УДК 372. 851: 51

С.П. Семенець

ЩОДО ВИКОРИСТАННЯ ПЕДАГОГІЧНОГО ПРОГРАМНОГО ЗАСОБУ «GRAN 1 » ПРИ ВИВЧЕННІ КУРСУ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ

Проілюстровано використання педагогічного програмного засобу «GRAN 1», що сприяє якісному формуванню провідних понять математичного аналізу (границя, неперервність, диференційовність) на наочно-інтуїтивному рівні, самостійному «відкриттю» учнями деяких властивостей, правил, теорем, наводить спосіб розв’язування тієї чи іншої задачі або прикладу, значно скорочує розв’язання непростих завдань на доведення, дослідження, дозволяє проводити дослідження самими учнями, швидко перевіряти правильність висунутих гіпотез.

Ефективність використання засобів нових інформаційних технологій навчання [НІТН] при вивченні курсу алгебри і початків аналізу, як і математики в цілому, в значній мірі залежить від педагогічних програмних засобів, які дозволяють поєднати високі обчислювальні можливості при дослідженні різноманітних функціональних залежностей з перевагами графічного подання результатів опрацювання інформації, дають можливість економити навчальний час за рахунок виключення рутинних операцій обчислювального характеру, озброюють учнів ефективними наочними методами розв’язування широкого класу задач.

При використанні комп’ютера доцільно орієнтуватись на такі педагогічні програмні засоби [ППЗ], які створюють підгрунтя для переходу від механічного застосування знань, умінь та навичок до оволодіння вміннями самостійно «відкривати» знання на основі здійснення експериментально-дослідницької діяльності. Такі ППЗ стимулюють продуктивну пізнавальну діяльність учнів, формують уміння застосовувати знання в нових ситуаціях, мобілізують і розвивають розумові операції, зближують мислительну діяльність із науковим пошуком, знайомлять з етапами, методами і прийомами дослідження, виявляють позитивний вплив на формування дослідницьких здібностей та умінь, а отже, сприяють формуванню та розвитку продуктивного мислення учнів.

Прикладом таких ППЗ при вивченні курсу алгебри і початків аналізу можуть бути програми, зорієнтовані на візуалізацію абстракцій (границя, неперервність, похідна, інтеграл) і проведення експерименту. Цим питанням присвячені дисертаційні дослідження Ю.В. Горошко [1], В.В. Дровозюк [2], І.М. Забари [3], Т.О. Олійник [4]. Безпосередньо націлюють на розвиток продуктивного мислення учнів інструментальні та моделюючі ППЗ. Дисертаційне дослідження О.Б. Жильцова [5] показало, що інструментальні ППЗ раціонально використовувати для розвитку самостійного мислення, дослідницьких умінь, творчого підходу до справи, коли матеріал має середній рівень складності, може бути поданий засобами унаочнення, при роботі із «творчими» учнями. Моделюючі ППЗ - для розвитку абстрактного мислення, спостережливості, коли зміст теми має теоретико-інформаційний характер, потребує проведення досліджень, якщо в учнів розвинені дослідницькі риси.

Зупинимося на використанні інструментального програмного засобу [ІПЗ] «GRAN 1», що сприяє формуванню та розвитку продуктивного мислення учнів при вивченні ними деяких тем курсу алгебри і початків аналізу. Значне місце цьому питанню відводиться в роботах М.І. Жалдака, зокрема в посібнику для вчителів «Комп’ютер на уроках математики» [6].

1. Границя числової послідовності.

ІПЗ "GRAN 1" може бути використаний як ефективний засіб графічного аналізу функції, визначеної на множині натуральних чисел, тобто числової послідовності. Корисно використати цю програму для введення поняття про границю числової послідовності на наочно-інтуїтивному рівні. Для цього аргумент $n \in N$ замінюється на аргумент $x \in R(x>0)$. Правомірність цього кроку випливає з відомої теореми про зв’язок границі функції з границею послідовності: для того, щоб $f(n) \to A(n \to \infty)$, достатньо, щоб $f(x) \to A(x \to \infty)$.

Варто, щоб учні, виходячи з графічного представлення, дали відповідь, чи мають послідовності

а) $x_n = \frac{1}{n} cos \ \frac{\pi n}{2}$, б) $x_n = sin \ \frac{\pi n}{2}$, в) $x_n = n \, sin \ \frac{\pi n}{2}$ границю, якщо так, то чому вона дорівнює?

