Міністерство освіти і науки України
Житомирський державний університет імені Івана Франка

О. М. Королюк

ПРАКТИКУМ ІЗ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ШКІЛЬНОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ. ТЕКСТОВІ ЗАДАЧІ

Навчально-методичний посібник

Житомир
Вид-во ЖДУ імені Івана Франка
2020

УДК 51(075.8)
ББК 21.1р
К68

Рекомендовано до друку вченою радою Житомирського державного університету імені Івана Франка (протокол № 8 від 26.06.2020)

Рецензенти:

В. П. Журавльов – доктор фізико-математичних наук, завідувач кафедри вищої та прикладної математики Поліського національного університету;

Н. В. Горова – вчитель математики вищої категорії, старший вчитель Житомирської ЗОШ І-ІІІ ступенів № 30.

Королюк О. М.

К68 Практикум із розв'язування задач шкільного курсу математики. Текстові задачі : навчально-методичний посібник / О. М. Королюк. – Житомир : Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2020. – 68 с.

Посібник містить теоретичні відомості з методики навчання учнів розв'язувати текстові задачі шкльного курсу математики, зразки розв'язування задач різних типів, добірку завдань для самостійної роботи, а також текстові задачі із завдань основних сесій ЗНО з математки.

Для викладачів, студентів фізико-математичних факультетів вищих навчальних закладів освіти, вчителів загальноосвітніх шкіл.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1р

ЗМІСТ

ВСТУП

У математиці задачі посідають особливе місце. Математична наука виникла із задач, вона розвивається для розв`язування нових задач. Часто саме потреби практики примушували вчених-математиків створювати нові алгоритми, встановлювати закономірності, розробляти нові методи дослідження, роз язування задач.

У шкільному курсі математики багато уваги приділяється текстовим (сюжетним) задачам. З одного боку, текстові задачі становлять певний розділ програми, матеріали якого учні повинні засвоїти, а з іншого – виступають як дидактичний засіб навчання, виховання і розвитку школярів. Тому питання методики навчання учнів розв'язувати текстові задачі завжди привертали увагу науковців (А. І. Азаров, В. Г. Бевз, З. І. Слєпкань, Є. М. Турецький, Л. М. Фрідман та ін.).

Уміння розв`язувати задачі вимагає знання залежностей між величинами, розуміння сутності арифметичних операцій, володіння прийомами обчислень, знання загальних правил встановлення причинно-наслідкових зв`язків, розуміння змісту та структури задачі, уміння орієнтуватися в певних життєвих ситуаціях тощо.

У процесі розв`язування задач реалізуються цілі навчання математики: набуття і вдосконалення математичних знань; формування математичної компетентності; розвиток творчого і логічного мислення тощо.

У посібнику систематизовано основні відомості з методики навчання учнів розв'язувати сюжетні математичні задачі; розглянуто різні типи таких задач, виділено їх методичні особливості; представлено чималу добірку задач для самостійного роз`язування, а також текстові задачі, які увійшли до завдань основних сесій ЗНО з математики.

Видання призначене для викладачів, студентів фізико-математичних факультетів денної та заочної форм навчання, учителів та учнів загальноосвітніх шкіл.

1. Роль і місце текстових задач у курсі математики

У методиці навчання математики під *математичною задачею* розуміють будь-яку вимогу обчислити, побудувати довести або дослідити що-небудь, що стосується просторових форм чи кількісних співвідношень, або запитання, рівносильне такій вимозі [16].

У структурі задачі виділяють: умову й вимогу. Те, що дано в задачі називається її *умовою*, а те, що потрібно знайти – *вимогою*. Виконати сформульовану в задачі вимогу – це й означає *розв'язати* її [16].

Опис процесу розв'язування у вигляді послідовності всіх міркувань, який часто подається у символічній формі, називають *розв'язанням* задачі. Розв'язання кожної задачі повинно бути безпомилковим, обґрунтованим, повним та раціональним. *Розв'язок* – це остаточний результат процесу розв'язування задачі.

Метод розв'язування задачі – це сукупність прийомів розумової діяльності або логічних математичних дій і операцій, за допомогою яких розв'язується великий клас задач.

Під *способом розв'язування задачі* в математиці розуміють сукупність прийомів розумової діяльності або логічних математичних дій і операцій, які використовуються у разі розв'язування окремої задачі або невеликої групи задач певного типу.

Кожну задачу можна розв'язати «по діям», оперуючи заданими числовими значеннями величин і відношеннями між ними. Це – *арифметичний спосіб* розв'язування. За умовою задачі також можна скласти рівняння або систему рівнянь, а вже їх допомогою одержати відповідь. Такий спосіб розв'язування задач називають *алгебраїчним* [4].

У шкільному курсі математики існують задачі, в яких дані величини і зв'язок між ними включені у певну фабулу. Зміст цієї фабули є сюжетом, де відображено ситуацію, близьку до практичної, життєвої. У ній описується кількісний аспект реального явища чи події і міститься вимога знайти невідоме значення деякої величини (величин). Такі задачі називаються сюжетними**.** Оскільки ці задачі сформульовано звичайною (нематематичною) мовою, то їх часто називають також текстовими**.**

Отже, *текстова задача* – це опис на звичайній мові деякої ситуації, в якій потрібно надати кількісну характеристику якої-небудь компоненти цієї ситуації, встановити наявність чи відсутність певного співвідношення між її компонентами чи визначити вид цього співвідношення [17].

На основі аналізу математичної і методичної літератури, можна узагальнити:

Текстові задачі допомагають розкрити опосередковані зв'язки математики з навколишнім середовищем і практичною діяльністю людей, реалізувати пізнавальні й виховні функції навчання. Від оволодіння вміннями розв'язувати задачі залежить не лише математична підготовка школярів на певному етапі навчання, а й осмислене засвоєння систематичних курсів алгебри, геометрії, фізики, інформатики, економіки тощо.

У навчальному процесі текстові задачі виконують різні *функції* (рис. 1).

Рис. 1. Функції текстових задач у навчанні математики

2. Основні типи текстових задач

Уміння розв'язувати текстову задачу залежить від багатьох факторів. Перед усім необхідно навчитися розрізняти основні типи задач і вміти розв`язувати найпростіші із них.

Виділяють такі типи текстових математичних задач (рис. 2):

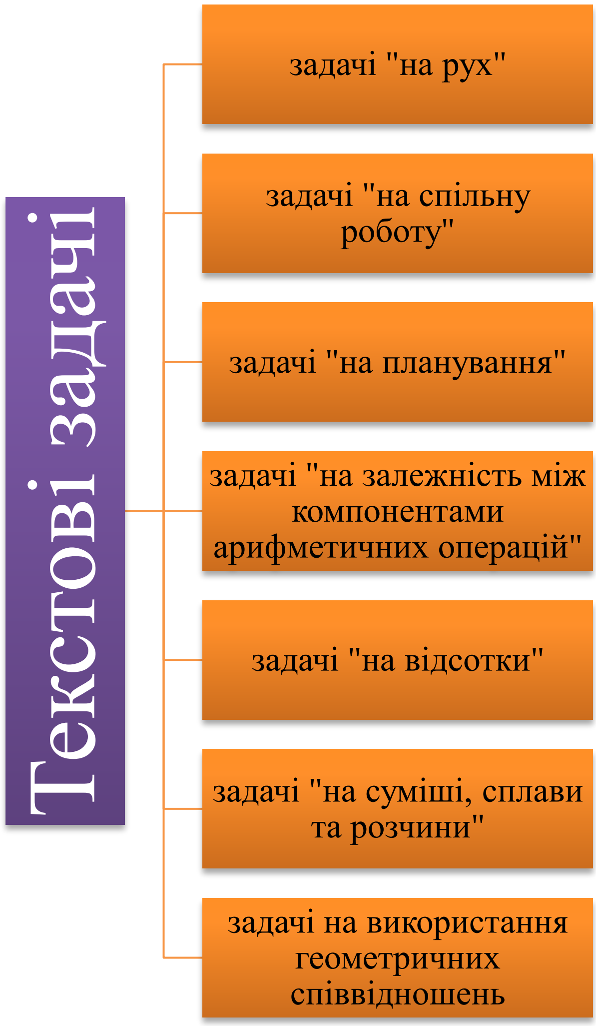


Рис. 2. Основні типи текстових задач

Розглянемо методичні особливості задач деяких типів та наведемо приклади розв'язування.

2.1. Задачі на рух

Задачі на рух – це задачі, сюжет яких пов'язаний із рух певних об'єктів.

Обов`язковими компонентами задач, такого типу є: шлях (S), пройдений тілом (тілами); швидкість ($\mathcal{V}$) об'єктів, що рухаються; час руху (t).

Основною формулою, на якій ґрунтується розв'язання усіх задач на рух, – є формула: $S = \mathcal{V} t$.

Розрізняють такі види задач на рух (рис. 3):

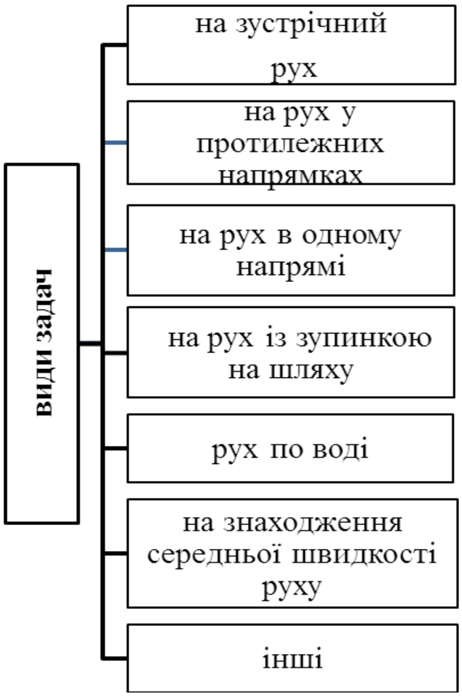


Рис. 3. Види задач на рух

Зустрічний рух (рух назустріч)

1. Два тіла, рухаючись з двох пунктів А і В назустріч одне одному, до момента зустрічі разом долають усю відстань між цими пунктами.

2. Швидкість, з якою відбувається зближення цих тіл (швидкість зближення) дорівнює сумі їх швидкостей.

3. Якщо тіла, розпочали рухатися одночасно, то час їх руху до моменту зустрічі буде однаковим, він визначається формулою: $t = S/(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)$.

4. Якщо тіла розпочинають рухатися в різний час, то до момента зустрічі більшим буде час руху того тіла, яке стартувало раніше.

Рух у протилежних напрямках

Якщо два тіла рухаються з одного пункту у протилежних напрямках, то за одиницю часу вони віддалятимуться одне від одного на відстань, що дорівнює сумі їх швидкостей (швидкість віддалення).

Рух в одному напрямі

1. Тіло, що рухається, може наздогнати інше лише в тому випадку, коли швидкість його первищує швидкість того тіла, що рухається попереду.

2. Якщо два тіла, які знаходяться на певній відстані, рухаються в одному напрямку, то ця відстань із кожною миттю зменшується і перетворюється на нуль, коли тіло з більшою швидкістю наздоганяє тіло, швидкість якого менша. Зменшення відстані між тілами за одиницю часу визначається різницею швидкостей цих тіл.

3. При одночасному старті тіл неоднаковою швидкістю із одного і того самого відправного пункту й русі їх в одному напрямку, відстань між тілами з

кожною годиною (хвилиною, секундою) збільшується. Збільшення відстані між такими тілами за одиницю часу досягається за рахунок різниці їх швидкостей (швидкість віддалення дорівнює різниці їх швидкостей тіл, які рухаються).

4. У випадку, коли швидкість першого тіла більша, то воно наздожене інше за час $t = S/(V_1 - V_2)$.

Рух по воді.

Тут розрізняють *рух за течією* (V*за т*) та *рух проти течії* (V *пр т*); виділяють власну швидкість (V*вл*) катера (човна тощо), її ще називають швидкістю у стоячій воді (озером), та швидкість течії річки ($V_т$).

Швидкість течії річки вважається постійною. Швидкість плота вважається такою, що дорівнює швидкості течії річки.

Швидкість переміщення тіла V по воді виражається:

1. $V_{за\ т} = V_{вл} + V_т$ при русі тіла за течією річки.
2. $V_{пр\ т} = V_{вл} - V_т$ при русі тіла проти течії річки.

Звідки $V_{за\ т} - V_{пр\ т} = 2V_т$ – різниця швидкостей за течією і проти течії річки дорівнює подвоєній швидкості течії.

Задача 1. *З міста А до міста В, відстань між якими 4 км, відправилися два пішоходи. Другий пішохід вийшов на 10 хв пізніше, ніж перший, але прийшов у місто В на 2 хв раніше. Знайти швидкість другого пішохода, якщо вона на 1 км/год більша, ніж швидкість першого.*

Розв'язання. Нехай швидкість першого пішохода x км/год, тоді швидкість другого становить (x+1) *км/год.*

За умовою задачі можемо записати, що $\frac{4}{x}$ *год* – час руху першого пішохода, тоді $\frac{4}{x+1}$ *год* – час, який рухався другий.

Складемо рівняння, враховуючи те, що другий пішохід прийшов до пункту В на 12 *хв* (12 *хв* = $\frac{12}{60} = \frac{1}{5}$ год) раніше:

$$\frac{4}{x} - \frac{4}{x+1} = \frac{1}{5}.$$

Після розв`язування, отримаємо:

$x_1 = -5$ – не задовільняє умову задачі.

