

## Про моногенні функції, визначені в різних комутативних алгебрах

ВІТАЛІЙ С. ШПАКІВСЬКИЙ

(Представлена В. Я. Гутляньським)

**Анотація.** Встановлено відповідність між моногенною функцією в довільній скінченновимірній комутативній асоціативній алгебрі і скінченним набором моногенних функцій в спеціальній комутативній асоціативній алгебрі.

**2010 MSC.** 30G35, 57R35.

**Ключові слова та фрази.** Комутативна асоціативна алгебра, моногенна функція, характеристичне рівняння, інтегральне представлення.

### 1. Вступ

Напевно першим хто використав аналітичні функції, що приймають значення в комутативній алгебрі для побудови розв'язків тривимірного рівняння Лапласа був П. Кетчум [1]. Він показав, що кожна аналітична функція  $\Phi(\zeta)$  змінної  $\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3$  задовольняє тривимірне рівняння Лапласа, якщо лінійно незалежні елементи  $e_1, e_2, e_3$  комутативної алгебри задовольняють умову

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 0, \quad (1.1)$$

оскільки

$$\Delta_3 \Phi := \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \equiv \Phi''(\zeta) (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) = 0, \quad (1.2)$$

де  $\Phi'' := (\Phi')'$  і  $\Phi'(\zeta)$  визначається рівністю  $d\Phi = \Phi'(\zeta)d\zeta$ .

Узагальнюючи П. Кетчума, М. Рошкулець [2, 3] використовував аналітичні функції зі значеннями в комутативних алгебрах для дослідження рівнянь вигляду

$$\mathcal{L}_N U(x, y, z) := \sum_{\alpha+\beta+\gamma=N} C_{\alpha,\beta,\gamma} \frac{\partial^N U}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} = 0, \quad C_{\alpha,\beta,\gamma} \in \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

Розглядаючи змінну  $\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3$  і аналітичну функцію  $\Phi(\zeta)$ , отримуємо наступну рівність для мішаної похідної:

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma}\Phi}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} = e_1^\alpha e_2^\beta e_3^\gamma \Phi^{(\alpha+\beta+\gamma)}(\zeta) = e_1^\alpha e_2^\beta e_3^\gamma \Phi^{(N)}(\zeta). \quad (1.4)$$

Підставляючи (1.4) в рівняння (1.3), маємо рівність

$$\mathcal{L}_N \Phi(\zeta) = \Phi^{(N)}(\zeta) \sum_{\alpha+\beta+\gamma=N} C_{\alpha,\beta,\gamma} e_1^\alpha e_2^\beta e_3^\gamma.$$

Приходимо до висновку, що для виконання рівності  $\mathcal{L}_N \Phi(\zeta) = 0$  елементи алгебри  $e_1 = 1, e_2, e_3$  мають задовольняти *характеристичне рівняння*

$$\mathcal{X}(1, e_2, e_3) := \sum_{\alpha+\beta+\gamma=N} C_{\alpha,\beta,\gamma} e_2^\beta e_3^\gamma = 0. \quad (1.5)$$

Якщо ліву частину рівняння (1.5) розкласти за базисом алгебри, то характеристичне рівняння (1.5) рівносильне *характеристичній системі рівнянь*, породженій рівнянням (1.5).

Таким чином, при виконанні умови (1.5) кожна аналітична функція  $\Phi$  зі значеннями в довільній комутативній асоціативній алгебрі задовольняє рівняння (1.3), і, відповідно, усі дійснозначні компоненти функції  $\Phi$  є розв'язками рівняння (1.3).

В роботі [4] розглядаються диференціальні рівняння в частинних похідних від декількох змінних і наведено ряд прикладів на застосування описаного вище методу.

І. Мельниченко [5] запропонував розглядати в рівностях (1.2) і (1.4) функції  $\Phi$ , двічі диференційовні за Гато, при цьому описав усі базиси  $\{e_1, e_2, e_3\}$  тривимірних комутативних алгебр з одиницею над полем  $\mathbb{C}$ , які задовольняють рівність (1.1), див. [6].

Для цих тривимірних комутативних алгебр, асоційованих з тривимірним рівнянням Лапласа, в роботах [7–9] отримано конструктивний опис усіх моногенних (тобто неперервних і диференційовних за Гато) функцій за допомогою трьох відповідних голоморфних функцій комплексної змінної.

В роботах [10, 11] встановлено конструктивний опис моногенних функцій (зв'язаних з рівнянням  $\Delta_3 \Phi = 0$ ) зі значеннями в деяких  $n$ -вимірних комутативних алгебрах за допомогою відповідних  $n$  голоморфних функцій комплексної змінної і, спираючись на одержані представлення моногенних функцій, доведено аналоги ряду класичних результатів комплексного аналізу.

Нарешті в роботі [14] отримано конструктивний опис моногенних функцій (зв'язаних з рівнянням (1.3)) зі значеннями в довільній комутативній асоціативній алгебрі над полем  $\mathbb{C}$  за допомогою голоморфних функцій комплексної змінної.

У цій роботі буде показано, що для побудови розв'язків рівняння (1.3) у вигляді компонент моногенних функцій зі значеннями в скінченновимірних комутативних асоціативних алгебрах достатньо обмежитись вивченням моногенних функцій у алгебрах певного виду.

## 2. Алгебра $\mathbb{A}_n^m$

Нехай  $\mathbb{N}$  — множина натуральних чисел і  $m, n \in \mathbb{N}$  такі, що  $m \leq n$ . Нехай  $\mathbb{A}_n^m$  — довільна комутативна асоціативна алгебра з одиницею над полем комплексних чисел  $\mathbb{C}$ . Е. Картан [12, с. 33] довів, що в алгебрі  $\mathbb{A}_n^m$  існує базис  $\{I_k\}_{k=1}^n$ , який задовольняє наступні правила множення:

$$1. \quad \forall r, s \in [1, m] \cap \mathbb{N} : \quad I_r I_s = \begin{cases} 0 & \text{при } r \neq s, \\ I_r & \text{при } r = s; \end{cases}$$

$$2. \quad \forall r, s \in [m+1, n] \cap \mathbb{N} : \quad I_r I_s = \sum_{k=\max\{r,s\}+1}^n \Upsilon_{r,k}^s I_k;$$

$$3. \quad \forall s \in [m+1, n] \cap \mathbb{N} \exists! u_s \in [1, m] \cap \mathbb{N} \quad \forall r \in [1, m] \cap \mathbb{N} :$$

$$I_r I_s = \begin{cases} 0 & \text{при } r \neq u_s, \\ I_s & \text{при } r = u_s. \end{cases}$$

Крім того, структурні константи  $\Upsilon_{r,k}^s \in \mathbb{C}$  задовольняють умови асоціативності:

$$(A1). \quad (I_r I_s) I_p = I_r (I_s I_p) \quad \forall r, s, p \in [m+1, n] \cap \mathbb{N};$$

$$(A2). \quad (I_u I_s) I_p = I_u (I_s I_p) \quad \forall u \in [1, m] \cap \mathbb{N} \quad \forall s, p \in [m+1, n] \cap \mathbb{N}.$$

Очевидно, що перші  $m$  базисних векторів  $\{I_u\}_{u=1}^m$  є ідемпотентами і породжують напівпросту підалгебру  $S$  алгебри  $\mathbb{A}_n^m$ , а вектори  $\{I_r\}_{r=m+1}^n$  породжують нільпотентну підалгебру  $N$  цієї алгебри. З правил множення алгебри  $\mathbb{A}_n^m$  випливає, що  $\mathbb{A}_n^m$  є напівпрямою сумою  $m$ -вимірної напівпростої підалгебри  $S$  і  $(n-m)$ -вимірної нільпотентної підалгебри  $N$ , тобто

$$\mathbb{A}_n^m = S \oplus_s N.$$

Одиницею алгебри  $\mathbb{A}_n^m$  є елемент  $1 = \sum_{u=1}^m I_u$ .

Алгебра  $\mathbb{A}_n^m$  містить  $m$  максимальних ідеалів

$$\mathcal{I}_u := \left\{ \sum_{k=1, k \neq u}^n \lambda_k I_k : \lambda_k \in \mathbb{C} \right\}, \quad u = 1, 2, \dots, m,$$

перетином яких є радикал

$$\mathcal{R} := \left\{ \sum_{k=m+1}^n \lambda_k I_k : \lambda_k \in \mathbb{C} \right\}. \quad (2.1)$$

Визначимо  $m$  лінійних функціоналів  $f_u : \mathbb{A}_n^m \rightarrow \mathbb{C}$  рівностями

$$f_u(I_u) = 1, \quad f_u(\omega) = 0 \quad \forall \omega \in \mathcal{I}_u, \quad u = 1, 2, \dots, m. \quad (2.2)$$

Оскільки ядрами функціоналів  $f_u$  є відповідно максимальні ідеали  $\mathcal{I}_u$ , то ці функціонали є також неперервними і мультиплікативними (див. [13, с. 147]).

### 3. Моногені функції

Нехай

$$e_1 = 1, \quad e_2 = \sum_{r=1}^n a_r I_r, \quad e_3 = \sum_{r=1}^n b_r I_r \quad (3.1)$$

при  $a_r, b_r \in \mathbb{C}$  — трійка векторів в алгебрі  $\mathbb{A}_n^m$ , які лінійно незалежні над полем  $\mathbb{R}$ . Це означає, що рівність

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = 0, \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R},$$

виконується тоді і тільки тоді, коли  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ .

