*Сергій СЕМЕНЕЦЬ*

# Про вивчення функцій у класах фізико-математичного профілю

Одним із важливих завдань курсу алгебри і початків аналізу загальноосвітньої школи є систематизація та поглиблення знань учнів про функції. У цьому ж аспекті вивчаються показникова, логарифмічна, степенева та тригонометричні функції. Аналіз навчально-методичної літератури показує, що введення показникової функції дійсного аргументу здійснюється конкретно-індуктивним [1] або абстрактно-дедуктивним [2] методами. З метою реалізації розвивальної функції навчання у класах фізико-математичного профілю доцільно іти одним із двох шляхів.

При першому – увага учнів звертається на те, що функція може бути задана перерахуванням її характеристичних властивостей. Такий підхід для учнів є принципово новим, оскільки до цього часу всі основні функції задавались аналітично або оперативно: вказувались операції, які потрібно було виконати над значенням аргументу, щоб одержати відповідне значення функції. Так, показниковою функцією із основою $a$, визначеною на множині $R$, назвемо функцію, для якої:

1) $f(1)=a$, де $a>0$ і $a\neq 1$;

2) для будь-яких $x, y \in \mathrm{R}$ $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ (характеристичне функціональне рівняння для показникової функції);

3) функція $y=f(x)$ – неперервна на множині $R$.

Далі вчитель організовує колективне дослідження з допомогою методу евристичної бесіди. Учні знаходять $f(0)$. У силу пункту 2: $f(0+1)=f(0)\cdot f(1)$ або $f(1)=f(0)\cdot f(1)$.

Звідки $f(0)=1$. Тоді легко обчислити значення функції $f(2)$, $f(3)$, ..., $f(n)$:

$f(2)=f(1+1)=f(1)\cdot f(1)=a\cdot a=a^2$; $f(3)=f(2+1)=f(2)\cdot f(1)=a^2\cdot a=a^3$.

Методом математичної індукції з'ясовуємо, що $f(n)=a^n$.

Далі знаходимо $f(1/2)$, $f(1/3)$, $f(1/n)$, $f(m/n)$, $f(-m/n)$, $m,n\in N$:

$a=f(1)=f(1/2+1/2)=f(1/2)\cdot f(1/2)=f^2(1/2)$, звідки $f(1/2)=a^{1/2}$.

Тоді $a=f(1)=f(1/3+1/3+1/3)=f(1/3)\cdot f(1/3)\cdot f(1/3)=f^3(1/3)$, звідки $f(1/3)=a^{1/3}$.

Очевидно, що $f(1/n)=a^{1/n}$; $f(m/n)=f^m(1/n)=a^{m/n}$,

$1=f(0)=f(-m/n+m/n)=f(-m/n)\cdot f(m/n)$, тому $f(-m/n)=1/f(m/n)=1/a^{m/n}=a^{-m/n}$.

Проведене дослідження дає змогу учням зробити висновок, що властивості 1-3 однозначно визначають функцію, значення якої у всіх раціональних точках обчислюються за формулою $f(x)=a^x$ ($a>0$, $a\neq 1$). Потім учитель показує, що аналітичний вигляд функції такий же й тоді, коли $x$ – ірраціональне число. Для цього розглядається послідовність раціональних чисел $\{r_n\}$ така, що $r_n\to x$ ($n\to\infty$). Тоді $f(r_n)\to f(x)$ ($n\to\infty$) в силу неперервності функції $f$. Але $f(r_n)=a^{r_n}$ ($r_n\in Q$). Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} f(r_n)=\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}=a^x$. Оскільки границя єдина, то $f(x)=a^x$, де $x\in R$.

Таким чином, учні знайомляться ще з одним способом задання функції як функції, яка є розв'язком деякого функціонального рівняння (його ще називають характеристичним), а також із одним із відомих методів розв'язування функціональних рівнянь – аналітичним (методом Коші).

При іншому введенні показникової функції увага учнів звертається на поняття функції як математичної моделі різних явищ природи. За такого підходу вчитель підводить учнів до того, щоб відшукати, побудувати, „відкрити" функцію, властивості якої відображають властивості деякого природного процесу.

Розглянемо конкретний природний процес. Нехай є множина клітин. У початковий момент часу кількість клітин приймемо за одиницю. За одиницю часу кількість клітин змінюється в $a$ разів. Нехай цією одиницею часу є доба Як змінюється чисельність клітин в залежності від часу?

Учні (за допомогою вчителя) з'ясовують, що: $f(0)=1$; $f(1)=a$; $f(2)=a\cdot f(1)=a\cdot a=a^2$; $f(3)=a\cdot f(2)=a\cdot a^2=a^3$. Тоді очевидно $f(n)=a^n$, де $n\in N$.