Методом евристичної бесіди вчитель підводить учнів до «відкриття» таких фактів:

- якщо послідовність збіжна, тоді вона обмежена (необхідна умова збіжності числової послідовності). Необмежена послідовність - не збіжна (приклад в);
- якщо послідовність обмежена, тоді вона не обов’язково є збіжною (приклад б);
- спадна (зростаюча) обмежена послідовність є збіжною (теорема Вейєрштрасса, приклад а).

Після цього пропонуються завдання: встановити, чи має послідовність $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ границю. Якщо має, то між якими двома цілими числами ця границя знаходиться?

Виходячи із графіка функції $y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, де $x>0$, учні роблять висновок, що послідовність зростаюча. Провівши графічні дослідження, переконуються, що функція обмежена (графік функції має горизонтальну асимптоту). На основі «відкритої» достатньої умови збіжності числової послідовності, учні роблять висновок, що розглядувана послідовність має границю, яка міститься між числами 2 і 3 (в чому учні легко переконуються, перевіривши, що рівняння $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}-2=0$ має корінь, а рівняння $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}-3=0$ - не має).

Таким чином, учні підходять до «відкриття» другої визначної границі: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$. Крім того, виходячи із графічного аналізу функції $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$, вони зможуть обчислити число «e» з досить великою точністю, для цього достатньо прослідкувати за максимальним значенням розглядуваної функції в залежності від проміжку її задання.

2. Границя функції неперервного аргументу.

На основі графічно заданої функції: $f(x)=\begin{cases}-x^2+1, x\in[-4;0]\\ x, x\in(0;2]\\ x^2-2, x\in(2;4]\\ 5, x\in(4;6]\end{cases}$ учні дають відповідь на питання, чи має ця функція границю в точках $x=0,\ x=2,\ x=4$. Після цього, виходячи із графіків функцій $а)\ y=\frac{\sin\ x}{x};\ б)\ y=\sin\ \frac{1}{x};\ в)\ y=x\sin\ x;\ г)\ y=\frac{|x|}{x}$, визначають, чи мають функції границю в точці $x=0$, і переконуються, що:

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ (перша визначна границя);
- для того, щоб в точці існувала границя функції, не обов’язково, щоб в ній ця функція була визначена (приклад а);
- добуток нескінченно малої на обмежену буде нескінченно малою (приклад в);
- якщо функція має границю в точці, то в досить малому околі цієї точки вона є обмеженою.

3. Неперервність функції в точці.

ІПЗ "GRAN 1" можна використати для формування поняття неперервності функції в точці на основі наочно-інтуїтивних уявлень, а також при перевірці рівня засвоєння учнями поняття на рівні "розпізнавання", тобто тоді, коли учні повинні в конкретних випадках (виходячи із графіка функції) відповісти на питання, чи має функція границю в точці, чи неперервна вона в ній. Для забезпечення продуктивної розумової діяльності учнів необхідно, щоб поняття границі функції в точці і неперервності з самого початку вивчення вводилися в тісному взаємозв’язку із розкриттям відношень між ними. Означення поняття неперервності функції в точці формулюється із опорою на характеристичну властивість неперервної функції: значення функції неперервної в точці мало змінюється при малих змінах аргументу. Учитель все це може реалізувати з допомогою графічного задання функції із використанням ІПЗ «GRAN 1».

Виходячи із графічного задання конкретної ступінчастої функції, вчитель підводить учнів до «відкриття» факту: для того, щоб функція була неперервною в точці, необхідно, щоб вона в цій точці мала скінчену границю. Після цього пропонується завдання, чи є функції $а)\ y=x\sin\frac{\pi}{x};\ б)\ y=\frac{\sin\ x}{x};\ в)\ y=arctg\,\frac{1}{x}$ неперервними в точці $x=0$, якщо ні, то чи можна їх доозначити так, щоб вони стали неперервними? За допомогою цієї вправи вчитель підводить учнів до «відкриття» факту: функція є неперервною в точці тоді і тільки тоді, коли вона визначена в ній і границя функції в цій точці дорівнює значенню функції в цій точці. Далі, на конкретних прикладах, використовуючи головне призначення програми "GRAN 1" - графічний аналіз функції, вчитель з допомогою методу евристичної бесіди "відкриває" з учнями деякі глобальні властивості неперервних функцій:

- якщо функція неперервна на відрізку, то вона на ньому обмежена (теорема Вейєрштрасса);
- якщо функція неперервна на відрізку, то на ньому знайдуться такі дві точки, в одній з яких вона набуває найбільшого значення, а в другій-найменшого (теорема Вейєрштрасса);
- якщо функція неперервна на відрізку і в кінцях цього відрізка набуває значення, протилежні за знаком, тоді на відрізку знайдеться хоч одна така точка, в якій функція дорівнює нулю (теорема Больцано-Коші).