Нехай  $\zeta := x e_1 + y e_2 + z e_3$ , де  $x, y, z \in \mathbb{R}$ . Очевидно, що  $\xi_u := f_u(\zeta) = x + y a_u + z b_u$ ,  $u = 1, 2, \dots, m$ . Виділимо в алгебрі  $\mathbb{A}_n^m$  лінійну оболонку  $E_3 := \{\zeta = x e_1 + y e_2 + z e_3 : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ , породжену векторами  $e_1, e_2, e_3$ .

Далі істотним є припущення:  $f_u(E_3) = \mathbb{C}$  при всіх  $u = 1, 2, \dots, m$ , де  $f_u(E_3)$  — образ множини  $E_3$  при відображенні  $f_u$ . Очевидно, що це має місце тоді і тільки тоді, коли при кожному фіксованому  $u = 1, 2, \dots, m$  хоча б одне з чисел  $a_u$  чи  $b_u$  належить  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . В теоремі 7.1 роботи [14] встановлено підклас рівнянь вигляду (1.3) для яких умова  $f_u(E_3) = \mathbb{C}$  виконується при всіх  $u = 1, 2, \dots, m$ .

Області  $\Omega$  тривимірного простору  $\mathbb{R}^3$  поставимо у відповідність область  $\Omega_\zeta := \{\zeta = x e_1 + y e_2 + z e_3 : (x, y, z) \in \Omega\}$  в  $E_3$ .

Неперервну функцію  $\Phi : \Omega_\zeta \rightarrow \mathbb{A}_n^m$  називатимемо *моногенною* в області  $\Omega_\zeta \subset E_3$ , якщо  $\Phi$  диференційовна за Гато в кожній точці цієї області, тобто якщо для кожного  $\zeta \in \Omega_\zeta$  існує елемент  $\Phi'(\zeta)$  алгебри  $\mathbb{A}_n^m$  такий, що виконується рівність

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} (\Phi(\zeta + \varepsilon h) - \Phi(\zeta)) \varepsilon^{-1} = h \Phi'(\zeta) \quad \forall h \in E_3.$$

$\Phi'(\zeta)$  називається *похідною Гато* функції  $\Phi$  в точці  $\zeta$ .

Розглянемо розклад функції  $\Phi : \Omega_\zeta \rightarrow \mathbb{A}_n^m$  за базисом  $\{I_k\}_{k=1}^n$ :

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k=1}^n U_k(x, y, z) I_k. \quad (3.2)$$

У випадку, коли функції  $U_k : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \in \mathbb{R}$ -диференційовними в області  $\Omega$ , тобто для довільного  $(x, y, z) \in \Omega$

$$U_k(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - U_k(x, y, z) = \frac{\partial U_k}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial U_k}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial U_k}{\partial z} \Delta z +$$

$$+ o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}\right), \quad (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \rightarrow 0,$$

функція  $\Phi$  моногенна в області  $\Omega_\zeta$  тоді і тільки тоді, коли у кожній точці області  $\Omega_\zeta$  виконуються умови:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} e_2, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} e_3. \quad (3.3)$$

Відмітимо, що розклад резольвенти має вигляд

$$(te_1 - \zeta)^{-1} = \sum_{u=1}^m \frac{1}{t - \xi_u} I_u + \sum_{s=m+1}^n \sum_{k=2}^{s-m+1} \frac{Q_{k,s}}{(t - \xi_{u_s})^k} I_s \quad (3.4)$$

$$\forall t \in \mathbb{C} : t \neq \xi_u, \quad u = 1, 2, \dots, m,$$

де  $Q_{k,s}$  визначені наступними рекурентними співвідношеннями:

$$Q_{2,s} := T_s, \quad Q_{k,s} = \sum_{r=k+m-2}^{s-1} Q_{k-1,r} B_{r,s}, \quad k = 3, 4, \dots, s - m + 1.$$

при

$$T_s := ya_s + zb_s, \quad B_{r,s} := \sum_{k=m+1}^{s-1} T_k \Upsilon_{r,s}^k, \quad s = m + 2, \dots, n,$$

а натуральні числа  $u_s$  визначені у правилі 3 таблиці множення алгебри  $\mathbb{A}_n^m$ .

Із співвідношень (3.4) випливає, що точки  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , які відповідають необоротним елементам  $\zeta \in \mathbb{A}_n^m$ , лежать на прямих

$$L_u : \begin{cases} x + y \operatorname{Re} a_u + z \operatorname{Re} b_u = 0, \\ y \operatorname{Im} a_u + z \operatorname{Im} b_u = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

в тривимірному просторі  $\mathbb{R}^3$ .

Нехай область  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  є опуклою в напрямку прямих  $L_u$ ,  $u = 1, 2, \dots, m$ . Позначимо через  $D_u$  область комплексної площини  $\mathbb{C}$ , на яку область  $\Omega_\zeta$  відображається функціоналом  $f_u$ .

**Теорема А** [14]. *Нехай область  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  є опуклою в напрямку прямих  $L_u$  і  $f_u(E_3) = \mathbb{C}$  при всіх  $u = 1, 2, \dots, m$ . Тоді кожна моногенна функція  $\Phi : \Omega_\zeta \rightarrow \mathbb{A}_n^m$  подається у вигляді*

$$\Phi(\zeta) = \sum_{u=1}^m I_u \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_u} F_u(t)(t-\zeta)^{-1} dt + \sum_{s=m+1}^n I_s \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{u_s}} G_s(t)(t-\zeta)^{-1} dt, \quad (3.6)$$

де  $F_u$  — деяка голоморфна функція в області  $D_u$  і  $G_s$  — деяка голоморфна функція в області  $D_{u_s}$ , а  $\Gamma_q$  — замкнена жорданова спрямована крива, яка лежить в області  $D_q$ , охоплює точку  $\xi_q$  і не містить точок  $\xi_\ell$ ,  $\ell = 1, 2, \dots, m, \ell \neq q$ .

Оскільки за умов теореми **А** кожна моногенна функція  $\Phi : \Omega_\zeta \rightarrow \mathbb{A}_n^m$  продовжується до функції, моногенної в області

$$\Pi_\zeta := \{\zeta \in E_3 : f_u(\zeta) = D_u, u = 1, 2, \dots, m\}, \quad (3.7)$$

то надалі будемо розглядати моногенні функції  $\Phi$ , визначені в областях виду  $\Pi_\zeta$ .

#### 4. Характеристичне рівняння в різних комутативних алгебрах

Скажемо, що система поліноміальних над полем  $\mathbb{C}$  рівнянь  $Q_1$  *редукується* до системи поліноміальних рівнянь  $Q_2$ , якщо система  $Q_2$  отримується з системи  $Q_1$  шляхом відкидання деякої кількості рівнянь. В свою чергу, система  $Q_2$  є *редукцією* системи  $Q_1$ . Відмітимо, що для заданої системи поліноміальних рівнянь  $Q_1$  *редукована* система  $Q_2$  не єдина. Очевидним є наступне твердження.

**Твердження 4.1.** *Нехай система поліноміальних рівнянь  $Q_1$  з комплексними невідомими  $t_1, t_2, \dots, t_n$  має розв'язки і  $Q_2$  — будь-яка*

її редукована система з невідомими  $t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_k}$ , де  $i_1, i_2, \dots, i_k$ ,  $k \leq n$ , — попарно різні елементи множини  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Тоді усі  $t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_k}$ , які задовольняють систему  $Q_1$  є розв'язками системи  $Q_2$ .

Наприклад, система рівнянь

$$\begin{aligned} 1 + a_1^2 + b_1^2 &= 0, \\ 1 + a_2^2 + b_2^2 &= 0, \\ a_2 a_3 + b_2 b_3 &= 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

редукується до системи рівнянь

$$\begin{aligned} 1 + a_2^2 + b_2^2 &= 0, \\ a_2 a_3 + b_2 b_3 &= 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Твердження 4.1 означає, що всі значення  $a_2, b_2, a_3, b_3$ , які задовольняють систему (4.1) є розв'язками системи (4.2).

Встановимо допоміжні твердження.

**Лема 4.1.** Нехай в алгебрі  $\mathbb{A}_n^m$  існує трійка лінійно незалежних над  $\mathbb{R}$  векторів  $1, e_2, e_3$ , які задовольняють характеристичне рівняння (1.5). Тоді для кожного  $u \in \{1, 2, \dots, m\}$  характеристична система, породжена рівнянням  $\mathcal{X}(I_u, e_2 I_u, e_3 I_u) = 0$  є редуцією характеристичної системи, породженої рівнянням (1.5).