Значення $f(-1)$, тобто чисельність клітин за добу до початку відліку часу змінюється в $1/a$ разів: $f(-1)=f(0)/a=1/a=a^{-1}$; $f(-2)=f(-1)/a=a^{-2}$; $f(-3)=f(-2)/a=a^{-3}$.

Очевидно, що $f(-n)=a^{-n}$, де $n\in N$.

Далі легко знайти $f(1/n)$ ($1/n$ – це $n$-та частина доби).

Нехай $f(1/n)=t$, тоді $f(2/n)=t\cdot t=t^2$, $f(3/n)=t\cdot t^2=t^3$.

Очевидно, що $f(n/n)=f(1)=t^n$, звідки $t=f(1/n)=a^{1/n}$.

Тоді $f(m/n)=f^m(1/n)=a^{m/n}$ і $f(-m/n)=f(0)/f(m/n)=1/a^{m/n}=a^{-m/n}$.

Із проведеного дослідження учні роблять висновок, що цей процес інтерпретує функція $y=a^x$, де $x\in Q$. Оскільки розглянутий природний процес можна вважати неперервним, то далі аналогічно, як це було показано вище, доводиться, що і при $x\in R$ такою функцією буде функція $y=a^x$.

Логарифмічна функція в курсі алгебри і початків аналізу розглядається як функція, яка є оберненою до показникової. Властивості логарифмічної функції випливають із теореми про обернену функцію та відповідних властивостей показникової функції. У класах фізико-математичного профілю можна запропонувати учням довести, що для того, щоб функція $y=f(x)$ була логарифмічною, необхідно і достатньо, щоб вона задовольняла такі вимоги:

1) існувало таке $a\in R$, що $f(a)=1$, де $a>0$, $a\neq 1$;

2) для будь-яких $x,y\in R_+$ $f(x\cdot y)=f(x)+f(y)$ (характеристичне функціональне рівняння логарифмічної функції);

3) $f(x)$ – неперервна на множині $R_+$ функція.

Дійсно, в умові 2 покладемо $x=y$, тоді $f(x^2)=2f(x)$, $f(x^3)=f(x^2)+f(x)=3f(x)$.

Очевидно, що $f(x^n)=n\cdot f(x)$, $n\in N$ (строго це доводимо методом математичної індукції).

В останній рівності покладемо $x=x^{1/n}$, в результаті одержимо $f\left(x^{1/n}\right)=\dfrac{1}{n}f(x)$.

Тоді $f\left(x^{m/n}\right)=f\left(\left(x^{1/n}\right)^m\right)=\dfrac{m}{n}f(x)$, $m,n\in N$.

Покладемо в умові 2 $x=y=1$, тоді $f(1\cdot 1)=f(1)+f(1)$. Отже, $f(1)=0$.

Використовуючи це, одержимо $0=f(1)=f\left(x^{m/n}\cdot x^{-m/n}\right)=f\left(x^{m/n}\right)+f\left(x^{-m/n}\right)$.

Звідки $f\left(x^{-m/n}\right)=-f\left(x^{m/n}\right)=-\dfrac{m}{n}f(x)$.

Отже, для будь-якого $r\in Q$ $f\left(x^r\right)=r\cdot f(x)$.

Доведемо, що для довільного ірраціонального $\alpha$ $f\left(x^\alpha\right)=\alpha\cdot f(x)$. Розглянемо послідовність раціональних чисел $\{r_n\}$ таку, що $r_n\to\alpha$ ($n\to\infty$). Тоді $x^{r_n}\to x^\alpha$

($n \to \infty$) в силу неперервності показникової функції. Але $f\left(x^{r_n}\right) \to f\left(x^{\alpha}\right)$ ($n \to \infty$) в силу неперервності функції $y = f(x)$. За вище доведеним $f\left(x^{r}\right) = r \cdot f(x)$, тому $f\left(x^{r_n}\right) = r_n \cdot f(x)$.

Перейдемо до границі $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(x^{r_n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} r_n f(x) = \alpha \cdot \lim\limits_{n\to\infty} f(x) = \alpha \cdot f(x)$.

Оскільки границя єдина, то $f\left(x^{\alpha}\right) = \alpha \cdot f(x)$ для довільного $\alpha \in R$.

Тоді $f(x) = f\left(a^{\log_a x}\right) = \log_a x \cdot f(a) = \log_a x$.

Легко показати, що функція $y = \log_a x$ задовольняє умови 1-3. Отже, умови 1-3 однозначно визначають логарифмічну функцію.

Значний вплив на розвиток продуктивного мислення учнів справляє навчальний матеріал, що передбачає узагальнення та систематизацію знань, яких учні набули раніше. Це насамперед стосується теми про узагальнення поняття степеня і степеневу функцію. Учні знайомляться з поняттям степеня з раціональним та ірраціональним показниками, переконуються, що для будь-якого $p \in R$ і довільного $x \in R_+$ визначене число $x^p$, а отже, для таких $x$ і $p$ визначена функція, яку називають степеневою. Важливо, щоб вчитель наголосив на тому, що область визначення і зміни степеневої функції, а також її властивості залежать від того, яким числом є показник $p$, і розглянув можливі випадки: $p$ – натуральне, ціле від'ємне, дробове (раціональне), ірраціональне.

