

## Навчання учнів основної школи методам геометричних перетворень

Однією з головних відмінностей системи розвивального навчання від традиційної є орієнтація на знаходження способів та методів розв'язування цілих класів задач завдяки змістово-теоретичним діям (аналізу, абстрагуванню, узагальненню, плануванню та рефлексії), що лежать в основі науково-теоретичного мислення. Згідно з теорією розвивального навчання шкільний навчальний процес має бути організований у формі постановки та розв'язування навчальних задач, що передбачає знаходження загального способу розв'язування багатьох частинних задач певного класу [1: 248]. Це дозволяє учням розв'язувати нові частинні задачі відповідно до логіки сходження від абстрактного (загального) до конкретного.

Аналіз стану геометричної підготовки випускників загальноосвітніх шкіл дозволяє зробити висновок про те, що актуальною **навчально-методичною проблемою** залишається організація навчальної діяльності школярів у процесі оволодіння методами геометричних перетворень: паралельного перенесення, центральної та осьової симетрії, повороту, перетворення подібності (гомотеції). Вважаємо, що одними з головних причин її є відсутність у шкільній навчальній літературі відповідної системи задач, а також недостатня розробленість навчальних моделей методів геометричних перетворень розв'язування конструктивних задач планіметрії. З іншого боку, трактування німецьким математиком Феліксом Клейном геометрії як науки про властивості фігур, що є інваріантними відносно деякої **групи перетворень**, може слугувати тією основою, яка дозволяє сформулювати в учнів цілісне уявлення про її сутність. Формування у школярів системних знань, знань про способи одержання нових знань, що насамперед пов'язується з їх розвитком як суб'єктів навчальної діяльності, стає особливо актуальним у сучасному суспільстві. **Мета цієї статті:**

- 1) визначити базові (опорні) задачі методів геометричних перетворень;
- 2) навести приклад моделі організації вчителем колективної навчальної діяльності школярів у процесі розв'язування однієї з базових задач;
- 3) побудувати навчальні моделі методів паралельного перенесення та подібності, вказати на особливості структури моделей інших геометричних перетворень;
- 4) навести приклад реалізації побудованої навчальної моделі до розв'язування задачі на побудову.

За базову задачу, що розв'язується методом паралельного перенесення, можна вибрати таку:

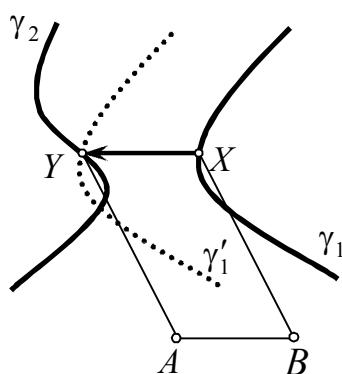


Рис. 1

**Задача 1.** Побудувати відрізок рівний і паралельний даному з кінцями на двох даних кривих (рис. 1).

Організація колективного розв'язування цієї задачі у формі евристичної бесіди може мати такий характер.

**Учитель.** Для побудови відрізка проведемо аналіз. Отже, з чого необхідно виходити в процесі розв'язання задачі?

**Учень.** Потрібно припустити, що відрізок  $XY$  задовольняє умові задачі.

**Учитель.** Розгляньте чотирикутник  $ABXY$  та обґрунтуйте, до якого виду він відноситься.

**Учень.** Чотирикутник  $ABXY$  є паралелограмом, оскільки в ньому дві протилежні сторони паралельні та рівні.

**Учитель.** Яким чином можна побудувати точку  $Y$ , якщо відома точка  $X$ ?

**Учень.** Точка  $Y$  може бути одержана паралельним перенесенням точки  $X$  в напрямку прямої  $AB$  на відстань, яка дорівнює довжині відрізка  $AB$ .

**Учитель.** Якщо виконати назване паралельне перенесення всієї кривої  $\gamma_1$ , то одержимо образ цієї кривої – криву  $\gamma'_1$ . Як тоді може бути знайдена точка  $Y$ ?

**Учень.** Точка  $Y$  буде точкою перетину кривих  $\gamma_2$  і  $\gamma'_1$ , оскільки з одного боку точка  $Y$  належить кривій  $\gamma_2$ , а з іншого – кривій  $\gamma'_1$ .