*Доведення.* Нехай ліва частина рівняння (1.5) в базисі алгебри має вигляд

$$\mathcal{X}(1, e_2, e_3) = \sum_{\alpha+\beta+\gamma=N} C_{\alpha,\beta,\gamma} e_2^\beta e_3^\gamma = \sum_{k=1}^n V_k I_k = 0.$$

Відповідно, характеристична система, породжена рівнянням (1.5), має вигляд

$$\begin{aligned} V_1 &= 0, \\ \dots & \\ V_n &= 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Тепер розглянемо характеристичну систему, породжену рівнянням  $\mathcal{X}(I_u, e_2 I_u, e_3 I_u) = 0$ . Маємо

$$\mathcal{X}(I_u, e_2 I_u, e_3 I_u) = \sum_{\alpha+\beta+\gamma=N} C_{\alpha,\beta,\gamma} I_u (e_2 I_u)^\beta (e_3 I_u)^\gamma =$$

$$= I_u \sum_{\alpha+\beta+\gamma=N} C_{\alpha,\beta,\gamma} e_2^\beta e_3^\gamma = I_u \sum_{k=1}^n V_k I_k = V_u + I_u \sum_{k=m+1}^n V_k I_k = 0. \tag{4.4}$$

Відповідно до правила 3 таблиці множення алгебри  $\mathbb{A}_n^m$  добуток  $I_u \sum_{k=m+1}^n V_k I_k$  належить радикалу  $\mathcal{R}$ . Таким чином, рівняння (4.4) рівносильне такій характеристичній системі:

$$\begin{aligned} V_u &= 0, \\ \dots\dots\dots & \\ V_k &= 0 \quad \forall k \in \{m+1, \dots, n\} : I_u I_k = I_k. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Очевидно, що система (4.5) є редукцією системи (4.3). □

Позначимо через  $\text{Rad } e_2$  частину вектора  $e_2$  з розкладу (3.1), яка міститься в його радикалі, тобто  $\text{Rad } e_2 := \sum_{r=m+1}^n a_r I_r$ . Аналогічно,

$$\text{Rad } e_3 := \sum_{r=m+1}^n b_r I_r.$$

**Лема 4.2.** *Нехай в алгебрі  $\mathbb{A}_n^m = S \oplus_s N$  існує трійка лінійно незалежних над  $\mathbb{R}$  векторів  $1, e_2, e_3$ , які задовольняють характеристичне рівняння (1.5). Тоді в алгебрі  $\mathbb{A}_{n-m+1}^1 = 1 \oplus_s N$  (де нільпотентна підалгебра  $N$  та ж сама що й в алгебрі  $\mathbb{A}_n^m$ ) для кожного  $u \in \{1, 2, \dots, t\}$  існує трійка векторів*

$$\begin{aligned} \tilde{e}_1(u) &= 1, \\ \tilde{e}_2(u) &:= a_u + I_u \text{Rad } e_2, \\ \tilde{e}_3(u) &:= b_u + I_u \text{Rad } e_3 \end{aligned} \tag{4.6}$$

така, що характеристична система, породжена рівнянням  $\mathcal{X}(1, \tilde{e}_2(u), \tilde{e}_3(u)) = 0$  є редукцією характеристичної системи, породженої рівнянням (1.5).

*Доведення.* Наслідком рівностей (4.6) є рівності

$$\begin{aligned} \tilde{e}_2^\beta(u) &= a_u^\beta + I_u \sum_{k=1}^\beta C_\beta^k a_u^{\beta-k} (\text{Rad } e_2)^k, \\ \tilde{e}_3^\gamma(u) &= b_u^\gamma + I_u \sum_{k=1}^\gamma C_\gamma^k b_u^{\gamma-k} (\text{Rad } e_3)^k. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Враховуючи формули (4.7), характеристичний многочлен  $\mathcal{X}(1, \tilde{e}_2(u), \tilde{e}_3(u)) = 0$  набуває вигляду

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha+\beta+\gamma=N} C_{\alpha,\beta,\gamma} \tilde{e}_2^\beta(u) \tilde{e}_3^\gamma(u) &= \sum_{\alpha+\beta+\gamma=N} C_{\alpha,\beta,\gamma} \left( a_u^\beta b_u^\gamma \right. \\ &+ I_u b_u^\gamma \sum_{k=1}^{\beta} C_{\beta}^k a_u^{\beta-k} (\text{Rad } e_2)^k + I_u a_u^\beta \sum_{k=1}^{\gamma} C_{\gamma}^k b_u^{\gamma-k} (\text{Rad } e_3)^k \\ &\left. + I_u \sum_{k=1}^{\beta} C_{\beta}^k a_u^{\beta-k} (\text{Rad } e_2)^k \sum_{p=1}^{\gamma} C_{\gamma}^p b_u^{\gamma-p} (\text{Rad } e_3)^p \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Далі покажемо, що характеристичні системи, породжені рівняннями  $\mathcal{X}(1, \tilde{e}_2(u), \tilde{e}_3(u)) = 0$  і  $\mathcal{X}(I_u, e_2 I_u, e_3 I_u) = 0$  співпадають.

З цією метою зауважимо, що наслідком розкладів (3.1) є подання

$$e_2 = a_1 I_1 + \dots + a_m I_m + \text{Rad } e_2, \quad e_3 = b_1 I_1 + \dots + b_m I_m + \text{Rad } e_3,$$

з яких випливають співвідношення

$$e_2 I_u = a_u I_u + I_u \text{Rad } e_2, \quad e_3 I_u = b_u I_u + I_u \text{Rad } e_3. \quad (4.9)$$

Тепер з (4.9) випливають рівності

$$\begin{aligned} e_2^\beta I_u &= a_u^\beta I_u + I_u \sum_{k=1}^{\beta} C_{\beta}^k a_u^{\beta-k} (\text{Rad } e_2)^k, \\ e_3^\gamma I_u &= b_u^\gamma I_u + I_u \sum_{k=1}^{\gamma} C_{\gamma}^k b_u^{\gamma-k} (\text{Rad } e_3)^k. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Беручи до уваги формули (4.10), характеристичне рівняння  $\mathcal{X}(I_u, e_2 I_u, e_3 I_u) = 0$  набуває вигляду

$$\begin{aligned} I_u \sum_{\alpha+\beta+\gamma=N} C_{\alpha,\beta,\gamma} e_2^\beta e_3^\gamma &= \sum_{\alpha+\beta+\gamma=N} C_{\alpha,\beta,\gamma} \left( a_u^\beta b_u^\gamma I_u \right. \\ &+ I_u b_u^\gamma \sum_{k=1}^{\beta} C_{\beta}^k a_u^{\beta-k} (\text{Rad } e_2)^k + I_u a_u^\beta \sum_{k=1}^{\gamma} C_{\gamma}^k b_u^{\gamma-k} (\text{Rad } e_3)^k \\ &\left. + I_u \sum_{k=1}^{\beta} C_{\beta}^k a_u^{\beta-k} (\text{Rad } e_2)^k \sum_{p=1}^{\gamma} C_{\gamma}^p b_u^{\gamma-p} (\text{Rad } e_3)^p \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

З рівностей (4.8), (4.11) очевидним чином випливає, що характеристичні системи, породжені рівняннями  $\mathcal{X}(1, \tilde{e}_2(u), \tilde{e}_3(u)) = 0$  і  $\mathcal{X}(I_u, e_2 I_u, e_3 I_u) = 0$  співпадають. Тепер доведення леми випливає з леми 4.1.  $\square$

**Зауваження 4.1.** Відмітимо, що алгебра  $\mathbb{A}_{n-m+1}^1 = 1 \oplus_s N$  з базисом  $\{1, I_{m+1}, \dots, I_n\}$  є підалгеброю алгебри  $\mathbb{A}_n^m = S \oplus_s N$ . Дійсно, будь-який елемент  $a$  алгебри  $\mathbb{A}_n^m = S \oplus_s N$  вигляду

$$a = a_0 I_1 + a_0 I_2 + \dots + a_0 I_m + a_{m+1} I_{m+1} + \dots + a_n I_n$$

$$= a_0 (I_1 + \dots + I_m) + a_{m+1} I_{m+1} + \dots + a_n I_n = a_0 + a_{m+1} I_{m+1} + \dots + a_n I_n$$

є представленням довільного елемента алгебри  $\mathbb{A}_{n-m+1}^1 = 1 \oplus_s N$ .

З твердження 4.1 і леми 4.2 випливає така

**Теорема 4.1.** Нехай в алгебрі  $\mathbb{A}_n^m = S \oplus_s N$  існує трійка лінійно незалежних над  $\mathbb{R}$  векторів  $1, e_2, e_3$ , які задовольняють характеристичне рівняння (1.5). Тоді в алгебрі  $\mathbb{A}_{n-m+1}^1 = 1 \oplus_s N$  (де нільпотентна підалгебра  $N$  та ж сама що й в алгебрі  $\mathbb{A}_n^m$ ) для кожного  $u \in \{1, 2, \dots, m\}$  трійка векторів (4.6) задовольняє характеристичне рівняння  $\mathcal{X}(1, \tilde{e}_2(u), \tilde{e}_3(u)) = 0$ .

