delta > 0$.*

Доведення. Розглянемо спочатку випадок простору $\mathbb{C}^2$. Згідно принципу максимуму для модуля неперервності (див. [2]) для довільного $\delta > 0$ існує $z^0 \in \partial G$, таке, що $\omega\left(\overline{G}, f, \delta\right) = \omega\left(\overline{G}, f, z^0, \delta\right)$. Зафіксуємо довільне $\delta > 0$. Нехай $\zeta^0 \in \overline{G}$ — точка, для якої

$$|f(\zeta^0) - f(z^0) = \omega\left(\overline{G}, f, z^0, \delta\right) > 0, \quad \|\zeta^0 - z^0\| \leqslant \delta.$$

Доведемо, що в якості точок z^0, ζ^0 можна взяти точку на ΔG. Припустимо, що точки z^0, ζ^0 не лежать в ΔG. Тоді можливі випадки:

1) точки z^0, ζ^0 належать одній зв'язній компоненті множини $\partial G \setminus \Delta G$. З результатів роботи [5] випливає, що існує такий вектор $\boldsymbol{a} \in \mathbb{C}^2$, що $z_0 \in G_{\boldsymbol{a},z^0}$, $\zeta_0 \in G_{\boldsymbol{a},\zeta^0}$. Оскільки точки z^0, ζ^0 — внутрішні для цих

областей, то існує таке найбільше $r > 0$, що функція $\varphi(\lambda) = f(z_1^0 + \lambda, z_2^0 + \lambda) - f(\zeta_1^0 + \lambda, \zeta_2^0 + \lambda)$ — аналітична в крузі $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < r\}$. Її модуль ($\varphi(\lambda) \neq const$) не може приймати найбільше значення у внутрішніх точках круга. Таким чином або $(z_1^0 + \lambda, z_2^0 + \lambda) \in \partial G_{\boldsymbol{a},z^0}$, або $(\zeta_1^0 + \lambda, \zeta_2^0 + \lambda) \in \partial G_{\boldsymbol{a},\zeta^0}$;

2)точки z^0, ζ^0 належать різним зв'язним компонентам множини $\partial G \setminus \Delta G$. Нехай $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ — вектори в $\mathbb{C}^2$, такі, що $z_0 \in G_{\boldsymbol{a},z^0}$, $\zeta_0 \in G_{\boldsymbol{a},\zeta^0}$. При $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ міркування такі ж, як у випадку 1). Тому вважатимемо $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$. За допомогою невиродженого голоморфного відображення $\boldsymbol{A}$ простору $\mathbb{C}^2$ в себе можна досягти того, що опуклі множини $G_{\boldsymbol{a},z^0}$ і $G_{\boldsymbol{a},\zeta^0}$ лежатимуть на координатних осях z_1 і z_2. Образом області G при цьому перетворенні $z \to z'$ буде деяка (взагалі кажучи, неопукла) область G', функція $f \in A(G)$ — в деяку функцію $f(A^{-1}z') = \varphi(z') \in A(G')$, а межа Шилова ΔG — в деяку межу Шилова $\Delta G'$.

Зафіксуємо довільне $\delta > 0$. Функція $\varphi(\zeta') - \varphi(z')$ — голоморфна в області $\left(G'_{\boldsymbol{b},\zeta^0} \times G'_{\boldsymbol{a},z^0}\right) \cap \left\{(\zeta, z) : \|\zeta' - z'\| < \frac{\delta}{\|\boldsymbol{A}^{-1}\|}\right\}$ і неперервна в її замиканні. Тому максимум її модуля досягається на межі Шилова, яка міститься у множині $\left(\partial G'_{\boldsymbol{b},\zeta^0} \times \overline{G'}_{\boldsymbol{a},z^0}\right) \cup \left(\overline{G'}_{\boldsymbol{b},\zeta^0} \times \partial G'_{\boldsymbol{a},z^0}\right) \cap \left\{(\zeta, z) : \|\zeta' - z'\| < \frac{\delta}{\|\boldsymbol{A}^{-1}\|}\right\}$, тобто існує точка $W \in \overline{G'}_{\boldsymbol{a},z^0}$ і точка $p \in \overline{G'}_{\boldsymbol{b},\zeta^0}$, для яких або $W \in \overline{G'}_{\boldsymbol{a},z^0}$, $p \in \partial G'_{\boldsymbol{b},\zeta^0}$, або $W' \in \partial G'_{\boldsymbol{a},z^0}$, $p' \in \overline{G'}_{\boldsymbol{b},\zeta^0}$, а функція $|\varphi(\zeta') - \varphi(z')|$ приймає в цих точках максимум. Оскільки $W' = \boldsymbol{A}^{-1}W$, $p' = \boldsymbol{A}^{-1}p$, $\varphi(W') = f(W)$, $\varphi(p') = f(p)$, $\|W' - p'\| < \frac{\delta}{\|\boldsymbol{A}^{-1}\|}$, $\delta > \|W' - p'\| \, \|\boldsymbol{A}^{-1}\| > \|\boldsymbol{A}^{-1} - (W' - p')\| = \|W - p\|$, то $\max \|f(\zeta) - f(z)\| = \|f(W) - f(p)\|$. Отже одна з точок ζ, W належить ΔG, тобто вони не можуть бути одночасно внутрішніми для $\partial G \setminus \Delta G$.

