Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2017, том 14, № 1, 262–274

УДК 517.5

В. С. Шпаковский

(*Институт математики НАН Украины, Киев*)

shpakivskyi86@gmail.com

Гиперкомплексные функции и точные решения одного уравнения гидродинамики

Посвящается 70-летию профессора Юрия Борисовича Зелинского

Известно, что в некоторых коммутативных ассоциативных алгебрах экспоненциальная функция, при определенном выборе базисных векторов алгебры, является решением линейного дифференциального уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами. В данной работе предложена процедура, позволяющая выписать все компоненты экспоненты в специальной коммутативной алгебре произвольной, наперед заданной размерности. Это позволяет находить решения одного уравнения гидродинамики третьего порядка.

It is known that in some commutative associative algebras the exponential function is a solution of linear partial differential equations with constant coefficients. In the present paper we propose a procedure allowing us to find all components of the exponent in a special N-dimensional commutative algebra, where N is an arbitrary fixed natural number. This allows us to construct solutions of one hydrodynamic equation of the third order.

1. Введение. Пусть $\mathbb{A}$ — N-мерная коммутативная ассоциативная банахова алгебра над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ и пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$, где $n \leq N$, — набор линейно независимых векторов в

$\mathbb{A}$. Обозначим $\zeta := xe_1 + xe_2 + \cdots + x_n e_n$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ и определим в алгебре $\mathbb{A}$ экспоненциальную функцию $\exp \zeta$ в виде суммы абсолютно сходящегося ряда

$$\exp \zeta := \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\zeta^r}{r!}\,. \tag{1}$$

Производная от функции $\Phi(\zeta) = \exp \zeta$ понимается как формальная производная ряда (1). Следовательно, $\frac{\partial}{\partial x_k} \exp \zeta = e_k \exp \zeta$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Пусть $k \in \{0, 1, 2 \ldots\} =: \mathbb{Z}^+$. Набор $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_k \in \mathbb{Z}^+$, $k = 1, 2, \ldots, n$, таков, что $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 \cdots + \alpha_n = k$. Рассмотрим общее линейное уравнение с постоянными коэффициентами

$$E(u) := E_0(u) + E_1(u) + \cdots + E_p(u) = 0, \tag{2}$$

где

$$E_k(u) := \sum_{\alpha : |\alpha| = k} C^k_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Вследствие равенства

$$E(u) = (E_0^* + E_1^* + \cdots + E_p^*) \exp \zeta,$$

где

$$E_k^* := \sum_{\alpha : |\alpha| = k} C^k_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} e_1^{\alpha_1} e_2^{\alpha_2} \cdots e_n^{\alpha_n},$$

функция $\exp \zeta$ удовлетворяет уравнению (2), если векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ удовлетворяют характеристическому уравнению

$$E_0^* + E_1^* + \cdots + E_p^* = 0. \tag{3}$$

Поскольку уравнение (2) линейное, то все комплекснозначные компоненты разложения функции $\exp \zeta$ по базису алгебры $\mathbb{A}$ также являются его решениями.

Итак, имеем две задачи. Первая — описать все наборы векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$, удовлетворяющие *характеристическому* уравнению (3), а вторая — описать все компоненты фунции $\exp \zeta$. В конечномерной алгебре разложение экспоненты $\exp\zeta$ по базису алгебры несложно выписать. Но, вместе с тем, понятно, что в конечномерной алгебре разложение экспоненты по базису алгебры имеет конечное количество компонент, а поэтому порождает конечное число решений дифференциального уравнения. В то время, как в бесконечномерной алгебре экспонента порождает бесконечное множество решений данного линейного дифференциального уравнения в частных производных. Но бесконечномерность алгебры существенно затрудняет нахождение компонент экспоненты.

В данной работе предложена процедура построения всех компонент экспоненты в специальной N-мерной алгебре для любого натурального N. Кроме того, приведенные выше две задачи полностью решены и применены для построения решений одного уравнения гидродинимаки третьего порядка.