**Приклад 4.1.** Розглянемо над полем  $\mathbb{C}$  алгебру  $\mathbb{A}_3^2$  з таблицею множення (див., наприклад, [6, с. 32], [8])

$$\begin{array}{c|c|c|c} \cdot & I_1 & I_2 & I_3 \\ \hline I_1 & I_1 & 0 & 0 \\ \hline I_2 & 0 & I_2 & I_3 \\ \hline I_3 & 0 & I_3 & 0 \end{array} . \tag{4.12}$$

Очевидно, що напівпростою підалгеброю  $S$  є підалгебра, породжена ідемпотентами  $I_1, I_2$ , а нільпотентною підалгеброю  $N$  є підалгебра  $\{\alpha I_3 : \alpha \in \mathbb{C}\}$ . Тоді алгебра  $\mathbb{A}_3^2 := 1 \oplus_s N$  співпадає з відомою бігармонічною алгеброю  $\mathbb{B}$  (див., наприклад, [15]) і має таку таблицю множення:

$$\begin{array}{c|c|c} \cdot & 1 & I_3 \\ \hline 1 & 1 & I_3 \\ \hline I_3 & I_3 & 0 \end{array} . \tag{4.13}$$

Нехай в алгебрі  $\mathbb{A}_3^2$  задане характеристичне рівняння (1.1). Як відомо (див. теорему 1.8 в [6]), умова гармонічності (1.1) векторів  $e_1 = 1, e_2 = a_1 I_1 + a_2 I_2 + a_3 I_3, e_3 = b_1 I_1 + b_2 I_2 + b_3 I_3$  алгебри  $\mathbb{A}_3^2$  рівносильна системі рівнянь (4.1).

Оскільки для алгебри  $\mathbb{A}_3^2$   $m = 2$ , то в алгебрі  $\mathbb{B}$  ми будемо дві трійки векторів виду (4.6):

$$\tilde{e}_1(1) = 1, \tilde{e}_2(1) = a_1 + I_1(a_3 I_3) = a_1, \tilde{e}_3(1) = b_1 + I_1(b_3 I_3) = b_1 \tag{4.14}$$

та

$$\begin{aligned}\tilde{e}_1(2) &= 1, \\ \tilde{e}_2(2) &= a_2 + I_2(a_3 I_3) = a_2 + a_3 I_3, \\ \tilde{e}_3(2) &= b_2 + I_2(b_3 I_3) = b_2 + b_3 I_3.\end{aligned}\tag{4.15}$$

За теоремою 4.1 трійки (4.14) та (4.15) гармонічні в алгебрі  $\mathbb{B}$  (тобто задовольняють умову (1.1)). Справді, гармонічність трійки (4.14) рівносильна першому рівнянню системи (4.1), а гармонічність трійки (4.15) рівносильна системі (4.2).

**Приклад 4.2.** Розглянемо над полем  $\mathbb{C}$  алгебру  $\mathbb{A}_5^3$  з такою таблицею множення

$\cdot$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_4$	$I_5$	$\cdot$	(4.16)
$I_1$	$I_1$	$0$	$0$	$0$	$I_5$		
$I_2$	$0$	$I_2$	$0$	$0$	$0$		
$I_3$	$0$	$0$	$I_3$	$I_4$	$0$		
$I_4$	$0$	$0$	$I_4$	$0$	$0$		
$I_5$	$I_5$	$0$	$0$	$0$	$0$		

Відмітимо, що напівпростою підалгеброю  $S \in$  підалгебра, породжена ідемпотентами  $I_1, I_2, I_3$ , а нільпотентною підалгеброю  $N \in$  підалгебра з базисом  $\{I_4, I_5\}$ . Тоді алгебра  $\mathbb{A}_3^1 := 1 \oplus_s N$  співпадає з відомою алгеброю  $\mathbb{A}_4$  (див., наприклад, [6, с. 26]) і має таку таблицю множення:

$\cdot$	$1$	$I_4$	$I_5$	$\cdot$	(4.17)
$1$	$1$	$I_4$	$I_5$		
$I_4$	$I_4$	$0$	$0$		
$I_5$	$I_5$	$0$	$0$		

Нехай в алгебрі  $\mathbb{A}_5^3$  задане характеристичне рівняння (1.1). Умова гармонічності (1.1) векторів вигляду (3.1) алгебри  $\mathbb{A}_5^3$  рівносильна наступній системі рівнянь

$$\begin{aligned}1 + a_u^2 + b_u^2 &= 0, \quad u = 1, 2, 3, \\ a_3 a_4 + b_3 b_4 &= 0, \\ a_1 a_5 + b_1 b_5 &= 0.\end{aligned}\tag{4.18}$$

Оскільки для алгебри  $\mathbb{A}_5^3$   $m = 3$ , то в алгебрі  $\mathbb{A}_4$  ми будемо три трійки векторів виду (4.6):

$$\begin{aligned}\tilde{e}_1(1) &= 1, \\ \tilde{e}_2(1) &= a_1 + I_1(a_4 I_4 + a_5 I_5) = a_1 + a_5 I_5, \\ \tilde{e}_3(1) &= b_1 + I_1(b_4 I_4 + b_5 I_5) = b_1 + b_5 I_5,\end{aligned}\tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{e}_1(2) &= 1, \\
\tilde{e}_2(2) &= a_2 + I_2(a_4 I_4 + a_5 I_5) = a_2, \\
\tilde{e}_3(2) &= b_2 + I_2(b_4 I_4 + b_5 I_5) = b_2,
\end{aligned} \tag{4.20}$$

та

$$\begin{aligned}
\tilde{e}_1(3) &= 1, \\
\tilde{e}_2(3) &= a_3 + I_3(a_4 I_4 + a_5 I_5) = a_3 + a_4 I_4, \\
\tilde{e}_3(3) &= b_3 + I_3(b_4 I_4 + b_5 I_5) = b_3 + b_4 I_4.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

За теоремою 4.1 трійки (4.19), (4.20) та (4.21) гармонічні в алгебрі  $\mathbb{A}_4$  (тобто задовольняють умову (1.1)). Справді, гармонічність трійки (4.19) рівносильна системі з першого і п'ятого рівняння системи (4.15); гармонічність трійки (4.20) рівносильна другому рівнянню системи (4.15), а гармонічність трійки (4.21) рівносильна системі з третього і четвертого рівняння системи (4.15).

#### 4.1. Лінійна незалежність векторів $1, \tilde{e}_2(u), \tilde{e}_3(u)$

З наведених прикладів видно, що вектори  $1, \tilde{e}_2(u), \tilde{e}_3(u)$  при деяких  $u \in \{1, 2, \dots, t\}$  можуть бути лінійно залежними над полем  $\mathbb{R}$ . Так, трійки (4.14), (4.20) завжди лінійно залежні над полем  $\mathbb{R}$ .

Встановимо необхідні і достатні умови лінійної незалежності над полем  $\mathbb{R}$  векторів  $1, \tilde{e}_2(u), \tilde{e}_3(u)$  алгебри  $\mathbb{A}_{n-m+1}^1 = 1 \oplus_s N$ .

**Лема 4.3.** *Нехай вектори (3.1) алгебри  $\mathbb{A}_n^m = S \oplus_s N$  лінійно незалежні над полем  $\mathbb{R}$  і нехай  $u \in \{1, 2, \dots, t\}$  фіксоване. Тоді*

1. *якщо вектори  $I_u \text{Rad } e_2, I_u \text{Rad } e_3 \in \mathbb{A}_n^m$  лінійно незалежні над полем  $\mathbb{R}$ , то вектори  $1, \tilde{e}_2(u), \tilde{e}_3(u)$  алгебри  $\mathbb{A}_{n-m+1}^1 = 1 \oplus_s N$  також лінійно незалежні над полем  $\mathbb{R}$ ;*

2. *якщо ж вектори  $I_u \text{Rad } e_2, I_u \text{Rad } e_3 \in \mathbb{A}_n^m$  лінійно залежні над полем  $\mathbb{R}$ , то вектори  $1, \tilde{e}_2(u), \tilde{e}_3(u)$  алгебри  $\mathbb{A}_{n-m+1}^1 = 1 \oplus_s N$  лінійно незалежні над полем  $\mathbb{R}$  тоді і тільки тоді, коли існує  $r \in \{t+1, \dots, n\}$  таке, що  $I_u I_r = I_r$  і виконується хоча б одне співвідношення*

$$\text{Im } a_u \text{Re } b_r \neq \text{Im } b_u \text{Re } a_r \quad \text{або} \quad \text{Im } a_u \text{Im } b_r \neq \text{Im } b_u \text{Im } a_r. \tag{4.22}$$

*Доведення.* Доведемо перше твердження леми. За умовою рівність

$$\beta_2 I_u \text{Rad } e_2 + \beta_3 I_u \text{Rad } e_3 = 0, \quad \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R} \tag{4.23}$$

виконується тоді і тільки тоді, коли  $\beta_2 = \beta_3 = 0$ .

Розглянемо лінійну комбінацію

$$\alpha_1 + \alpha_2 \tilde{e}_2(u) + \alpha_3 \tilde{e}_3(u) = (\alpha_1 + \alpha_2 a_u + \alpha_3 b_u) +$$

$$+ (\alpha_2 I_u \text{Rad } e_2 + \alpha_3 I_u \text{Rad } e_3) = 0, \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}. \quad (4.24)$$

Оскільки вираз у другій дужці в рівності (4.24) приймає значення в радикалі  $\mathcal{R}$  алгебри, а перша дужка комплекснозначна, то умова (4.24) рівносильна системі рівнянь

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 a_u + \alpha_3 b_u &= 0, \\ \alpha_2 I_u \text{Rad } e_2 + \alpha_3 I_u \text{Rad } e_3 &= 0. \end{aligned} \quad (4.25)$$

З другого рівняння системи (4.25) і умови (4.23) випливає, що  $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ . А тоді з першого рівняння системи (4.25) отримуємо  $\alpha_1 = 0$ . Отже, вектори  $1, \tilde{e}_2(u), \tilde{e}_3(u)$  лінійно незалежні над  $\mathbb{R}$ .

