Сергій СЕМЕНЕЦЬ

Розвивальне навчання старшокласників способу обчислення границь, що зводяться до інтеграла

Складністю формування абстрактних фундаментальних понять математики, таких як функція, границя, неперервність, похідна та інтеграл пояснюється те, як за останні три десятиліття змінювався зміст програм шкільного курсу алгебри і початків аналізу. Строгі означення границі числової послідовності та границі функції в точці то включалися, то передбачалося формування в школярів інтуїтивних уявлень про них. У новій програмі для загальноосвітніх навчальних закладів поняття границі функції в точці вивчається в 11 класі [1], що водночас слугує глибшому усвідомленню понять (означень) похідної та інтеграла. Однак глибоке та свідоме формування фундаментальних понять математики школярами можливе лише за умови організації їх навчальної діяльності (учіння), що складає основу концепції розвивальної освіти.

Навчальна діяльність (як і будь-яка інша) має задачну структуру, тобто здійснюється як процес розв'язування специфічних для неї задач [2; 3]. Тому актуальною **навчально-методичною проблемою** є створення системи задач, результатом розв'язування яких стає виділення цілком певного відношення (теоретичного поняття) та формування узагальнених способів дій з метою його вивчення (навчального пізнання). Окремі питання цієї проблеми вже висвітлювалися в наших роботах [4; 5]. **Метою** цієї статті є виділити основні етапи реалізації розвивального навчання математики, які репрезентують задачний підхід у процесі формування навчальної діяльності школярів. Відповідно до визначеної навчальної структури потрібно:

1) виділити опорну задачу на обчислення границі числової послідовності, що зводиться до інтеграла та обґрунтувати спосіб її розв'язування;
2) побудувати навчальну модель розв'язування задач такого виду;
3) створити систему частинних задач, що розв'язуються в рамках побудованого способу дій;
4) навести приклади задач, що передбачають застосування створеної навчальної моделі в нових задачних ситуаціях;
5) визначити методи навчання, які слугують досягненню дидактичних цілей з позиції парадигми розвивальної освіти.

З огляду на цілі та зміст концепції розвивального навчання, можна виділити чотири етапи реалізації задачного підходу в шкільній математичній освіті.

І етап. Постановка базової (практичної, прикладної) задачі, її змістовий аналіз. Виділення цілком певного генетичного початкового відношення, побудова його математичної моделі. Обґрунтування способу розв'язування задачі, контроль виконаних дій і змістова оцінка його засвоєння.

ІІ етап. Постановка та розв'язування навчальної задачі. Створення загального способу (методу) розв'язування типових задач та побудова його навчальної моделі (ієрархії навчальних дій). Контроль за виконанням навчальних дій і оцінка засвоєння способу розв'язування типових задач.

ІІІ етап. Реалізація побудованої навчальної моделі: конструювання та розв'язування системи частинних задач відповідно до логіки сходження від загального (абстрактного) до конкретного. Контроль виконаних навчальних дій у процесі розв'язування кожної задачі. Оцінка рівня засвоєння узагальненого способу дій.

IV етап. Змістовий аналіз попередніх етапів, контроль виконаних способів навчальних дій, оцінка виконаної навчальної діяльності (що відіграє роль окремої задачі). Постановка нової задачі, що передбачає застосування способу дій у нових ситуаціях чи формування способу дій вищого рівня узагальненості.

Наведемо приклад реалізації такої структури в процесі навчання старшокласників способу обчислення границь, що зводяться до інтеграла.

І етап. Старшокласникам пропонуються завдання $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+n}{n}$, з якими вони легко справляються (вимушений успіх) і роблять висновок про те, що в пропонованих завданнях границею послідовності раціональних чисел є раціональне (ціле) число. Яким числом є границя

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right)$? – є навчально-пізнавальною проблемою.

Розв'язуючи задачу про площу криволінійної трапеції, школярі дійшли висновку, що границя $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x_k$ є інтегралом. Отже, є потреба в перетворенні виразу під знаком границі: $\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right)=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\ldots+\frac{1}{1+\frac{n-1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)=\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x_k$, де $x_k=\frac{k}{n}$, ($\kappa=1,2,\ldots,n$), $\Delta x_k=\frac{1}{n}$, $f(x)=\frac{1}{1+x}$ і при $n\to\infty$ $x\in[0,1]$. Функція $f(x)=\frac{1}{1+x}$ є неперервною на відрізку $[0,1]$, а тому вона на ньому інтегровна.

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right)=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=ln(1+x)\Big|_0^1=ln2$.