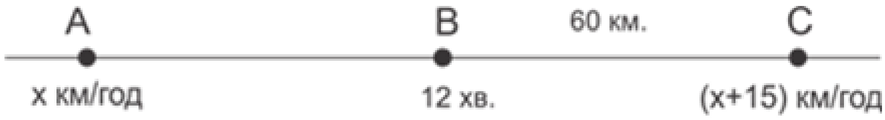
$x_2 = 4$.

Отже, швидкість, з якою рухався перший пішохід, 4 *км/год*, а тоді швидкість другого становитиме 5 *км/год*.

Відповідь: 5 км/год.

Задача 2. *Товарний потяг був затриманий на 12 хв, а потім на перегоні, довжиною 60 км надолужив загаяний час, збільшивши швидкість на 15 км/год. Знайти початкову швидкість потягу.*

Розв'язання. Звернемося до рисунку. За умовою задачі: якби потяг після затримки в пункті *B* продовжив рухатися з початковою швидкістю, то він витратив би на 12 *хв* більше часу, ніж передбачено розкладом:



Нехай *x км/год* – початкова швидкість поїзда.

Тоді $t_1 = \frac{60}{x}$ – час руху на ділянці АВ, $t_2 = \frac{60}{x+15}$ – час руху на ділянці ВС.

Отже, $t_1 - t_2 = \frac{1}{5}$.

Складемо рівняння: $\frac{60}{x} - \frac{60}{x+15} = \frac{1}{5}$.

Звідки $x_1 = 60$, $x_2 = -75$ – не задовольняє умову задачі, оскільки швидкість – величина. Яка не може бути від'ємною.

Відповідь: 60 км/год.

Задача 3. *Два пішоходи почали рухатися одночасно назустріч один одному, їх зустріч відбулася через 3 год 20 хв. Скільки часу знадобиться кожному з них, щоб пройти всю відстань, якщо перший дістався того місця, із якого вийшов другий, на 5 год пізніше, ніж другий прийшов туди, звідки розпочинав сівій рух перший?*

Розв'язання. Особливістю цієї задачі є те, що у неї немає ніяких даних про відстань, яку подолали пішоходи. У таких випадках, зазвичай, усю відстань приймають за 1.

Нехай *x год* – час у дорозі першого пішохода, а *y год* – час руху другого пішохода, тоді швидкості пішоходів: $v_1 = \frac{1}{x}$, а $v_2 = \frac{1}{y}$.

За умовою задачі складемо систему рівнянь: $\begin{cases} 3\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x} + 3\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{y} = 1; \\ x - y = 5 \end{cases}$

Розв'язавши яку, отримаємо *y* =5, *x* =10.

Отже, 5 *год* – час у дорозі першого пішохода, 10 *год* – час руху другого пішохода.

Відповідь: 5 год, 10 год.

Задача 4. *Із двох міст, відстань між якими 24 км, назустріч один одному вирушили два пішоходи і зустрілися на середині шляху, причому один із них розпочав свій рух на одну годину раніше, ніж інший. Якби пішоходи вийшли* *одночасно, то вони б зустрілися через 2 год 24 хв. Знайти швидкості пішоходів.*

Розв'язання. Нехай швидкість першого пішохода дорівнює *x* *км/год,* а швидкість другого – *y* *км/год*. Оскільки вони зустрілися на середині шляху, то кожний пройшов по 24:2=12 (км); першому на це знадобилось $\frac{12}{x}$ *год*, а другому $\frac{12}{y}$ *год*.

Врахувавши, що за умовою задачі перший вийшов на 1 годину раніше, складаємо рівняння: $\frac{12}{x} - \frac{12}{y} = 1.$

Якби пішоходи вийшли одночасно і зустрілися через 2 *год* 24 *хв* =$2\frac{2}{5}$ *год*, то перший подолав би відстань $2\frac{2}{5}x$ *км*, а другий *y* *км*, проте разом було б пройдено 24 км. Отже, можна скласти друге рівняння: $2\frac{2}{5}x + 2\frac{2}{5}y = 24.$

$$\begin{cases} \frac{12}{x} - \frac{12}{y} = 1; \\ 2\frac{2}{5}x + 2\frac{2}{5}y = 24. \end{cases}$$

Одержали систему рівнянь:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 4, \\ x = 30, \text{—не задовільняє умову задачі,} \end{array} \right. \\ y = 10 - x, \end{cases}$$

Звідки:

Отже, $x = 4$, $y = 6$

Таким чином, швидкість першого пішохода 4 *км/год*, а швидкість другого 6 *км/год*.

Відповідь: 4 км/год, 6 км/год.

Задача 5. *Катер пройшов 40 км за течією річки і 16 км проти течії, витративши на весь шлях 3 год. Якою є власна швидкість катера, якщо швидкість течії річки 2 км/год?*

Розв'язання. Нехай власна швидкість катера *x км/год*.

Рух	s, км	v, км/год	t, год
За течією	40	$x + 2$	$\frac{40}{x+2}$
Проти течії	16	$x - 2$	$\frac{16}{x-2}$

Оскільки на весь шлях катер витратив 3 *год*, складемо рівняння:

$$\frac{40}{x+2}+\frac{16}{x-2}=3. \text{ ОДЗ}: x\neq -2, x\neq 2.$$

Звідки $x_1=\frac{56-52}{6}=\frac{2}{3}$ – не задовільняє умову задачі, $x_2=\frac{56+52}{6}=18.$

Отже, власна швидкість катера 18 *км/год*.

Відповідь: 18 км/год.

Задача 6. *Катер пройшов 15 км за течією річки за 1 год і повернувся на ту саму пристань, витративши на зворотний шлях півтори години. Знайти швидкість катера та швидкість течії річки.*

Розв'язання. Нехай власна швидкість катера $V_{вл}=x$ *км/год*, а швидкість течії $V_т=y$ *км/год*.

Складемо таблицю відповідно до умови задачі:

Рух	*V*, км/год.	*S*, км	*t*, год.
За течією	15	1	15
Проти течії	15	1,5	10

Для знаходження швидкості катера, який рухається за течією річки, потрібно до його власної швидкості додати швидкість течії: $x+y=15$.

Для того, щоб знайти швидкість проти течії, потрібно від власної швидкості відняти швидкість течії: $x-y=10$.

Отже, складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases}x+y=15,\\ x-y=10;\end{cases}\qquad \begin{cases}2x=25,\\ x+y=15;\end{cases}\qquad \begin{cases}x=12{,}5\ (\text{км/год}),\\ y=2{,}5(\text{км/год}).\end{cases}$$

Відповідь: власна швидкість катера 12,5 км/год, швидкість течії річки 2,5 км/год.

Задача 7. *Рибалка відправився на човні з пункту А проти течії річки. Пройшовши 3 км, він кинув весла, і через 4 год 30 хв після відправлення з пункту А течія його віднесла назад до цього пункту. Знайдіть швидкість течії річки, якщо швидкість човна у стоячій воді становить 2,7 км/год.*

Розв'язання. Нехай швидкість течії *x км/год*. Систематизуємо дані умови задачі у вигляді таблиці:

Рух	s, км	*V*, км/год	t, год
Проти течії	3	$2{,}7-x$	$\frac{3}{2{,}7-x}$
За течією	3	x	$\frac{3}{x}$

Оскільки на весь шлях рибалка витратив 4 *год* 30 *хв*, складемо рівняння:

$$\frac{3}{2{,}7-x}+\frac{3}{x}=4\frac{1}{2}.$$

Звідки $x_1 = 1{,}2,\ x_2 = 1{,}5.$

Відповідь: швидкість течії річки 1,2 км/год або 1,5 км/год.

Задача 8. *Два спортсмени бігають по одній замкненій доріжці стадіону. Швидкість кожного є постійною, проте перший може пробігти всю доріжку на 10 с швидше, ніж другий. Якщо вони почнуть бігти зі спільного старту в одному напрямі, то ще раз зійдуться через 720 с. Яку частину довжини всієї доріжки пробігає за секунду кожен із бігунів*?

Розв'язання. В умові не вказано довжину доріжки стадіону, тобто відстані, яку пробігають спортсмени, тому приймемо цю відстань за 1.

Нехай перший спортсмен може пробігти всю доріжку стадіону за *x с*, а другий – за *y с*. Оскільки перший може пробігти цю відстань на *10 с* швидше, то складаємо рівняння: $y - x = 10.$

Швидкість першого бігуна $V_1 = \frac{1}{x}$, а швидкість другого $V_2 = \frac{1}{y}$. Спортсмени починають бігти зі спільного старту в одному напрямі, причому перший біжить швидше, а отже, він віддаляється. За одиницю часу відстань між спортсменами становитиме $(\frac{1}{x} - \frac{1}{y})$. Оскільки бігуни ще раз зійдуться через *720 с*, то можна скласти наступне рівняння: $(\frac{1}{x} - \frac{1}{y})\ 720 = 1.$

Одержуємо систему рівнянь: $\begin{cases} y - x = 10, \\ \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) \cdot 720 = 1. \end{cases}$

Звідси $x = 80$ с, $y = 90$ с.

Отже, перший спортсмен за секунду пробігає $\frac{1}{80}$ доріжки, а другий – $\frac{1}{90}$ її частину.

Відповідь: $\frac{1}{80}$; $\frac{1}{90}$.

№ 1. З двох міст, відстань між якими дорівнює *300 км*, виїхали одночасно назустріч один одному легковий і вантажний автомобілі, які зустрілися через *2,5 год*. Знайдіть швидкість кожного автомобіля, якщо вантажівка витратила на весь шлях на *3 год 45 хв* більше, ніж легковий автомобіль.

№ 2. З міста в село, відстань між якими дорівнює *180 км*, вирушили одночасно вантажівка і велосипедист. Вантажівка приїхала в село на *8 год* раніше, ніж велосипедист. Знайдіь швидкість руху велосипедиста, якщо за *2 год* вантажівка проїзджає на *60 км* більше, ніжж велосипедист за такий самий час.

№ 3. Катер проходить *66 км* за течією річки і *54 км* проти течії за *6 год*. Цей же катер проходить *44 км* за течією на *3 год* швидше, ніж *90 км* проти течії. Знайдітъ власну швидкість катера і швидкість течії.

№ 4. З двох сіл, відстань між якими дорівнює *30 км*, вирушили назустріч один одному два пішоходи, які зустрілися посередині дороги, причому один з них вирушив на *1 год 15 хв* пізніше за другого. Якби вони вирушили одночасно, то зустрілися б через *3 год*. Знайдіть швидкість руху кожного пішохода.

№ 5. Із села *A* в село *B,* відстань між якими дорівнює 20 км, вирушив пішохід. Через *2 год* із села *A* в тому самому напрямі вирушив велосипедист зі швидкістю *15 км/год*, який наздогнав пішохода, передав йому пакет і поїхав у село *A* з тією самою швидкістю. Пішохід прийшов у *B,* а велосипедист повернувся в *A* одночасно. Знайдіть швидкість руху пішохода.

№ 6. З двох сіл, відстань між якими дорівнює *9 км*, вирушили одночасно назустріч один одному два пішоходи. Один з них прийшов у друге село через *1 год 21 хв* після зустрічі, а інший у перше село – через *36 хв* після зустрічі. Знайдіть, з якою швидкістю рухався кожен пішохід, через скільки часу після початку руху відбулася і'х зустріч.

№ 7. Одночасно з одного міста в одному напрямку вирушили два мотоциклисти: один зі швидкістю *80 км/год*, а другий – *60 км/год*. Через півгодини з цього міста в тому самому напрямку вирушив третій мотоциклист. Знайдіть швидкість руху третього мотоцикліста, якщо відомо, що він наздогнав першого мотоцикліста через *1 год 15 хв* після того, як наздогнав другого.

2.2. Задачі на спільну роботу і планування

Задачі на спільну роботу вирізняє таке формулювання**:** деяку роботу, обсяг якої може бути не вказаним і не є шуканим (наприклад, друк рукопису, заповнення резервуара, обробка поля тощо), виконує декілька осіб або механізмів, що працюють рівномірно (тобто з постійною для кожного продуктивністю).

Виділяють такі основні *види задач на спільну роботу*:

- на обчислення невідомого часу роботи;
- на знаходження продуктивності праці;
- задачі на “басейн”.

У задачах на спільну роботу часто обсяг усієї роботи, яку потрібно виконати, умовно приймається за одиницю.

Час t, який необхідний для виконання всієї роботи, та v – продуктивність праці (швидкість виконання роботи), тобто кількість роботи, виконаної за одиницю часу, пов’язані співвідношенням $v = \frac{1}{t}$.

Задача 1. *Два робітники, працюючи разом, виконали виробниче завдання за 12 год. За який час може виконати усе завдання кожен робітник, працюючи самостійно, якщо один із них може це зробити на 7 год швидше, ніж другий?*

Розв'язання. Нехай один робітник сам може виконати завдання за x *год*, працюючи із продуктивністю $\frac{1}{x}$. Тоді другий – за $(x+7)$ *год*, виконуючи за 1 годину $\frac{1}{x+7}$ частину завдання.

Оскільки продуктивність спільної праці $\frac{1}{12}$, то складаємо рівняння:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+7}=\frac{1}{12};$$

$$\frac{x^2-17x-84}{x(x+7)}=0; \begin{cases} x^2-17x-84=0, \\ x(x+7)\neq 0; \end{cases} \begin{cases} x_1=-4, x_2=21, \\ x(x+7)\neq 0. \end{cases}$$

$x = -4$ – не задовільняє умову задачі.