Доведемо друге твердження леми. Розглянемо рівність

$$\beta_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3 = \sum_{s=1}^m I_s(\beta_1 + \beta_2 a_s + \beta_3 b_s) + \sum_{k=m+1}^n I_k(\beta_2 a_k + \beta_3 b_k) = 0,$$

яка рівносильна системі рівнянь

$$\begin{aligned} \beta_1 + \beta_2 \text{Re } a_s + \beta_3 \text{Re } b_s &= 0, \\ \beta_2 \text{Im } a_s + \beta_3 \text{Im } b_s &= 0, \quad s = 1, 2, \dots, m, \\ \beta_2 \text{Re } a_k + \beta_3 \text{Re } b_k &= 0, \\ \beta_2 \text{Im } a_k + \beta_3 \text{Im } b_k &= 0, \quad k = m + 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Лінійна незалежність над  $\mathbb{R}$  векторів  $1, e_2, e_3$  означає, що серед усіх рівнянь системи (4.26), окрім першого, існує хоча б два рівняння, які між собою не пропорційні.

Тепер запишемо умову лінійної незалежності над  $\mathbb{R}$  векторів  $1, \tilde{e}_2(u), \tilde{e}_3(u)$ . Для цього систему (4.25) запишемо в розгорнутому вигляді

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 \text{Re } a_u + \alpha_3 \text{Re } b_u &= 0, \\ \alpha_2 \text{Im } a_u + \alpha_3 \text{Im } b_u &= 0, \\ \alpha_2 \text{Re } a_r + \alpha_3 \text{Re } b_r &= 0, \\ \alpha_2 \text{Im } a_r + \alpha_3 \text{Im } b_r &= 0 \\ \forall r \in \{m + 1, \dots, n\} &: I_u I_r = I_r. \end{aligned} \quad (4.27)$$

За умовою пункту 2 леми вектори  $I_u \text{Rad } e_2, I_u \text{Rad } e_3$  лінійно залежні над  $\mathbb{R}$ . Це означає, що в системі (4.27) всі рівності, окрім перших двох, пропорційні між собою. Очевидно, що для лінійної незалежності над  $\mathbb{R}$  векторів  $1, \tilde{e}_2(u), \tilde{e}_3(u)$  необхідно і достатньо, щоб друге рівняння системи (4.27) було не пропорційне хоча б з одним іншим рівнянням (крім першого) системи (4.27). А це рівносильно умовам (4.22).  $\square$

## 5. Моногенні функції, визначені в різних комутативних алгебрах

В алгебрі  $\mathbb{A}_n^m = S \oplus_s N$  будемо розглядати моногенні функції  $\Phi$ , визначені в деякій області  $\Pi_\zeta \subset E_3$  виду (3.7). Геометрично область  $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ , яка конгруентна області  $\Pi_\zeta \subset E_3$ , є перетином  $m$  нескінченних циліндрів, кожен з яких паралельний деякій з  $m$  прямих  $L_u$ ,  $u = 1, 2, \dots, m$  вигляду (3.5). Тобто,  $\Pi = \bigcap_{u=1}^m \Pi(u)$ , де  $\mathbb{R}^3 \supset \Pi(u)$  — нескінченний циліндр, паралельний прямій  $L_u$ . І те ж саме маємо для конгруентних областей в  $E_3$ :

$$\Pi_\zeta = \bigcap_{u=1}^m \Pi_\zeta(u). \quad (5.1)$$

Аналітично циліндр  $\Pi_\zeta(u)$  визначається рівністю

$$\Pi_\zeta(u) = \{\zeta_u := I_u \zeta : \zeta \in \Pi_\zeta\}.$$

Тепер розглянемо моногенну в області  $\Pi_\zeta$  функцію  $\Phi : \Pi_\zeta \rightarrow \mathbb{A}_n^m$ . Введемо позначення

$$\Phi_u(\zeta) := I_u \Phi(\zeta), \quad u = 1, 2, \dots, m. \quad (5.2)$$

Тоді очевидно є рівність

$$\Phi = (I_1 + \dots + I_m)\Phi = \sum_{u=1}^m \Phi_u. \quad (5.3)$$

Крім того, з рівності (3.6) і таблиці множення алгебри  $\mathbb{A}_n^m$  випливає, що при кожному  $u \in \{1, 2, \dots, m\}$  функція  $\Phi_u$  моногенна у всьому нескінченному циліндрі  $\Pi_\zeta(u)$ .

Таким чином, кожна моногенна в області (5.1) функція  $\Phi : \Pi_\zeta \rightarrow \mathbb{A}_n^m$  подається у вигляді суми (5.3), де функція  $\Phi_u$  моногенна у всьому циліндрі  $\Pi_\zeta(u)$ .

Тепер перейдемо до розгляду моногенних функцій  $\tilde{\Phi}$  в алгебрі  $\mathbb{A}_{n-m+1}^1 = 1 \oplus_s N$ . Оскільки, відповідно до зауваження 4.1, алгебра  $\mathbb{A}_{n-m+1}^1$  є підалгеброю алгебри  $\mathbb{A}_n^m$ , то в алгебрі  $\mathbb{A}_{n-m+1}^1$  усі циліндри  $\Pi_\zeta(u)$  з рівності (5.1) співпадають між собою. Тобто, в алгебрах вигляду  $\mathbb{A}_{n-m+1}^1$  кожна моногенна функція буде моногенною в деякому одному нескінченному циліндрі.

В наступній теоремі встановлюється зв'язок між моногенними функціями в алгебрах  $\mathbb{A}_n^m = S \oplus_s N$  та  $\mathbb{A}_{n-m+1}^1 = 1 \oplus_s N$ . Для формулювання результату введемо деякі позначення.

На вектори вигляду (4.6) алгебри  $\mathbb{A}_{n-m+1}^1$  натягнемо лінійний простір  $\tilde{E}_3(u) := \{\tilde{\zeta}(u) = x + y\tilde{e}_2(u) + z\tilde{e}_3(u) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ . Трійка векторів (4.6) визначає одну пряму  $L(u)$  виду (3.5), яка відповідає множині необоротних елементів  $\tilde{\zeta}(u)$  простору  $\tilde{E}_3(u)$ . Нехай  $\tilde{\Pi}_{\tilde{\zeta}(u)}$  — деякий нескінченний циліндр в  $\tilde{E}_3(u)$ , паралельний прямій  $\tilde{L}(u)$ .

**Теорема 5.1.** *Нехай в алгебрі  $\mathbb{A}_n^m = S \oplus_s N$  існує трійка лінійно незалежних над  $\mathbb{R}$  векторів  $1, e_2, e_3$ , які задовольняють характеристичне рівняння (1.5) і нехай  $f_u(E_3) = \mathbb{C}$  при всіх  $u = 1, 2, \dots, m$ . Крім того, нехай функція  $\Phi : \Pi_\zeta \rightarrow \mathbb{A}_n^m$  змінної  $\zeta = x + ye_2 + ze_3$  моногенна в області  $\Pi_\zeta \subset E_3$  виду (5.1). Тоді в алгебрі  $\mathbb{A}_{n-m+1}^1 = 1 \oplus_s N$  (де нільпотентна підалгебра  $N$  та ж сама що й в алгебрі  $\mathbb{A}_n^m$ ) для кожного  $u \in \{1, 2, \dots, m\}$  існує трійка векторів (4.6), яка задовольняє характеристичне рівняння  $\mathcal{X}(1, \tilde{e}_2(u), \tilde{e}_3(u)) = 0$  і існує функція  $\tilde{\Phi}_u : \tilde{\Pi}_{\tilde{\zeta}(u)} \rightarrow \mathbb{A}_{n-m+1}^1$  змінної  $\tilde{\zeta}(u)$ , яка моногенна в циліндрі*

$$\tilde{\Pi}_{\tilde{\zeta}(u)} = \left\{ \tilde{\zeta}(u) \in \tilde{E}_3(u) : f_u(\tilde{\zeta}(u)) = f_u(\zeta), \zeta \in \Pi_\zeta(u) \right\}$$

така, що

$$\Phi_u(\zeta) = I_u \tilde{\Phi}_u(\tilde{\zeta}(u)). \quad (5.4)$$

*Доведення.* Існування трійки (4.6) з властивістю  $\mathcal{X}(1, \tilde{e}_2(u), \tilde{e}_3(u)) = 0$  доведено в теоремі 4.1. Нехай надалі  $u \in \{1, 2, \dots, m\}$  фіксоване. Доведемо існування і моногенність в області  $\tilde{\Pi}_{\tilde{\zeta}(u)}$  функції  $\tilde{\Phi}_u$ , яка задовольняє рівність (5.4). З цією метою спочатку доведемо рівність

$$I_u \zeta^{-1} = I_u \tilde{\zeta}^{-1}(u) \quad (5.5)$$

$$\forall \zeta = x + ye_2 + ze_3 \quad \forall \tilde{\zeta}(u) = x + y\tilde{e}_2(u) + z\tilde{e}_3(u), \quad x \in \mathbb{C}, y, z \in \mathbb{R}.$$