2. Модельное уравнение. Рассмотрим следующую систему уравнений гидродинамики в лагранжевых координатах

$$V_t(t,x) - u_x(t,x) = 0, \quad u_t(t,x) + p_x(t,x) = 0, \tag{4}$$

$$p(t,x) = a - bV(t,x) - \tau p_t(t,x)\,, \ \ a, b > 0, \tag{5}$$

где $V(t,x)$, $u(t,x)$, $p(t,x)$ — объем, скорость и давление, соответственно, τ — время релаксации, и приняты обозначения $V_t(t,x) := \partial V/\partial t$ и т. д. Уравнения (4) являются, соответственно, законами сохранения массы и импульса и имеют достаточно общий характер. Система уравнений движения (4) замыкается уравнением состояния среды (5), несущее информацию о конкретной модели гидродинамики, о свойствах среды.

Следует отметить, что динамическое уравнение состояния (5) является частным случаем модели Кельвина – Фойгта [1, с. 31] линейной вязкоупругой среды и используется при описании волновых процессов в грунтах и горных породах при малых нагрузках.

Уравнение состояния, подобное уравнению (5), рассматривалось также в работе [2], где изучались автомодельные решения одной общей системы уравнений гидродинамики.

Отметим, что система уравнений (4),(5) при достаточной дифференцируемости функций V, u, p сводится к уравнению

$$D[V](t,x) := V_{ttt}(t,x) + \alpha V_{tt}(t,x) - \beta V_{xx}(t,x) = 0, \tag{6}$$

где $\alpha := 1/\tau > 0$, $\beta := b/\tau > 0$.

В работе [3] с помощью коммутативной алгебры, изоморфной алгебре двойных чисел, описаны все полиномиальные и аналитические решения уравнения (6). В этой работе с помощью экспоненты в N-мерной коммутативной алгебры строится бесконечное множество решений уравнения (6) вида $V_n(t,x) = P_n(t,x)e^{at+bx}$, где P_n — полином степени n и $a, b \in \mathbb{C}$; приведены простейшие свойства этих решений.

3. Векторы e_1, e_2**.** Пусть $\mathbb{A}_{n+1}$ — $(n+1)$-мерная коммутативная ассоциативная алгебра над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ с базисом $\{1, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^n\}$, где $\rho^{n+1} = 0$ и $n \geq 1$. При $n = 1$ получим *бигармоническую алгебру* (см., напр., [4–6]). Алгебра $\mathbb{A}_3$ — объект исследования работ [6–8]. При любом фиксированном $n \geq 3$ рассмотрена $\mathbb{A}_n$ в [9].

В алгебре $\mathbb{A}_{n+1}$ рассмотрим пару векторов

$$e_1 = \sum_{r=0}^{n} k_r\, \rho^r, \qquad e_2 = \sum_{r=0}^{n} m_r\, \rho^r\,, \qquad k_r\,, m_r \in \mathbb{C}. \tag{7}$$

Пусть $\zeta := te_1 + xe_2$ при $t, x \in \mathbb{R}$. В силу равенства

$$D[\Phi](\zeta) = e_1^3\Phi'''(\zeta) + \alpha e_1^2\Phi''(\zeta) - \beta e_2^2\Phi''(\zeta) = (e_1^3 + \alpha e_1^2 - \beta e_2^2)\exp\zeta,$$

функция $\Phi(\zeta) = \exp\zeta$ удовлетворяет уравнению (6), если векторы e_1, e_2 удовлетворяют соотношению

$$e_1^3 + \alpha e_1^2 - \beta e_2^2 = 0. \tag{8}$$

Произвольным образом зафиксируем натуральное n. В этом пункте опишем все пары векторов e_1, e_2 алгебры $\mathbb{A}_{n+1}$, удовлетворяющие соотношению (8).

Итак, из равенств (7) и таблицы умножения алгебры $\mathbb{A}_{n+1}$ вытекают равенства

$$\begin{gathered}
e_1^2 = k_0^2 + k_1^2\rho^2 + k_2^2\rho^4 + \cdots + k_{[n/2]}^2\rho^{2[n/2]} + \\
+2\big(k_0k_1\rho + k_0k_2\rho^2 + k_0k_3\rho^3 + \cdots + k_0k_n\rho^n\big) + \\
+2\big(k_1k_2\rho^3 + k_1k_3\rho^4 + k_1k_4\rho^5 + \cdots + k_1k_{n-1}\rho^n\big) + \\
+2\big(k_2k_3\rho^5 + k_2k_4\rho^6 + k_2k_5\rho^7 + \cdots + k_2k_{n-2}\rho^n\big) + \cdots \\
\cdots + 2k_{[(n-1)/2]}k_{[(n-1)/2]+1}\rho^{2[(n-1)/2]+1},
\end{gathered}$$