**Учитель.** Побудувавши точку  $Y$ , яким чином можна знайти точку  $X$ ?

**Учень.** Точка  $X$  може бути побудована за допомогою оберненого паралельного перенесення до виконаного.

**Учитель.** Розв'яжемо ще одну задачу з підручника О.В. Погорелова [2: 96].

**Задача 2.** Побудувати трапецію за її сторонами  $a, b, c, d$ .

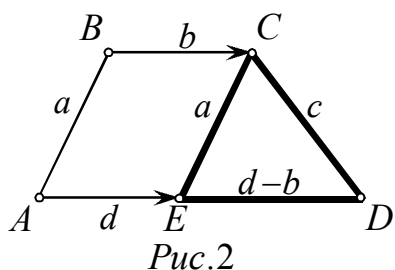


Рис. 2

У процесі колективного розв'язування поставленої задачі (на етапі аналізу), яке організоване у формі евристичної бесіди, учні приходять до висновку про доцільність виконання паралельного перенесення бічної сторони трапеції в напрямку її основ на задану відстань (довжину однієї з основ). У результаті цього одержується трикутник, який можна побудувати за трьома сторонами. Обернене паралельне перенесення дозволяє визначити всі

вершини шуканої трапеції (рис. 2).

**Учитель.** Проаналізуємо розв'язання цих задач, виділимо істотні етапи та розробимо на цій основі метод паралельного перенесення розв'язування типових задач (постановка навчальної задачі).

Результатом виконаної колективної навчальної діяльності має стати побудова навчальної моделі розв'язування задач конструктивної геометрії методом паралельного перенесення. Вона може мати такий вигляд.

1. Аналіз задачі, у процесі якого обґрунтовується доцільність побудови відрізка рівного та паралельного даному з кінцями (кінцем) на заданих кривих (кривій).

2. Виконання паралельного перенесення кривої (фігури) в заданому напрямку на задану відстань.

3. Знаходження точки (точок) перетину іншої заданої кривої (фігури) з кривою-образом.

4. Виділення допоміжної фігури (зазвичай трикутника), яку можна побудувати за даними задачі.

5. Побудова допоміжної фігури за допомогою циркуля й лінійки, що, як правило, відноситься до однієї з основних побудов.

6. Виконання оберненого паралельного перенесення (побудованої точки чи допоміжної фігури).

7. Контроль за виконанням попередніх навчальних дій.

8. Перевірка того, що одержана фігура є шуканою (задовольняє вимогам задачі).

9. Оцінка засвоєння методу паралельного перенесення розв'язування задач на побудову.

Зазначимо, що сьома і дев'ять навчальні дії є необхідними складовими як у процесі розв'язування навчальних задач, так і структури навчальної діяльності в цілому, оскільки „брати участь в навчальному процесі як суб'єкт учень може в тому випадку, якщо він може самостійно знаходити і критично оцінювати загальні способи розв'язування задач” [3: 16].

Наступним етапом організації навчальної діяльності учнів (як колективно розподіленої, так і індивідуальної) має бути розв'язування системи задач конструктивної геометрії, який за своїм змістом є реалізацією логіки сходження від загального (абстрактного) до конкретного: маючи загальну навчальну модель учні переходять до розв'язування конкретних задач на побудову. Вважаємо, що до системи пропонує задач можуть увійти такі:

1. Побудувати трапецію за основами та діагоналями.
2. Побудувати трикутник за його медіанами.
3. Побудувати трапецію за різницею основ, двома бічними сторонами та однією діагоналлю.
4. Побудувати чотирикутник, знаючи його діагоналі, дві протилежні сторони і кут між цими сторонами.
5. Побудувати чотирикутник за сторонами та кутом між парою протилежних сторін.
6. Побудувати чотирикутник, знаючи три його сторони і кути, що прилягають до четвертої сторони.
7. Побудувати чотирикутник, знаючи його діагоналі, дві протилежні сторони і кут між цими сторонами.
8. Побудувати відрізок, рівний і паралельний даному з кінцями на двох даних колах (двох даних прямих; з одним кінцем на даному колі, а іншим – на даній прямій).