З рівностей (4.10), (4.6) випливають співвідношення

$$I_u e_2 = I_u \tilde{e}_2(u), \quad I_u e_3 = I_u \tilde{e}_3(u),$$

з яких, в свою чергу, випливає рівність

$$I_u \zeta = I_u \tilde{\zeta}(u). \quad (5.6)$$

Розглянемо різницю  $I_u \zeta^{-1} - I_u \tilde{\zeta}^{-1}(u)$ . За формулою Гільберта (див., наприклад, теорему 4.8.2 в [13]), маємо

$$I_u \zeta^{-1} - I_u \tilde{\zeta}^{-1}(u) = (I_u \zeta - I_u \tilde{\zeta}(u)) (\zeta \tilde{\zeta}(u))^{-1} = 0,$$

внаслідок рівності (5.6). Отже, рівність (5.5) доведено. Тепер з (5.5) маємо співвідношення

$$I_u(t - \zeta)^{-1} = I_u(t - \tilde{\zeta}(u))^{-1} \quad (5.7)$$

$$\forall t \in \mathbb{C} : t \neq \xi_u = f_u(\zeta) \quad \forall \zeta \in \Pi_\zeta(u) \quad \forall \tilde{\zeta}(u) \in \tilde{\Pi}_{\tilde{\zeta}(u)}.$$

З таблиці множення алгебри  $\mathbb{A}_n^m$  і формули (3.6) для моногенної в області  $\Pi_\zeta(u)$  функції  $\Phi_u(\zeta)$  маємо представлення

$$\Phi_u(\zeta) = I_u \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_u} \left( F_u(t) + \sum_{s=m+1}^n I_s G_s(t) \right) (t - \zeta)^{-1} dt, \quad (5.8)$$

де функції  $F_u, G_s$  визначені в теоремі **A**.

Враховуючи співвідношення (5.7), представлення (5.8) перепишемо у вигляді

$$\Phi_u(\zeta) = I_u \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_u} \left( F_u(t) + \sum_{s=m+1}^n I_s G_s(t) \right) (t - \tilde{\zeta}(u))^{-1} dt. \quad (5.9)$$

Оскільки в алгебрі  $\mathbb{A}_{n-m+1}^1$  міститься єдиний максимальний ідеал  $\mathcal{I}$ , який співпадає з радикалом (2.1) цієї алгебри  $\mathcal{R}$ , то на цій алгебрі визначений єдиний лінійний неперервний мультиплікативний функціонал  $f : \mathbb{A}_{n-m+1}^1 \rightarrow \mathbb{C}$  ядром якого є радикал  $\mathcal{R}$ . А це означає, що  $f(\tilde{\zeta}(u)) = x + a_u y + b_u z$  для кожного  $\tilde{\zeta}(u) \in \tilde{E}_3(u)$ . Беручи до уваги рівність  $f_u(\zeta) = x + a_u y + b_u z$  для довільного  $\zeta \in E_3$ , маємо рівність

$$f(\tilde{\zeta}(u)) = f_u(\zeta). \quad (5.10)$$

З рівності (5.10) і умови теореми  $f_u(E_3) = \mathbb{C}$  отримуємо співвідношення  $f(\tilde{\zeta}(u)) = \mathbb{C}$  для довільного  $\tilde{\zeta}(u) \in \tilde{E}_3(u)$ .

Щойно ми показали, що виконуються умови теореми **A** для моногенних функцій в алгебрі  $\mathbb{A}_{n-m+1}^1$ . Тоді в алгебрі  $\mathbb{A}_{n-m+1}^1$  формула (3.6) для моногенної в області  $\tilde{\Pi}_{\tilde{\zeta}(u)}$  функції  $\tilde{\Phi}_u(\tilde{\zeta}(u))$  має вигляд

$$\tilde{\Phi}_u(\tilde{\zeta}(u)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left( \tilde{F}(t) + \sum_{s=m+1}^n I_s \tilde{G}_s(t) \right) (t - \tilde{\zeta}(u))^{-1} dt. \quad (5.11)$$

Потрібна нам формула (5.4) буде прямим наслідком рівностей (5.9) та (5.11), якщо ми покажемо, що можна покласти  $\gamma \equiv \Gamma_u, F_u \equiv \tilde{F}$  і  $G_s \equiv \tilde{G}_s$  для таких  $s$ , що  $I_u I_s = I_s$ . Покажемо це.

З рівності (5.10) випливає, що циліндри  $\Pi_\zeta(u) \subset E_3$  та  $\tilde{\Pi}_{\tilde{\zeta}(u)} \subset \tilde{E}_3(u)$  відповідними функціоналами  $f_u$  та  $f$  відображаються в одну і ту ж область  $D$  комплексної площини  $\mathbb{C}$ . А це означає, що функції  $F_u$  і  $\tilde{F}$ , а також функції  $G_s$  і  $\tilde{G}_s$  голоморфні в одній і тій самій області  $D$ . Отже, ми можемо покласти  $F_u \equiv \tilde{F}$  і  $G_s \equiv \tilde{G}_s$  в  $D$ .

Оскільки криві інтегрування  $\gamma$  і  $\Gamma_u$  лежать в області  $D$ , то ми можемо взяти  $\gamma \equiv \Gamma_u$ . Більше того, оскільки за теоремою **A** крива  $\Gamma_u$  в рівності (5.8) охоплює точку  $f_u(\zeta) = x + a_u y + b_u z$ , то внаслідок рівності (5.10) крива  $\gamma \equiv \Gamma_u$  охоплює спектр точки  $\tilde{\zeta}(u)$  — точку  $f(\tilde{\zeta}(u)) = x + a_u y + b_u z$ . А це нам і потрібно. Теорему доведено.  $\square$

**Зауваження 5.1.** З рівностей (5.3), (5.4) випливає представлення

$$\Phi(\zeta) = I_1 \tilde{\Phi}_1(\tilde{\zeta}(1)) + \dots + I_m \tilde{\Phi}_m(\tilde{\zeta}(m)). \quad (5.12)$$

**Зауваження 5.2.** Теорема 4.1 означає, що функції  $\Phi$  і  $I_u \tilde{\Phi}_u$  при всіх  $u = 1, 2, \dots, m$  задовольняють одне й те ж саме диференціальне рівняння виду (1.3).

**Зауваження 5.3.** Теорема 5.1 стверджує, що для побудови розв'язків диференціального рівняння (1.3) у вигляді компонент моногенних функцій зі значеннями в комутативних алгебрах, достатньо обмежитись вивченням моногенних функцій в алгебрах з базисом  $\{1, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n\}$ , де  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  — нільпотенти. Тобто кількість таких  $n$ -вимірних комутативних асоціативних алгебр з одиницею над полем  $\mathbb{C}$  в яких потрібно вивчати моногенні функції рівна кількості  $(n-1)$ -вимірних комутативних асоціативних комплексних нільпотентних алгебр.

Зокрема, серед двовимірних комутативних асоціативних алгебр з одиницею над полем  $\mathbb{C}$  (яких існує всього дві) достатньо обмежитись вивченням моногенних функцій в бігармонічній алгебрі  $\mathbb{B}$ . Серед тривимірних комутативних асоціативних алгебр з одиницею над полем  $\mathbb{C}$  (яких існує всього чотири) достатньо обмежитись вивченням моногенних функцій в двох із них (це алгебри  $\mathbb{A}_3$  і  $\mathbb{A}_4$  в термінах роботи [6]). А серед чотиривимірних комутативних асоціативних алгебр з одиницею над полем  $\mathbb{C}$  (яких існує всього 9, див. [16]) достатньо обмежитись вивченням моногенних функцій в чотирьох із них (це алгебри  $\tilde{\mathbb{A}}_{3,1}, \tilde{\mathbb{A}}_{3,2}, \tilde{\mathbb{A}}_{3,3}, \tilde{\mathbb{A}}_{3,4}$  з таблиці 9 роботи [17], див. також теорему 5.1 в роботі [18]). Серед усіх п'ятивимірних комутативних асоціативних алгебр з одиницею над полем  $\mathbb{C}$  (яких існує всього 25, див. [16]) достатньо обмежитись вивченням моногенних функцій в дев'яти із них (таблиці множення усіх цих 9 нільпотентних чотиривимірних алгебр

наведено в теоремі 6.1 з роботи [18]). І нарешті серед усіх шестивимірних комутативних асоціативних алгебр з одиницею над полем  $\mathbb{C}$  достатньо обмежитись вивченням моногенних функцій в 25-ти із них (усі ці 25 нільпотентних п'ятивимірних алгебр наведено в таблиці 1 з роботи [19]). Відомо також (див. [20]), що починаючи з розмірності 6 множина усіх попарно неізоморфних нільпотентних комутативних алгебр над  $\mathbb{C}$  є нескінченною.

**Зауваження 5.4.** Теорема 5.1 залишається справедливою для випадку, коли ми будемо розглядати функції  $\Phi : \Pi_\zeta \rightarrow \mathbb{A}_n^m$  змінної  $\zeta := \sum_{r=1}^k x_r e_r$ ,  $2 \leq k \leq 2n$ , яка моногенна в області  $\Pi_\zeta \subset E_k$ . При цьому замість теореми **A** необхідно використовувати теорему 1 з роботи [21].

Продемонструємо теорему 5.1 на алгебрах, які розглядалися в прикладах 4.1 та 4.2.

**Приклад 5.1.** Отже, розглядаємо алгебру  $\mathbb{A}_3^2$  з таблицею множення (4.12). Для алгебри  $\mathbb{A}_3^2$  алгеброю виду  $1 \oplus_s N$  є бігармонічна алгебра  $\mathbb{B}$  з таблицею множення (4.13).