Отже, один робітник може виконати завдання за 21 *год*, а другий – за 21+7=28 (*год*).

Відповідь: 21 год; 28 год.

Задача 2. *Одному з робітників для виконання виробничого завдання потрібно на 4 год більше, ніж другому. Якщо перший робітник буде працювати 3 год, а потім його замінить другий, то останньому потрібно буде працювати ще 6 год для того, щоб закінчити завдання. За скільки годин може виконати все завдання другий робітник?*

Розв'язання. Нехай x *год* – час, за який може виконати завдання другий робітник, тоді перший виконає завдання за $(x+4)$ *год*.

За 3 *год* перший робітник виконає $\frac{3}{x+4}$ частини завдання, а другий за 6 *год* – $\frac{6}{x}$ завдання.

Відповідно до умови задачі складаємо рівняння:

$$\frac{3}{x+4}+\frac{6}{x}=1;$$

$$\frac{3x+6(x+4)-x(x+4)}{x(x+4)}=0; \frac{x^2-5x-24}{x(x+4)}=0;$$

$$\begin{cases} x^2-5x-24=0, \\ x\neq -4, x\neq 0; \end{cases} \begin{cases} x_1=-3, x_2=8, \\ x\neq -4, x\neq 0. \end{cases}$$ $x=-3$ не задовільняє умову задачі.

Отже, другий робітник може виконати все завдання за 8 *год*.

Відповідь: 8 год.

Задача 3. *Після двох годин спільної праці двох друкарок одній із них доручили інше завдання, а друга сама закінчила роботу через 1 год 20 хв. За скільки годин могла б передрукувати рукопис кожна друкарка, якщо другій на це потрібно було б на 1 год 10 хв більше часу, ніж першій?*

Розв'язання. Нехай вся робота 1, а *x год* – час, за який перша друкарка могла б передрукувати рукопис. Тоді за умовою задачі другій друкарці потрібно $\left(x+1\frac{1}{6}\right)$ *год* (*1 год 10 хв* = $1\frac{1}{6}$ *год*).

Продуктивність праці першої друкарки буде $\frac{1}{x}$, а продуктивність праці другої становитиме $\frac{1}{x+1\frac{1}{6}}$. Продуктивність їх спільної праці: $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1\frac{1}{6}}$

За дві години спільної праці друкарки передрукують $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1\frac{1}{6}}\right)\cdot 2$ частини рукопису.

Друга друкарка, закінчуючи роботу, передрукувала $\frac{1}{x+1\frac{1}{6}}\cdot 1\frac{1}{3}$ (*1 год 20 хв* = $1\frac{1}{3}$ *год*) частину рукопису.

Можна скласти рівняння: $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1\frac{1}{6}}\right)\cdot 2+1\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1\frac{1}{6}}=1.$

Розв'яжемо його:

$$\frac{2}{x}+\frac{2}{x+\frac{7}{6}}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{x+\frac{7}{6}}=1,$$

$$\frac{2}{x}+\frac{12}{6x+7}+\frac{8}{6x+7}=1,$$

$$2\cdot(6x+7)+20x=6x^2+7x;6x^2-25x-14=0;$$

$$x=\frac{25\pm\sqrt{625+336}}{12};x=\frac{25\pm 31}{12};$$

$x_1=\frac{56}{12};x_1=4\frac{2}{3};x_2=-\frac{1}{2}$ – не задовільняє умову.

Отже, перша друкарка могла б передрукувати рукопис за $4\frac{2}{3}$ *год*. Друга виконала б цю саму роботу за $4\frac{2}{3}+1\frac{1}{6}=5\frac{5}{6}$ (*год*).

Відповідь: 4 год 40 хв, 5 год 50 хв.

Задача 4. *Двоє трактористів можуть виорати поле, працюючи разом, за 6 год. За скільки годин може виорати це поле кожен тракторист, працюючи окремо, якщо одному з них для того, щоб виорати $\frac{2}{5}$ поля, потрібно на 4 год більше, ніж другом для того, щоб виорати $\frac{1}{5}$ поля?*

Розв'язання. Нехай перший тракторист може виорати поле за x *год*, а дугий – за y *год*. Тоді за 1 год перший виконає $\frac{1}{x}$, другий – $\frac{1}{y}$ частину роботи. Працюючи разом, трактористи за 1 годину виконають $\frac{1}{6}$ завдання.

Отже, складаємо перше рівняння: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}$.

$\frac{2}{5}:\frac{1}{x}=\frac{2x}{5}$ (*год*) – час, необхідний для виконання $\frac{2}{5}$ завдання першому трактористу, $\frac{1}{5}:\frac{1}{y}=\frac{y}{5}$ (*год*) – час, який потрібен для виконання $\frac{1}{5}$ завдання другому трактористу. Складаємо друге рівняння: $\frac{2x}{5}-\frac{y}{5}=4$.

Одержали систему рівнянь: $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6},\\ \frac{2x}{5}-\frac{y}{5}=4;\end{cases}$

$$\begin{cases}6(x+y)-xy=0,\\ 2x-20=y;\end{cases} \begin{cases}6(3x-20)-x(2x-20)=0,\\ y=2x-20;\end{cases} \begin{cases}x^2-19x+60=0,\\ y=2x-20;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_1=4, x_2=15,\\ y=2x-20;\end{cases} \begin{cases}x_1=4,\\ y_1=-12;\end{cases} \begin{cases}x_2=15,\\ y_2=10.\end{cases}$$

$y=-12$ – не задовільняє умову задачі.

Отже, перший тракторист може виконати завдання за 15 *год*, а другий – за 10 *год*.

Відповідь: 15 год, 10 год.

Задача 5. *Перша труба заповнює водою резервуар, об'єм якого дорівнює $10м^3$, на 5 хв швидше, ніж друга труба. Скільки кубічних метрів проходить за годину через кожну трубу, якщо через першу за годину проходить на 10 $м^3$ більше, ніж через другу?*

Розв'язання. Нехай із другої труби за 1 *год* витікає x *м³* води, тоді з першої – $(x+10)$ *м³*.

Виконана робота – це заповнений резервуар, обсяг якого $10м^3$. Такий резервуар друга труба заповнює за $\frac{10}{x}$ *год*, а перша – за $\frac{10}{x+10}$ *год*. Оскільки перша труба наповнює резервуар на 5 *хв* = $\frac{1}{12}$ *год* швидше, то складаємо рівняння: $\frac{10}{x}-\frac{10}{x+10}=\frac{1}{12}$.

Звідки $x_1=30, x_2=-40$ – не задовільняє умову задачі.

Отже, з другої труби за 1 *год* витікає 30 *м³*, а з першої: 30 + 10=40 *м³*.

Відповідь: 30 м³, 40 м³

Задача 6. *Через одну трубу можна наповнити басейн на 9 годин швидше, ніж через другу спустити воду з басейну. Якщо одночасно відкрити обидві труби, то басейн наповниться за 40 год. За скільки годин через першу трубу можна наповнити, а через другу – спустити воду з басейну?*

Розв'язання. Нехай об'єм басейну 1. Позначимо за *x год* час, за який наповнює басейн перша труба, тоді (*x + 9*) *год* – час, за який спустошує басейн друга труба.

Швидкість, з якою вливається вода через першу трубу $\frac{1}{x}$, а продуктивність роботи другої труби – $\frac{1}{x+9}$. Коли труби відкриті одночасно, за 1 *год* наповнюється $\frac{1}{40}$ частина басейну

Складаємо рівняння:

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+9}=\frac{1}{40};$$

Звідки $x_1=15, x_2=-24<0$. x_2 – не задовільняє умову задачі.

Отже, через першу трубу можна наповнити басейн за 15 *год*, а через другу спустити воду за 24 *год*.

Відповідь: 15 год, 24 год.

№ 8. Тракторист мав за певний час зорати поле площею *180 га*. Проте щодня він зорював на *2 га* більше, ніж планував, і закінчив роботу на *1* день раніше терміну. За скільки днів тракторист зорав поле?

№ 9. Для перевезення *60 т* вантажу було замовлено певну кількість вантажівок. Через несправність двох із них на кожну машину довелося вантажити на *1 т* більше, ніж планувалося. Скільки машин мало працювати на перевезенні вантажу?

№ 10. За планом бригада повинна була щодня засівати *73 га*. Перевиконуючи план бригада засівала щодня на *14 га* більше, ніж передбачалося, а тому за два дні до строку залишилося засіяти лише *6 га*. Скільки гектарів повинна була засіяти бригада?

№ 11. З першої труби басейн наповнюється водою на *40 хвилин* швидше, ніж з другої. Скільки часу (у хвилинах) потрібно для наповнення порожнього басейну з першої труби, якщо з обох труб цей басейн наповнюють за *21 хвилину*?

№ 12. Двоє робітників можуть разом виконати планове завдання за *12* днів. Якщо половину завдання виконуватиме один робітник, а потім іншу половину – другий, то все завдання буде виконане за *25* днів. За скільки днів може виконати завдання кожний робітник?

№ 13. Дві бригади, працюючи разом, вирили траншею за *2* дні. Після цього вони почали рити траншею, тієї самої глибини і ширини, проте у п’ять разів довшу за першу. Спочатку працювала лише перша бригада, потім – тільки друга, виконавши в півтора рази менший обсяг роботи, ніж перша бригада. Другу траншею викопали за *21* день. За скільки днів друга бригада зможе вирити другу траншею, якщо відомо, що обсяг роботи, яку виконає перша бригада за один день, більше за обсяг роботи, яку виконує за один день друга бригада?

№ 14. У резервуар подається вода двома трубами різних діаметрів. У перший день обидві труби, працюючи одночасно, подали $14\ м^3$ води. Другого дня було включено лише малу трубу. Вона подала $14\ м^3$ води, пропрацювавши на *5 год* довше, ніж у перший день. Третього дня роботу продовжували стільки часу, скільки й другого дня, проте спочатку працювали обидві труби, подавши $21\ м^3$ води. А потім працювала лише велика труба, яка подала ще $20\ м^3$ води. Знайти продуктивність кожної труби.

2.3. Задачі на відсотки

Уміння розв'язувати задачі на відсотки мають велике практичне значення, оскільки відсотки сьогодні широко використовується як у різних галузях науки, так і в повсякденному житті людини.

Нині відсотки широко використовуються в статистиці, техніці, соціології, економіці, хімії, фізиці, а також у метеорології, сільському господарстві, медицині, виробництві тощо. Наприклад, за допомогою процентів позначають різні допуски під час виготовлення продукції, коефіцієнти корисної дії механізмів, втрати енергії, витрати на експлуатацію, амортизацію, частки виконання завдання, процентний склад різних категорій населення в суспільстві, вологість повітря, схожість насіння, вміст металу в руді, жирність продуктів, вміст цукру в продукті, кількість вітамінів у фруктах та овочах і т.д.

Задачі на відсотки можна класифікувати (рис. 4)

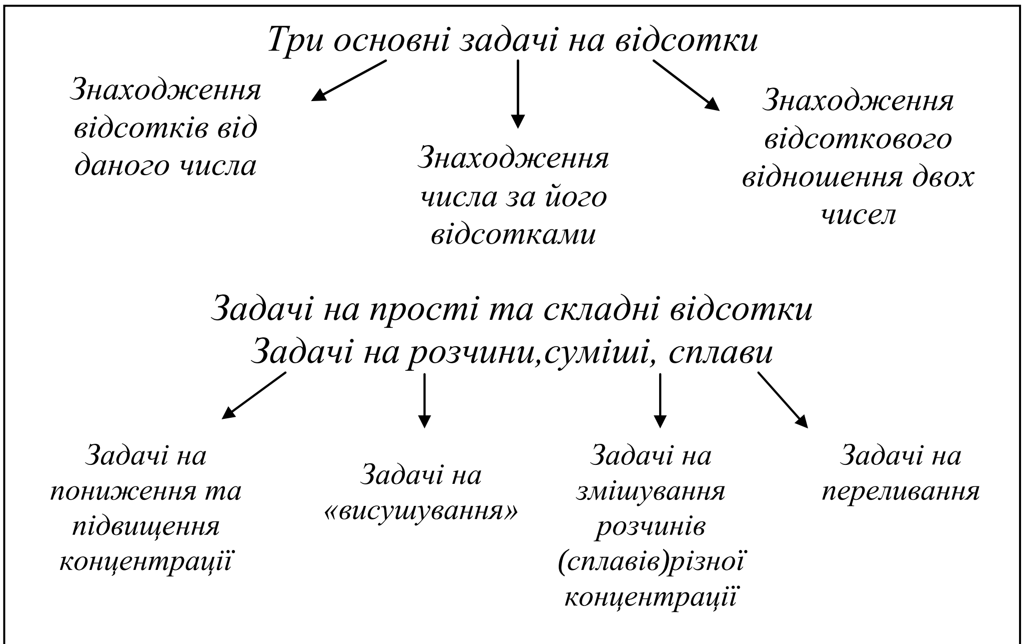


Рис. 4. Класифікація задач на відсотки

1) Знаходження відсотків від даного числа.

Для того, щоб знайти відсоток р % від числа а, потрібно:

1) записати відсоток у вигляді звичайного чи десяткового дробу;
2) домножити число на цей дріб, тобто $\frac{P}{100} \cdot a$.

Наприклад, 30 % від числа 60 складає 18, оскільки:

1) 30% = 0,3; 2) 60 • 0,3 = 18.

Можна розв’язати цю задачу і за допомогою пропорції:

60 – 100%;

x – 30%.