У класах з поглибленим вивченням математики та фізико-математичного профілю степеневу функцію можна означити так:

1) функція, яка тотожно не рівна нулю і одиниці;

2) функція, яка є неперервною на множині $R_+$;

3) для довільних $x, y \in R_+$ $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ (характеристичне функціональне рівняння степеневої функції).

Покажемо, що це дійсно так. Покладемо $x = a^t$, $y = a^s$, де $t, s \in R$, $a > 0$, $a \neq 1$, тоді згідно з умовою 3 $f\left(a^t \cdot a^s\right) = f\left(a^{t+s}\right) = f\left(a^t\right) \cdot f\left(a^s\right)$.

Введемо допоміжну функцію $g(z) = f\left(a^z\right)$, яка, очевидно, буде неперервною на всій множині $R$. Із останнього співвідношення одержуємо $g(t+s) = g(t) \cdot g(s)$, що є характеристичним функціональним рівнянням показникової функції. Отже, $g(z) = b^z$, де $b > 0$ і $b \neq 1$ (при $b = 1$ $g(z) = 1$, що суперечить умові 1).

Таким чином, $f\left(a^z\right) = b^z$. Нехай $a^z = x$, звідки $z = \log_a x$.

Або $f(x) = b^{\log_a x} = \left(a^{\log_a b}\right)^{\log_a x} = \left(a^{\log_a x}\right)^{\log_a b} = x^{\log_a b}$.

Таким чином, справді $f(x) = x^p$, де $p = \log_a b$ – стала.

Аналіз навчально-методичної літератури показує, що в шкільному курсі математики тригонометричні функції задаються геометрично. Але шкільний курс геометрії не завжди задовольняє вимогам строгості, а тому і ряд доведень, що використовуються в тригонометрії, теж є недостатньо строгими. Тому бажано (особливо для використання в аналізі) задати тригонометричні функції без використання геометричних міркувань. В основу означення тригонометричних функцій можна покласти деякі характерні і незалежні одна від одної властивості тригонометричних функцій. Зрозуміло, що такий спосіб задання тригонометричних функцій може бути використано в класах з поглибленим вивченням математики або в класах фізико-математичного профілю. Наведемо приклад.

Нехай $S(x)$, $C(x)$ – деякі функції, визначені на множині $R$, що задовольняють таким властивостям:

$$S(x-y)=S(x)\cdot C(y)-S(y)\cdot C(x), \text{ для-будь якого } x,y\in R,$$
$$C(x-y)=C(x)\cdot C(y)+S(x)\cdot S(y), \text{ для-будь якого } x,y\in R,$$
$$C(\pi/2)=0,\ C(x)>0 \text{ на } (0;\pi/2).$$

Можна показати, що $S(x)\equiv\sin x$ і $C(x)\equiv\cos x$, де $y=\sin x$ і $y=\cos x$ – функції означені звичайним (шкільним) способом.

Розв'язком функціонального рівняння

$$f(x+y)=(f(x)+f(y))/(1-f(x)\cdot f(y)),\ x,y\in R,$$

де $f$ – диференційовна функція і $f'(0)=1$, є функція $y=tg\,\mathrm{x}$.

Варто підкреслити, що процес розв'язування функціональних рівнянь, який був наведений вище, – це непроста, цікава пошукова робота. Її можна назвати процесом „відкриття" деякої функції за її характеристичними властивостями. Це дає змогу проілюструвати прикладну значимість методів математики, оскільки, знаючи деякі характеристики природних явищ, можна знайти функцію (математичну модель), яка інтерпретує досліджуваний процес, а отже, і вивчити та пояснити ще невідоме та непізнане. Для реалізації розвивальної функції навчання курсу алгебри і початків аналізу в класах з поглибленим вивченням математики, фізико-математичного профілю, при роботі із здібними та обдарованими з математики учнями, варто вивчати функціональні рівняння, відомі способи їх розв'язування: аналітичний (метод Коші), способи підстановки, ітерацій, диференціювання та інші.

Доцільно, щоб тема „Функціональні рівняння та способи їх розв'язування" увійшла в обов'язковий курс алгебри і початків аналізу класів з поглибленим вивченням математики та фізико-математичного профілю.

## ЛІТЕРАТУРА


1. М.І.Шкіль, З.І.Слєпкань, О.С.Дубинчук. "Алгебра і початки аналізу 10-11". - К.: "Зодіак-Еко", 1995. - 330 с.
2. А.М.Колмогоров. "Алгебра і початки аналізу 10-11". - К.: Рад. школа, 1990. - 220 с.