Відповідно до представлення (3.6), кожна моногенна функція  $\Phi$  зі значеннями в алгебрі  $\mathbb{A}_3^2$  подається у вигляді

$$\Phi(\zeta) = F_1(\xi_1)I_1 + F_2(\xi_2)I_2 + \left( (a_3y + b_3z)F_2'(\xi_2) + G_3(\xi_2) \right) I_3 \quad (5.13)$$

$$\forall \zeta \in \Pi_\zeta, \quad \xi_u = x + a_u y + b_u z, \quad u = 1, 2,$$

де  $F_1$  — деяка голоморфна функція в області  $D_1$ , а  $F_2, G_3$  — деякі голоморфні функції в області  $D_2$ . Оскільки в  $\mathbb{A}_3^2$   $m = 2$ , то геометрично область  $\Pi_\zeta$  є перетином двох нескінченних циліндрів:  $\Pi_\zeta = \Pi_\zeta(1) \cap \Pi_\zeta(2)$ .

Зауважимо, що представлення (5.13) раніше було отримано в роботі [8]. Крім того, функція (5.13) задовольняє деяке диференціальне рівняння вигляду (1.3).

Подамо функцію (5.13) у вигляді (5.3):

$$\Phi(\zeta) = \Phi(\zeta)I_1 + \Phi(\zeta)I_2 =: \Phi_1(\zeta) + \Phi_2(\zeta), \quad (5.14)$$

де  $\Phi_1(\zeta) = F_1(\xi_1)I_1$  — моногенна функція в циліндрі  $\Pi_\zeta(1)$ , а функція

$$\Phi_2(\zeta) = F_2(\xi_2)I_2 + \left( (a_3y + b_3z)F_2'(\xi_2) + G_3(\xi_2) \right) I_3$$

моногенна в циліндрі  $\Pi_\zeta(2)$ .

Перейдемо до розгляду моногенних функцій в алгебрі  $\mathbb{B}$ . З представлення (3.6) випливає, що кожна моногенна функція  $\tilde{\Phi}$  зі значеннями в алгебрі  $\mathbb{B}$  подається у вигляді

$$\tilde{\Phi}(\tilde{\zeta}) = \tilde{F}(\tilde{\xi}) + \left( (a_3y + b_3z)\tilde{F}'(\tilde{\xi}) + \tilde{G}(\tilde{\xi}) \right) I_3 \quad \forall \tilde{\zeta} \in \tilde{\Pi}_{\tilde{\zeta}}, \quad \tilde{\xi} = f(\tilde{\zeta}), \quad (5.15)$$

де  $\tilde{F}, \tilde{G}$  — деякі голоморфні функції в області  $D$ . Область  $\tilde{\Pi}_{\tilde{\zeta}}$  є нескінченним циліндром. Рівність (5.15) для спеціального випадку встановлена в роботі [15].

Теорема 5.1 стверджує наступне:

1) в алгебрі  $\mathbb{B}$  існує трійка векторів  $1, \tilde{e}_2(1), \tilde{e}_3(1)$ , яка задовольняє те ж саме характеристичне рівняння що й трійка  $1, e_2, e_3 \in \mathbb{A}_3^2$ . При цьому, будуть виконуватись співвідношення  $\xi_1 \equiv \tilde{\xi}$ ,  $D_1 \equiv D$  і, крім того, існує моногенна в  $\mathbb{B}$  функція  $\tilde{\Phi}$  така, що

$$I_1 \tilde{\Phi}_1(\tilde{\zeta}(1)) = \Phi_1(\zeta). \quad (5.16)$$

2) в алгебрі  $\mathbb{B}$  існує трійка векторів  $1, \tilde{e}_2(2), \tilde{e}_3(2)$ , яка задовольняє те ж саме характеристичне рівняння що й трійка  $1, e_2, e_3 \in \mathbb{A}_3^2$ . При цьому, будуть виконуватись співвідношення  $\xi_2 \equiv \tilde{\xi}$ ,  $D_2 \equiv D$  і, крім того, існує моногенна функція  $\tilde{\Phi}$  така, що

$$I_2 \tilde{\Phi}_2(\tilde{\zeta}(2)) = \Phi_2(\zeta). \quad (5.17)$$

Потрібні трійки векторів  $1, \tilde{e}_2(1), \tilde{e}_3(1)$  та  $1, \tilde{e}_2(2), \tilde{e}_3(2)$  були знайдені у прикладі 4.1. Розглянемо випадок 1). Дійсно, для трійки (4.14) маємо  $\zeta(1) = x + a_1y + b_1z \equiv \xi_1 \equiv \tilde{\xi}$ ,  $D_1 \equiv D$ . Покладемо  $\tilde{F} \equiv F_1$ ,  $\tilde{G} \equiv G_3$  в  $D$ . Тоді рівність (5.15) перепишеться у вигляді

$$\tilde{\Phi}_1(\tilde{\zeta}(1)) = F_1(\xi_1) + \left( (a_3y + b_3z)F_1'(\xi_1) + G_3(\xi_1) \right) I_3. \quad (5.18)$$

Помноживши рівність (5.18) на  $I_1$ , переконуємось у справедливості рівності (5.16).

Розглянемо випадок 2). Дійсно, для трійки (4.15) маємо

$$\tilde{\zeta}(2) = x + y\tilde{e}_2(2) + z\tilde{e}_3(2) = x + a_2y + b_2z + a_3xI_3 + b_3yI_3.$$

Очевидно, що  $f(\tilde{\zeta}(2)) = x + a_2y + b_2z = \xi_2 \equiv \tilde{\xi}$ ,  $D_2 \equiv D$ . Покладемо  $\tilde{F} \equiv F_2$ ,  $\tilde{G} \equiv G_3$  в  $D$ . Тоді рівність (5.15) перепишеться у вигляді

$$\tilde{\Phi}_2(\tilde{\zeta}(2)) = F_2(\xi_2) + \left( (a_3y + b_3z)F_2'(\xi_2) + G_3(\xi_2) \right) I_3. \quad (5.19)$$

Помноживши рівність (5.19) на  $I_2$ , переконуємось у справедливості рівності (5.17).

Таким чином, справедлива рівність (5.12):

$$\Phi(\zeta) = I_1 \tilde{\Phi}_1(\tilde{\zeta}(1)) + I_2 \tilde{\Phi}_2(\tilde{\zeta}(2)),$$

де  $\Phi$  приймає значення в алгебрі  $\mathbb{A}_3^2$ , а  $\tilde{\Phi}_1(\tilde{\zeta}(1)), \tilde{\Phi}_2(\tilde{\zeta}(2))$  приймають значення в  $\mathbb{B}$ .

**Приклад 5.2.** Отже, розглядаємо алгебру  $\mathbb{A}_5^3$  з таблицею множення (4.16). Для алгебри  $\mathbb{A}_5^3$  алгеброю виду  $1 \oplus_s N$  є алгебра  $\mathbb{A}_4$  з таблицею множення (4.17).

Відповідно до представлення (3.6), кожна моногенна функція  $\Phi$  зі значеннями в алгебрі  $\mathbb{A}_5^3$  подається у вигляді

$$\begin{aligned} \Phi(\zeta) = & F_1(\xi_1)I_1 + F_2(\xi_2)I_2 + F_3(\xi_3)I_3 + \left( (a_4y + b_4z)F'_3(\xi_3) + G_3(\xi_3) \right) I_4 + \\ & + \left( (a_5y + b_5z)F'_1(\xi_1) + G_5(\xi_1) \right) I_5 \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\forall \zeta \in \Pi_\zeta, \quad \xi_u = x + a_u y + b_u z, \quad u = 1, 2, 3,$$

де  $F_1, G_5$  — деякі голоморфні функції в області  $D_1$ ,  $F_2$  — деяка голоморфна функція в області  $D_2$ , а  $F_3, G_3$  — деякі голоморфні функції в області  $D_3$ . Оскільки для  $\mathbb{A}_5^3$   $m = 3$ , то геометрично область  $\Pi_\zeta$  є перетином трьох нескінченних циліндрів:  $\Pi_\zeta = \Pi_\zeta(1) \cap \Pi_\zeta(2) \cap \Pi_\zeta(3)$ .

Подамо функцію (5.20) у вигляді (5.3):

$$\Phi(\zeta) = \Phi(\zeta)I_1 + \Phi(\zeta)I_2 + \Phi(\zeta)I_3 =: \Phi_1(\zeta) + \Phi_2(\zeta) + \Phi_3(\zeta), \quad (5.21)$$

де

$$\Phi_1(\zeta) = F_1(\xi_1)I_1 + \left( (a_5y + b_5z)F'_1(\xi_1) + G_5(\xi_1) \right) I_5$$

— моногенна функція в циліндрі  $\Pi_\zeta(1)$ , функція  $\Phi_2(\zeta) = F_2(\xi_2)I_2$  моногенна в циліндрі  $\Pi_\zeta(2)$ , а функція

$$\Phi_3(\zeta) = F_3(\xi_3)I_3 + \left( (a_4y + b_4z)F'_3(\xi_3) + G_3(\xi_3) \right) I_4$$

моногенна в циліндрі  $\Pi_\zeta(3)$ .

