

Про моногенні функції, визначені в різних комутативних алгебрах

ВІТАЛІЙ С. ШПАКІВСЬКИЙ

(Представлена В. Я. Гутляньським)

Анотація. Встановлено відповідність між моногенною функцією в довільній скінченновимірній комутативній асоціативній алгебрі і скінченним набором моногенних функцій в спеціальній комутативній асоціативній алгебрі.

2010 MSC. 30G35, 57R35.

Ключові слова та фрази. Комутативна асоціативна алгебра, моногенна функція, характеристичне рівняння, інтегральне представлення.

1. Вступ

Напевно першим хто використав аналітичні функції, що приймають значення в комутативній алгебрі для побудови розв’язків тривимірного рівняння Лапласа був П. Кетчум [1]. Він показав, що кожна аналітична функція $\Phi(\zeta)$ змінної $\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3$ задовольняє тривимірне рівняння Лапласа, якщо лінійно незалежні елементи e_1, e_2, e_3 комутативної алгебри задовольняють умову

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 0, \quad (1.1)$$

оскільки

$$\Delta_3 \Phi := \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \equiv \Phi''(\zeta) (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) = 0, \quad (1.2)$$

де $\Phi'' := (\Phi')'$ і $\Phi'(\zeta)$ визначається рівністю $d\Phi = \Phi'(\zeta)d\zeta$.

Узагальнюючи П. Кетчума, М. Рошкулець [2, 3] використовував аналітичні функції зі значеннями в комутативних алгебрах для дослідження рівнянь вигляду

$$\mathcal{L}_N U(x, y, z) := \sum_{\alpha+\beta+\gamma=N} C_{\alpha,\beta,\gamma} \frac{\partial^N U}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} = 0, \quad C_{\alpha,\beta,\gamma} \in \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

Розглядаючи змінну $\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3$ і аналітичну функцію $\Phi(\zeta)$, отримуємо наступну рівність для мішаної похідної:

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma}\Phi}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} = e_1^\alpha e_2^\beta e_3^\gamma \Phi^{(\alpha+\beta+\gamma)}(\zeta) = e_1^\alpha e_2^\beta e_3^\gamma \Phi^{(N)}(\zeta). \quad (1.4)$$

Підставляючи (1.4) в рівняння (1.3), маємо рівність

$$\mathcal{L}_N \Phi(\zeta) = \Phi^{(N)}(\zeta) \sum_{\alpha+\beta+\gamma=N} C_{\alpha,\beta,\gamma} e_1^\alpha e_2^\beta e_3^\gamma.$$

Приходимо до висновку, що для виконання рівності $\mathcal{L}_N \Phi(\zeta) = 0$ елементи алгебри $e_1 = 1, e_2, e_3$ мають задовольняти *характеристичне рівняння*

$$\mathcal{X}(1, e_2, e_3) := \sum_{\alpha+\beta+\gamma=N} C_{\alpha,\beta,\gamma} e_2^\beta e_3^\gamma = 0. \quad (1.5)$$

Якщо ліву частину рівняння (1.5) розкласти за базисом алгебри, то характеристичне рівняння (1.5) рівносильне *характеристичній системі рівнянь*, породжених рівнянням (1.5).

Таким чином, при виконанні умови (1.5) кожна аналітична функція Φ зі значеннями в довільній комутативній асоціативній алгебрі задовольняє рівняння (1.3), і, відповідно, усі дійснозначні компоненти функції Φ є розв'язками рівняння (1.3).

В роботі [4] розглядаються диференціальні рівняння в частинних похідних від декількох змінних і наведено ряд прикладів на застосування описаного вище методу.

І. Мельниченко [5] запропонував розглядати в рівностях (1.2) і (1.4) функції Φ , двічі диференційовні за Гато, при цьому описав усі базиси $\{e_1, e_2, e_3\}$ тривимірних комутативних алгебр з одиницею над полем \mathbb{C} , які задовольняють рівність (1.1), див. [6].

Для цих тривимірних комутативних алгебр, асоційованих з тривимірним рівнянням Лапласа, в роботах [7–9] отримано конструктивний опис усіх моногенних (тобто неперервних і диференційовних за Гато) функцій за допомогою трьох відповідних голоморфних функцій комплексної змінної.

В роботах [10, 11] встановлено конструктивний опис моногенних функцій (зв'язаних з рівнянням $\Delta_3 \Phi = 0$) зі значеннями в деяких n -вимірних комутативних алгебрах за допомогою відповідних n голоморфних функцій комплексної змінної і, спираючись на одержані представлення моногенних функцій, доведено аналогії ряду класичних результатів комплексного аналізу.

Нарешті в роботі [14] отримано конструктивний опис моногенних функцій (зв'язаних з рівнянням (1.3)) зі значеннями в довільній комутативній асоціативній алгебрі над полем \mathbb{C} за допомогою голоморфних функцій комплексної змінної.

У цій роботі буде показано, що для побудови розв'язків рівняння (1.3) у вигляді компонент моногенних функцій зі значеннями в скінченновимірних комутативних асоціативних алгебрах достатньо обмежитись вивченням моногенних функцій у алгебрах певного виду.

2. Алгебра \mathbb{A}_n^m

Нехай \mathbb{N} — множина натуральних чисел і $m, n \in \mathbb{N}$ такі, що $m \leq n$. Нехай \mathbb{A}_n^m — довільна комутативна асоціативна алгебра з одиницею над полем комплексних чисел \mathbb{C} . Е. Картан [12, с. 33] довів, що в алгебрі \mathbb{A}_n^m існує базис $\{I_k\}_{k=1}^n$, який задовольняє наступні правила множення:

1. $\forall r, s \in [1, m] \cap \mathbb{N} : \quad I_r I_s = \begin{cases} 0 & \text{при } r \neq s, \\ I_r & \text{при } r = s; \end{cases}$
2. $\forall r, s \in [m+1, n] \cap \mathbb{N} : \quad I_r I_s = \sum_{k=\max\{r,s\}+1}^n \Upsilon_{r,k}^s I_k;$
3. $\forall s \in [m+1, n] \cap \mathbb{N} \exists! u_s \in [1, m] \cap \mathbb{N} \quad \forall r \in [1, m] \cap \mathbb{N} :$

$$I_r I_s = \begin{cases} 0 & \text{при } r \neq u_s, \\ I_s & \text{при } r = u_s. \end{cases}$$

Крім того, структурні константи $\Upsilon_{r,k}^s \in \mathbb{C}$ задовольняють умови асоціативності:

- (A 1). $(I_r I_s) I_p = I_r (I_s I_p) \quad \forall r, s, p \in [m+1, n] \cap \mathbb{N};$
- (A 2). $(I_u I_s) I_p = I_u (I_s I_p) \quad \forall u \in [1, m] \cap \mathbb{N} \quad \forall s, p \in [m+1, n] \cap \mathbb{N}.$

Очевидно, що перші m базисних векторів $\{I_u\}_{u=1}^m$ є ідемпотентами і породжують напівпросту підалгебру S алгебри \mathbb{A}_n^m , а вектори $\{I_r\}_{r=m+1}^n$ породжують нільпотентну підалгебру N цієї алгебри. З правил множення алгебри \mathbb{A}_n^m випливає, що \mathbb{A}_n^m є напівпрямою сумою m -вимірної напівпростої підалгебри S і $(n-m)$ -вимірної нільпотентної підалгебри N , тобто

$$\mathbb{A}_n^m = S \oplus N.$$

Одиницею алгебри \mathbb{A}_n^m є елемент $1 = \sum_{u=1}^m I_u$.

Алгебра \mathbb{A}_n^m містить m максимальних ідеалів

$$\mathcal{I}_u := \left\{ \sum_{k=1, k \neq u}^n \lambda_k I_k : \lambda_k \in \mathbb{C} \right\}, \quad u = 1, 2, \dots, m,$$

перетином яких є радикал

$$\mathcal{R} := \left\{ \sum_{k=m+1}^n \lambda_k I_k : \lambda_k \in \mathbb{C} \right\}. \quad (2.1)$$

Визначимо m лінійних функціоналів $f_u : \mathbb{A}_n^m \rightarrow \mathbb{C}$ рівностями

$$f_u(I_u) = 1, \quad f_u(\omega) = 0 \quad \forall \omega \in \mathcal{I}_u, \quad u = 1, 2, \dots, m. \quad (2.2)$$

Оскільки ядрами функціоналів f_u є відповідно максимальні ідеали \mathcal{I}_u , то ці функціонали є також неперервними і мультиплікативними (див. [13, с. 147]).