где $[k]$ — целая часть числа k. Вводя обозначение $e_1^2 := \sum_{r=0}^{n} B_r \rho^r$, имеем

$$B_0 = k_0^2\,, \quad B_1 = 2k_0k_1\,, \quad B_2 = k_1^2 + 2k_0k_2\,, \tag{9}$$

и в общем случае

$$B_r(k_0, k_1, \ldots, k_r) = \begin{cases} k_{r/2}^2 + 2\left(k_0k_r + k_1k_{r-1} + \cdots + k_{\frac{r}{2}-1}k_{\frac{r}{2}+1}\right) \\ \qquad\qquad \text{при } r \text{ парном}, \\ 2\left(k_0k_r + k_1k_{r-1} + \cdots + k_{\frac{r-1}{2}}k_{\frac{r+1}{2}}\right) \\ \qquad\qquad \text{при } r \text{ непарном}. \end{cases} \tag{10}$$

Обозначая $e_2^2 := \sum_{r=0}^{n} C_r \rho^r$, очевидно, что коэффициенты C_r определяются соотношениями

$$C_r(m_0, m_1, \ldots, m_r) \equiv B_r(m_0, m_1, \ldots, m_r). \tag{11}$$

Пусть $e_1^3 := \sum_{r=0}^{n} D_r \rho^r$. Из равенства

$$e_1^3 = e_1 e_1^2 = \sum_{r=0}^{n} k_r \rho^r \sum_{r=0}^{n} B_r \rho^r = \sum_{r=0}^{n} D_r \rho^r$$

вытекают равенства

$$D_0 = k_0^3\,, \quad D_1 = 3k_0^2 k_1\,, \quad D_2 = k_0B_2 + k_1B_1 + k_3B_0\,, \tag{12}$$

и в общем случае

$$D_r = k_0B_r + k_1B_{r-1} + \cdots + k_rB_0\,, \qquad r = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{13}$$

Таким образом, принимая во внимание все принятые обозначения, характеристическое уравнение (8) равносильно системе уравнений

$$D_r + \alpha B_r - \beta C_r = 0\,, \qquad r = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{14}$$

При этом, при каждом $r = 0, 1, 2, \ldots, n$ r-е уравнение системы (14) содержит $2(r+1)$ неизвестных — это $k_0, k_1, \ldots, k_r, m_0, m_1, \ldots, m_r$. То есть, система из $n+1$ уравнений содержит $2(n+1)$ неизвестных. Для определенности, будем считать k_r, при всех $r = 0, 1, 2, \ldots, n$, произвольными комплексными числами и выразим через них все m_r. Для этого отметим, что в уравнении (14) от m с разными индексами зависит только C_r. Более того, $C_r = C_r(m_0, m_1, \ldots, m_r)$. Таким образом, из нулевого уравнения системы (14) мы можем найти m_0, из первого уравнения системы (14) находим m_1 и т. д., из r-го уравнения системы (14) находим m_r.

Итак, из соотношений (10), (11), имеем

$$m_r =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2m_0}\left(C_r - m_{r/2}^2 - 2\left(m_1 m_{r-1} + m_2 m_{r-2} + \ldots + m_{\frac{r}{2}-1} m_{\frac{r}{2}+1}\right)\right) \\ \qquad\qquad \text{при } r \text{ парном}, \\ \frac{1}{2m_0}\left(C_r - 2\left(m_1 m_{r-1} + m_2 m_{r-2} + \ldots + m_{\frac{r-1}{2}} m_{\frac{r+1}{2}}\right)\right) \\ \qquad\qquad \text{при } r \text{ непарном}. \end{cases}$$

Подставляя значение C_r из условия (14), получаем

$$m_r = \begin{cases} \frac{1}{2\beta m_0}\Big(D_r + \alpha B_r - \beta\big(m_{\frac{r}{2}}^2 + 2m_1 m_{r-1} + 2m_2 m_{r-2} + \cdots \\ \qquad \cdots + 2m_{\frac{r}{2}-1} m_{\frac{r}{2}+1}\big)\Big) \text{ при } r \text{ парном}, \\ \frac{1}{2\beta m_0}\Big(D_r + \alpha B_r - \beta\big(2m_1 m_{r-1} + 2m_2 m_{r-2} + \cdots \\ \qquad \cdots + 2m_{\frac{r-1}{2}} m_{\frac{r+1}{2}}\big)\Big) \text{ при } r \text{ непарном}. \end{cases} \tag{15}$$