Перейдемо до розгляду моногенних функцій в алгебрі  $\mathbb{A}_4$ . З представлення (3.6) випливає, що кожна моногенна функція  $\tilde{\Phi}$  зі значеннями в алгебрі  $\mathbb{A}_4$  подається у вигляді

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(\tilde{\zeta}) = & \tilde{F}(\tilde{\xi}) + \left( (a_4y + b_4z)\tilde{F}'(\tilde{\xi}) + \tilde{G}_3(\tilde{\xi}) \right) I_4 \\ & + \left( (a_5y + b_5z)\tilde{F}'(\tilde{\xi}) + \tilde{G}_5(\tilde{\xi}) \right) I_5 \quad \forall \tilde{\zeta} \in \tilde{\Pi}_{\tilde{\zeta}}, \quad \tilde{\xi} = f(\tilde{\zeta}), \end{aligned} \quad (5.22)$$

де  $\tilde{F}, \tilde{G}_3, \tilde{G}_5$  — деякі голоморфні функції в області  $D \subset \mathbb{C}$ . Область  $\tilde{\Pi}_{\tilde{\zeta}}$  є нескінченним циліндром.

Для трійки (4.19) алгебри  $\mathbb{A}_4$  маємо

$$\tilde{\zeta}(1) = x + y\tilde{e}_2(1) + z\tilde{e}_3(1) = x + a_1y + b_1z + a_5xI_5 + b_5yI_5.$$

Очевидно, що  $f(\tilde{\zeta}(1)) = x + a_1y + b_1z = \xi_1 \equiv \tilde{\xi}$ ,  $D_1 \equiv D$ . Покладемо  $\tilde{F} \equiv F_1$ ,  $\tilde{G}_3 \equiv G_3$ ,  $\tilde{G}_5 \equiv G_5$  в  $D$ . Тоді рівність (5.22) перепишеться у вигляді

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_1(\tilde{\zeta}(1)) &= F_1(\xi_1) + \left( (a_4y + b_4z)F_1'(\xi_1) + G_3(\xi_1) \right) I_4 \\ &+ \left( (a_5y + b_5z)F_1'(\xi_1) + G_5(\xi_1) \right) I_5. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Помноживши рівність (5.23) на  $I_1$ , переконуємось у справедливості рівності

$$I_1 \tilde{\Phi}_1(\tilde{\zeta}(1)) = \Phi_1(\zeta).$$

Для трійки (4.20) алгебри  $\mathbb{A}_4$  маємо

$$\tilde{\zeta}(2) = x + y\tilde{e}_2(2) + z\tilde{e}_3(2) = x + a_2y + b_2z.$$

Очевидно, що  $f(\tilde{\zeta}(2)) = \tilde{\zeta}(2) = x + a_2y + b_2z = \xi_2 \equiv \tilde{\xi}$ ,  $D_2 \equiv D$ . Покладемо  $\tilde{F} \equiv F_2$ ,  $\tilde{G}_3 \equiv G_3$ ,  $\tilde{G}_5 \equiv G_5$  в  $D$ . Тоді рівність (5.22) набуде вигляду

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_2(\tilde{\zeta}(2)) &= F_2(\xi_2) + \left( (a_4y + b_4z)F_2'(\xi_2) + G_3(\xi_2) \right) I_4 + \\ &+ \left( (a_5y + b_5z)F_2'(\xi_2) + G_5(\xi_2) \right) I_5. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Помноживши рівність (5.24) на  $I_2$ , переконуємось у справедливості рівності

$$I_2 \tilde{\Phi}_2(\tilde{\zeta}(2)) = \Phi_2(\zeta).$$

Нарешті, для трійки (4.21) отримуємо

$$\tilde{\zeta}(3) = x + y\tilde{e}_2(3) + z\tilde{e}_3(3) = x + a_3y + b_3z + a_4xI_4 + b_4yI_4.$$

Очевидно, що  $f(\tilde{\zeta}(3)) = x + a_3y + b_3z = \xi_3 \equiv \tilde{\xi}$ ,  $D_3 \equiv D$ . Покладемо  $\tilde{F} \equiv F_3$ ,  $\tilde{G}_3 \equiv G_3$ ,  $\tilde{G}_5 \equiv G_5$  в  $D$ . Тоді рівність (5.22) перепишеться у вигляді

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_3(\tilde{\zeta}(3)) &= F_3(\xi_3) + \left( (a_4y + b_4z)F_3'(\xi_3) + G_3(\xi_3) \right) I_4 \\ &+ \left( (a_5y + b_5z)F_3'(\xi_3) + G_5(\xi_3) \right) I_5. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Помноживши рівність (5.25) на  $I_3$ , переконаємось у справедливості рівності

$$I_3 \tilde{\Phi}_3(\tilde{\zeta}(3)) = \Phi_3(\zeta).$$

Таким чином, справедлива рівність (5.12):

$$\Phi(\zeta) = I_1 \tilde{\Phi}_1(\tilde{\zeta}(1)) + I_2 \tilde{\Phi}_2(\tilde{\zeta}(2)) + I_3 \tilde{\Phi}_3(\tilde{\zeta}(3)),$$

де  $\Phi$  приймає значення в алгебрі  $\mathbb{A}_5^3$ , а  $\tilde{\Phi}_1(\tilde{\zeta}(1))$ ,  $\tilde{\Phi}_2(\tilde{\zeta}(2))$ ,  $\tilde{\Phi}_3(\tilde{\zeta}(3))$  приймають значення в  $\mathbb{A}_4$ .

### Література

- [1] P. W. Ketchum, *Analytic functions of hypercomplex variables* // Trans. Amer. Math. Soc., **30**(4) (1928), 641–667.
- [2] M. N. Roşculeţ, *Algebre infinite asociate la ecuaţii cu derivate parţiale, omogene, cu coeficienţi constanţi de ordin oarecare* // Studii şi Cercetări Matematice, **6**(3–4) (1955), 567–643.
- [3] M. N. Roşculeţ, *Algebre infinite, comutative, asociate la sisteme de ecuaţii cu derivate parţiale* // Studii şi Cercetări Matematice, **7**(3–4) (1956), 321–371.
- [4] A. Pogorui, R. M. Rodriguez-Dagnino and M. Shapiro, *Solutions for PDEs with constant coefficients and derivability of functions ranged in commutative algebras* // Math. Meth. Appl. Sci., **37**(17) (2014), 2799–2810.
- [5] I. P. Mel'nichenko, *The representation of harmonic mappings by monogenic functions* // Ukr. Math. J., **27**(5) (1975), 499–505.
- [6] И. П. Мельниченко, С. А. Плакса, *Коммутативные алгебры и пространственные потенциальные поля*. – К.: Ин-т математики НАН Украины, 2008. – 230 с.
- [7] S. A. Plaksa, V. S. Shpakovskii, *Constructive description of monogenic functions in a harmonic algebra of the third rank* // Ukr. Math. J., **62**(8) (2011), 1251–1266.
- [8] S. A. Plaksa, R. P. Pukhtaevich, *Constructive description of monogenic functions in a three-dimensional harmonic algebra with one-dimensional radical* // Ukr. Math. J., **65**(5) (2013), 740–751.
- [9] R. P. Pukhtaievych, *Monogenic functions in a three-dimensional harmonic semi-simple algebra* // Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr., **10**(4–5) (2013), 352–361.
- [10] S. A. Plaksa, V. S. Shpakivskyi, *Monogenic functions in a finite-dimensional algebra with unit and radical of maximal dimensionality* // J. Algerian Math. Soc., **1** (2014), 1–13.
- [11] S. A. Plaksa, R. P. Pukhtaievych, *Constructive description of monogenic functions in  $n$ -dimensional semi-simple algebra* // An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa, **22**(1) (2014), 221–235.

- [12] E. Cartan, *Les groupes bilinéaires et les systèmes de nombres complexes* // Annales de la faculté des sciences de Toulouse, **12**(1) (1898), 1–64.
- [13] Э. Хилле, Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы*. — М.: Из-во иностр. лит., 1962. — 829 с.
- [14] V. S. Shpakivskyi, *Constructive description of monogenic functions in a finite-dimensional commutative associative algebra* // Adv. Pure Appl. Math., **7**(1)(2016), 63–75.
- [15] S. V. Grishchuk, S. A. Plaksa, *Monogenic functions in a biharmonic algebra* // Ukr. Math. J., **61**(12) (2009), 1865–1876.
- [16] G. Mazzola, *Generic finite schemes and Hochschild cocycles* // Comment. Math. Helvetici, **55**(1980), 267–293.
- [17] D. Burde, W. de Graaf, *Classification of Novicov algebras* // Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing, **24**(1) (2013), 1–15.
- [18] A. S. Hegazim, H. Abdelwahab, *Classification of five-dimensional nilpotent Jordan algebras* // Linear Algebra and its Applications, **494**(2016), 165–218.
- [19] B. Poonen, *Isomorphism types of commutative algebras of finite rank over an algebraically closed field* // Contemp. Math., **463**(2008), 111–120.
- [20] Д. А. Супруненко, *О максимальных коммутативных подалгебрах полной линейной алгебры* // Успехи мат. наук, **11**(3) (1956), 181–184.
- [21] V. S. Shpakivskyi, *Monogenic functions in finite-dimensional commutative associative algebras* // Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr., **12**(3) (2015), 251–268.

## ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

**Віталій  
Станіславович  
Шпаківський**

Інститут математики НАН України,  
Київ, Україна  
*E-Mail*: shpakivskyi86@gmail.com