3. Моногені функції

Нехай

$$e_1 = 1, \quad e_2 = \sum_{r=1}^n a_r I_r, \quad e_3 = \sum_{r=1}^n b_r I_r \quad (3.1)$$

при $a_r, b_r \in \mathbb{C}$ — трійка векторів в алгебрі \mathbb{A}_n^m , які лінійно незалежні над полем \mathbb{R} . Це означає, що рівність

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = 0, \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R},$$

виконується тоді і тільки тоді, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Нехай $\zeta := x e_1 + y e_2 + z e_3$, де $x, y, z \in \mathbb{R}$. Очевидно, що $\xi_u := f_u(\zeta) = x + y a_u + z b_u$, $u = 1, 2, \dots, m$. Виділимо в алгебрі \mathbb{A}_n^m лінійну оболонку $E_3 := \{\zeta = x e_1 + y e_2 + z e_3 : x, y, z \in \mathbb{R}\}$, породжену векторами e_1, e_2, e_3 .

Далі істотним є припущення: $f_u(E_3) = \mathbb{C}$ при всіх $u = 1, 2, \dots, m$, де $f_u(E_3)$ — образ множини E_3 при відображенні f_u . Очевидно, що це має місце тоді і тільки тоді, коли при кожному фіксованому $u = 1, 2, \dots, m$ хоча б одне з чисел a_u чи b_u належить $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. В теоремі 7.1 роботи [14] встановлено підклас рівнянь вигляду (1.3) для яких умова $f_u(E_3) = \mathbb{C}$ виконується при всіх $u = 1, 2, \dots, m$.

Області Ω тривимірного простору \mathbb{R}^3 поставимо у відповідність область $\Omega_\zeta := \{\zeta = x e_1 + y e_2 + z e_3 : (x, y, z) \in \Omega\}$ в E_3 .

Неперервну функцію $\Phi : \Omega_\zeta \rightarrow \mathbb{A}_n^m$ називатимемо *моногенною* в області $\Omega_\zeta \subset E_3$, якщо Φ диференційовна за Гато в кожній точці цієї області, тобто якщо для кожного $\zeta \in \Omega_\zeta$ існує елемент $\Phi'(\zeta)$ алгебри \mathbb{A}_n^m такий, що виконується рівність

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} (\Phi(\zeta + \varepsilon h) - \Phi(\zeta)) \varepsilon^{-1} = h \Phi'(\zeta) \quad \forall h \in E_3.$$

$\Phi'(\zeta)$ називається *похідною Гато* функції Φ в точці ζ .

Розглянемо розклад функції $\Phi : \Omega_\zeta \rightarrow \mathbb{A}_n^m$ за базисом $\{I_k\}_{k=1}^n$:

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k=1}^n U_k(x, y, z) I_k. \quad (3.2)$$

У випадку, коли функції $U_k : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \in \mathbb{R}$ -диференційовними в області Ω , тобто для довільного $(x, y, z) \in \Omega$

$$U_k(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - U_k(x, y, z) = \frac{\partial U_k}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial U_k}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial U_k}{\partial z} \Delta z + \\ + o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}\right), \quad (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \rightarrow 0,$$

функція Φ моногенна в області Ω_ζ тоді і тільки тоді, коли у кожній точці області Ω_ζ виконуються умови:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} e_2, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} e_3. \quad (3.3)$$

Відмітимо, що розклад резольвенти має вигляд

$$(te_1 - \zeta)^{-1} = \sum_{u=1}^m \frac{1}{t - \xi_u} I_u + \sum_{s=m+1}^n \sum_{k=2}^{s-m+1} \frac{Q_{k,s}}{(t - \xi_{u_s})^k} I_s \quad (3.4)$$

$$\forall t \in \mathbb{C} : t \neq \xi_u, \quad u = 1, 2, \dots, m,$$

де $Q_{k,s}$ визначені наступними рекурентними співвідношеннями:

$$Q_{2,s} := T_s, \quad Q_{k,s} = \sum_{r=k+m-2}^{s-1} Q_{k-1,r} B_{r,s}, \quad k = 3, 4, \dots, s - m + 1.$$

при

$$T_s := ya_s + zb_s, \quad B_{r,s} := \sum_{k=m+1}^{s-1} T_k \Upsilon_{r,s}^k, \quad s = m + 2, \dots, n,$$

а натуральні числа u_s визначені у правилі 3 таблиці множення алгебри \mathbb{A}_n^m .

Із співвідношень (3.4) випливає, що точки $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, які відповідають необоротним елементам $\zeta \in \mathbb{A}_n^m$, лежать на прямих

$$L_u : \begin{cases} x + y \operatorname{Re} a_u + z \operatorname{Re} b_u = 0, \\ y \operatorname{Im} a_u + z \operatorname{Im} b_u = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

в тривимірному просторі \mathbb{R}^3 .

Нехай область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ є опуклою в напрямку прямих L_u , $u = 1, 2, \dots, m$. Позначимо через D_u область комплексної площини \mathbb{C} , на яку область Ω_ζ відображається функціоналом f_u .

Теорема А [14]. *Нехай область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ є опуклою в напрямку прямих L_u і $f_u(E_3) = \mathbb{C}$ при всіх $u = 1, 2, \dots, m$. Тоді кожна моногенна функція $\Phi : \Omega_\zeta \rightarrow \mathbb{A}_n^m$ подається у вигляді*

$$\Phi(\zeta) = \sum_{u=1}^m I_u \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_u} F_u(t)(t-\zeta)^{-1} dt + \sum_{s=m+1}^n I_s \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{u_s}} G_s(t)(t-\zeta)^{-1} dt, \quad (3.6)$$

де F_u — деяка голоморфна функція в області D_u і G_s — деяка голоморфна функція в області D_{u_s} , а Γ_q — замкнена жорданова спрямлювана крива, яка лежить в області D_q , охоплює точку ξ_q і не містить точок ξ_ℓ , $\ell = 1, 2, \dots, m, \ell \neq q$.

Оскільки за умов теореми **А** кожна моногенна функція $\Phi : \Omega_\zeta \rightarrow \mathbb{A}_n^m$ продовжується до функції, моногенної в області

$$\Pi_\zeta := \{\zeta \in E_3 : f_u(\zeta) = D_u, u = 1, 2, \dots, m\}, \quad (3.7)$$

то надалі будемо розглядати моногенні функції Φ , визначені в областях виду Π_ζ .

4. Характеристичне рівняння в різних комутативних алгебрах

Скажемо, що система поліноміальних над полем \mathbb{C} рівнянь Q_1 *редукується* до системи поліноміальних рівнянь Q_2 , якщо система Q_2 отримується з системи Q_1 шляхом відкидання деякої кількості рівнянь. В свою чергу, система Q_2 є *редукцією* системи Q_1 . Відмітимо, що для заданої системи поліноміальних рівнянь Q_1 редукована система Q_2 не єдина. Очевидним є наступне твердження.

Твердження 4.1. *Нехай система поліноміальних рівнянь Q_1 з комплексними невідомими t_1, t_2, \dots, t_n має розв'язки і Q_2 — будь-яка*

її редукована система з невідомими $t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_k}$, де i_1, i_2, \dots, i_k , $k \leq n$, — попарно різні елементи множини $\{1, 2, \dots, n\}$. Тоді усі $t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_k}$, які задовольняють систему Q_1 є розв'язками системи Q_2 .

Наприклад, система рівнянь

$$\begin{aligned} 1 + a_1^2 + b_1^2 &= 0, \\ 1 + a_2^2 + b_2^2 &= 0, \\ a_2 a_3 + b_2 b_3 &= 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

редукується до системи рівнянь

$$\begin{aligned} 1 + a_2^2 + b_2^2 &= 0, \\ a_2 a_3 + b_2 b_3 &= 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Твердження 4.1 означає, що всі значення a_2, b_2, a_3, b_3 , які задовольняють систему (4.1) є розв'язками системи (4.2).

Встановимо допоміжні твердження.

Лема 4.1. Нехай в алгебрі \mathbb{A}_n^m існує трійка лінійно незалежних над \mathbb{R} векторів $1, e_2, e_3$, які задовольняють характеристичне рівняння (1.5). Тоді для кожного $u \in \{1, 2, \dots, m\}$ характеристична система, породжена рівнянням $\mathcal{X}(I_u, e_2 I_u, e_3 I_u) = 0$ є редуцією характеристичної системи, породженої рівнянням (1.5).