Используя соотношения (9), (12), из равенства (14) выпишем начальные значения m_0, m_1:

$$m_0 := \pm\sqrt{\frac{k_0^3 + \alpha k_0^2}{\beta}}, \qquad m_1 := \frac{3k_0^2 k_1 + 2\alpha k_0 k_1}{2\beta m_0}. \tag{16}$$

Таким образом, равенства (15) и (16) позволяют рекуррентной процедурой выписать значение m_r при всех $r = 0, 1, 2, \ldots, n$.

4. Разложение экспоненты. Известно (см., например, [10, с. 182]), что определение функции $\exp\zeta$ в виде суммы абсолютно сходящегося ряда (1) равносильно ее определению в виде главного продолжения голоморфной функции комплексной переменной e^z в алгебру $\mathbb{A}_{n+1}$:

$$\exp\zeta := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} e^z (z-\zeta)^{-1} dz, \tag{17}$$

где γ — спрямляемая кривая в комплексной плоскости, охватывающая точку $\xi_0 := k_0 t + m_0 x$.

Для того, чтобы выписать разложение экспоненты в алгебре $\mathbb{A}_{n+1}$ по формуле (17) необходимо сначала получить разложение резольвенты $(z-\zeta)^{-1}$.

Лемма 1. *Разложение резольвенты имеет вид*

$$(z-\zeta)^{-1} = \sum_{r=0}^{n} a_r\,\rho^r \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}:\ z \neq k_0 t + m_0 x, \tag{18}$$

где коэффициенты a_r определяются следующими рекуррентными соотношениями

$$a_r = \frac{1}{z-\xi_0}\Big(\xi_r a_0 + \xi_{r-1} a_1 + \ldots + \xi_1 a_{r-1}\Big), \quad r = 1, 2, \ldots, n, \tag{19}$$

при

$$a_0 := \frac{1}{z-\xi_0} \quad \textit{и} \quad \xi_s := k_s t + m_s x, \quad s = 0, 1, \ldots, n.$$

Доказательство. Пусть $(z-\zeta)^{-1}$ имеет вид (18). Для определения коэффициентов a_r заметим, что елемент $z-\zeta$ в базисе алгебры $\{1, \rho, \ldots, \rho^n\}$ представляется в виде

$$z-\zeta = (z - tk_0 - xm_0) - \sum_{r=1}^{n}(tk_r + xm_r)\rho^r = (z-\xi_0) - \sum_{r=1}^{n}\xi_r\,\rho^r.$$

Следствием равенства $(z-\zeta)(z-\zeta)^{-1} = 1$ являются равенства

$$(z-\xi_0)a_0 = 1, \qquad (z-\xi_0)a_1 - \xi_1 a_0 = 0, \qquad (z-\xi_0)a_2 - \xi_1 a_1 - \xi_2 a_0 = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(z-\xi_0)a_n-\xi_1 a_{n-1}-\xi_2 a_{n-2}-\cdots-\xi_n a_0=0,$$

из которых вытекают соотношения (19). Лемма доказана.

Очевидно, что $a_r=a_r\big((z-\xi_0)^s,\xi_1,\ldots,\xi_r\big)$, где $s=\{2,3,\ldots,r+1\}$.

Введем некоторые определения. Пусть $\varphi(z-\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_r)$ — произвольная комплексная функция от $(r+1)$ комплексных переменных. Определим линейный оператор P, который каждой функции φ ставит в соответствие функцию от r переменных по правилу

$$P\varphi\big((z-\xi_0)^s,\xi_1,\ldots,\xi_r\big)=\varphi\Big((s-1)!\,,\xi_1,\ldots,\xi_r\Big)\qquad\forall\, s\in\{2,3,\ldots,r+1\}.$$

Так, например,

$$P\left(\frac{\xi_3}{(z-\xi_0)^2}+2\frac{\xi_1\xi_2}{(z-\xi_0)^3}+\frac{\xi_1^3}{(z-\xi_0)^4}\right)=\xi_3+\xi_1\xi_2+\frac{\xi_1^3}{3!}\,.$$

Теперь определим функции

$$A_0:=1,\quad A_r(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_r):=P\,a_r\big((z-\xi_0)^s,\xi_1,\ldots,\xi_r\big)\tag{20}$$
$$\forall\, s\in\{2,3,\ldots,r+1\},\quad r=1,2,\ldots,n.$$

Лемма 2. *Справедливо равенство*

$$\exp\zeta=e^{\xi_0}\sum_{r=0}^{n}A_r\,\rho^r,\tag{21}$$

где коэффициенты A_r *определены рекуррентными соотношениями* (20).