Складаємо пропорцію: $\frac{60}{x} = \frac{100}{30}$, звідки $x = \frac{60 \cdot 30}{100}$; $x = 18$.

2) Знаходження числа за його відсотками.

Для того, щоб знайти невідоме число а, відсоток р % якого дорівнює b*, потрібно записати відсоток у вигляді звичайного чи десяткового дробу і поділити число на цей дріб, тобто* $a = \frac{b \cdot 100}{p}$.

Приклад: 3% числа складає 150. Знайти це число.

3% = 0,03, тоді шукане число 150: 0,03 = 5000.

Можна розв'язати дану задачу за допомогою пропорції:

150 – 3%

x – 100%

Складаємо пропорцію $\frac{150}{x} = \frac{3}{100}$, звідки $x = \frac{150 \cdot 100}{3}$; x=5000.

3) Знаходження відсоткового відношення двох чисел.

Для того, щоб знайти який відсоток число а становить від числа b*, потрібно а поділити на* b*, одержаний результат помножити на 100, тобто* $p\ \% = \frac{a}{b} \cdot 100\%$.

Наприклад, який відсоток складає 150 від 600?

Розв'яжемо за допомогою формули: $p = \frac{150}{600} \cdot 100\% = 25\%$.

За допомогою пропорції:

150 – x%

600 – 100%

Складемо пропорцію:

$\frac{150}{600} = \frac{x}{100}$, звідси $x = \frac{150 \cdot 100}{600}$; x = 25 %.

Якщо деяка величина постійно змінюється за визначений період часу на певний відсоток *р %*, то для розрахунку значення цієї величини за вказаний період використовують ***складні відсотки***.

Відмінність полягає в тому, що при простому зростанні відсоток кожного разу обчислюють, виходячи з початкового значення величини, а при ***складному зростанні (зменшенні)*** він обчислюється від попереднього значення.

Формула складних відсотків: $A_t = a_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$,

де a_0 – початкове значення величини, p – відсоток, на який періодично змінюється величина, t – кількість періодів.

Задача 1. *Від тривалого зберігання ячмінь втрачає за перший рік 3% своєї маси, а за кожний наступний по 1% . Скільки залишиться від 100 ц ячменю через 4 роки?*

Розв'язання.

1) $100 \cdot 0{,}03 = 3$ (ц) – втрати ячменю за перший рік зберігання.

2) $100 - 3 = 97$ (ц) – маса ячменю, яка залишилася після першого року зберігання.

Використовуємо формулу складних відсотків: $A_t = a_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$.

У нашому випадку $p = 1\%$, $t = 3$, $a_0 = 97$ ц.

Важливо, оскільки ячмінь втрачає у масі, то у формулі змінюємо знак «+» на «-».

$$A_t = 97\left(1 - \frac{1}{100}\right)^3 = 97 \cdot 0{,}99^3 = 94$$

Отже, через 4 роки від 100 ц ячменю залишиться 94 ц.

Відповідь: 94 ц.

Задача 2. *Банк нарахував за рік вкладникові на його заощадження 6000 грн відсоткових грошей. Вкладник додав 44 000 грн. і залишив гроші ще на рік. Через рік банк знову нарахував відсотки, і тоді внесок разом із відсотками становив 257 000 грн. Яку суму спочатку вкладник вніс до банку?*

*Розв'язання***.** Нехай у банк було покладено *x грн* під *p%* річних.

З огляду на те, що через рік із початкової суми банк нарахував 6000 *грн* відсоткових грошей, одержуємо рівняння:

$$\frac{xp}{100} = 6000$$

До кінця першого року внесок становив (*x + 6000) грн.*

Оскільки вкладник додав 44 000 *грн*, то на початок другого року внесок становив (*x + 50 000) грн.* Згідно з умовою, запишемо ще одне рівняння: $(x + 6000) + (x + 5000)\frac{p}{100} = 257\,000$.

Одержали систему рівнянь: $\begin{cases} \frac{xp}{100} = 6000; \\ (x + 5000)\left(1 + \frac{p}{100}\right) = 257\,000 \end{cases}$

Розв'язавши цю систему, одержимо дві пари чисел $x_1 = 200\,000$, $p_1 = 3$ і $x_2 = 1500$, $p_2 = 400$. Друга пара не підходить за змістом задачі.

Відповідь: 200 000 грн.

Задача 3. *Сироп містить 18% цукру. Скільки кілограмів води необхідно додати до 40 кг сиропу, щоб вміст цукру складав 15%?*

Розв'язання. Нехай необхідно добавити *x кг* води.

Заповнимо таблицю:

	m (кг), маса цукру	***M*** (кг), маса сиропу	***β*,** концентрація сиропу
Було	0,18• 40 = 7,2	40	18% або 0,18
Стало	0,15(40 + *x)*	40 + *x*	15% або 0,15

Оскільки маса цукру не змінилася, то складемо рівняння:

$$0{,}15(40 + x) = 7{,}2;$$

Звідки $0{,}15 \bullet \boldsymbol{x} = 1{,}2$, тоді $x = 8$.

Відповідь: 8 кг.

Задача 4. *У сплаві міді та срібла, срібла на 1845 г більше, ніж міді. Якщо до нього додати* $\frac{1}{3}$ *маси срібла, з якого складається сплав, то отримаємо новий сплав, котрий містить 83,5% срібла. Яка маса сплаву і відсотковий вміст срібла в ньому?*

Розв'язання. Нехай сплав містить *x г* срібла.

Заповнимо таблицю:

		Маса компонентів сплаву, г	***Маса сплаву, г***	***β***
1-й сплав	Срібло	x	$x + x - 1845 = 2x - 1845$	$\frac{x}{2x - 1845}$
	Мідь	$x - 1845$		
2-й сплав	Срібло	$x + \frac{1}{3}x$	$2\frac{1}{3}x - 1845$	83,5% або 0,835
	мідь	$x - 1845$		

Складаємо рівняння: $\frac{x + \frac{1}{3}x}{2\frac{1}{3}x - 1845} = 0{,}835$

$$\text{Звідки} \quad x \approx 2370$$

Маса сплаву: $2 \cdot 2370 - 1845 = 2895$ (*г*).

Відсотковий вміст срібла в сплаві: $\frac{2370}{2895} \cdot 100\% = 81{,}7\%$

*Відповідь***:** маса сплаву складає 2895 *г*, відсотковий вміст срібла 81,7%.

Задача 5. *Злили два розчини сірчаної кислоти і отримали 10 кг суміші. Необхідно визначити масу кожного з розчинів, які увійшли до суміші, якщо перший розчин містив 800 г сірчаної кислоти, а другий – 600 г. Відомо, що концентрація першого розчину була на 10% більше, ніж концентрація другого розчину.*

Розв'язання. Заповнимо таблицю:

	Маса розчину, кг	***Маса сірчаної кислоти, кг***	***β***
1-й розчин	x	0,8	$\frac{0{,}8}{x} \cdot 100\%$
2-й розчин	y	0,6	$\frac{0{,}6}{y} \cdot 100\%$
Суміш	10	1,4	

Складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ \frac{80}{x} - \frac{60}{y} = 10 \end{cases};$$

Звідки $x_1 = \frac{24-16}{2} = 4$, $x_2 = \frac{24+16}{2} = 20$. Тоді $y_1 = 10\text{-}4 = 6$; $y_2 = 10\text{-}20 = -10$ – не підходить за умовою.

Отже, маса 1-го розчину 4*кг*, а маса – 2-го розчину 6 *кг*.
Відповідь: 4 *кг* і 6 *кг*.

Задача 6. *Зібрали 8 кг свіжих квітів ромашки, вологість яких складає 85%. Після того, як квіти висушили, їх вологість складала 20%. Чому дорівнює маса сухих квітів ромашки?*

Розв'язання. Складемо таблицю:

	Ромашка, кг	Вода, %	Суха речовина, %
Свіжі квіти	8	85	100 – 85 = 15%
Висушені	?	20	100 – 20 = 20%

1) $0{,}15 \cdot 8 = 1{,}2$ (*кг*) — маса сухої речовини у 8 кілограмах квітів ромашки.
2) 1,2 (*кг*) сухої речовини — це 80% маси сухих квітів.

Отже, використовуючи пропорцію: $\text{x} = \frac{1{,}2 \cdot 100\%}{80\%}$; $\text{x} = 1{,}5$ (кг)

Відповідь: 1,5 кг.

Задача 7. *У наявності є сталь двох сортів із вмістом нікелю 5% і 40%. Скільки сталі кожного сорту потрібно взяти,щоб після переплавки одержати 140 т сталі з 30%-м вмістом нікелю?*

Розв'язання. Нехай *x т* – маса сталі з 5-відсотковим вмістом нікелю, *y т* – кількість сталі з 40-відсотковим вмістом нікелю.

У *x т* сталі міститься 5% нікелю, тобто власне нікелю є $\frac{5\text{x}}{100}$ m, а в *y т* сталі чистого нікелю є 40% або $\frac{40\text{y}}{100}$ m.

Оскільки в 140 *т* нового сплаву міститься 30% нікелю, тобто $140 \cdot \frac{30}{100}$, то складаємо рівняння:

$$\frac{5\text{x}}{100} + \frac{40\text{y}}{100} = \frac{30 \cdot 140}{100}$$

Окрім того, $\text{x} + \text{y} = 140$

Таким чином, отримуємо систему рівнянь: $\begin{cases} 5x + 40y = 140 \cdot 30 \\ x + y = 140 \end{cases}$

Розв`язавши систему, знаходимо: $x = 40$ та $y = 100$.

За змістом задачі, $0 < x < 140$, $0 < y < 140$. Знайдені значення x і y ці умови задовольняють.

Відповідь: 40 т сталі з 5-відсотковим вмістом нікелю, 100 т сталі з 40-відсотковим вмістом нікелю.

Задачі «на суміші і сплави» можна розв’язати багатьма способами.

Існує цікавий старовинний спосіб розв'язування задач на суміші, сплави і розчини. Вперше про нього було згадано у першому друкованому підручнику математики Леонтія Магницького. Зважаючи на простоту запропонованого способу, він застосовувався купцями і ремісниками при вирішенні різних практичних завдань. І до нині, досить часто, як хіміки, так і математики використовують даний спосіб під час розв’язання задач.

Задача 8. *Є два сплави міді і свинцю. Один сплав містить 15% міді, а інший 65% міді. Скільки потрібно взяти кожного сплаву, щоб вийшло 200 г сплаву, що містить 30% міді?*

Розв’язання згаданим способом **задачі 8** представлено на рис. 5.

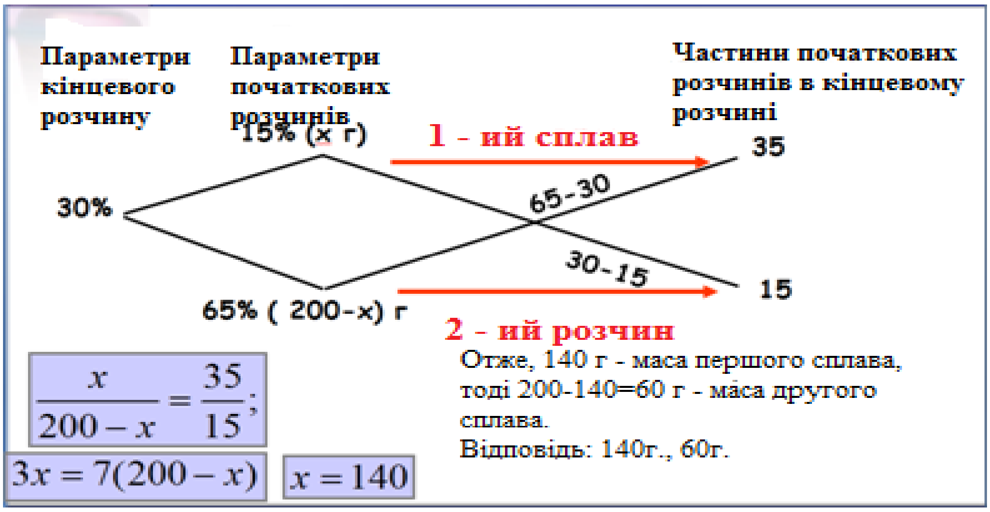


Рис. 5.

Задача 9. *Ціну деякого товару спочатку знизили на 20%, а потім нову ціну знизили ще на 15% і, врешті, після переобліку виконали зниження ще на 10%. На скільки відсотків знизили початкову вартість товару?*

Розв’язання. Цю задачу простіше розв’язати арифметично, не складаючи рівняння.

Позначимо початкову вартість товару a, чому відповідає 100%.

Тоді після першого зниження ціна товару буде $a - 0,2a = 0,8\,a$.

Після другого зниження ціна товару: $0,8\,a - 0,15 \cdot 0,8\,a = 0,68\,a$.

Після переобліку ціна становитиме: $0,68\,a - 0,68\,a \cdot 0,1 = 0,612\,a$.

Порівняно із початковим значенням ціна товару знизилася на

$$a - 0{,}612\,a = 0{,}388\,a.$$

Складаємо пропорцію: $a - 100\%;$

$$0{,}388a - x\%.$$

Звідки $x = \frac{0{,}388a \cdot 100\%}{a} = 38{,}8\%.$

Відповідь: на 38,8%.

№ 15. *52 кг* сплаву алюмінію з магнієм містять *45%* алюмінію. До сплаву додали магнію так, що отримали новий сплав, який містить *13%* алюмінію. Знайти масу нового сплаву.