Доведення. Нехай ліва частина рівняння (1.5) в базисі алгебри має вигляд

$$\mathcal{X}(1, e_2, e_3) = \sum_{\alpha+\beta+\gamma=N} C_{\alpha,\beta,\gamma} e_2^\beta e_3^\gamma = \sum_{k=1}^n V_k I_k = 0.$$

Відповідно, характеристична система, породжена рівнянням (1.5), має вигляд

$$\begin{aligned} V_1 &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ V_n &= 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Тепер розглянемо характеристичну систему, породжену рівнянням $\mathcal{X}(I_u, e_2 I_u, e_3 I_u) = 0$. Маємо

$$\mathcal{X}(I_u, e_2 I_u, e_3 I_u) = \sum_{\alpha+\beta+\gamma=N} C_{\alpha,\beta,\gamma} I_u (e_2 I_u)^\beta (e_3 I_u)^\gamma =$$

$$= I_u \sum_{\alpha+\beta+\gamma=N} C_{\alpha,\beta,\gamma} e_2^\beta e_3^\gamma = I_u \sum_{k=1}^n V_k I_k = V_u + I_u \sum_{k=m+1}^n V_k I_k = 0. \quad (4.4)$$

Відповідно до правила 3 таблиці множення алгебри \mathbb{A}_n^m добуток $I_u \sum_{k=m+1}^n V_k I_k$ належить радикалу \mathcal{R} . Таким чином, рівняння (4.4) рівносильне такій характеристичній системі:

$$\begin{aligned} V_u &= 0, \\ \dots\dots\dots \\ V_k &= 0 \quad \forall k \in \{m+1, \dots, n\} : I_u I_k = I_k. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Очевидно, що система (4.5) є редукцією системи (4.3). □

Позначимо через $\text{Rad } e_2$ частину вектора e_2 з розкладу (3.1), яка міститься в його радикалі, тобто $\text{Rad } e_2 := \sum_{r=m+1}^n a_r I_r$. Аналогічно,

$$\text{Rad } e_3 := \sum_{r=m+1}^n b_r I_r.$$

Лема 4.2. *Нехай в алгебрі $\mathbb{A}_n^m = S \oplus_s N$ існує трійка лінійно незалежних над \mathbb{R} векторів $1, e_2, e_3$, які задовольняють характеристичне рівняння (1.5). Тоді в алгебрі $\mathbb{A}_{n-m+1}^1 = 1 \oplus_s N$ (де нільпотентна підалгебра N та ж сама що й в алгебрі \mathbb{A}_n^m) для кожного $u \in \{1, 2, \dots, m\}$ існує трійка векторів*

$$\begin{aligned} \tilde{e}_1(u) &= 1, \\ \tilde{e}_2(u) &:= a_u + I_u \text{Rad } e_2, \\ \tilde{e}_3(u) &:= b_u + I_u \text{Rad } e_3 \end{aligned} \quad (4.6)$$

така, що характеристична система, породжена рівнянням $\mathcal{X}(1, \tilde{e}_2(u), \tilde{e}_3(u)) = 0$ є редукцією характеристичної системи, породженої рівнянням (1.5).

Доведення. Наслідком рівностей (4.6) є рівності

$$\begin{aligned} \tilde{e}_2^\beta(u) &= a_u^\beta + I_u \sum_{k=1}^{\beta} C_{\beta}^k a_u^{\beta-k} (\text{Rad } e_2)^k, \\ \tilde{e}_3^\gamma(u) &= b_u^\gamma + I_u \sum_{k=1}^{\gamma} C_{\gamma}^k b_u^{\gamma-k} (\text{Rad } e_3)^k. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Враховуючи формули (4.7), характеристичний многочлен $\mathcal{X}(1, \tilde{e}_2(u), \tilde{e}_3(u)) = 0$ набуває вигляду

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha+\beta+\gamma=N} C_{\alpha,\beta,\gamma} \tilde{e}_2^\beta(u) \tilde{e}_3^\gamma(u) &= \sum_{\alpha+\beta+\gamma=N} C_{\alpha,\beta,\gamma} \left(a_u^\beta b_u^\gamma \right. \\ &+ I_u b_u^\gamma \sum_{k=1}^{\beta} C_{\beta}^k a_u^{\beta-k} (\text{Rad } e_2)^k + I_u a_u^\beta \sum_{k=1}^{\gamma} C_{\gamma}^k b_u^{\gamma-k} (\text{Rad } e_3)^k \\ &\left. + I_u \sum_{k=1}^{\beta} C_{\beta}^k a_u^{\beta-k} (\text{Rad } e_2)^k \sum_{p=1}^{\gamma} C_{\gamma}^p b_u^{\gamma-p} (\text{Rad } e_3)^p \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Далі покажемо, що характеристичні системи, породжені рівняннями $\mathcal{X}(1, \tilde{e}_2(u), \tilde{e}_3(u)) = 0$ і $\mathcal{X}(I_u, e_2 I_u, e_3 I_u) = 0$ співпадають.

З цією метою зауважимо, що наслідком розкладів (3.1) є подання

$$e_2 = a_1 I_1 + \dots + a_m I_m + \text{Rad } e_2, \quad e_3 = b_1 I_1 + \dots + b_m I_m + \text{Rad } e_3,$$

з яких випливають співвідношення

$$e_2 I_u = a_u I_u + I_u \text{Rad } e_2, \quad e_3 I_u = b_u I_u + I_u \text{Rad } e_3. \quad (4.9)$$

Тепер з (4.9) випливають рівності

$$\begin{aligned} e_2^\beta I_u &= a_u^\beta I_u + I_u \sum_{k=1}^{\beta} C_{\beta}^k a_u^{\beta-k} (\text{Rad } e_2)^k, \\ e_3^\gamma I_u &= b_u^\gamma I_u + I_u \sum_{k=1}^{\gamma} C_{\gamma}^k b_u^{\gamma-k} (\text{Rad } e_3)^k. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Беручи до уваги формули (4.10), характеристичне рівняння $\mathcal{X}(I_u, e_2 I_u, e_3 I_u) = 0$ набуває вигляду

$$\begin{aligned} I_u \sum_{\alpha+\beta+\gamma=N} C_{\alpha,\beta,\gamma} e_2^\beta e_3^\gamma &= \sum_{\alpha+\beta+\gamma=N} C_{\alpha,\beta,\gamma} \left(a_u^\beta b_u^\gamma I_u \right. \\ &+ I_u b_u^\gamma \sum_{k=1}^{\beta} C_{\beta}^k a_u^{\beta-k} (\text{Rad } e_2)^k + I_u a_u^\beta \sum_{k=1}^{\gamma} C_{\gamma}^k b_u^{\gamma-k} (\text{Rad } e_3)^k \\ &\left. + I_u \sum_{k=1}^{\beta} C_{\beta}^k a_u^{\beta-k} (\text{Rad } e_2)^k \sum_{p=1}^{\gamma} C_{\gamma}^p b_u^{\gamma-p} (\text{Rad } e_3)^p \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

З рівностей (4.8), (4.11) очевидним чином випливає, що характеристичні системи, породжені рівняннями $\mathcal{X}(1, \tilde{e}_2(u), \tilde{e}_3(u)) = 0$ і $\mathcal{X}(I_u, e_2 I_u, e_3 I_u) = 0$ співпадають. Тепер доведення леми випливає з леми 4.1. \square

Зауваження 4.1. Відмітимо, що алгебра $\mathbb{A}_{n-m+1}^1 = 1 \oplus_s N$ з базисом $\{1, I_{m+1}, \dots, I_n\}$ є підалгеброю алгебри $\mathbb{A}_n^m = S \oplus_s N$. Дійсно, будь-який елемент a алгебри $\mathbb{A}_n^m = S \oplus_s N$ вигляду

$$\begin{aligned} a &= a_0 I_1 + a_0 I_2 + \dots + a_0 I_m + a_{m+1} I_{m+1} + \dots + a_n I_n \\ &= a_0 (I_1 + \dots + I_m) + a_{m+1} I_{m+1} + \dots + a_n I_n = a_0 + a_{m+1} I_{m+1} + \dots + a_n I_n \end{aligned}$$

є представленням довільного елемента алгебри $\mathbb{A}_{n-m+1}^1 = 1 \oplus_s N$.

З твердження 4.1 і леми 4.2 випливає така

Теорема 4.1. Нехай в алгебрі $\mathbb{A}_n^m = S \oplus_s N$ існує трійка лінійно незалежних над \mathbb{R} векторів $1, e_2, e_3$, які задовольняють характеристичне рівняння (1.5). Тоді в алгебрі $\mathbb{A}_{n-m+1}^1 = 1 \oplus_s N$ (де нільпотентна підалгебра N та ж сама що й в алгебрі \mathbb{A}_n^m) для кожного $u \in \{1, 2, \dots, t\}$ трійка векторів (4.6) задовольняє характеристичне рівняння $\mathcal{X}(1, \tilde{e}_2(u), \tilde{e}_3(u)) = 0$.

Приклад 4.1. Розглянемо над полем \mathbb{C} алгебру \mathbb{A}_3^2 з таблицею множення (див., наприклад, [6, с. 32], [8])

$$\begin{array}{c|c|c|c} \cdot & I_1 & I_2 & I_3 \\ \hline I_1 & I_1 & 0 & 0 \\ I_2 & 0 & I_2 & I_3 \\ \hline I_3 & 0 & I_3 & 0 \end{array}. \quad (4.12)$$

Очевидно, що напівпростою підалгеброю S є підалгебра, породжена ідемпотентами I_1, I_2 , а нільпотентною підалгеброю N є підалгебра $\{\alpha I_3 : \alpha \in \mathbb{C}\}$. Тоді алгебра $\mathbb{A}_2^1 := 1 \oplus_s N$ співпадає з відомою бігармонічною алгеброю \mathbb{B} (див., наприклад, [15]) і має таку таблицю множення:

$$\begin{array}{c|c|c} \cdot & 1 & I_3 \\ \hline 1 & 1 & I_3 \\ I_3 & I_3 & 0 \end{array}. \quad (4.13)$$

Нехай в алгебрі \mathbb{A}_3^2 задане характеристичне рівняння (1.1). Як відомо (див. теорему 1.8 в [6]), умова *гармонічності* (1.1) векторів $e_1 = 1$, $e_2 = a_1 I_1 + a_2 I_2 + a_3 I_3$, $e_3 = b_1 I_1 + b_2 I_2 + b_3 I_3$ алгебри \mathbb{A}_3^2 рівносильна системі рівнянь (4.1).

