Болтьонков В.О.,
кандидат технічних наук, доцент,
доцент кафедри інформаційних систем,
Левченко С.В.,
студент 6 курсу інституту комп’ютерних систем,
Куваєва В.І.,
асистент кафедри інформаційних систем,
Одеський національний політехнічний університет

ДВОСТОРОННІ ПАРОСПОЛУЧЕННЯ В ЗАДАЧАХ РОЗПОДІЛУ З УПОДОБАННЯМИ ТА КВОТАМИ

Нобелівську премію з економіки 2012 року вручили американським ученим Д. Гейлу і Л.Шеплі за «Теорію стабільних розміщень і практику формування ринків». Особливість даної роботи полягає в наступному. Вона досліджує так звані некомерційні ринки, на яких беруть участь агенти, що переслідують особисті інтереси, однак на розглянутих ринках відсутні гроші. Гейл і Шеплі вивели механізм справедливого механізму розподілу виграшів і формулу стабільного паросполучення.

У своїй першій роботі [1] Гейл і Шеплі поставили задачу розробки алгоритму, який дозволить з двох множин агентів (чоловіків і жінок) утворити такі пари – двосторонні паросполучення, які будуть стійкими. Задача отримала популярну назву «задача про мар'яж». Згодом застосування отриманих результатів пішло далеко за межі шлюбного ринку. Зараз алгоритм Гейла-Шеплі (АГШ) з успіхом застосовується при наборі учнів до шкіл і коледжів в Нью-Йорку, Бостоні, Будапешті, Сінгапурі, також він використовується при розподілі випускників медичних університетів в лікарні в США.

Мета роботи – дослідження можливостей застосування АГШ для вирішення практичних завдань розподілу з уподобаннями в діяльності університетів.

Розглянемо практичну задачу [2]. Нехай $A=\{a_1,\dots a_n\}$ – множина студентів-дипломників, $B=\{b_1,\dots b_k\}$ – множина викладачів, які здійснюють керівництво дипломним проектуванням ($k<n$).

Для кожного викладача b_i задано максимальне число дипломників, якими він може керувати q_i (i = 1, …, k) – квота керівника. Кожному студенту a_j відповідає підмножина викладачів $B_j \subseteq B$, під керівництвом яких він хотів би писати диплом. Керівники з підмножини B_j є допустимими для студента a_j.

Введемо позначення $b_i \underset{a_j}{\succ} b_l$, якщо зацікавленість a_j в роботі під керівництвом викладача b_i вище, ніж під керівництвом, b_l ($b_i, b_l \in B_j$). Тоді кожен студент a_j має уподобання на підмножині допустимих керівників B_j. Уподобання студента a_j можна представити у вигляді упорядкованого по спадаючій перевазі списку $L(a_j)$ елементів множини B_j.

Кожному викладачеві b_i теж ставиться у відповідність підмножина студентів $A_i \subseteq A$, для яких даний викладач є допустимим керівником (тобто студентів, які включили його в списки своїх переваг). Студенти з підмножини A_i є допустимими для викладача b_i. Позначимо $a_j \underset{b_i}{\succ} a_r$, якщо зацікавленість b_i в роботі з a_j вище, ніж в роботі з a_r ($a_j, a_r \in A_i$). Тоді на підмножині A_i задані переваги викладача, які також можна представити у вигляді впорядкованого списку $L(b_i)$.

Паросполученням в цій задачі є пари студент – викладач, в яких кожному студенту може бути призначений не більше, ніж один керівник з множини допустимих для нього. Кожен викладач отримує для керівництва допустимих для нього студентів, число яких не перевищує його особисту квоту q_i.

Слід відзначити, що після завершення процедури розподілу деякі студенти можуть залишитися нерозподіленими. Така ситуація може мати місце, наприклад, у разі, якщо основна маса студентів буде прагнути потрапити до найбільш «популярних» керівників, вказуючи в своїх списках переваг тільки їх.

Іншою важливою практичною задачею подібного типу в діяльності підрозділів вищих навчальних закладів, які готують ІТ-фахівців, є розподіл студентів старших курсів на стажування в аутсорсингові ІТ-компанії. Тут в якості множини A виступає множина студентів-стажерів, а множини B – множина студентів-стажерів ІТ-компаній, що згодні прийняти на стажування студентів за квотою.

Для пошуку стабільних паросполучень в моделях такого типу розроблена формалізована процедура, яка отримала назву алгоритм відкладеного прийняття рішення (deferred acceptance algorithm, DAA) [3]. Доведено, що цей алгоритм завжди призводить до стійкого паро сполучення. Розглянемо приклад роботи алгоритму DAA [4].