9\*. У якому місці потрібно побудувати міст  $MN$  через річку, яка розділяє населені пункти  $A$  і  $B$ , щоб шлях  $AMNB$  був найкоротшим (береги річки вважаються паралельними, а міст будується перпендикулярно до берегів).

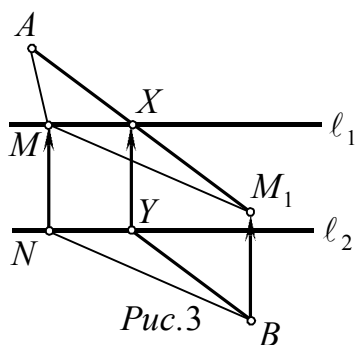


Рис.3

Перші сім задач передбачають реалізацію усієї представлені навчальної моделі, восьма – не потребує реалізації пунктів 4 і 5, а дев'ята (олімпіадна) – передбачає використання в процесі аналізу нерівності трикутника (рис. 3).

Наведемо приклади базових задач, які розв'язується методами геометричних перетворень.

**Задача 3.** Побудувати відрізок із серединою в даній точці і кінцями на двох даних кривих (центральна симетрія).

**Задача 4.** Побудувати відрізок з кінцями на двох даних кривих, серединою на даній прямій, так щоб пряма, яка містить цей відрізок, була перпендикулярною до цієї прямої (осьова симетрія).

**Задача 5.** Побудувати рівнобедрений трикутник із вершиною в заданій точці  $A$ , кутом при цій вершині  $\alpha$ , так щоб дві інші його вершини, що належать основі, містились на двох заданих кривих  $\gamma_1, \gamma_2$  (поворот).

**Задача 6.** Через дану точку  $A$  провести пряму так, щоб дані дві криві  $\gamma_1, \gamma_2$  відтинали на ній відрізки, довжини яких, рахуючи від точки  $A$ , відносилися б у заданому відношенні  $m/n$  (перетворення подібності).

Навчальна діяльність учнів у процесі розв'язування наведених задач організовується аналогічно базовій, що розв'язується методом паралельного перенесення. Вважаємо, що для побудови відповідних навчальних моделей доцільно додатково розв'язати ще по одній задачі на кожен із методів.

**Задача 7.** Побудувати трикутник за двома сторонами і медіаною, проведеною до третьої сторони (центральна симетрія).

**Задача 8.** Побудувати трикутник  $ABC$ , якщо дані дві його сторони  $b$  і  $c$ , кут  $\varphi$ , що задовольняє умові  $\sphericalangle B - \sphericalangle C = \varphi$  (осьова симетрія).

**Задача 9.** Дано коло і точка всередині нього. Побудувати пряму, яка проходить через задану точку й відтинає хорду кола заданої довжини (поворот).

**Задача 10.** Побудувати трикутник за двома кутами і бісектрисою третього кута (метод подібності).

Результатом організованого вчителем конструктивного діалогу (евристичної бесіди) стає спосіб розв'язування пропонованих задач. Змістовий аналіз розв'язання наведених пар задач кожного з методів дозволяє виділити змістові узагальнення знайдених способів, що слугують основою для побудови навчальних моделей методів центральної, осьової

симетрій, повороту, подібності. Структура моделей названих методів рухів ізоморфна структурі навчальної моделі методу паралельного перенесення, тобто існує взаємно однозначна відповідність між їх компонентами, операціями (перетвореннями), результатами операцій. Тому не викликає значних труднощів побудова ще трьох навчальних моделей: центральної, осьової симетрій та повороту. Виділимо основні компоненти навчальної моделі методу подібності – перетворення, яке лежить в основі метричної геометрії й може бути розкладене в добуток (композицію) гомотетії й руху.

1. Аналіз задачі, у процесі чого встановлюється доцільність у побудові фігури, яка подібна заданій чи шуканій із заданим або визначеним коефіцієнтом подібності.

2. Виконання перетворення подібності (гомотетії) заданої фігури (при відомому коефіцієнті подібності) або побудова допоміжної фігури, що подібна шуканій, завдяки можливості довільного вибору деякого її елемента (елементів).

3. Знаходження точки (точок) перетину фігури-образу та заданої або обчислення коефіцієнта подібності побудованої фігури та шуканої.