Оскільки для алгебри \mathbb{A}_3^2 $m = 2$, то в алгебрі \mathbb{B} ми будемо дві трійки векторів виду (4.6):

$$\tilde{e}_1(1) = 1, \tilde{e}_2(1) = a_1 + I_1(a_3 I_3) = a_1, \tilde{e}_3(1) = b_1 + I_1(b_3 I_3) = b_1 \quad (4.14)$$

та

$$\begin{aligned}\tilde{e}_1(2) &= 1, \\ \tilde{e}_2(2) &= a_2 + I_2(a_3 I_3) = a_2 + a_3 I_3, \\ \tilde{e}_3(2) &= b_2 + I_2(b_3 I_3) = b_2 + b_3 I_3.\end{aligned}\tag{4.15}$$

За теоремою 4.1 трійки (4.14) та (4.15) гармонічні в алгебрі \mathbb{B} (тобто задовольняють умову (1.1)). Справді, гармонічність трійки (4.14) рівносильна першому рівнянню системи (4.1), а гармонічність трійки (4.15) рівносильна системі (4.2).

Приклад 4.2. Розглянемо над полем \mathbb{C} алгебру \mathbb{A}_5^3 з такою таблицею множення

\cdot		I_1	I_2	I_3		I_4	I_5	
I_1		I_1	0	0		0	I_5	
I_2		0	I_2	0		0	0	
I_3		0	0	I_3		I_4	0	
I_4		0	0	I_4		0	0	
I_5		I_5	0	0		0	0	

$$\cdot.\tag{4.16}$$

Відмітимо, що напівпростою підалгеброю S є підалгебра, породжена ідемпотентами I_1, I_2, I_3 , а нільпотентною підалгеброю N є підалгебра з базисом $\{I_4, I_5\}$. Тоді алгебра $\mathbb{A}_3^1 := 1 \oplus_s N$ співпадає з відомою алгеброю \mathbb{A}_4 (див., наприклад, [6, с. 26]) і має таку таблицю множення:

\cdot		1	I_4	I_5	
1		1	I_4	I_5	
I_4		I_4	0	0	
I_5		I_5	0	0	

$$\cdot.\tag{4.17}$$

Нехай в алгебрі \mathbb{A}_5^3 задане характеристичне рівняння (1.1). Умова гармонічності (1.1) векторів вигляду (3.1) алгебри \mathbb{A}_5^3 рівносильна наступній системі рівнянь

$$\begin{aligned}1 + a_u^2 + b_u^2 &= 0, \quad u = 1, 2, 3, \\ a_3 a_4 + b_3 b_4 &= 0, \\ a_1 a_5 + b_1 b_5 &= 0.\end{aligned}\tag{4.18}$$

Оскільки для алгебри \mathbb{A}_5^3 $m = 3$, то в алгебрі \mathbb{A}_4 ми будемо три трійки векторів виду (4.6):

$$\begin{aligned}\tilde{e}_1(1) &= 1, \\ \tilde{e}_2(1) &= a_1 + I_1(a_4 I_4 + a_5 I_5) = a_1 + a_5 I_5, \\ \tilde{e}_3(1) &= b_1 + I_1(b_4 I_4 + b_5 I_5) = b_1 + b_5 I_5,\end{aligned}\tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{e}_1(2) &= 1, \\
\tilde{e}_2(2) &= a_2 + I_2(a_4 I_4 + a_5 I_5) = a_2, \\
\tilde{e}_3(2) &= b_2 + I_2(b_4 I_4 + b_5 I_5) = b_2,
\end{aligned} \tag{4.20}$$

та

$$\begin{aligned}
\tilde{e}_1(3) &= 1, \\
\tilde{e}_2(3) &= a_3 + I_3(a_4 I_4 + a_5 I_5) = a_3 + a_4 I_4, \\
\tilde{e}_3(3) &= b_3 + I_3(b_4 I_4 + b_5 I_5) = b_3 + b_4 I_4.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

За теоремою 4.1 трійки (4.19), (4.20) та (4.21) гармонічні в алгебрі \mathbb{A}_4 (тобто задовольняють умову (1.1)). Справді, гармонічність трійки (4.19) рівносильна системі з першого і п'ятого рівняння системи (4.15); гармонічність трійки (4.20) рівносильна другому рівнянню системи (4.15), а гармонічність трійки (4.21) рівносильна системі з третього і четвертого рівняння системи (4.15).

4.1. Лінійна незалежність векторів $1, \tilde{e}_2(u), \tilde{e}_3(u)$

З наведених прикладів видно, що вектори $1, \tilde{e}_2(u), \tilde{e}_3(u)$ при деяких $u \in \{1, 2, \dots, t\}$ можуть бути лінійно залежними над полем \mathbb{R} . Так, трійки (4.14), (4.20) завжди лінійно залежні над полем \mathbb{R} .

Встановимо необхідні і достатні умови лінійної незалежності над полем \mathbb{R} векторів $1, \tilde{e}_2(u), \tilde{e}_3(u)$ алгебри $\mathbb{A}_{n-m+1}^1 = 1 \oplus_s N$.

Лема 4.3. *Нехай вектори (3.1) алгебри $\mathbb{A}_n^m = S \oplus_s N$ лінійно незалежні над полем \mathbb{R} і нехай $u \in \{1, 2, \dots, t\}$ фіксоване. Тоді*

1. *якщо вектори $I_u \text{Rad } e_2, I_u \text{Rad } e_3 \in \mathbb{A}_n^m$ лінійно незалежні над полем \mathbb{R} , то вектори $1, \tilde{e}_2(u), \tilde{e}_3(u)$ алгебри $\mathbb{A}_{n-m+1}^1 = 1 \oplus_s N$ також лінійно незалежні над полем \mathbb{R} ;*

2. *якщо ж вектори $I_u \text{Rad } e_2, I_u \text{Rad } e_3 \in \mathbb{A}_n^m$ лінійно залежні над полем \mathbb{R} , то вектори $1, \tilde{e}_2(u), \tilde{e}_3(u)$ алгебри $\mathbb{A}_{n-m+1}^1 = 1 \oplus_s N$ лінійно незалежні над полем \mathbb{R} тоді і тільки тоді, коли існує $r \in \{t+1, \dots, n\}$ таке, що $I_u I_r = I_r$ і виконується хоча б одне співвідношення*

$$\text{Im } a_u \text{Re } b_r \neq \text{Im } b_u \text{Re } a_r \quad \text{або} \quad \text{Im } a_u \text{Im } b_r \neq \text{Im } b_u \text{Im } a_r. \tag{4.22}$$

Доведення. Доведемо перше твердження леми. За умовою рівність

$$\beta_2 I_u \text{Rad } e_2 + \beta_3 I_u \text{Rad } e_3 = 0, \quad \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R} \tag{4.23}$$

виконується тоді і тільки тоді, коли $\beta_2 = \beta_3 = 0$.

Розглянемо лінійну комбінацію

$$\alpha_1 + \alpha_2 \tilde{e}_2(u) + \alpha_3 \tilde{e}_3(u) = (\alpha_1 + \alpha_2 a_u + \alpha_3 b_u) +$$

$$+ (\alpha_2 I_u \operatorname{Rad} e_2 + \alpha_3 I_u \operatorname{Rad} e_3) = 0, \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}. \quad (4.24)$$

Оскільки вираз у другій дужці в рівності (4.24) приймає значення в радикалі \mathcal{R} алгебри, а перша дужка комплекснозначна, то умова (4.24) рівносильна системі рівнянь

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 a_u + \alpha_3 b_u &= 0, \\ \alpha_2 I_u \operatorname{Rad} e_2 + \alpha_3 I_u \operatorname{Rad} e_3 &= 0. \end{aligned} \quad (4.25)$$

З другого рівняння системи (4.25) і умови (4.23) випливає, що $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$. А тоді з першого рівняння системи (4.25) отримуємо $\alpha_1 = 0$. Отже, вектори $1, \tilde{e}_2(u), \tilde{e}_3(u)$ лінійно незалежні над \mathbb{R} .