Враховуючи, що в околі кожної точки множина $\partial G \setminus \Delta G$ розшаровується на паралельні комплексні гіперплощини (див. [6]), доведення теореми 6 в довільному $\mathbb{C}^n$ істотно не відрізняється від випадку $\mathbb{C}^2$.

На основі вищезгаданого принципу максимуму із теорем 3, 5 виводяться наступні глобальні контурно-тілесні теореми.

Теорема 7. *Нехай G — обмежена опукла область в $\mathbb{C}^n$, $f \in A(G)$, $\mu(\delta)$ — нормальна мажоранта і для всіх $z \in \Delta G$ справедливе співвідношення* (1). *Тоді якщо*

$$\omega(\Delta G, f, \delta) \leqslant \mu(\delta), \quad \delta > 0, \tag{9}$$

то $\omega(\overline{G}, f, \delta) \leqslant C\mu(\delta)$, $\delta > 0$, де $C > 0$ залежить лише від μ, β і *розмірності простору n.*

Теорема 8. *Нехай G — обмежена опукла область в $\mathbb{C}^n$, $f \in A(G)$, μ — білогарифмічно опукла мажоранта, для всіх $z \in \Delta G$ виконується умова (9). Тоді з оцінки (9) випливає оцінка*

$$\omega(\overline{G}, f, \delta) \leqslant \mu(\delta), \quad \delta > 0.$$

Література

[1] *Тамразов П. М.* Гладкости и полиномиальные приближения. — К.: Наук. думка, 1975. — 272 с.

[2] *Тамразов П. М.* Контурные и телесные структурные свойства голоморфных функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. — 1973. — 28, № 1. — С. 131 – 161.

[3] *Ерике Б.* Соотношение телесного модуля непрерывности и модуля непрерывности вдоль границы Шилова для аналитических функций нескольких переменных // Мат. сборник, 1983. — 122, № 4. — С. 515 – 526.

[4] *Бычков С. Н.* О геометрических свойствах границы области голоморфности // Изв. АН СССР. Сер. мат., 1980. — 44, № 1. — С. 46 – 62.

[5] *Белошапка В. К., Бычков С. Н.* Об одном свойстве выпуклых гиперповерхностей // Мат. заметки, 1986. — 40, № 5. — С. 621 – 626.

[6] *Щехорский А. И.* Контурно-телесные теоремы голоморфных функций в $\mathbb{C}^n$ // Укр. мат. журн., 1979. — 31, № 1. — С. 107 – 109.

[7] *Щехорский А. И.* Мажорантные свойства некоторых комплексных функций в $\mathbb{C}^n$ // Сб. работ Ин-та матем. АН УССР /Современные вопросы вещественного и комплексного анализа/. — К.: Ин-т матем. АН УССР, 1984. — С. 137 – 144.

[8] *Щехорский А. И.* Об одной локальной теореме в $\mathbb{C}^n$ // Сб. работ Ин-та матем. АН УССР /Теория приближений и смежные вопросы анализа и топологии/. — К.: Ин-т матем. АН УССР, 1987. — С. 107 – 112.

[9] *Чирка Е. М.* Аналитическое представление CR функций // Мат. сборник, 1975. — 98, № 4. — С. 591 – 623.

[10] *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1985. — 464 с.