№ 16. За перший день учень прочитав *40%* сторінок усієї книжки, за другий – 1/3 усіх сторінок, а за третій – решту *56* сторінок. Скільки сторінок у книзі?

№ 17. Число *800* збільшили на *20%*, а одержане число знову збільшили на *10%*. На скільки процентів збільшили число *800*?

№ 18. Змішали *3%-й* і *8%-й* розчини солі, отримали *260 г* розчину з *5%-м* вмістом солі. Скільки грамів *3%-го* розчину було використано?

№ 19. Телевізор і телефон коштували разом *1800* грн. Після того як телевізор подорожчав на *10%*, а телефон подешевшав на *10%*, вони стали коштувати разом *1840 грн*. Яка початкова ціна телевізора?

№ 20. Вкладник поклав у банк *5000 грн*. під *8%* річних. Який прибуток він отримає через *3* роки?

№ 21. Шматок сплаву масою *3 кг*, який містить *30%* олова, сплавили з шматком олова масою *7 кг*. Який процентний вміст олова у новому сплаві?

№ 22. Свіжі фрукти містять *72%* води, а сушені – *20%*. Скільки сушених фруктів можна одержати з *20 кг* свіжих?

№ 23. Число деталей, які робітник мав виготовити за планом, становить *80%* числа фактично виготовлених ним деталей. На скільки відсотків робітник перевиконав план?

2.4. Задачі на залежність між компонентами арифметичних операцій

Вивчення та засвоєння арифметичних дій є невід'ємною частиною навчання математики. Знання арифметичних дій, їх властивостей, компонент становлять підґрунтя усього змісту шкільної програми.

Спосіб розв'язування таких задач безпосередньо випливає з умови задачі.

Серед таких задач виділяють:

- задачі, в яких потрібно знайти суму доданків, кожне з яких складає певну частину шуканої суми;
- задачі, в яких використовується формула двозначного числа;
- задачі, де використовується пропорційне ділення;
- задачі, де вказується співвідношення між чисельником, знаменником дробу;
- задачі, де невідомі є членами прогресії.

Задача 1. *Троє студентів-переможців конкурсу технічної творчості одержали за свої винаходи грошові призи загальною сумою 1410 у.о., причому другий одержав третину того, що одержав перший, та ще 60 у.о., а третій учасник одержав третину від кількості грошей другого й ще 30 у.о. Який приз здобув кожен?*

Розв'язання. Нехай перший студент одержав x у.о., тоді другий одержав $(\frac{1}{3}x + 60)$ у.о., а третій – $\frac{1}{3}(\frac{1}{3}x + 60) + 30 = (\frac{x}{9} + 50)$ у.о.

Оскільки загальна сума грошових призів становила 1410 у.о., то складаємо рівняння:

$x + \frac{1}{3}x + 60 + \frac{1}{9}x + 50 = 1410.$

Звідки $x = 900$ у.о.

Тоді другий студент одержав $\frac{1}{3}900 + 60 = 360$ (у.о.); а призова сума третього становила $\frac{1}{9}900 + 50 = 150$ (у.о.).

Відповідь: 900 у.о.; 360 у.о.; 150 у.о.

Задача 2. *Сума квадратів цифр двозначного числа дорівнює 13. Якщо від цього числа відняти 9, то одержимо число, яке записане тими самими цифрами, але в зворотному порядку. Знайти це число.*

Розв'язання. Нехай x – цифра десятків числа, а y – цифра одиниць. Тоді шукане двозначне число можна подати у вигляді $\overline{xy} = 10x + y$.

За умовою задачі складаємо перше рівняння: $x^2 + y^2 = 13$.

Двозначне число, яке записане тими самими числами, але в зворотному порядку: $\overline{yx} = 10y + x$. Відповідно до другої частини умови задачі можна скласти наступне рівняння: $10x + y - 9 = 10y + x$.

Одержали систему рівнянь: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ 10x + y - 9 = 10y + x. \end{cases}$

Розв`язавши її, одержимо $x = 3$, $y = 2$ ($x = -2$ – не підходить, оскільки x, y – це цифри).

Відповідь: дане число 32.

Задача 3. *Чисельники трьох дробів пропорційні до чисел 1, 2, 5, а їх знаменники відповідно відносяться як числа 1, 3, 7. Середнє арифметичне цих дробів дорівнює* $\frac{200}{441}$. *Знайти ці дроби.*

Розв'язання. Нехай $к$ – коефіцієнт пропорційності. За умовою задачі шукані дроби: $к$; $\frac{2}{3}к$; $\frac{5}{7}к$. Середнє арифметичне даних дробів $(к + \frac{2}{3}к + \frac{5}{7}к) : 3$.

Отже, складаємо рівняння $(к + \frac{2}{3}к + \frac{5}{7}к) : 3 = \frac{200}{441}$.

Звідки $к = \frac{4}{7}$, тоді шукані дроби – $\frac{4}{7}$; $\frac{8}{21}$ і $\frac{20}{49}$.

Відповідь: $\frac{4}{7}$; $\frac{8}{21}$ і $\frac{20}{49}$.

Задача 4. *Якщо від чисельника і знаменника звичайного дробу відняти по одиниці, то дріб зменшиться на* $\frac{1}{10}$. *Якщо до чисельника і знаменника додати по одиниці, то дріб збільшиться на* $\frac{1}{15}$. *Знайти цей дріб.*

Розв'язання. Нехай x – чисельник даного дробу, а y – його знаменник, тобто даний дріб буде $\frac{x}{y}$.

Якщо від чисельника і знаменника даного дробу відняти по одиниці, то одержимо дріб $\frac{x-1}{y-1}$. За умовою задачі складаємо перше рівняння: $\frac{x-1}{y-1} = \frac{x}{y} - \frac{1}{10}$.

Якщо до чисельника і знаменника додати по одиниці, то новий дріб становитиме $\frac{x+1}{y+1}$. За умовою задачі складаємо друге рівняння: $\frac{x+1}{y+1} = \frac{x}{y} + \frac{1}{15}$.

Одержали систему рівнянь: $\begin{cases} \frac{x-1}{y-1} = \frac{x}{y} - \frac{1}{10}, \\ \frac{x+1}{y+1} = \frac{x}{y} + \frac{1}{15}. \end{cases}$

Розв`язавши систему, одержимо $x = 3$, $y = 5$.

Відповідь: $\frac{3}{5}$.

Задача 5. *Знайти три числа, які утворюють геометричну прогресію, якщо відомо, що їх сума дорівнює 26, а сума квадратів цих чисел дорівнює 364.*

Розв'язання. Нехай $в_1$ – перший член геометричної прогресії, а q – її знаменник. Тоді шукані три числа – $в_1$; $в_1 q$; $в_1 q^2$.

За умовою задачі складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} в_1 + в_1 q + в_1 q^2 = 26, \\ {в_1}^2 + (в_1 q)^2 + (в_1 q^2)^2 = 364. \end{cases}$$

Або

$$\begin{cases} в_1(1 + q + q^2) = 26, \\ {в_1}^2(1 + q^2 + q^4) = 364. \end{cases}$$

Звідки $q = \frac{1}{3}$ або $q = 3$. Тоді відповідно $в_1 = 18$ або ж $в_1 = 2$.

Отже, задані три числа: 18, 6, 2 або 2, 6, 18.

Відповідь: 18, 6, 2 або 2, 6, 18.

Задача 6. *Знайдіть таких чотири числа, які утворюють арифметичну прогресію, що коли від другого числа відняти 2, а до четвертого додати 14, то буде отримано геометричну прогресію.*

Розв'язання. Цій задачі раціонально спочатку записати геометричну прогресію з чотирьох чисел, позначивши за $в_1$ – перший член геометричної прогресії, а q – її знаменник, тобто $в_1;$ $в_1 q;$ $в_1 q^2;$ $в_1 q^3$.

Тоді числа $в_1;$ $в_1 q + 2;$ $в_1 q^2;$ $в_1 q^3 - 15$, відповідно до умови задачі, утворять арифметичну прогресію.

Використовуючи властивість членів арифметичної прогресії, складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} в_1 + в_1 q^2 = 2(в_1 q + 2), \\ (в_1 q + 2) + (в_1 q^3 - 14) = 2в_1 q^2. \end{cases}$$

Розв`яжемо цю систему і одержимо $q = 3$, $в_1 = 1$.

Отже, дані числа, які утворюють геометричну прогресію, – це 1, 3, 9, 27. Шукані числа – 1, 5, 9, 13.

Відповідь: 1, 5, 9, 13.

№ 24. Грошова премія була розподілена між трьома винахідниками: перший одержав половину всієї премії без 3/22 частин того, що одержали двоє інших разом; другий одержав ¼ частину всієї премії і 1/56 частини грошей, одержаних іншими двома; третій одержав 300 у.о. Якою була премія і скільки грошей отримав кожен винахідник?

№ 25. Добуток цифр двозначного числа у 3 рази менше за саме число. Якщо до шуканого числа додати 18, то одержимо число, записане тими самими цифрами, але в зворотному порядку. Знайти це число.

№ 26. Якщо двозначне число розділити на суму його цифр, то в частці одержимо 4 і в остачі 3. Якщо це саме число розділити на добуток його цифр, то в частці вийде 3 і в остачі 5. Знайти це число.

№ 27. Чисельник дробу на 2 менший від його знаменника; якщо додати цей дріб до дробу, який обернений до даного, то в сумі вийде $2\frac{4}{15}$. Знайти цей дріб.

№ 28. Між числами -5 і 1 вставте чотири таких числа, щоб вони разом з даними числами утворювали арифметичну прогресію

№ 29. Знайдіть три числа, які утворюють геометричну прогресію. Сума цих чисел дорівнює 63. Якщо до цих чисел додатти відповідно 7, 18, 2, то буде отримано арифметичну прогресію.

№ 30. Знайдіть чотири числа, з яких перші три складають геометричну прогресію, а останні три – арифметичну, причому сума крайніх чисел дорівнює 14, а сума середніх дорівнює 12.

2.5. Задачі на використання геометричних співвідношень

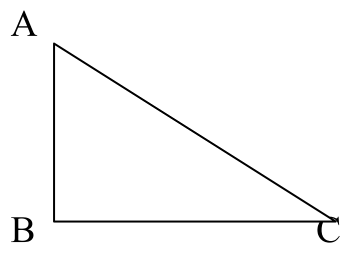
Серед геометричних задач є багато таких, що відносяться до задач на обчислення. Методи їх розв'язування вимагають як знання геометричних співвідношень, застосування властивостей, ознак фігур, а також уміння виконувати алгебраїчні перетоворення.

На відміну від інших видів задач із геометрії, досить часто при їх розв'язуванні можна обійтися без побудови рисунка. Проте такий рисунок ніколи зайвим не буде. Наприклад, його зручно використати для скороченого запису умови.

Текстові алгебраїчні задачі, в яких використовуються геометричні співвідношення, у першу чергу, демонструють взаємозв`язки шкільних курсів алгебри та геометрії. Застосування таких задач у процесі навчання математики дозволяє реалізувати прикладну спрямованість шкільного курсу.

Задача 1. *Периметр прямокутного трикутника дорівнює 36 см. Гіпотенуза відноситься до катета як 5 : 3. Знайти сторони трикутника.*

Розв'язання.



Нехай дано прямокутний трикутник ABC, у якому AC – гіпотенуза.

Нехай $к$ – коефіцієнт пропорційності, тоді AC = 5$к$, а катет AB = 3$к$.

За теоремою Піфагора другий катет

$BC^2 = AC^2 – AB^2$ або $BC^2 = 25к^2 – 9к^2 = 16к^2$.

Звідки BC = 4$к$ (BC, $к$ – додатні числа).

Периметр прямокутного трикутника дорівнює 36 см, отже $5к + 3к + 4к = 36$, звідки $к = 3$.

Таким чином, сторони трикутника дорівнюють 15 см, 9 см, 12 см.

Відповідь: 15 см, 9 см, 12 см.

Задача 2. *Дві сили прикладені до однієї точки і направлені під прямим кутом одна до одної. Значення однієї з них на 4 Н більше від значення другої, а величина рівнодійної на 8 Н менша за суму значень даних сил. Знайти дані сили та їх рівнодійну.*

Розв'язання. Нехай значення першої сили $F_1 = x$ Н, тоді друга сила має величину $F_2 = (x + 4)$ Н. Рівнодійна цих сил : $x + x + 4 – 8 = (2x – 4)$ Н.

Оскільки дані сили направлені під прямим кутом одна до одної, то можна використати теорему Піфагора (геометрично рівнодійна сил у даному випадку – це гіпотенуза прямокутного трикутника)

$x^2 + (x + 4)^2 = (2(x – 2))^2$.

Звідки $x_1 = 0$ – не задовольняє умову здачі;

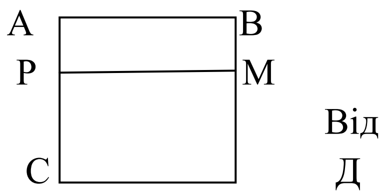
$x_2 = 12$.

Отже, перша сила – 12 Н; друга сила – 16 Н; їх рівнодійна – 20 Н.

Відповідь: 12 Н; 16 Н; 20 Н.

Задача 3. *Від аркуша картону, який має форму квадрата, відрізали смугу шириною 3 см. Площа прямокутної частини аркуша, що залишилася, дорівнює 70 см^2. Визначте початкові розміри аркуша.*

Розв'язання.