4. Побудова шуканої фігури (за знайденими її точками або як фігури-образу перетворення подібності).

5. Контроль за виконанням попередніх навчальних дій.

6. Перевірка того, що одержана фігура є шуканою (задовольняє вимогам задачі).

7. Оцінка засвоєння методу перетворення подібності розв'язування задач на побудову.

Складність навчальної моделі методу подібності пов'язується з ширшою в порівнянні з рухами модифікацією задач, а також тим, що умови, які визначають розміри фігури, можуть бути двох видів: довжина якого-небудь елемента фігури або розміщення фігури відносно інших фігур [4: 279].

Побудована навчальна модель є загальним орієнтиром у процесі розв'язування задач на побудову методом подібності. Наведемо приклад.

**Задача 11.** Побудувати трикутник за трьома висотами  $h_a, h_b, h_c$ .

Реалізуємо побудовану навчальну модель.

1. Нехай трикутник  $ABC$  задовольняє умові задачі. Скористаємось властивістю висот трикутника

$$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$

А тому відомі відношення сторін шуканого трикутника. Отже, одразу ж можна побудувати трикутник, який буде подібним до шуканого. Коефіцієнт подібності може бути визначений як відношення довжин відповідних відрізків  $k = \frac{h_a}{h_a} = \frac{h_b}{h_b} = \frac{h_c}{h_c}$ , де  $\bar{h}_a, \bar{h}_b, \bar{h}_c$  – висоти трикутника, проведені відповідно на сторони  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  трикутника, що подібний шуканому.

2. Будуємо трикутник, подібний до шуканого. Для цього одну із сторін трикутника вибираємо довільно, наприклад сторону  $\bar{a}$ . Тоді дві інші знаходимо із рівностей (будуючи четверте пропорційне):

$$\bar{b} = \frac{h_a}{h_b} \bar{a}, \quad \bar{c} = \frac{h_a}{h_c} \bar{a}.$$

Отже, будуємо трикутник за трьома сторонами  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ .

3. Знаходимо відрізок висоти  $\bar{h}_a$  побудованого трикутника, опущеної на сторону  $\bar{a}$ .

4. Виконуємо перетворення гомотетії побудованого трикутника з центром в довільній точці та коефіцієнтом  $k = \frac{h_a}{\bar{h}_a}$ . Одержуємо шуканий трикутник.

5. Усі виконані навчальні дії відповідають структурі навчальної моделі методу подібності.

6. Висоти побудованого трикутника дорівнюють заданим в умові задачі:

$$k \cdot \bar{h}_a = h_a, k \cdot \bar{h}_b = h_b, k \cdot \bar{h}_c = h_c.$$

7. Метод подібності розв'язування задач на побудову засвоєний повною мірою.

Складання вчителем систем задач на кожен із методів геометричних перетворень може здійснюватися на основі підручника з геометрії О.В. Погорелова [2] та інших посібників [5, 6]. Першочерговим у наступному етапі педагогічної діяльності вчителя має бути контроль і діагностика рівня засвоєння учнями розроблених навчальних моделей, управління груповою та індивідуальною навчальною діяльністю школярів у процесі розв'язування поставлених задач. Вважаємо, що неменше актуальною **навчально-методичною проблемою** є управління навчальною діяльністю школярів у процесі вивчення алгебричного методу та методу геометричних місць точок.

#### Література

1. Давыдов В.В. Теория развивающего обучения /Международная Ассоциация «Развивающее обучение». – М.: Интор, 1996. – 544 с.
2. Погорелов О.В. Геометрія: Підручник для 7-11 класу середньої школи. – К.: Рад. школа, 1991. – 352 с.
3. Давыдов В.В., Репкин В.В. Организация развивающего обучения в V-IX классах средней школы //Психологическая наука и образование. – 1997. – №1. – С. 15-34.
4. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підручник для студентів математичних спеціальностей педагогічних навчальних закладів. – К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – 512 с.
5. Сборник задач по геометрии: Часть II. /Под ред. Л.С. Атанасяна. – М.: Просвещение, 1975. – 176 с.
6. Боравльов А.П., Ленчук І.Г. Аналіз у розв'язуванні задач на побудову: Посібник для студентів математичних спеціальностей. – К.: Вища школа, 2002. – 192 с.