4.Диференційовність функції в точці.

Графічний аналіз функції дає змогу досліджувати функції на диференційовність в точці. Адже питання про існування похідної функції в точці геометрично зводиться до існування невертикальної дотичної до графіка функції в точці. Наведемо приклади.

Чи є функції: $а)\ y=x^3;\ б)\ y=\sqrt[3]{x^2};\ в)\ y=|\sin x|;\ г)\ y=\frac{\sin\ x}{x}$ диференційовними у точці $x_0=0$?

Виходячи із графіків заданих функцій та геометричного змісту похідної, вчитель підводить учнів до таких висновків:

- функції не мають похідної в точках розриву функції (приклад а);
- функції не мають похідної в точках "злому" функції (приклад в);

- функції не мають похідної в точках, в яких дотичні перпендикулярні осі Ох (приклад б);
- в точках екстремуму похідна функції або дорівнює нулю, або не існує (приклади б, в, теорема Ферма);- критичні точки функції не обов’язково є точками екстремуму (приклад а).

5. Розв’язування рівнянь та нерівностей.

ІПЗ "GRAN 1" дає змогу розв’язувати всі типи рівнянь і нерівностей, які зустрічаються в шкільному курсі математики. Однак варто звернути увагу на те, що використання цього програмного засобу досить часто сприяє евристичній діяльності щодо способу розв’язування рівняння чи нерівності без використання комп’ютера. Наведемо приклади.

5.1 Розв’язати рівняння: а) $\cos x + x = \frac{\pi}{2}$; б) $2^x + x = 3$; в) $\ln x + x = 1$; г) $\sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{6-x} = \sqrt{2}$;

д) $\sqrt[4]{77+x} + \sqrt[4]{20-x} = 3$.

Учні будують графіки функцій, які є лівими частинами заданих рівнянь. Роблять висновок, що перші три функції є зростаючими, тобто монотонними. А це означає, що кожного свого значення ці функції набувають лише один раз. Тобто, якщо рівняння має корінь, то він єдиний, причому корінь дуже легко підібрати. Отже, учні роблять висновок: щоб розв’язати перші три рівняння, досить довести, що функції, які стоять у лівих частинах рівняння, монотонні і підібрати корінь. Провівши графічний аналіз функцій $f(x) = \sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{6-x}$, $g(x) = \sqrt[4]{77+x} + \sqrt[4]{20-x}$, учні роблять висновок, що функція $g(x)$ набуває найменшого значення, яке більше за три, а функція $f(x)$ набуває найменшого значення в точках $x = 2$ і $x = 6$, яке дорівнює $\sqrt{2}$. Отже, рівняння $\sqrt[4]{77+x} + \sqrt[4]{20-x} = 3$ не має коренів. Для цього досить довести, що $\sqrt[4]{77+x} + \sqrt[4]{20-x} > 3$. Справді, $\sqrt[4]{77-x} + \sqrt[4]{20-x} = \sqrt[4]{\left(\sqrt[4]{77-x} + \sqrt[4]{20-x}\right)^4} \geq$ $\geq \sqrt[4]{\left(\sqrt[4]{77+x}\right)^4 + \left(\sqrt[4]{20-x}\right)^4} = \sqrt[4]{97} > 3$. Рівняння $\sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{6-x} = \sqrt{2}$ має лише корені $x = 2$ і $x = 6$. Для цього досить довести, що $\sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{6-x} \geq \sqrt{2}$, причому рівність досягається лише в точках $x = 2$ і $x = 6$. Справді, $\sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{6-x} = \sqrt[4]{\left(\sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{6-x}\right)^4} \geq \sqrt[4]{(x-2)^4 + (6-x)^4} = \sqrt{2}$. Очевидно рівність досягається тоді і тільки тоді, коли або $\sqrt[4]{x-2} = 0$ (при $x = 2$), або при $\sqrt[4]{6-x} = 0$ (при $x = 2$).

5.2 Розв’язати рівняння: а) $x^2 - x + 1 = 0{,}5 + \sqrt{x - 0{,}75}$; б) $x^2 - 4x + 6{,}2 = 2 + \sqrt{x - 2{,}2}$.