Нехай сторона квадрата АВ = *x см*, тоді площа аркуша картону (квадрата АВСД) дорівнює x^2. Від аркуша відрізали прямокутну смугу площею $3x$. За умовою задачі площа прямокутної частини аркуша, що залишилася, дорівнює *70 см^2*. Складаємо рівняння*:* $x^2 – 3x = 70$.

Звідки $x_1 = -7$ – не задовольняє умову*;* $x_2 = 10$ *см.*

Отже, сторона аркуша квадратної форми дорівнює *10 см.*

Відповідь: 10 см.

Задача 4. *Периметр прямокутника дорівнює 32 см, а сумма площ квадратів, які побудовані на кожній з його сторін – 260 см^2. Знайти сторони прямокутника.*

Розв'язання. Позначимо сторони прямокутника x см та y см. Тоді периметр прямокутника дорівнює: $2(x+y)=32$.

Відповідно до умови задачі, сума площ квадратів побудованих на кожній з його сторін (таких квадратів є чотири) буде дорівнювати $2x^2+2y^2=260$.

Одержали систему рівнянь : $\begin{cases} 2(x + y) = 32, \\ 2x^2 + 2y^2 = 260. \end{cases}$

Звідки x_1=9 або x_2=7, відповідно y_1=7 і y_2=9.

Такі значення визначають один і той самий прямокутник.

Відповідь: 7 см і 9 см.

№ 31. З аеродрому одночасно вилітають два літаки: один у напрямі на південь зі швидкістю *192 км/год*, а другий у напрямку на схід зі швидкістю *256 км/год*. На якій віддалі один від одного будуть літаки через 3 години?

№ 32. Клумбу, що має форму прямокутника із сторонами *2 м* і *4 м*, оточено доріжкою, яка має скрізь однакову ширину. Визначити ширину цієї доріжки, якщо її площа у 9 разів більша, ніж площа клумби.

№ 33. З листка жерсті, який має форму прямокутника, виготовлено коробку без кришки у такий спосіб, що по кутах листа вирізали по квадрату зі стороною *5 см*, а окрайки загнули. Якого розміру був лист жерсті, якщо довжина його вдвоє більша за ширину, а об'єм коробки дорівнював *1500 см*^{3}.

№ 34. До матеріальної точки прикладено дві сили, кут між якими дорівнює 30^0. Величина однієї з прикладених сил у $7\sqrt{3}$ разів більше за другу, а величина рівнодійної сили на 24 Н більше, ніж значення меншої сили. Визначити величину меншої сили і рівнодійної.

№ 35. Три кути опуклого n-кутника дорівнюють по 80^0, а решта по 160^0. Визначити кількість кутів n-кутника.

Текстові задачі відіграють надзвичайно важливу роль у шкільному курсі математики. Їх визнано одним із найбільш ефективних методичних засобів, спрямованих формування в учнів загального підходу, загальних умінь розв'язування будь-яких задач, пізнання та більш глибоке оволодіння математичними поняттями, що вивчаються, а також деякими загальнонауковими і загальножиттєвими поняттями. Вони допомагають розвивати мислення школярів, формувати вміння й навички практичного застосування математики. Розв'язування задач допомагає виховувати в учнях наполегливість у подоланні труднощів, відповідальність, уважність, охайність, послідовність.

3. Задачі для самостійного розв`язування

1.1. Моторний човен проплив 48 км за течією річки і повернувся назад, витративши на зворотний шлях на 1 год більше. Знайдіть швидкість течії, якщо власна швидкість човна дорівнює 14 км⁄год.

1.2. Турист проплив на моторному човні 25 км протии течії річки і повернувся назад на плоту. Визначити швидкість течії річки, якщо на плоту турист плив на 10 год більше, ніж човном, а власна швидкість човна дорівнює 12 км/год.

1.3. Дві пристані знаходяться на відстані, яка по річці дорівнює 30 км. Катер проходить цей шлях в прямому й зворотньому напрямі за 2 год 15 хв. Визначте швидкість течії, якщо власна швидкість катера дорівнює 27 км/год.

1.4. Катер проплив 60 км протии течії річки і 48 км за течією, витративши на увесь цей шлях 5 год. Знайдіть власну швидкість катера, якщо швидкість течії річки становить 2 км/год.

1.5. Моторний човен проплив 49 км проти течії річки і 8 км по озеру, витративши на весь шлях 2 год. Знайдіть власну швидкість човна, якщо швидкість течії річки становить 4 км/год.

1.6. Відстань між двома пристанями по річці дорівнює 30 км. Катер проходить цей шлях туди й назад за 2 год 15 хв. Визначте швидкість течії, якщо власна швидкість катера дорівнює 27 км/год.

1.7. Моторний човен пройшов 24 км проти течії і 16 км за течією, витративши на весь шлях 3 год. Знайдіть швидкість човна у стоячій воді, якщо швидкість течії річки становить 2 км/год.

1.8. Човен пройшов 32 км проти течії і 40 км за течією, витративши стільки часу, скільки йому потрібно, щоб у стоячій воді пройти 78 км. Знайдіть власну швидкість човна, якщо швидкість течії річки становить 3 км/год.

1.9. Катер пройшов 20 км по озеру, а потім ще 44 км по річці, що бере початок із цього озера, за 3 год. Знайдіть власну швидкість катера, якщо швидкість течії річки становить 2 км/год.

1.10. Теплохід пройшов 27 км за течією річки і 21 км проти течії, витративши на весь шлях 2 год. Яка швидкість теплохода у стоячій воді, якщо швидкість течії дорівнює 3 км/год?

1.11. Моторний човен пройшов 7 км проти течії і 8 км за течією, витративши на весь шлях 1 год. Знайдіть швидкість човна у стоячій воді, якщо швидкість течії річки становить 1 км/год.

1.12. Катер проплив 24 км проти течії річки і 27 км по озеру, витративши на весь шлях 3 год. Знайдіть власну швидкість катера, якщо швидкість течії річки становить 2 км/год.

1.13. Катер, власна швидкість якого дорівнює 8 км/год, пройшов 15 км проти течії річки і повернувся назад, витративши на весь шлях 4 год. Знайдіть швидкість течії річки.

1.14. Катер проплив 40 км за течією річки і таку саму відстань проти течії, витративши на шлях проти течії на 20 хв більше, ніж на шлях за течією. Знайдіть власну швидкість катера, якщо швидкість течії річки становить 3 км/год.

1.15. Катер пройшов 24 км за течією річки на 1 год швидше, ніж 36 км проти течії. Знайдіть власну швидкість катера, якщо швидкість течії дорівнює 3 км/год.

1.16. Катер проплив 15 км за течією річки і 4 км по озеру, витративши на весь шлях 1 год. Знайдіть власну швидкість катера, якщо швидкість течії річки становить 4 км/год.

1.17. Човен, власна швидкість якого дорівнює 6 км/год, проплив 8 км за течією річки на 1 год швидше, ніж таку саму відстань проти течії річки. Знайдіть швидкість течії.

1.18. Екскурсанти взяли на 3 години човен і відправились за течією річки. На скільки кілометрів вони можуть відплисти від пристані, щоб встигнути через 3 години повернутися назад, якщо відомо, що швидкість човна у стоячій воді 7,5 км на годину, а швидкість течії річки дорівнює 2,5 км на годину?

1.19. На скільки кілометрів можна відплисти від пристані проти течії річки на човні, швидкість якого в стоячій воді дорівнює 8 км на годину, щоб встигнути повернутися назад через 4 години, якщо швидкість течії річки 2 км/год?

1.20. Пароплав пройшов 100 км за течією річки і 64 км проти течії і витратив на це 9 год. Іншого разу за цей час пароплав пройшов 80 км проти течії і 80 км за течією річки. Визначіть швидкість пароплава у стоячій воді і швидкість течії річки.

1.21. Моторний човен витратив 2 години 30 хв для того, щоб пройти 12 км за течією річки і повернутися назад. Іншого разу той самий моторний човен за 1 годину 20 хвилин пройшов 4 км за течією річки і 8 км проти течії. Визначити швидкість моторного човна у стоячій воді і швидкість течії річки.

1.22. Пароплав пройшов відстань між двома містами за течією річки за 6 год. Таку саму відстань проти течії річки пароплав пройшов за 8 год.

Визначити швидкість пароплава у стоячій воді, якщо швидкість течії річки дорівнює 2,5 км за годину.

1.23. Моторний човен проплив 18 км за течією річки і 14 км проти течії, затративши на весь шлях 3 год 15 хв. Знайдіть швидкість течії, якщо власна швидкість човна 10 км/год.

1.24. Катер проплив 75 км за течією річки і стільки ж проти течії. На весь шлях він затратив у 2 рази більше часу, ніж йому потрібно було б, щоб пройти 80 км у стоячій воді. Яка швидкість катера у стоячій воді, якщо швидкість течії дорівнює 5 км/год?

1.25. Пароплав пройшов 48 км за течією річки і стільки ж проти течії, витративши на це 5 год. Визначити швидкість пароплава у стоячій воді, якщо швидкість течії річки дорівнює 4 км/год.

1.26. Відстань між двома пристанями на річці дорівнює 80 км. Пароплав проходить цю відстань туди і назад за 8 год і 20 хв Визначити швидкість пароплава у стоячій воді, якщо швидкість течії річки дорівнює 4 км/год.

1.27. Човен проти течії річки пройшов 22,5 км і за течією 28,5 км, витративши на весь шлях 8 год. Швидкість течії річки дорівнює 2,5 км/год. Визначити швидкість човна у стоячій воді.

1.28. Моторний човен, який має швидкість 20 км/год, пройшов відстань 60 км між двома пунктами туди і назад, не зупиняючись, за 6 год 15 хв. Яка швидкість річки?

1.29. Відстань по річці між двома пристанями дорівнює 21 км. Вирушаючи від однієї з цих пристаней до другої, катер повертається до першої назад через 4 години, витрачаючи з цього часу 30 хв. на стоянку біля другої пристані. Визначити швидкість цього катера у стоячій воді, знаючи що швидкість течії річки дорівнює 2,5 км/год.

1.30. Моторний човен, який має швидкість 7 км/год, пройшов вниз по річці 28,5 км, а потім вгору по річці 22,5 км, не зупиняючись, за 8 год. Яка швидкість річки?

****

2.1. Із міста виїхав мікроавтобус. Через 10 хв після нього із цього міста в тому самому напрямку виїхав легковик, який наздогнала мікроавтобус за 40 км від міста. Знайдіть швидкість мікроавтобуса, якщо вона на 20 км/год менша від швидкості легкової машини.

2.2. З села в місто, відстань між якими дорівнює 72 км, виїхав велосипедист. Через 15 хв назустріч йому з міста виїхав інший велосипедист, який проїжджає за годину на 2 км більше, ніж перший. Знайдіть, з якою швидкістю їхав перший велосипедист, коли вдомо, що вони зустрілися на середині шляху.

2.3. Два автомобілі виїхали одночасно з міст А і В назустріч один одному. Через годину вони зустрілись і, не зупиняючись, продовжували рухатись з тією самою швидкістю. Один із них прибув у місто В на 50 хв пізніше, ніж другий у місто А. Знайдіть швидкість кожного автомобіля, якщо відстань між містами становить 100 км.

2.4. Відстань між двома містами дорівнює 93 км. З одного міста в друге виїхав велосипедист. Через годину назустріч йому з другого міста виїхав інший велосипедист, швидкість якого на 3 км/год більша за швидкість першого. Велосипедисти зустрілись на відстані 45 км від першого міста. Знайдіть швидкість кожного велосипедиста.

2.5. Велосипедист з'їздив із села на станцію і повернувся назад. На зворотному шляху він збільшив швидкість на 1 км/год порівняно з рухом на станцію і витратив на нього на 8 хвилин менше. З якою швидкістю їхав велосипедист на станцію, якщо відстань між селом і станцією становить 32 км?

2.6. З пункту А в пункт В автомобіль їхав шосейною дорогою завдовжки 210 км, а повертався по ґрунтовій дорозі завдовжки 160 км, витративши на зворотний шлях на 1 год більше, ніж на шлях з пункту А в пункт В. З якою швидкістю їхав автомобіль по ґрунтовій дорозі, якщо вона на 30 км/год менша, ніж його швидкість на шосе?

2.7. Відстань між двома містами, що дорівнює 385 км, автомобілі подолав за 5 год. Коли він проїхав 8/11 усієї відстані, то зменшив свою швидкість на 10 км/год. З якою швидкістю рухався автомобіль на кожній ділянці руху?

2.8. Відстань між двома містами дорівнює 420 км. З одного міста до іншого виїхали одночасно дві машини. Швидкість однієї з них на 10 км/год більша за швидкість другої, через що вона приїхала в пункт призначення на 1 год раніше від другої машини. Знайдіть швидкість кожної машини.

2.9. Перші 20 км шляху велосипедист рухався зі швидкістю, яка на 5 км/год більша за швидкість, з якою він долав останні 20 км. З якою швидкістю проїхав велосипедист другу половину шляху, якщо на весь шлях він витратив 3 год 20 хв?

2.10. Із міста А в місто В, відстань між якими дорівнює 200 км, виїхала легкова машина. Через 40 хв після цього назустріч їй з міста А в місто В виїхала вантажна машина, яка зустрілася з легковою через 2 год після виїзду останньої з міста А. Яка швидкість кожної з машин, якщо легкова за 3 год проїжджає на 120 км більше, ніж вантажна за 2 год?

2.11. З міста **А** в місто В виїхав велосипедист. Через 3 год із міста А виїхав мотоцикліст, який прибув у місто В одночасно з велосипедистом. Знайдіть швидкість мотоцикліста, якщо вона на 45 км/год більша за швидкість велосипедиста, а відстань між містами А і В становить 60 км.