Доказательство. Пусть $\exp\zeta$ имеет вид (21). Определим коэффициенты A_r. Следствием соотношений (19) является равенства

$$a_r=\sum_{s=0}^{r}\frac{Q_{s,r}}{(z-\xi_0)^{s+1}}\,,\tag{22}$$

где $Q_{s,r}=Q_{s,r}(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_r)$ — некоторые полиномы (ср. с леммой 1 [11]). Из определения (17), с использованием соотношений (18) и (22), имеем

$$\exp\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma e^z(z-\zeta)^{-1}dz=\sum_{r=0}^{n}\rho^r\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma\sum_{s=0}^{r}\frac{Q_{s,r}\,e^z}{(z-\xi_0)^{s+1}}\,dz=$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \rho^r \sum_{s=0}^{r} \frac{Q_{s,r}\, e^{\xi_0}}{s!} = e^{\xi_0} \sum_{r=0}^{n} A_r\, \rho^r,$$

т. е.,

$$A_r = \sum_{s=0}^{r} \frac{Q_{s,r}}{s!}\,. \tag{23}$$

Сравнивая равенства (23) и (22) приходим к выводу, что A_r определяются соотношениями (20). Лемма доказана.

Замечание 1. С использованием представления (23) может быть доказано следующее рекуррентное соотношение

$$A_r = \xi_r A_0 + \frac{r-1}{r}\, \xi_{r-1} A_1 + \frac{r-2}{r}\, \xi_{r-2} A_2 + \cdots + \frac{1}{r}\, \xi_1 A_{r-1}\,.$$

Выпишем несколько первых членов разложения экспоненты:

$$\exp\zeta = e^{\xi_0}\Bigg[1 + \xi_1\,\rho + \left(\xi_2 + \frac{\xi_1^2}{2!}\right)\rho^2 + \left(\xi_3 + \xi_1\xi_2 + \frac{\xi_1^3}{3!}\right)\rho^3 +$$

$$+\left(\xi_4 + \frac{2\xi_1\xi_3 + \xi_2^2}{2!} + \frac{3\xi_1^2\xi_2}{3!} + \frac{\xi_1^4}{4!}\right)\rho^4 +$$

$$+\left(\xi_5 + \xi_1\xi_4 + \xi_2\xi_3 + \frac{\xi_1\xi_2^2 + \xi_1^2\xi_3}{2!} + \frac{\xi_1^3\xi_2}{3!} + \frac{\xi_1^5}{5!}\right)\rho^5 + \cdots\Bigg].$$

Поскольку функция $\exp\zeta$ удовлетворяет уравнению (6), то ее комплексные компоненты $V_r(t,x)$ разложения экспоненты по базису алгебры

$$\exp\zeta = \sum_{r=0}^{n} V_r(t,x)\,\rho^r \tag{24}$$

также удовлетворяет уравнению (6). Сформулируем это в следующем виде.

Теорема 1. *Уравнению* (6) *удовлетворяют комплексные функции*

$$V_r(t,x) = A_r(t,x) e^{\xi_0(t,x)} \qquad \text{при всех} \quad r = 0,1,\ldots,n, \tag{25}$$

где функции A_r определяются равенствами (20), *при этом $\xi_r(t,x) := k_r t + m_r x$, $r = 0,1,\ldots,n$, где k_r — произвольные комплексные числа, а коэффициенты m_r определяются рекуррентными соотношениями* (15) *с начальными значениями* (16).

Замечание 2. Для того, чтобы выписать решение V_p уравнения (6) необходимо выписать функции $A_0, A_1, \ldots, A_p$, а для этого нужно иметь значения $m_0, m_1, \ldots, m_p$. Для последнего, очевидно, нужно преодолеть три шага: 1) по явным формулам (10) выписать $B_0, B_1, \ldots, B_p$; 2) по явным формулам (13) выписать $D_0, D_1, \ldots, D_p$; 3) по рекуррентным соотношениям (15) выписать значения $m_0, m_1, \ldots, m_p$.