Доведемо друге твердження леми. Розглянемо рівність

$$\beta_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3 = \sum_{s=1}^m I_s(\beta_1 + \beta_2 a_s + \beta_3 b_s) + \sum_{k=m+1}^n I_k(\beta_2 a_k + \beta_3 b_k) = 0,$$

яка рівносильна системі рівнянь

$$\begin{aligned} \beta_1 + \beta_2 \operatorname{Re} a_s + \beta_3 \operatorname{Re} b_s &= 0, \\ \beta_2 \operatorname{Im} a_s + \beta_3 \operatorname{Im} b_s &= 0, \quad s = 1, 2, \dots, m, \\ \beta_2 \operatorname{Re} a_k + \beta_3 \operatorname{Re} b_k &= 0, \\ \beta_2 \operatorname{Im} a_k + \beta_3 \operatorname{Im} b_k &= 0, \quad k = m+1, \dots, n. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Лінійна незалежність над \mathbb{R} векторів $1, e_2, e_3$ означає, що серед усіх рівнянь системи (4.26), окрім першого, існує хоча б два рівняння, які між собою не пропорційні.

Тепер запишемо умову лінійної незалежності над \mathbb{R} векторів $1, \tilde{e}_2(u), \tilde{e}_3(u)$. Для цього систему (4.25) запишемо в розгорнутому вигляді

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 \operatorname{Re} a_u + \alpha_3 \operatorname{Re} b_u &= 0, \\ \alpha_2 \operatorname{Im} a_u + \alpha_3 \operatorname{Im} b_u &= 0, \\ \alpha_2 \operatorname{Re} a_r + \alpha_3 \operatorname{Re} b_r &= 0, \\ \alpha_2 \operatorname{Im} a_r + \alpha_3 \operatorname{Im} b_r &= 0 \\ \forall r \in \{m+1, \dots, n\} &: I_u I_r = I_r. \end{aligned} \quad (4.27)$$

За умовою пункту 2 леми вектори $I_u \operatorname{Rad} e_2, I_u \operatorname{Rad} e_3$ лінійно залежні над \mathbb{R} . Це означає, що в системі (4.27) всі рівності, окрім перших двох, пропорційні між собою. Очевидно, що для лінійної незалежності над \mathbb{R} векторів $1, \tilde{e}_2(u), \tilde{e}_3(u)$ необхідно і достатньо, щоб друге рівняння системи (4.27) було не пропорційне хоча б з одним іншим рівнянням (крім першого) системи (4.27). А це рівносильно умовам (4.22). \square

5. Моногенні функції, визначені в різних комутативних алгебрах

В алгебрі $\mathbb{A}_n^m = S \oplus_s N$ будемо розглядати моногенні функції Φ , визначені в деякій області $\Pi_\zeta \subset E_3$ виду (3.7). Геометрично область $\Pi \subset \mathbb{R}^3$, яка конгугентна області $\Pi_\zeta \subset E_3$, є перетином m нескінченних циліндрів, кожен з яких паралельний деякій з m прямих L_u , $u = 1, 2, \dots, m$ вигляду (3.5). Тобто, $\Pi = \bigcap_{u=1}^m \Pi(u)$, де $\mathbb{R}^3 \supset \Pi(u)$ — нескінченний циліндр, паралельний прямій L_u . І те ж саме маємо для конгугентних областей в E_3 :

$$\Pi_\zeta = \bigcap_{u=1}^m \Pi_\zeta(u). \quad (5.1)$$

Аналітично циліндр $\Pi_\zeta(u)$ визначається рівністю

$$\Pi_\zeta(u) = \{\zeta_u := I_u \zeta : \zeta \in \Pi_\zeta\}.$$

Тепер розглянемо моногенну в області Π_ζ функцію $\Phi : \Pi_\zeta \rightarrow \mathbb{A}_n^m$. Введемо позначення

$$\Phi_u(\zeta) := I_u \Phi(\zeta), \quad u = 1, 2, \dots, m. \quad (5.2)$$

Тоді очевидно є рівність

$$\Phi = (I_1 + \dots + I_m)\Phi = \sum_{u=1}^m \Phi_u. \quad (5.3)$$

Крім того, з рівності (3.6) і таблиці множення алгебри \mathbb{A}_n^m випливає, що при кожному $u \in \{1, 2, \dots, m\}$ функція Φ_u моногенна у всьому нескінченному циліндрі $\Pi_\zeta(u)$.

Таким чином, кожна моногенна в області (5.1) функція $\Phi : \Pi_\zeta \rightarrow \mathbb{A}_n^m$ подається у вигляді суми (5.3), де функція Φ_u моногенна у всьому циліндрі $\Pi_\zeta(u)$.

Тепер перейдемо до розгляду моногенних функцій $\tilde{\Phi}$ в алгебрі $\mathbb{A}_{n-m+1}^1 = 1 \oplus_s N$. Оскільки, відповідно до зауваження 4.1, алгебра \mathbb{A}_{n-m+1}^1 є підалгеброю алгебри \mathbb{A}_n^m , то в алгебрі \mathbb{A}_{n-m+1}^1 усі циліндри $\Pi_\zeta(u)$ з рівності (5.1) співпадають між собою. Тобто, в алгебрах вигляду \mathbb{A}_{n-m+1}^1 кожна моногенна функція буде моногенною в деякому одному нескінченному циліндрі.

В наступній теоремі встановлюється зв'язок між моногенними функціями в алгебрах $\mathbb{A}_n^m = S \oplus_s N$ та $\mathbb{A}_{n-m+1}^1 = 1 \oplus_s N$. Для формулювання результату введемо деякі позначення.

На вектори вигляду (4.6) алгебри \mathbb{A}_{n-m+1}^1 натягнемо лінійний простір $\tilde{E}_3(u) := \{\tilde{\zeta}(u) = x + y\tilde{e}_2(u) + z\tilde{e}_3(u) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$. Трійка векторів (4.6) визначає одну пряму $L(u)$ виду (3.5), яка відповідає множині необоротних елементів $\tilde{\zeta}(u)$ простору $\tilde{E}_3(u)$. Нехай $\tilde{\Pi}_{\tilde{\zeta}(u)}$ — деякий нескінченний циліндр в $\tilde{E}_3(u)$, паралельний прямій $\tilde{L}(u)$.

Теорема 5.1. *Нехай в алгебрі $\mathbb{A}_n^m = S \oplus_s N$ існує трійка лінійно незалежних над \mathbb{R} векторів $1, e_2, e_3$, які задовольняють характеристичне рівняння (1.5) і нехай $f_u(E_3) = \mathbb{C}$ при всіх $u = 1, 2, \dots, t$. Крім того, нехай функція $\Phi : \Pi_\zeta \rightarrow \mathbb{A}_n^m$ змінної $\zeta = x + ye_2 + ze_3$ моногенна в області $\Pi_\zeta \subset E_3$ виду (5.1). Тоді в алгебрі $\mathbb{A}_{n-m+1}^1 = 1 \oplus_s N$ (де нілпотентна підалгебра N та ж сама що й в алгебрі \mathbb{A}_n^m) для кожного $u \in \{1, 2, \dots, t\}$ існує трійка векторів (4.6), яка задовольняє характеристичне рівняння $\mathcal{X}(1, \tilde{e}_2(u), \tilde{e}_3(u)) = 0$ і існує функція $\tilde{\Phi}_u : \tilde{\Pi}_{\tilde{\zeta}(u)} \rightarrow \mathbb{A}_{n-m+1}^1$ змінної $\tilde{\zeta}(u)$, яка моногенна в циліндрі*

$$\tilde{\Pi}_{\tilde{\zeta}(u)} = \left\{ \tilde{\zeta}(u) \in \tilde{E}_3(u) : f_u(\tilde{\zeta}(u)) = f_u(\zeta), \zeta \in \Pi_\zeta(u) \right\}$$

така, що

$$\Phi_u(\zeta) = I_u \tilde{\Phi}_u(\tilde{\zeta}(u)). \quad (5.4)$$

Доведення. Існування трійки (4.6) з властивістю $\mathcal{X}(1, \tilde{e}_2(u), \tilde{e}_3(u)) = 0$ доведено в теоремі 4.1. Нехай надалі $u \in \{1, 2, \dots, t\}$ фіксоване. Доведемо існування і моногенність в області $\tilde{\Pi}_{\tilde{\zeta}(u)}$ функції $\tilde{\Phi}_u$, яка задовольняє рівність (5.4). З цією метою спочатку доведемо рівність

$$I_u \zeta^{-1} = I_u \tilde{\zeta}^{-1}(u) \quad (5.5)$$

$$\forall \zeta = x + ye_2 + ze_3 \quad \forall \tilde{\zeta}(u) = x + y\tilde{e}_2(u) + z\tilde{e}_3(u), \quad x \in \mathbb{C}, y, z \in \mathbb{R}.$$