2.12. Мотоцикліст проїхав 40 км з пункту А в пункт В і повернувся назад. На зворотному шляху він зменшив швидкість на 10 км/год у порівнянні з початковою і витратив на подорож на 20 хв більше, ніж на шлях з пункту А в пункт В. Знайдіть початкову швидкість мотоцикліста.

2.13. З пунктів А і В, відстань між якими дорівнює 18 км, вийшли одночасно назустріч один одному два пішоходи і зустрілися через 2 год. Знайдіть швидкість кожного з пішоходів, якщо один із них прибув у пункт А на 54 хв раніше, ніж другий – у пункт В.

2.14. З одного міста в інше, відстань між якими дорівнює 300 км, виїхали одночасно дві машини. Одна з них рухалась зі швидкістю на 10 км/год більшою, ніж друга, а тому прибула до пункту призначення на 1 год раніше за другу. Знайдать швидкість кожної з машин.

2.15. Мікроавтобус запізнився на 12 хв. Для того, щоб прибути в пункт вчасно, він за 144 км від цього пункту збільшив свою швидкість на 8 км/год. Знайти початкову швидкість мікроавтобуса.

2.16. Два автомобілі виїхалм одночасно з пункту А в пункт В, відстань між якими дорівнює 540 км. Перший автомобіль рухався із швидкістю, яка на 10 км/год перевищувала швидкість друго автомобіля, і прибув у пункт В на 45 хв раніше від другого. Знайдіть швидкість кожного автомобіля.

2.17. З міста А в місто В, відстань між якими дорівнює 320 км, виїхала легкова машина. Через 2 год після цього з міста В у місто А виїхала вантажівка, яка зустрілася з легковою через 2 год після свого виїзду. Легкова машина долає відстань між містами А і В на 2 год 40 хв швидше, ніж вантажівка. Знайдіть швидкість кожної машини.

2.18. Поїзд відправився зі станції із запізненням у 20 хв. Для того, щоб подолати втрачений час, поїзд на перегоні у 160 км рухався зі швидкістю, яка перевищує швидкість за розкладом на 16 км/год, і прийшов на кінець перегону вчасно. Якою за розкладом є швидкість поїзда на цьому перегоні?

2.19. З пунктів А і В виїхали одночасно назустріч один одному два автомобілі. Один із них приїхав у В через 1 год 15 хв після зустрічі, а другий – в А через 48 хв після зустрічі. Відстань між А і В дорівнює 90 км. Знайдіть швидкості автомобілів.

2.20. Перші 280 км дороги від пункту А до пункту В автобус проїхав з певною швидкістю, а останні 480 км – зі швидкістю на 10 км/год більшою. Знайдіть початкову швидкість автобуса, якщо на весь шлях від пункту А до пункту В він витратив 10 год.

2.21. Відстань між двома станціями, що дорівнює 420 км, поїзд мав подолати за певний час. Коли він пройшов 4/7 цієї відстані, то збільшив свою швидкість на 5 км/год. З якою швидкістю рухався поїзд на кожній ділянці руху, якщо на весь шлях він витратив 10 год.

2.22. На перегоні, довжина якого дорівнює 240 км, поїзд рухався зі швидкістю на 10 км/год менше, ніж мала бути за розкладом, і запізнився на 48 хв. З якою швидкістю повинен був рухатися поїзд за розкладом?

2.23. Поїзд мав проїхати 64 км. Коли він проїхав 24 км, то був затриманий біля семафора на 12 хв. Тоді він збільшив швидкість на 10 км/год і прибув у пункт призначення із запізненням на 4 хв. Знайдіть початкову швидкість поїзда.

2.24. На шлях, що дорівнює 18 км, велосипедист витратив часу на 1 год 48 хв менше, ніж пішохід, оскільки за 1 год проїжджав на 9 км більше, ніж проходив пішохід. Знайдіть швидкості велосипедиста та пішохода.

2.25. Два туритси ідуть назустріч один одному з пунктів А і В. Перший вийшов з А на 6 годин пізніше, ніж другий з В, і при зустрічі було встановлено, що він пройшов на 12 км менше, ніж другий. Продовжуючись рухатися з тією самою швидкістю, перший турист прийшов у В через 8 год, а другий – в А через 9 год після зустрічі. Знайдіть швидкість кожного туриста.

2.26. Катер мав подолати відстань між двома портами, що дорівнює 80 км, за певний час. Проте оскільки він рухався зі швидкістю на 10 км/год меншою, ніж передбачалось, то запізнився на 24 хв. З якою швидкістю повинен був рухатися катер?

2.27. З міста А в місто В виїхав товарний поїзд. Через 2 год із міста А виїхав пасажирський поїзд, який прибув до міста В одночасно з товарним. Знайдіть швидкість товарного поїзда, якщо вона на 20 км/год менша від швидкості пасажирського, а відстань між містами А і В становить 350 км.

2.28. Відстань між пунктами А і В становить 40 км. Автобус проїхав з А в В і повернувся назад. Повертався він зі швидкістю на 10 км/год меншою від початкової і витратив на зворотний шлях на 20 хв більше, ніж на шлях з А в В. Знайдіть початкову швидкість автобуса.

2.29. Фермер повинен був їхати у місто. Якщо він поїде зі швидкістю 12 км/год, то прибуде в місто у призначений термін, якщо ж він буде їхати зі швидкістю 15 км/год, то приїде у місто на 1 годину раніше встановленого терміну. Визначити відстань від ферми до міста.

2.30. Зв’язковий із пункту А повинен був доставити повідомлення в пункт В. Увесь шлях туди і назад він проїхав за 14,5 години, причому від А до В він проїжджав із швидкістю 30 км/год, а назад від В до А – зі швидкістю 28 км/год. Визначити відстань від А до В.

****

3.1. Автобус запізнювався на одну годину. Щоб прибути вчасно, за 180 км від пункту призначення він збільшив швидкість на 9 км/год. Знайдіть початкову швидкість автобуса.

3.2. Велосипедист виїхав з деякою швидкістю з пункту А в пункт В, відстань між якими 60 км. Прибувши в пункт В, він повернув назад і їхав із тією самою швидкістю, а через годину зробив зупинку на 20 хв. Після чого велосипедист збільшив швидкість на 4 км/год. Знайдіть початкову швидкість велосипедиста, якщо відстань від В до А він проїхав за той самий час, що й від А до В.

3.3. Велосипедисту потрібно проїхати 30 км. Він виїхав на 30 хв пізніше, ніж планувалося, збільшив заплановану швидкість на 2 км/год і прибув до пункту призначення без запізнення. Визначте швидкість, з якою їхав велосипедист.

3.4. Довжина трамвайного маршруту дорівнює 15 км. Якщо швидкість трамвая збільшити на 3 км/год, то він витратить на кожен рейс в обидва кінці на 0,5 год менше, ніж раніше. За який час трамвай робить один рейс?

3.5. Автобус проїхав першу частину шляху з пункту А в пункт В, відстань між якими 370 км, зі швидкістю 80 км/год, а на другій частині шляху йому довелося знизити швидкість до 40 км/год через ремонт дороги. На зворотному шляху з В в А швидкість на ділянці, де відбувається ремонт, склала 30 км/год, а на решті шляху – 90 км/год. Відомо, що зворотний шлях з В в А автобус проїхав на 25 хв швидше, ніж з А в В. Знайдіть час руху за маршрутом з А в В.

3.6. З пункту А в пункт В автомобіль доїхав за 5 год, рухаючись у межах населених пунктів зі швидкістю 60 км/год, а по шосе поза населеними пунктами – зі швидкістю 80 км/год. Зворотний шлях з В до А тривав 4 год 36 хв. При цьому в межах населених пунктів автомобіль рухався зі швидкістю 50 км/год, а по шосе – 90 км/год. Яка відстань між пунктами А і В?

3.7. Автобус і легковий автомобіль виїхали одночасно назустріч один одному з двох міст, відстань між якими 1260 км. Швидкість автобуса на

15 км/год менша від швидкості автомобіля. Через 7 год після початку руху відстань між ними дорівнювала 525 км. Знайдіть швидкість автобуса.

3.8. Із пункту А у пункт В вирушив товарний потяг. Через 5 годин з пункту В у пункт А вийшов пасажирський потяг. Зустрілися вони в пункті С. Від С до В товарний потяг йшов 4 год, а пасажирський від С до А – 6 год. За скільки годин кожний потяг може подолати шлях між А і В?

3.9. Два потяги виїжджають із двох міст, відстань між якими 900 км, рухаються назустріч один одному і зустрічаються на середині шляху. Знайдіть швидкість кожного потяга, якщо перший виїхав на 1 год раніше другого і його швидкість була на 5 км/год менша.

3.10. З пункту А вирушив пішохід. Через 5 год з А в тому самому напрямку виїхав велосипедист, швидкість якого у 3,5 рази більша за швидкість пішохода.Через скільки годин велосипедист дожене пішохода?

3.11. З пунктів А і В назустріч один одному одночасно виходять два туристи. Після зустрічі перший прибуває в пункт В через 4 год, а другий у пункт А – черз 9 год. Знайдіть швидкість кожного туриста, якщо швидкість першого на 2 км/год більша за швидкість другого.

3.12. Два автомобілі виїжджають одночасно з двох міст назустріч один одному і після зустрічі продовжують рух. Перший прибуває в пункт призначення через 25 год, а другий – через 36 год після зустрічі. Перший автомобіль рухається зі швидкістю на 10 км/год більшою, ніж другий. Знайдіть швидкість кожного автомобіля

3.13. Три плавці мають проплисти дистанцію від А до В і повернутися назад. Спочатку стартує перший, через 5 с – другий, ще через 5 с – третій. Деяку точку С, яка знаходиться між А і В, усі плавці пройшли одночасною. Третій плавець, пропливши В і повертаючись назад, зустрів другого за 9 м, а першого за 15 м від В. Знайдіть швидкість третього плавця, якщо дистанція АВ дорівнює 55 м.

3.14. Товарний потяг був затриманий на 12 хв, а потім на відстані 60 км надолужив витрачений час, збільшивши швидкість на 15 км/год. Знайти початкову швидкість потягу.

3.15. Два спортсмени вибігають одночасно з пунктів А і В назустріч один одному. Вони біжать з неоднаковими, але сталими швидкостями і зустрічаються на відстані 300 м від А. Пробігаючи доріжку АВ до кінця, кожний із них одразу повертає назад і зустрічає іншого на відстані 400 м від В. Знайдіть довжину АВ.

3.16. Відстань між двома селами дорівнює 10 км. Два пішоходи виходять одночасно з одного села в інше. Перший іде зі швидкістю, яка більша на 3 км/год, ніж другий, і приходить до місця призначення на 3 год раніше. З якою швидкістю рухається кожен із них?

3.17. Мотоцикліст зупинився на заправці на 12 хв. Після цього, збільшивши швидкість на 15 км/год, він ліквідував витачений час на відстані 60 км. З якою швидкістю мотоцикліст рухався після зупинки?

3.18. Два велосипедисти виїхали одночасно з двох міст, віддалених одне від одного на 270 км, і їдуть назустріч один одному. Другий проїжджає за годину на 1,5 км менше, ніж перший, і зустрічається з ним через стільки годин, скільки кілометрів за годину робить перший. Визначити швидкість кожного велосипедиста.

3.19. Літак повинен пролетіти 2900 км. Пролетівши 1700 км, він виконав вимушену посадку на 1 год 30 хв, після чого полетів зі швидкістю на 50 км/год меншою, ніж раніше. Знайти початкову швидкість літака, якщо відомо, що він прибув на місце через 5 год після вильоту.

3.20. Два вершники виїжджають одночасно з пунктів А і В назустріч один одному. Перший прибуває в В через 27 хв, а другий в А через 12 хв після зустрічі. За який час кожний вершник проїхав шлях між А і В?

3.21. Два автомобілі виїхали одночасно з одного пункту в одному напрямку. Швидкість одного автомобіля 50 км/год, а другого – 40 км/год. Через 0,5 год із того ж пункту в тому ж напрямку виїхав третій автомобіль, який обігнав першого на 1,5 год пізніше, ніж другого. Знайдіть швидкість третього автомобіля.

3.22. Залізницею відстань від А до В дорівнює 88 км. Водним шляхом ця відстань збільшується до 108 км. Поїзд із А виходить на 1 год пізніше, ніж теплохід, і прибуває в В на 15 хв раніше. Знайти швидкість поїзда, якщо відомо, що вона на 40 км/год більше за швидкість теплоходу.

3.23. З пунктів А і В, відстань між якими 120 км, виїхали одночасно назустріч один одному два автобуси. На шляху перший зробив зупинку на 10 хв, другий – на 5 хв. Перший автобус прибув до пункту В на 25 хв раніше, ніж другий прибув у пункт А. Швидкість першого автобуса більша за швидкість другого на 20 км/год. Скільки часу тривала поїздка пасажирів кожного з автобусів між пунктами А та В?

3.24. З двох міст, відстань між якими 200 км, виїхали одночасно назустріч один одному велосипедист і вершник і зустрілися через 6 годин. На весь шлях з одного міста до іншого велосипедист витатив на 5 год більше, ніж вершник. Знайдіть швидкість вершника.

3.25. Турист їхав на автомобілі 5/8 усього шляху, а решту – на катері. Швидкість катера на 20 км/год менша за швидкість автомобіля. Автомобілем турист подорожував на 15 хв довше, ніж катером. Чому дорівнюють швидкості автомобіля й катера, якщо весь шлях туриста дорівнює 160 км?