Таким чином, в основі способу розв'язання поставленої задачі лежить поняття інтеграла як границі цілком певної суми (у вузівських курсах математичного аналізу її називають інтегральною). У процесі розв'язування були виконані такі навчальні дії (контроль виконаних дій):

1) змістовий аналіз поставленої задачі, у результаті якого встановлюється, що кожен із доданків при $n\to\infty$ є нескінченно малою величиною, а кількість самих доданків є нескінченно великою величиною;

2) перетворення виразу, що стоїть під знаком границі до вигляду $\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\frac{1}{n}$ (інтегральної суми);

3) побудова функції в аналітичному вигляді, значення якої знаходиться в точках $x_k=\frac{k}{n}$ ($\kappa=1,2,\ldots,n$);

4) знаходження проміжку, на якому здійснюється розбиття точками x_k та меж інтегрування;

5) обґрунтування, що функція на знайденому проміжку є неперервною;

6) представлення границі як інтеграла функції;

7) знаходження функції, що є первісною до побудованої;

8) обчислення інтеграла за формулою Ньютона-Лейбніца.

Після цього здійснюється змістова оцінка засвоєння старшокласниками способу розв'язання поставленої задачі з її фіксацією в знаково-символьній формі.

ІІ етап. Як діяти в подібних ситуаціях, у процесі розв'язування такого типу задач на дослідження? – така навчально-пізнавальна проблема стає в центрі уваги школярів на другому етапі. Результатом розв'язування поставленої навчальної задачі, що здійснюється у формі навчального діалогу, має стати побудова узагальненого способу дій, який застосовується в процесі розв'язування типових задач. Він може бути таким.

1. Змістовий аналіз задачі, у результаті якого з'ясовується, що потрібно знайти суму нескінченного числа нескінченно малих доданків і на основі цього робиться висновок про доцільність застосування методу інтегрального числення (обчислення інтеграла).

2. Перетворення виразу під знаком границі до вигляду математичної моделі $\sum_{k=1}^{n}f(k)\frac{1}{n}$.

3. Аналітичне задання функції $f(k)=f(x)$, де $x=\frac{1}{n},\frac{2}{n},...,\frac{k}{n},...,\frac{n}{n}$.

4. Обчислення меж інтегрування функції $y=f(x)$: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}=1$.

5. Представлення границі у вигляді інтеграла $\int_0^1 f(x)dx$.

6. Доведення, що функція $y=f(x)$ на відрізку $[0,1]$ є неперервною.

7. Обчислення інтеграла за формулою Ньютона-Лейбніца $\int_0^1 f(x)dx=F(1)-F(0)$.

Таким чином, навчальна модель способу розв’язування типових задач складається із семи навчальних дій (дія контролю). На цьому ж етапі здійснюється оцінка засвоєння учнями способу розв’язування поставленої навчальної задачі як самими старшокласниками, так і вчителем.

III етап. Реалізація побудованої навчальної моделі в процесі створення, постановки та розв’язування частинних задач відповідно до логіки сходження від загального (абстрактного) до конкретного дозволяє сформувати вміння та навички школярів конструювати та розв’язувати типові математичні задачі, контролювати виконання визначених навчальних дій. Наведемо приклади створених задач:

1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(tg\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\right)+tg\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{2}\right)+...+tg\left(\frac{n}{n}-\frac{1}{2}\right)\right)$; 2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(cos\frac{\pi}{2n}+cos\frac{\pi 2}{2n}+...+cos\frac{\pi n}{2n}\right)$;

3) $\lim_{n\to\infty}\frac{1^{\pi}+2^{\pi}+...+n^{\pi}}{n^{\pi+1}}$; 4) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}}+\sqrt{\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n^3}}+...+\sqrt{\frac{1}{n^2}-\frac{n}{n^3}}\right)$;

5) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{n^2}-\frac{1^2}{n^4}}+\sqrt{\frac{1}{n^2}-\frac{2^2}{n^4}}+...+\sqrt{\frac{1}{n^2}-\frac{n^2}{n^4}}\right)$; 6) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{(n+1)^2}+\frac{n}{(n+2)^2}+...+\frac{n}{(n+n)^2}\right)$.

Контроль способу дій у процесі розв’язування кожної задачі та змістова оцінка його сформованості є необхідними умовами реалізації третього етапу навчальної діяльності старшокласників.

IV етап. На цьому етапі здійснюється змістовий аналіз виконаних трьох етапів: постановка конкретної задачі-проблеми на знаходження границі послідовностей раціональних чисел; обґрунтування способу її розв’язування, виділення генетичного теоретичного поняття – інтеграла (його математичної моделі); постановка та розв’язування навчальної задачі (створення навчальної моделі розв’язування типових задач); складання та розв’язування частинних задач на обчислення границь, що зводяться до інтеграла.