З рівностей (4.10), (4.6) випливають співвідношення

$$I_u e_2 = I_u \tilde{e}_2(u), \quad I_u e_3 = I_u \tilde{e}_3(u),$$

з яких, в свою чергу, випливає рівність

$$I_u \zeta = I_u \tilde{\zeta}(u). \quad (5.6)$$

Розглянемо різницю $I_u \zeta^{-1} - I_u \tilde{\zeta}^{-1}(u)$. За формулою Гільберта (див., наприклад, теорему 4.8.2 в [13]), маємо

$$I_u \zeta^{-1} - I_u \tilde{\zeta}^{-1}(u) = (I_u \zeta - I_u \tilde{\zeta}(u)) (\zeta \tilde{\zeta}(u))^{-1} = 0,$$

внаслідок рівності (5.6). Отже, рівність (5.5) доведено. Тепер з (5.5) маємо співвідношення

$$I_u(t - \zeta)^{-1} = I_u(t - \tilde{\zeta}(u))^{-1} \quad (5.7)$$

$$\forall t \in \mathbb{C} : t \neq \xi_u = f_u(\zeta) \quad \forall \zeta \in \Pi_\zeta(u) \quad \forall \tilde{\zeta}(u) \in \tilde{\Pi}_{\tilde{\zeta}(u)}.$$

З таблиці множення алгебри \mathbb{A}_n^m і формули (3.6) для моногенної в області $\Pi_\zeta(u)$ функції $\Phi_u(\zeta)$ маємо представлення

$$\Phi_u(\zeta) = I_u \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_u} \left(F_u(t) + \sum_{s=m+1}^n I_s G_s(t) \right) (t - \zeta)^{-1} dt, \quad (5.8)$$

де функції F_u, G_s визначені в теоремі **A**.

Враховуючи співвідношення (5.7), представлення (5.8) перепишемо у вигляді

$$\Phi_u(\zeta) = I_u \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_u} \left(F_u(t) + \sum_{s=m+1}^n I_s G_s(t) \right) (t - \tilde{\zeta}(u))^{-1} dt. \quad (5.9)$$

Оскільки в алгебрі \mathbb{A}_{n-m+1}^1 міститься єдиний максимальний ідеал \mathcal{I} , який співпадає з радикалом (2.1) цієї алгебри \mathcal{R} , то на цій алгебрі визначений єдиний лінійний неперервний мультиплікативний функціонал $f : \mathbb{A}_{n-m+1}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ ядром якого є радикал \mathcal{R} . А це означає, що $f(\tilde{\zeta}(u)) = x + a_u y + b_u z$ для кожного $\tilde{\zeta}(u) \in \tilde{E}_3(u)$. Беручи до уваги рівність $f_u(\zeta) = x + a_u y + b_u z$ для довільного $\zeta \in E_3$, маємо рівність

$$f(\tilde{\zeta}(u)) = f_u(\zeta). \quad (5.10)$$

З рівності (5.10) і умови теореми $f_u(E_3) = \mathbb{C}$ отримуємо співвідношення $f(\tilde{\zeta}(u)) = \mathbb{C}$ для довільного $\tilde{\zeta}(u) \in \tilde{E}_3(u)$.

Щойно ми показали, що виконуються умови теореми **A** для моногенних функцій в алгебрі \mathbb{A}_{n-m+1}^1 . Тоді в алгебрі \mathbb{A}_{n-m+1}^1 формула (3.6) для моногенної в області $\tilde{\Pi}_{\tilde{\zeta}(u)}$ функції $\tilde{\Phi}_u(\tilde{\zeta}(u))$ має вигляд

$$\tilde{\Phi}_u(\tilde{\zeta}(u)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\tilde{F}(t) + \sum_{s=m+1}^n I_s \tilde{G}_s(t) \right) (t - \tilde{\zeta}(u))^{-1} dt. \quad (5.11)$$

Потрібна нам формула (5.4) буде прямим наслідком рівностей (5.9) та (5.11), якщо ми покажемо, що можна покласти $\gamma \equiv \Gamma_u$, $F_u \equiv \tilde{F}$ і $G_s \equiv \tilde{G}_s$ для таких s , що $I_u I_s = I_s$. Покажемо це.

З рівності (5.10) випливає, що циліндри $\Pi_\zeta(u) \subset E_3$ та $\tilde{\Pi}_{\tilde{\zeta}(u)} \subset \tilde{E}_3(u)$ відповідними функціоналами f_u та f відображаються в одну і ту ж область D комплексної площини \mathbb{C} . А це означає, що функції F_u і \tilde{F} , а також функції G_s і \tilde{G}_s голоморфні в одній і тій самій області D . Отже, ми можемо покласти $F_u \equiv \tilde{F}$ і $G_s \equiv \tilde{G}_s$ в D .

Оскільки криві інтегрування γ і Γ_u лежать в області D , то ми можемо взяти $\gamma \equiv \Gamma_u$. Більше того, оскільки за теоремою **A** крива Γ_u в рівності (5.8) охоплює точку $f_u(\zeta) = x + a_u y + b_u z$, то внаслідок рівності (5.10) крива $\gamma \equiv \Gamma_u$ охоплює спектр точки $\tilde{\zeta}(u)$ — точку $f(\tilde{\zeta}(u)) = x + a_u y + b_u z$. А це нам і потрібно. Теорему доведено. \square

Зауваження 5.1. З рівностей (5.3), (5.4) випливає представлення

$$\Phi(\zeta) = I_1 \tilde{\Phi}_1(\tilde{\zeta}(1)) + \dots + I_m \tilde{\Phi}_m(\tilde{\zeta}(m)). \quad (5.12)$$

Зауваження 5.2. Теорема 4.1 означає, що функції Φ і $I_u \tilde{\Phi}_u$ при всіх $u = 1, 2, \dots, m$ задовольняють одне й те ж саме диференціальне рівняння виду (1.3).

Зауваження 5.3. Теорема 5.1 стверджує, що для побудови розв'язків диференціального рівняння (1.3) у вигляді компонент моногенних функцій зі значеннями в комутативних алгебрах, достатньо обмежитись вивченням моногенних функцій в алгебрах з базисом $\{1, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n\}$, де $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ — нільпотенти. Тобто кількість таких n -вимірних комутативних асоціативних алгебр з одиницею над полем \mathbb{C} в яких потрібно вивчати моногенні функції рівна кількості $(n-1)$ -вимірних комутативних асоціативних комплексних нільпотентних алгебр.

Зокрема, серед двовимірних комутативних асоціативних алгебр з одиницею над полем \mathbb{C} (яких існує всього дві) достатньо обмежитись вивченням моногенних функцій в бігармонічній алгебрі \mathbb{B} . Серед тривимірних комутативних асоціативних алгебр з одиницею над полем \mathbb{C} (яких існує всього чотири) достатньо обмежитись вивченням моногенних функцій в двох із них (це алгебри \mathbb{A}_3 і \mathbb{A}_4 в термінах роботи [6]). А серед чотиривимірних комутативних асоціативних алгебр з одиницею над полем \mathbb{C} (яких існує всього 9, див. [16]) достатньо обмежитись вивченням моногенних функцій в чотирьох із них (це алгебри $\tilde{\mathbb{A}}_{3,1}, \tilde{\mathbb{A}}_{3,2}, \tilde{\mathbb{A}}_{3,3}, \tilde{\mathbb{A}}_{3,4}$ з таблиці 9 роботи [17], див. також теорему 5.1 в роботі [18]). Серед усіх п'ятивимірних комутативних асоціативних алгебр з одиницею над полем \mathbb{C} (яких існує всього 25, див. [16]) достатньо обмежитись вивченням моногенних функцій в дев'яти із них (таблиці множення усіх цих 9 нільпотентних чотиривимірних алгебр

наведено в теоремі 6.1 з роботи [18]). І нарешті серед усіх шестивимірних комутативних асоціативних алгебр з одиницею над полем \mathbb{C} достатньо обмежитись вивченням моногенних функцій в 25-ти із них (усі ці 25 нільпотентних п'ятивимірних алгебр наведено в таблиці 1 з роботи [19]). Відомо також (див. [20]), що починаючи з розмірності 6 множина усіх попарно неізоморфних нільпотентних комутативних алгебр над \mathbb{C} є нескінченною.

Зауваження 5.4. Теорема 5.1 залишається справедливою для випадку, коли ми будемо розглядати функції $\Phi : \Pi_\zeta \rightarrow \mathbb{A}_n^m$ змінної $\zeta := \sum_{r=1}^k x_r e_r$, $2 \leq k \leq 2n$, яка моногенна в області $\Pi_\zeta \subset E_k$. При цьому замість теореми **A** необхідно використовувати теорему 1 з роботи [21].

Продемонструємо теорему 5.1 на алгебрах, які розглядалися в прикладах 4.1 та 4.2.

Приклад 5.1. Отже, розглядаємо алгебру \mathbb{A}_3^2 з таблицею множення (4.12). Для алгебри \mathbb{A}_3^2 алгеброю виду $1 \oplus_s N$ є бігармонічні алгебра \mathbb{B} з таблицею множення (4.13).