Яким способом розв’язувати наведені рівняння на основі знань шкільної математики, важко дати відповідь. ІПЗ "GRAN 1", крім того, що дає змогу знайти корені, підводить до розв’язання таких рівнянь, які не потребують використання комп’ютера. Справді, побудувавши графіки функцій, які містяться у лівих і правих частинах цих рівнянь, учні помічають, що вони симетричні відносно прямої $y = x$ на проміжку, де визначена ірраціональна функція, після чого вони висувають гіпотезу, що ліві і праві частини наведених рівнянь - взаємообернені функції на області допустимих значень (ОДЗ) невідомих рівнянь, і строго доводять, що це справді так. Для знаходження коренів рівнянь потрібно знайти абсциси точок перетину взаємообернених функцій. Зрозуміло, що ці точки знаходяться на прямій $y = x$. Отже, одну із взаємообернених функцій (краще ірраціональну) можна замінити функцією $y = x$. Одержані рівняння матимуть з початковими однакові корені на множині, яка належить ОДЗ невідомих початкових рівнянь. Таким чином, учні приходять до висновку: щоб знайти корені наведених рівнянь, досить розв’язати квадратні рівняння, замінивши вирази, які стоять у правих частинах рівнянь, на x. А потім перевірити, які з одержаних коренів належать ОДЗ наведених рівнянь.

5.3 Розв’язати нерівність: а) $2 + \sin x > \frac{1}{1+x^2}$; б) $\sqrt{4+x} + \sqrt{16-x} > 2$.

Графічний аналіз функцій, проведений з допомогою ІПЗ "GRAN1", приводить до висновку, що наведені нерівності виконуються на всій ОДЗ кожної із нерівностей. Таким чином, учні усвідомлюють, що розв’язання нерівностей зводиться до їх доведення.

6. Розв’язування завдань на порівняння. Що більше:

а) $3^{\sqrt{2}}$ чи $2^{\sqrt{3}}$; б) $1997^{1/1997}$ чи $1998^{1/1998}$; в) e^{π} чи π^{e} ?

Учитель організовує колективний пошук способу розв’язання таких завдань, в результаті якого учні приходять до висновку: для того, щоб порівняти наведені числа, досить дослідити функцію $y = x^{1/x}$. Це учні роблять самостійно з допомогою ІПЗ «GRAN 1».

Таким чином, наочність - це не тільки допоміжний засіб при розв’язуванні різноманітних задач, вона допомагає прийти до глибоких теоретичних висновків. Проте необхідно, щоб учні усвідомлювали, що тільки строгі логічні теоретичні обгрунтування можуть підтвердити правильність наочно-інтуїтивних висновків.

Експериментально автором було підтверджено, що наведене використання ІПЗ «GRAN 1» сприяє:

1) якісному формуванню провідних понять математичного аналізу (границя, неперервність, диференційовність) на наочно-інтуїтивному рівні;

2) самостійному «відкриттю» учнями деяких важливих властивостей, правил, теорем;

3) наводить на спосіб розв’язування тієї чи іншої задачі або прикладу;

4) значно скорочує та спрощує розв’язування непростих завдань на доведення, дослідження;

5) дає змогу експериментувати, проводити дослідження самими учнями, швидко перевіряти правильність висунутих гіпотез.

ЛІТЕРАТУРА

1. Горошко Ю. В. Вплив нової інформаційної технології на практичну значимість результатів навчання математики в старших класах середньої школи: Автореф. дис.... канд. пед. наук. - Київ, 1992. - 20 с.
2. Дровозюк В. В. Методика изучения элементов теории пределов числовых последовательностей с использованием НИТ: Автореф. дисс.... канд. пед. наук. - Киев, 1991. - 22 с.
3. Забара И. М. Интеллектуальные тренажёры и методика их использования в преподавании математических дисциплин: Автореф. дисс.... канд. пед. наук. - Харьков, 1992. - 20 с.
4. Олейник Т. В. Учебная исследовательская деятельность на основе НИТО как средство формирования математических представлений (на материале изучения курса алгебры и начал анализа): Автореф. дисс.... канд. пед. наук. - Харьков, 1992. - 24 с.
5. Жильцов О. Б. Розвиток розумової діяльності учнів 7 класів середньої школи при вивченні математики з використанням НІТ: Автореф. дис.... канд. пед. наук. - Київ, 1994. - 24 с.
6. Жалдак М. І. Комп’ютер на уроках математики: Посібник для вчителів. - Київ : Техніка, 1997.-303с.

Семенець Сергій Петрович - асистент кафедри математики Житомирського державного педагогічного інституту ім. І.Франка.

Наукові інтереси:

– методика викладання математики (реалізація розвиваючої функції навчання математики).