Имея значения m_0, m_1, m_2, можем выписать первые три комплексные решения уравнения (6). Таким образом, имеем

$$V_0(t,x) = \exp\left(k_0 t \pm x\sqrt{\frac{k_0^3 + \alpha k_0^2}{\beta}}\right), \tag{26}$$

$$V_1(t,x) = \left(tk_1 \pm x\frac{3k_0k_1 + 2\alpha k_1}{2\sqrt{\beta(k_0+\alpha)}}\right)\exp\left(k_0 t \pm x\sqrt{\frac{k_0^3 + \alpha k_0^2}{\beta}}\right),$$

$$V_2(t,x) = \left[tk_2 \pm x\frac{3k_1^2k_0 + 4\alpha k_1^2 + 20\alpha k_0 k_2 + 12k_0^2 k_2 + 8\alpha^2 k_2}{8\sqrt{\beta}(k_0+\alpha)^{3/2}} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\left(tk_1 \pm x\frac{3k_0k_1 + 2\alpha k_1}{2\sqrt{\beta(k_0+\alpha)}}\right)^2\right]\exp\left(k_0 t \pm x\sqrt{\frac{k_0^3 + \alpha k_0^2}{\beta}}\right),$$

где среди знаков $\pm$ выбираются одновременно либо верхние либо нижние знаки, а k_0, k_1, k_2 — произвольные комплексные числа.

Увеличивая n, можно выписать сколь угодно много точных решений уравнения (6).

Замечание 3. Выделяя в комплексном решении V_r действительную и мнимую части, получаем два действительных решения вида $V_{r,1} = U_r(t,x)e^{\lambda(t,x)}\cos\mu(t,x)$ та $V_{r,2} = R_r(t,x)e^{\lambda(t,x)}\sin\mu(t,x)$, где U_r, R_r — некоторые полиномы степени r, а $\lambda(t,x) := \operatorname{Re}\xi_0$, $\mu(t,x) := \operatorname{Im}\xi_0$.

Замечание 4. Формула (21) позволяет получить бесконечное множество точных решений уравнения (2). Для этого лишь нужно в алгебре $\mathbb{A}_{n+1}$ выписать векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$, удовлетворяющие характеристическому уравнению (3). Подобного рода замечание сделано в монографии [13, с. 189–190]. Кроме того, отметим работу [14], где экспонента использовалась в разных конечномерных алгебрах для построения решений соответствующих дифференциальных уравнений в частных производных.

5. Свойства решений. Одним из традиционных методов решения линейных дифференциальных уравнений в частных производных является метод разделения переменных или метод Фурье, согласно которому решение уравнения (6) ищем в виде

$$V_F(t,x) = W(t)R(x). \tag{27}$$

Подставляя выражение (27) в (6), приходим к системе уравнений

$$\frac{W'''(t) + \alpha W''(t)}{\beta W(t)} = \frac{R''(x)}{R(x)} = \lambda^2,$$

где λ — некоторая комплексная постоянная. Таким образом, приходим к общему решению вида (27):

$$V_F(t,x) = \sum_{s=1}^{3} b_s e^{\mu_s t} \left(d_1 e^{\lambda x} + d_2 e^{-\lambda x}\right), \tag{28}$$

где $b_s\,, d_r$ — произвольные комплексные постоянные, а μ_s — корни уравнения

$$\mu^3 + \alpha\mu^2 - \beta\lambda^2 = 0. \tag{29}$$

В следующей теореме устанавливается связь между решениями вида (25), полученные гиперкомплексным методом, и решением вида (28).

Теорема 2. *Решение уравнения* (6)*, порожденное функцией* (26)*, совпадает с решением* $V_F(t,x)$*.*

Доказательство. Вводя обозначение $\sqrt{\frac{k_0^3+\alpha k_0^2}{\beta}} = \lambda$, получаем $V_0(t,x) = e^{k_0 t \pm \lambda x}$, где λ и k_0 связаны соотношением

$$k_0^3 + \alpha k_0^2 - \beta\lambda^2 = 0. \tag{30}$$

Поскольку уравнение (6) линейное, то функция $V_0(t,x)$ порождает следующее его решение

$$\widetilde{V}_0(t,x) = \sum_{s=1}^{3} b_s e^{k_{0,s} t}(d_1 e^{\lambda x} + d_2 e^{-\lambda x}),$$

где $k_{0,s}$, $s = 1,2,3$, — корни уравнения (30). Очевидно, что $\widetilde{V}_0(t,x) \equiv V_F(t,x)$ при $k_{0,s} = \mu_s$. Теорема доказана.