Відповідно до представлення (3.6), кожна моногенна функція Φ зі значеннями в алгебрі \mathbb{A}_3^2 подається у вигляді

$$\Phi(\zeta) = F_1(\xi_1)I_1 + F_2(\xi_2)I_2 + \left((a_3y + b_3z)F_2'(\xi_2) + G_3(\xi_2)\right)I_3 \quad (5.13)$$

$$\forall \zeta \in \Pi_\zeta, \quad \xi_u = x + a_u y + b_u z, \quad u = 1, 2,$$

де F_1 — деяка голоморфна функція в області D_1 , а F_2, G_3 — деякі голоморфні функції в області D_2 . Оскільки в \mathbb{A}_3^2 $m = 2$, то геометрично область Π_ζ є перетином двох нескінченних циліндрів: $\Pi_\zeta = \Pi_\zeta(1) \cap \Pi_\zeta(2)$.

Зауважимо, що представлення (5.13) раніше було отримано в роботі [8]. Крім того, функція (5.13) задовольняє деяке диференціальне рівняння вигляду (1.3).

Подамо функцію (5.13) у вигляді (5.3):

$$\Phi(\zeta) = \Phi(\zeta)I_1 + \Phi(\zeta)I_2 =: \Phi_1(\zeta) + \Phi_2(\zeta), \quad (5.14)$$

де $\Phi_1(\zeta) = F_1(\xi_1)I_1$ — моногенна функція в циліндрі $\Pi_\zeta(1)$, а функція

$$\Phi_2(\zeta) = F_2(\xi_2)I_2 + \left((a_3y + b_3z)F_2'(\xi_2) + G_3(\xi_2)\right)I_3$$

моногенна в циліндрі $\Pi_\zeta(2)$.

Перейдемо до розгляду моногенних функцій в алгебрі \mathbb{B} . З представлення (3.6) випливає, що кожна моногенна функція $\tilde{\Phi}$ зі значеннями в алгебрі \mathbb{B} подається у вигляді

$$\tilde{\Phi}(\tilde{\zeta}) = \tilde{F}(\tilde{\xi}) + \left((a_3y + b_3z)\tilde{F}'(\tilde{\xi}) + \tilde{G}(\tilde{\xi}) \right) I_3 \quad \forall \tilde{\zeta} \in \tilde{\Pi}_{\tilde{\zeta}}, \quad \tilde{\xi} = f(\tilde{\zeta}), \quad (5.15)$$

де \tilde{F}, \tilde{G} — деякі голоморфні функції в області D . Область $\tilde{\Pi}_{\tilde{\zeta}}$ є нескінченним циліндром. Рівність (5.15) для спеціального випадку встановлена в роботі [15].

Теорема 5.1 стверджує наступне:

1) в алгебрі \mathbb{B} існує трійка векторів $1, \tilde{e}_2(1), \tilde{e}_3(1)$, яка задовольняє те ж саме характеристичне рівняння що й трійка $1, e_2, e_3 \in \mathbb{A}_3^2$. При цьому, будуть виконуватись співвідношення $\xi_1 \equiv \tilde{\xi}$, $D_1 \equiv D$ і, крім того, існує моногенна в \mathbb{B} функція $\tilde{\Phi}$ така, що

$$I_1 \tilde{\Phi}_1(\tilde{\zeta}(1)) = \Phi_1(\zeta). \quad (5.16)$$

2) в алгебрі \mathbb{B} існує трійка векторів $1, \tilde{e}_2(2), \tilde{e}_3(2)$, яка задовольняє те ж саме характеристичне рівняння що й трійка $1, e_2, e_3 \in \mathbb{A}_3^2$. При цьому, будуть виконуватись співвідношення $\xi_2 \equiv \tilde{\xi}$, $D_2 \equiv D$ і, крім того, існує моногенна функція $\tilde{\Phi}$ така, що

$$I_2 \tilde{\Phi}_2(\tilde{\zeta}(2)) = \Phi_2(\zeta). \quad (5.17)$$

Потрібні трійки векторів $1, \tilde{e}_2(1), \tilde{e}_3(1)$ та $1, \tilde{e}_2(2), \tilde{e}_3(2)$ були знайдені у прикладі 4.1. Розглянемо випадок 1). Дійсно, для трійки (4.14) маємо $\tilde{\zeta}(1) = x + a_1y + b_1z \equiv \xi_1 \equiv \tilde{\xi}$, $D_1 \equiv D$. Покладемо $\tilde{F} \equiv F_1$, $\tilde{G} \equiv G_3$ в D . Тоді рівність (5.15) перепишеться у вигляді

$$\tilde{\Phi}_1(\tilde{\zeta}(1)) = F_1(\xi_1) + \left((a_3y + b_3z)F_1'(\xi_1) + G_3(\xi_1) \right) I_3. \quad (5.18)$$

Помноживши рівність (5.18) на I_1 , переконуємось у справедливості рівності (5.16).

Розглянемо випадок 2). Дійсно, для трійки (4.15) маємо

$$\tilde{\zeta}(2) = x + y\tilde{e}_2(2) + z\tilde{e}_3(2) = x + a_2y + b_2z + a_3xI_3 + b_3yI_3.$$

Очевидно, що $f(\tilde{\zeta}(2)) = x + a_2y + b_2z = \xi_2 \equiv \tilde{\xi}$, $D_2 \equiv D$. Покладемо $\tilde{F} \equiv F_2$, $\tilde{G} \equiv G_3$ в D . Тоді рівність (5.15) перепишеться у вигляді

$$\tilde{\Phi}_2(\tilde{\zeta}(2)) = F_2(\xi_2) + \left((a_3y + b_3z)F_2'(\xi_2) + G_3(\xi_2) \right) I_3. \quad (5.19)$$

Помноживши рівність (5.19) на I_2 , переконуємось у справедливості рівності (5.17).

Таким чином, справедлива рівність (5.12):

$$\Phi(\zeta) = I_1 \tilde{\Phi}_1(\tilde{\zeta}(1)) + I_2 \tilde{\Phi}_2(\tilde{\zeta}(2)),$$

де Φ приймає значення в алгебрі \mathbb{A}_3^2 , а $\tilde{\Phi}_1(\tilde{\zeta}(1)), \tilde{\Phi}_2(\tilde{\zeta}(2))$ приймають значення в \mathbb{B} .

Приклад 5.2. Отже, розглядаємо алгебру \mathbb{A}_5^3 з таблицею множення (4.16). Для алгебри \mathbb{A}_5^3 алгеброю виду $1 \oplus_s N$ є алгебра \mathbb{A}_4 з таблицею множення (4.17).

Відповідно до представлення (3.6), кожна моногенна функція Φ зі значеннями в алгебрі \mathbb{A}_5^3 подається у вигляді

$$\begin{aligned} \Phi(\zeta) = & F_1(\xi_1)I_1 + F_2(\xi_2)I_2 + F_3(\xi_3)I_3 + \left((a_4y + b_4z)F'_3(\xi_3) + G_3(\xi_3)\right)I_4 + \\ & + \left((a_5y + b_5z)F'_1(\xi_1) + G_5(\xi_1)\right)I_5 \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\forall \zeta \in \Pi_\zeta, \quad \xi_u = x + a_u y + b_u z, \quad u = 1, 2, 3,$$

де F_1, G_5 — деякі голоморфні функції в області D_1 , F_2 — деяка голоморфна функція в області D_2 , а F_3, G_3 — деякі голоморфні функції в області D_3 . Оскільки для \mathbb{A}_5^3 $m = 3$, то геометрично область Π_ζ є перетином трьох нескінченних циліндрів: $\Pi_\zeta = \Pi_\zeta(1) \cap \Pi_\zeta(2) \cap \Pi_\zeta(3)$.

Подамо функцію (5.20) у вигляді (5.3):

$$\Phi(\zeta) = \Phi(\zeta)I_1 + \Phi(\zeta)I_2 + \Phi(\zeta)I_3 =: \Phi_1(\zeta) + \Phi_2(\zeta) + \Phi_3(\zeta), \quad (5.21)$$

де

$$\Phi_1(\zeta) = F_1(\xi_1)I_1 + \left((a_5y + b_5z)F'_1(\xi_1) + G_5(\xi_1)\right)I_5$$

— моногенна функція в циліндрі $\Pi_\zeta(1)$, функція $\Phi_2(\zeta) = F_2(\xi_2)I_2$ моногенна в циліндрі $\Pi_\zeta(2)$, а функція

$$\Phi_3(\zeta) = F_3(\xi_3)I_3 + \left((a_4y + b_4z)F'_3(\xi_3) + G_3(\xi_3)\right)I_4$$

моногенна в циліндрі $\Pi_\zeta(3)$.