Нехай 7 дипломників ($a_1 - a_7$) збираються писати диплом у одного з трьох викладачів: $b_1 - b_3$, у кожного з яких за квотою два вільних місця, причому два перших керівника не мають додаткових переваг, а третій найбільше зацікавлений в кандидатові a_6, тобто уподобання керівників можна записати у вигляді

$$L(b_1) = L(b_2) = a_1 \succ a_2 \succ \ldots \succ a_7,\ L(b_3) = a_6 \succ a_1 \succ a_2 \succ \ldots \succ a_6.$$

Уподобання дипломників такі:

$$L(a_1) = L(a_3) = L(a_5) = L(a_6) = b_1 \succ b_3 \succ b_2,\ L(a_2) = L(a_4) = b_3 \succ b_2 \succ b_1,$$

$$L(a_7) = b_2 \succ b_3 \succ b_1.$$

Крок 1: дипломники a_1, a_3, a_5, і a_6 подають заяви керівнику b_1, дипломники a_2 і a_4 – керівнику b_3, a_7 – керівнику b_2. Так як керівники мають квоту (по 2 місця кожен), то два з них, b_2 і b_3, попередньо приймають всіх дипломників, а керівник b_1 відмовляє дипломникам a_5 і a_6 згідно приписаним їм випадковим номерами. Паросполучення набирає вигляду

$$\mu 1 = \{ b_1 - a_1, a_3 \} \ , \{b_2 - a_7, \}, \{b_3 - a_2, a_4\} \ .$$

Крок 2: відкинуті на попередньому кроці дипломники подають заяви наступного по перевагу керівнику: для обох дипломників a_5 і a_6 – це керівник b_3. Керівник b_3 відмовляє і, як менш привабливим a_4 і a_5, ніж a_2 та a_6. Тому

$$\mu 2 = \{ b_1 - a_1, a_3 \} \ , \ \{b_2 - a_7, \}, \{b_3 - a_2, a_6\} \ .$$

Крок 3: дипломники a_4 і a_5 подають свої заяви керівнику b_2, який приймає їх, відкидаючи приписаного йому раніше кандидата a_7. Отримуємо

$$\mu 3 = \{ b_1 - a_1, a_3 \} \ , \ \{b_2 - a_4, a_5\}, \{b_3 - a_2, a_6\} \ .$$

Крок 4: відкинутий дипломник a_7 подає заяву наступного по перевагу (після b_2) керівнику b_3. Він йому відмовляє, оскільки обидва місця вже зайняті кращими дипломниками (a_2 і a_6). Тому

$$\mu 4 = \mu 3.$$

Крок 5: дипломник a_7 подає заяву останньому в своєму списку керівнику b_1, він йому знову відмовляє, оскільки обидва місця зайняті дипломниками з меншими випадковими присвоєними номерами (a_1 і a_3). Значить, μ5 = μ4. Алгоритм закінчений.

Отже, дипломник a_7 не прийнятий жодним з керівників, а решта дипломники розподілені таким чином:

$$\mu = \{ b_1 - a_1, a_3 \} \ , \ \{b_2 - a_4, a_5\}, \{b_3 - a_2, a_6\} \ .$$

DAA алгоритм промодельований в системі комп'ютерної алгебри Matlab. Встановлено, що, незважаючи на доведену обчислювальну складність $O(n^2)$, де n – загальне число агентів у множинах A і B, на практиці алгоритм сходиться істотно швидше.

Спроектовано і розробляється Web-додаток для вирішення подібних заадач університетського управління. Крім закріплення дипломників за керівниками воно може застосовуватися в завданні розподілу студентів IT-спеціальностей на практику і стажування в аутсорсингові компанії-партнери університету.

Список використаних джерел та літератури

1. Gale D., Shapley L. College admissions and the stability of marriage // American Mathematical Monthly. — 1962. — Vol.69. — P. 9–15.

2. Подвесовский А.Г., Лагерев Д.Г., Егорова И.Г.Автоматизация распределения студентов по руководителям выпускных квалификационных работ с применением модели двустороннего матчинга // Современные информационные технологии и ИТ-образование. — 2017. — Т.3. — №4. — С. 147–157.

3. Roth A. Deferred acceptance algorithms: history, theory, practice, and open questions // International Journal of Game Theory. — 2008. — Vol.36. — P. 537 – 569.

4. Алескеров Ф.Т., Хабина Э.Л., Шварц Д.А. Бинарные отношения, графы и коллективные решения. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. — 344 с.