На цьому ж етапі ставиться питання про те, в яких випадках, у процесі розв’язування ще якого типу задач може застосовуватися побудований узагальнений спосіб дій. Обґрунтована відповідь на це запитання слугує ознакою креативного рівня засвоєння способу дій, а отже, й креативного мислення, оскільки передбачає вихід за межі набутого досвіду (постановку загальнішої задачі-проблеми) чи застосування здобутих знань і сформованих умінь у нових навчальних ситуаціях. Реалізація такої логіки в процесі навчання школярів математики відповідає дворівневій моделі діяльності, розробленій Д.Б. Богоявленською в методі „креативного поля” [6]. З огляду на це, побудову та вивчення навчальної моделі способу (методу) розв’язування прикладних задач на обчислення роботи, енергій, маси, шляху із застосуванням інтегрального числення, що передбачає математичне моделювання й реалізацію вже створеної навчальної моделі в процесі обчислення границь такого виду, можна відносити до загальнішої навчально-теоретичної проблеми, у рамках якої розв’язана є одним із складових компонентів. Прикладом задач, що передбачають застосування наведеного способу дій у нових навчальних ситуаціях можуть бути задачі на доведення нерівностей:

$$\sqrt{99\cdot 101}+\sqrt{98\cdot 102}+...+\sqrt{2\cdot 198}+\sqrt{1\cdot 199}<2500\pi\ ,$$
$$\sqrt{n^2-1^2}+\sqrt{n^2-2^2}+...\sqrt{n^2-(n-1)^2}<0{,}79\cdot n^2\ .$$

Загалом змістове планування та проектування подальшої діяльності, що здійснюється на основі досягнутого рівня сформованості узагальнених способів дій і передбачає вихід за межі набутого навчально-пізнавального досвіду через постановку, моделювання та реалізацію способу розв'язування загальнішої навчально-теоретичної проблеми чи застосування цього досвіду в нових пізнавальних ситуаціях, є ознакою сформованості не тільки науково-теоретичного мислення суб'єкта, але й креативності виконуваної навчально-пізнавальної діяльності. Її змістова оцінка як з боку вчителя, так і з боку школярів (у тому числі самооцінка зафіксована в знаково-символьній формі) сприяє рефлексивному напрямку розвитку особистості, який у цілому задається системою розвивальної освіти.

Методами навчання, що відповідають поставленим загальним і конкретно дидактичним цілям системи розвивальної освіти, є проблемний, дослідницький, організації навчального (конструктивного) діалогу учнів між собою за безпосередньої участі вчителя (управлінця та організатора). Вони дозволяють, з одного боку, усвідомити навчальну проблему, здійснити її змістовий аналіз, поставити навчальну задачу, визначити спосіб її розв'язування (створити навчальну модель), оцінити рівень сформованості узагальнених способів дій; а з іншого боку – слугують важливим засобом розвитку навчально-пізнавального інтересу, науково-теоретичного і продуктивного мислення, оскільки передбачають організацію навчального процесу в квазі-дослідницькому чи дослідницькому вигляді. Ці методи мають застосовуватися передусім у процесі постановки та розв'язування навчальних задач, узагальнення та систематизації знань і вмінь (способів дій); на етапі контролю та оцінки виконаної навчально-пізнавальної діяльності. Репродуктивний метод має місце на етапі формування практичних умінь і навичок школярів виконувати дії та операції, застосування знайдених способів дій у процесі розв'язування частинних (типових) задач. З метою зменшення мотиваційного розриву між пошуково-дослідницькою діяльністю та однотипними практичними завданнями на формування вмінь і навичок доцільно, щоб:

- системи задач відбиралися самими школярами (із пропонованих учителем);
- деякі типові завдання створювалися учнями самостійно;
- визначені способи дій використовувалися в інших навчальних ситуаціях (у процесі розв'язування іншого типу задач);
- контроль і оцінка правильності розв'язання здійснювалися не тільки вчителем і самим учнем, але й однокласниками.

Таким чином, задачний підхід до формування навчальної діяльності школярів у процесі вивчення математики може бути репрезентований у вигляді системи, що являє собою ієрархію чотирьох компонентів (способів дій). Реалізація такої структуру в умовах школи є одним із можливих шляхів досягнення цілей розвивального навчання школярів: розвиток науково-теоретичного мислення, формування суб'єктів навчальної діяльності, становлення суб'єктів життєдіяльності. Питанням застосування визначеного способу навчального пізнання математики в основній і старшій школах будуть присвячені наші подальші роботи.

ЛІТЕРАТУРА

1. Програма для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика 5-12 класи. – Київ, 2005. – 64 с.
2. Давыдов В.В. Теория развивающего обучения /Международная Ассоциация «Развивающее обучение». – М.: Интор, 1996. – 544 с.
3. Костюк Г.С., Балл Г.А., Машбиц Е.И. О задачном подходе к исследованию учебной деятельности //Психология человеческого учения и решения проблем: 2-я Пражская конференция: Резюме. – Прага, 1973. – С. 17-25.

4. Семенець С.П. Навчальне моделювання методів доведення в шкільному курсі математики /Математика в школі. – 2006. – №9. – С. 12-16.
5. Семенець С.П. Навчання учнів основної школи методам геометричних перетворень /Математика в школі. – 2007. – №1. – С. 17-20.
6. Богоявленская Д.Б. Психология творческих способностей. – М.: Академия, 2002. – 320 с.