Перейдемо до розгляду моногенних функцій в алгебрі \mathbb{A}_4 . З представлення (3.6) випливає, що кожна моногенна функція $\tilde{\Phi}$ зі значеннями в алгебрі \mathbb{A}_4 подається у вигляді

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(\tilde{\zeta}) = & \tilde{F}(\tilde{\xi}) + \left((a_4y + b_4z)\tilde{F}'(\tilde{\xi}) + \tilde{G}_3(\tilde{\xi})\right)I_4 \\ & + \left((a_5y + b_5z)\tilde{F}'(\tilde{\xi}) + \tilde{G}_5(\tilde{\xi})\right)I_5 \quad \forall \tilde{\zeta} \in \tilde{\Pi}_{\tilde{\zeta}}, \quad \tilde{\xi} = f(\tilde{\zeta}), \end{aligned} \quad (5.22)$$

де $\tilde{F}, \tilde{G}_3, \tilde{G}_5$ — деякі голоморфні функції в області $D \subset \mathbb{C}$. Область $\tilde{\Pi}_{\tilde{\zeta}}$ є нескінченним циліндром.

Для трійки (4.19) алгебри \mathbb{A}_4 маємо

$$\tilde{\zeta}(1) = x + y\tilde{e}_2(1) + z\tilde{e}_3(1) = x + a_1y + b_1z + a_5xI_5 + b_5yI_5.$$

Очевидно, що $f(\tilde{\zeta}(1)) = x + a_1y + b_1z = \xi_1 \equiv \tilde{\xi}$, $D_1 \equiv D$. Покладемо $\tilde{F} \equiv F_1$, $\tilde{G}_3 \equiv G_3$, $\tilde{G}_5 \equiv G_5$ в D . Тоді рівність (5.22) перепишеться у вигляді

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_1(\tilde{\zeta}(1)) &= F_1(\xi_1) + \left((a_4y + b_4z)F'_1(\xi_1) + G_3(\xi_1) \right) I_4 \\ &+ \left((a_5y + b_5z)F'_1(\xi_1) + G_5(\xi_1) \right) I_5. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Помноживши рівність (5.23) на I_1 , переконуємось у справедливості рівності

$$I_1 \tilde{\Phi}_1(\tilde{\zeta}(1)) = \Phi_1(\zeta).$$

Для трійки (4.20) алгебри \mathbb{A}_4 маємо

$$\tilde{\zeta}(2) = x + y\tilde{e}_2(2) + z\tilde{e}_3(2) = x + a_2y + b_2z.$$

Очевидно, що $f(\tilde{\zeta}(2)) = \tilde{\zeta}(2) = x + a_2y + b_2z = \xi_2 \equiv \tilde{\xi}$, $D_2 \equiv D$. Покладемо $\tilde{F} \equiv F_2$, $\tilde{G}_3 \equiv G_3$, $\tilde{G}_5 \equiv G_5$ в D . Тоді рівність (5.22) набуде вигляду

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_2(\tilde{\zeta}(2)) &= F_2(\xi_2) + \left((a_4y + b_4z)F'_2(\xi_2) + G_3(\xi_2) \right) I_4 + \\ &+ \left((a_5y + b_5z)F'_2(\xi_2) + G_5(\xi_2) \right) I_5. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Помноживши рівність (5.24) на I_2 , переконуємось у справедливості рівності

$$I_2 \tilde{\Phi}_2(\tilde{\zeta}(2)) = \Phi_2(\zeta).$$

Нарешті, для трійки (4.21) отримуємо

$$\tilde{\zeta}(3) = x + y\tilde{e}_2(3) + z\tilde{e}_3(3) = x + a_3y + b_3z + a_4xI_4 + b_4yI_4.$$

Очевидно, що $f(\tilde{\zeta}(3)) = x + a_3y + b_3z = \xi_3 \equiv \tilde{\xi}$, $D_3 \equiv D$. Покладемо $\tilde{F} \equiv F_3$, $\tilde{G}_3 \equiv G_3$, $\tilde{G}_5 \equiv G_5$ в D . Тоді рівність (5.22) перепишеться у вигляді

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_3(\tilde{\zeta}(3)) &= F_3(\xi_3) + \left((a_4y + b_4z)F'_3(\xi_3) + G_3(\xi_3) \right) I_4 \\ &+ \left((a_5y + b_5z)F'_3(\xi_3) + G_5(\xi_3) \right) I_5. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Помноживши рівність (5.25) на I_3 , переконуємось у справедливості рівності

$$I_3 \tilde{\Phi}_3(\tilde{\zeta}(3)) = \Phi_3(\zeta).$$

Таким чином, справедлива рівність (5.12):

$$\Phi(\zeta) = I_1 \tilde{\Phi}_1(\tilde{\zeta}(1)) + I_2 \tilde{\Phi}_2(\tilde{\zeta}(2)) + I_3 \tilde{\Phi}_3(\tilde{\zeta}(3)),$$

де Φ приймає значення в алгебрі \mathbb{A}_5^3 , а $\tilde{\Phi}_1(\tilde{\zeta}(1))$, $\tilde{\Phi}_2(\tilde{\zeta}(2))$, $\tilde{\Phi}_3(\tilde{\zeta}(3))$ приймають значення в \mathbb{A}_4 .

Література

- [1] P. W. Ketchum, *Analytic functions of hypercomplex variables* // Trans. Amer. Math. Soc., **30**(4) (1928), 641–667.
- [2] M. N. Roşculeţ, *Algebre infinite asociate la ecuaţii cu derivate parţiale, omogene, cu coeficienţi constanţi de ordin oarecare* // Studii şi Cercetări Matematice, **6**(3–4) (1955), 567–643.
- [3] M. N. Roşculeţ, *Algebre infinite, comutative, asociate la sisteme de ecuaţii cu derivate parţiale* // Studii şi Cercetări Matematice, **7**(3–4) (1956), 321–371.
- [4] A. Pogorui, R. M. Rodriguez-Dagnino and M. Shapiro, *Solutions for PDEs with constant coefficients and derivability of functions ranged in commutative algebras* // Math. Meth. Appl. Sci., **37**(17) (2014), 2799–2810.
- [5] I. P. Mel'nichenko, *The representation of harmonic mappings by monogenic functions* // Ukr. Math. J., **27**(5) (1975), 499–505.
- [6] И. П. Мельниченко, С. А. Плакса, *Коммутативные алгебры и пространственные потенциальные поля*. – К.: Ин-т математики НАН Украины, 2008. – 230 с.
- [7] S. A. Plaksa, V. S. Shpakovskii, *Constructive description of monogenic functions in a harmonic algebra of the third rank* // Ukr. Math. J., **62**(8) (2011), 1251–1266.
- [8] S. A. Plaksa, R. P. Pukhtaevich, *Constructive description of monogenic functions in a three-dimensional harmonic algebra with one-dimensional radical* // Ukr. Math. J., **65**(5) (2013), 740–751.
- [9] R. P. Pukhtaievych, *Monogenic functions in a three-dimensional harmonic semi-simple algebra* // Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr., **10**(4–5) (2013), 352–361.
- [10] S. A. Plaksa, V. S. Shpakivskyi, *Monogenic functions in a finite-dimensional algebra with unit and radical of maximal dimensionality* // J. Algerian Math. Soc., **1** (2014), 1–13.
- [11] S. A. Plaksa, R. P. Pukhtaievych, *Constructive description of monogenic functions in n -dimensional semi-simple algebra* // An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa, **22**(1) (2014), 221–235.

- [12] E. Cartan, *Les groupes bilinéaires et les systèmes de nombres complexes* // Annales de la faculté des sciences de Toulouse, **12**(1) (1898), 1–64.
- [13] Э. Хилле, Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы*. — М.: Из-во иностр. лит., 1962. — 829 с.
- [14] V. S. Shpakivskyi, *Constructive description of monogenic functions in a finite-dimensional commutative associative algebra* // Adv. Pure Appl. Math., **7**(1)(2016), 63–75.
- [15] S. V. Grishchuk, S. A. Plaksa, *Monogenic functions in a biharmonic algebra* // Ukr. Math. J., **61**(12) (2009), 1865–1876.
- [16] G. Mazzola, *Generic finite schemes and Hochschild cocycles* // Comment. Math. Helvetici, **55**(1980), 267–293.
- [17] D. Burde, W. de Graaf, *Classification of Novicov algebras* // Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing, **24**(1) (2013), 1–15.
- [18] A. S. Hegazim, H. Abdelwahab, *Classification of five-dimensional nilpotent Jordan algebras* // Linear Algebra and its Applications, **494**(2016), 165–218.
- [19] B. Poonen, *Isomorphism types of commutative algebras of finite rank over an algebraically closed field* // Contemp. Math., **463**(2008), 111–120.
- [20] Д. А. Супруненко, *О максимальных коммутативных подалгебрах полной линейной алгебры* // Успехи мат. наук, **11**(3) (1956), 181–184.
- [21] V. S. Shpakivskyi, *Monogenic functions in finite-dimensional commutative associative algebras* // Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr., **12**(3) (2015), 251–268.

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

**Віталій
Станіславович
Шпаківський**

Інститут математики НАН України,
Київ, Україна
E-Mail: shpakivskyi86@gmail.com