То есть, лишь нулевое решение $V_0(t,x)$ по существу совпадает с решением, полученным методом Фурье, а все остальные решения вида (25) имеют более общий вид.

Теорема 3. *Для решений* (25) *уравнения* (6) *справедливы равенства*

$$\sum_{r+s=n} \int\limits_{\gamma} V_r(t,x)\big(k_s\,dt + m_s\,dx\big) = 0 \qquad \forall\; n = 0,1,2,\ldots, \tag{31}$$

где γ — произвольная замкнутая жорданова спрямляемая кривая на плоскости tOx, k_s — произвольные комплексные числа, а m_s — определены равенствами (15), *при $s = 1,2,3$.*

Доказательство. Согласно аналогу теоремы Коши (см. Теорему 3 работы [12]), справедливо равенство $\int_\gamma e^\zeta\,d\zeta = 0$. Учитывая обозначения (7) и (24), получаем равенства

$$\int\limits_{\gamma} e^\zeta d\zeta = \int_\gamma \sum_{r=0}^{n} V_r(t,x)\,\rho^r \sum_{s=0}^{n} d\xi_s\,\rho^s = \int\limits_{\gamma} \sum_{0\le r+s\le n} V_r(t,x)\,d\xi_s\,\rho^{r+s} = 0.$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при ρ^{r+s}, получаем равенство (31). Теорема доказана.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта Министерства образования и науки Украины (проект № 0116U001528).

Список литературы

[1] *Ляхов Г. М.* Волны в грунтах и пористых многокомпонентных средах. — М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982. — 288 с.

[2] *Danylenko V. A., Sorokina V. V., Vladimirov V. A.* On the governing equations in relaxing media models and self-similar quasiperiodic solutions // J. Phys. A: Math. Gen. — 1993. — **26**. — P. 7125 – 7135.

[3] *Шпаковский В. С.* Гиперкомплексное представление аналитических решений одного уравнения гидрадинамики // Труды ИПММ НАН Украины. — 2017 (подана к печати).

[4] *Ковалев В. Ф., Мельниченко И. П.* Бигармонические функции на бигармонической плоскости // Докл. АН УССР, Сер. А. — 1981. — № 8. — С. 25 — 27.

[5] *Грищук С. В., Плакса С. А.* Моногенные функции в бигармонической алгебре // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 12. — С. 1587–1596.

[6] *Plaksa S. A.* Commutative algebras associated with classic equations of mathematical physics, Advances in Applied Analysis, Trends in Mathematics, Basel: Springer, 2012, P. 177 – 223.

[7] *Мельниченко И. П., Плакса С. А.* Коммутативные алгебры и пространственные потенциальные поля. — К.: Ин-т математики НАН Украины, 2008. — 230 с.

[8] *Plaksa S. A. and Shpakovskii V. S.* Constructive description of monogenic functions in a harmonic algebra of the third rank // Ukr. Math. J. — 2011. — **62**, No. 8. — P. 1251 – 1266.

[9] *Plaksa S. A., Shpakivskyi V. S.* Monogenic functions in a finite-dimensional algebra with unit and radical of maximal dimensionality // J. Algerian Math. Soc. — 2014. — **1**. — P. 1 – 13.

[10] *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962. — 829 с.

[11] *Shpakivskyi V. S.* Monogenic functions in finite-dimensional commutative associative algebras // Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr. — 2015. — **12**, No. 3. — P. 251 – 268.

[12] *Shpakivskyi V. S.* Integral theorems for monogenic functions in commutative algebras // Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr. — 2015. — **12**, No. 4. — P. 313 – 328.

[13] *Roşculeţ M. N.* Funcţii monogene pe algebre comutative. — Bucuresti, Acad. Rep. Soc. Romania, 1975. — 339 p.

[14] *Pogorui A., Rodriguez-Dagnino R. M.* Solutions of some partial differential equations with variable coefficients by properties of monogenic functions // J. Math. Sci. — 2017. — **220**, No. 5. — P. 624 – 632.