3.26. Мотоцикліст був затриманий біля шлагбауму на 24 хв. Збільшивши після цього свою швидкість на 10 км/год, він надолужив запізнення на перегоні довжиною 80 км. Визначити швидкість мотоцикліста до зупинки.

3.27. З двох міст, відстань між якими 30 км, йдуть назустріч один одному два пішоходи. Якщо перший вийде на 2 год раніше, ніж другий, то вони зустрінуться через 2,5 год після виходу другого. Якщо ж другий вийде на 2 год раніше першого, то вони зустрінуться через 3 год після виходу першого. Знайдіть швидкість кожного пішохода.

3.28. З пунктів А і В, відстань між якими 56 км, назустріч один одному вирушили два туристи. Якщо пеший із них вийде на 1 год 10 хв раніше, ніж другий, то вони зустрінуться на середині шляху між А і В. Якщо ж вони вирушать одночасно, то їх зустріч відбудеться через 4 год. Знайдіть швидкість кожного туриста.

3.29. Один турист вийшов о 6 год, а другий назустріч йому о 7 год. Зустрілися вони о 8 год і, не зупиняючись, продовжили рух. Скільки часу витратив кожний з них на весь шлях, якщо перший прийшов на те місце, звідки вийшов другий, на 28 хв пізніше, ніж другий прийшов на те місце, звідки вийшов перший?

3.30. Відстань між селами М і Н дорівнює 36 км. Із села Н до М виїхав велосипедист, а через 0,5 год назустріч йому з села М виїхав другий велосипедист, швидкість якого на 6 км/год більша, ніж швидкість першого. Знайдіть швидкість кожного велосипедиста, якщо відомо, що вони зустрілися на середині дороги між М і Н.

***

4.1. Один робітник може виконати виробниче завдання на 3 год швидше, ніж другий. Якщо перший робітник буде працювати 4 год, а потім його замінить другий, то останньому потрібно буде працювати ще 3 год, щоб закінчити завдання. За скільки годин може виконати все завдання перший робітник?

4.2. Один оператор може зробити комп'ютерний набір книжки за 6 днів швидше, ніж другий. Якщо перший пропрацює 3 дні, а потім його замінить другий і пропрацює 9 днів, то буде виконано 75% набору. За скільки днів може виконати цей набір кожний оператор, працюючи самостійно?

4.3. Маляр і його учень, працюючи разом, можуть пофарбувати фасад будинку за 4 год 12 хв. Скільки часу (у годинах) витратить на фарбування фасаду будинку один маляр, працюючи самостійно, якщо йому для виконання цього завдання потрібно на 8 год менше, ніж учневі?

4.4. Дві бригади повинні були закінчити збирання врожаю за 12 днів. Після 8 днів спільної работы перша бригада одержала інше завдання, тому друга бригада далі збирала врожай самостійно і закінчила работу за 7 днів. На скільки днів бистріше друга бригада зібрала б увесь врожай, якби кожна бригада працювала окремо?

4.5. Двоє робітників можуть виконати завдання, працюючи разом, за 2 дні. За скільки днів може виконати це завдання кожен робітник, працюючи самостійно, якщо одному з них для виконання третину завдання треба на 3 дні менше, ніж другому для виконання двох третин завдання?

4.6. Для перевезення 30 т вантажу машині треба було зробити кілька рейсів, але вантаж довелось перевозити на машині, що мала вантажопідйомність на 2 т більшу, ніж планувалося. Через це для перевезення вантажу знадобилося на 4 рейси менше, ніж планувалося. Знайдіть вантажопідйомність машини, яка перевезла вантаж.

4.7. Одна бригада працювала на ремонті 9 годин, після чого до неї приєдналася друга бригада, через 6 годин спільної роботи виявилось, що відремонтовано половину дороги. За скільки годин може відремонтувати дорогу кожна бригада, працюючи самостійно, якщо першій бригаді на це потрібно на 9 год більше, ніж другій?

4.8. Двоє робітників, працюючи разом, виконають деяку роботу за 8 годин. Перший із них, працюючи самостійно, може виконати всю роботу на 12 годин швидше, ніж другий робітник, якщо цей останній буде працювати окремо. За скільки часу кожен із них, працюючи окремо, може виконати всю роботу?

4.9. Одному робітникові для виконання виробничого завдання потрібно на 4 год менше, ніж другому. Перший робітник пропрацював 4 год, а потім його змінив другий. Після того, як другий робітник пропрацював 4 год, виявилося, що виконано 5/6 завдання. За скільки годин може виконати це завдання кожен робітник, працюючи самостійно?

4.10. Для перевезення 60 т вантажу було замовлено певну кількість вантажівок. Через несправність двох із них на кожну машину довелося вантажити на 1 т більше, ніж планувалося. Скільки машин мало працювати на перевезенні вантажу?

4.11. Одному робітникові для виконання виробничого завдання потрібно на 2 год більше, ніж другому. Перший робітник пропрацював 2 год, а потім його замінив другий. Після того, як другий робітник пропрацював 3 год, виявилося, що виконано 3/4 завдання. За скільки годин може виконати це завдання кожний з робітників, працюючи самостійно?

4.12. Одна бригада мала виготовити 120 деталей, а друга – 144 деталі. Перша бригада виготовляла щогодини на 4 деталі більше, ніж друга, і працювала на 3 год менше за другу. Скільки деталей виготовляла кожна бригада за одну годину?

4.13. Тракторист мав за певний час зорати поле площею 180 га. Проте він зорював на 2 га більше, ніж планував, і закінчив роботу на 1 день раніше терміну. За скільки днів тракторист зорав поле?

4.14. Двоє робітників можуть виконати певне замовлення, працюючи разом, за 12 днів. Якщо половину роботи виконає перший робітник, а потім його замінить другий, то все замовлення буде виконано за 25 днів. За скільки днів кожний робітник окремо виконає це замовлення?

4.15. Двоє робітників, працюючи разом, виконали виробниче завдання за 12 год. За скільки годин може виконати це завдання кожен робітник, працюючи самостійно, якщо один із них може це зробити на 7 год швидше за другого?

4.16. Тракторист мав зорати поле площею 200 га. Кожен день він орав на 5 га більше, ніж планував, а тому закінчив оранку на 2 дні раніше терміну. За скільки днів тракторист зорав поле?

4.17. Один з робітник може виконати робоче завдання на 3 год швидше, ніж другий. Якщо перший робітник буде працювати 4 год, а потім його замінить другий, то останьому треба буде працювати 3 год, щоб закінчити завдання. За скільки годин може виконати все завдання перший робітник?

4.18. Оленка може прочитати 20 сторінок на 15 хв швидше, ніж Марічка. Скільки за годину читає кожна дівчинка, якщо Оленка за годину прочитує на 20 сторінок більше, ніж Марічка?

4.19. Кожна з двох друкарок друкувала рукопис обсягом 56 сторінок. Перша закінчила роботу на 2 год раніше від другої, оскільки друкувала 5 сторінок за той час, за який друга друкувала 4 сторінки. По скільки сторінок в годину друкувала кожна друкарка?

4.20. На будівництві працювали дві бригади. Після 5 днів їх спільної роботи другу бригаду було переведено на інший об'єкт. Решту роботи перша бригада закінчила за 9 днів. За скільки днів могла б виконати всю роботу кожна бригада, працюючи окремо, коли відомо, що другій бригаді на виконання всієї роботи потрібно було на 12 днів менше, ніж першій?

4.21. Один тракторист може зорати поле на 3 год швидше, ніж другий. Якщо перший тракторист пропрацює 4 год, а потім його замінить другий, то останній закінчить оранку цього поля за 3 год. За скільки годин може зорати все поле перший тракторист?

4.22. Одному маляру потрібно на 4 год більше, щоб пофарбувати кімнату, ніж другому. Якщо перший маляр пропрацює 3 год, а потім його змінить другий, то останній дофарбує цю кімнату за 6 год. За скільки годин може пофарбувати всю кімнату другий маляр?

4.23. Комбайнер мав зібрати врожай з поля площею 60 га. Він збирав щодня врожай з площі на 2 га більшої, ніж планував, а тому закінчив збирання врожаю на 1 день раніше строку. За сільки днів комбайнер зібрав урожай?

4.24. Бригада робітників мала виготовити 900 деталей. У зв'язку з хворобою одного з робітників кожному з тих, що працювали, довелося виготовляти на 10 деталей більше, ніж планувалось. Скільки робітників у повному складі бригади?

4.25. Два трактори різної потужності при спільній роботі зорали за 15 годин 1/6 усього поля. Якби перший трактор працював один 12 год., а потім другий трактор 20 год., то вони зорали б 20% усього поля. За скільки часу може зорати все поле кожен трактор окремо?

4.26. Дві бригади повинні були закінчити збирання врожаю за 12 днів. Після 8 днів спільної роботи перша бригада отримала інше завдання, а тому друга бригада сама закінчила решту роботи за 7 днів. За скільки днів могла б зібрати врожай кожна бригада, працюючи окремо?

4.27. Два майстри, працюючи разом, можуть закінчити деяку роботу за 12 днів. Якщо ж перший майстер буде працювати 2 дні, а другий 3 дні, то вони виконають лише 20% всієї роботи. За скільки днів може виконати всю роботу кожен майстер, працюючи окремо?

4.28. Один робітник може виконати деяку роботу за 12 днів, інший робітник цю саму роботу може виконати за 15 днів. До виконання роботи обидва робітники приступили одночасно і пропрацювали разом декілька днів, після чого перший робітник був переведений на іншу роботу. Ту частину роботи, що залишилася, другий робітник закінчив сам за 6 днів. Скільки днів працював перший робітник?

4.29. Один автомобіль може перевезти весь вантаж за 18 годин, інший автомобіль цей самий вантаж може перевезти за 24 години. До перевезення вантажу обидві машини приступили одночасно і пропрацювали разом декілька годин, після чого другій машині була доручена інша робота. Частину вантажу, що залишилася, перевіз перший автомобіль за 4 години. Скільки годин працювала перший автомобіль на перевезенні цього вантажу?

4.30. Дві бригади, працюючи разом, обробляють ділянку землі за 4 дні. Якщо ж обидві бригади пропрацюють разом тільки 2 дні, то другій бригаді для закінчення роботи знадобиться ще 6 днів. За скільки днів зможе обробити цю ділянку кожна з бригад?

****

5.1. Басейн заповнюється водою через дві труби. Коли перша труба вже працювала 7 год, включили другу трубу. Разом вони працювали 2 год до повного наповнення басейну. За скільки годин може наповнити басейн кожна труба, працюючи окремо, якщо першій потрібно на це на 4 год більше, ніж другій.

5.2. При спільній дії двох труб бак наповнюється через 1 годину 20 хв Якщо ж першу трубу відкрити на 10 хв, а другу на 12 хв, то наповниться тільки 2/15 бака. За скільки годин може наповнити бак кожна труба окремо?

5.3. Перший насос наповнив водою басейн об’ємом 360 м^3, а другий – об’ємом 480 м^3. Перший насос перекачував щогодини на 10 м^3 води менше ніж другий, і працював на 2 год довше, ніж другий. Який об’єм води перекачував кожен насос за годину?

5.4. Щоб наповнити басейн, спочатку відкрили одну трубу і через 2 год, не закриваючи її, відкрили другу. Після 4 год спільної роботи басейн було наповнено. Сама друга труба могла б наповнити басейн в 1,5 рази швидше, ніж одна перша. За скільки годин можна наповнити басейн через кожну трубу?

5.5. До двох однакових басейнів одночасно почали наливати воду. До першого басейну надходить за годину на 30 м^3 більше води, ніж до другого. У деякий момент часу в обох басейнах разом виявилося стільки води, скільки складає об'єм кожного з них. Після цього через 2 год 40 хв наповнився перший басейн, а ще через 3 год 20 хв – другий.Скільки води надходило за годину до кожного басейну?

5.6. У ванні є два крани. Через перший кран вода вливається, через другий витікає. Якщо відкрити обидва крани, то наповнена ванна спорожніє за 24 хв. За скільки хвилин може наповнитися порожня ванна, якщо вдкрити тільки перший кран і якщо відомо, що через другий кран наповнена ванна спорожніє на 2 хв раніше, ніж порожня ванна наповниться через перший кран?

5.7. Водонапірний бак наповнюється двома трубами за 2 год 55 хв. Перша труба може наповнити його на 2 год швидше, ніж друга. За який час кожна труба, діючи окремо, може наповнити бак?

5.8. У басейн проведено дві труби, причому сама перша труба наповнює його на 15 годин швидше, ніж сама друга. Після того, як перша труба діяла 10 год, її закрили і відкрили другу, яка наповнила решту басейну за 30 год. За скільки годин кожна труба, діючи окремо, може наповнити порожній басейн?

5.9. У басейн проведено дві труби. Через саму лише другу трубу басейн наповнюється на 3 години раніше, ніж чрез саму першу трубу. Вода йшла 5,75 год через першу трубу, потім відкрили і другу трубу, і через 10 год після цього наповнився басейн. За скільки годин кожна труба, діючи окремо, може наповнити басейн?

5.10. Перша труба, діючи окремо, наповнює басейн на 3 години раніше, ніж сама друга. Щоб наповнити басейн, відкрили зразу обидві труби, але через 10 год першу закрили і після цього через 5 год 45 хв сама друга труба закінчила наповнення басейну. За який час наповнює басейн кожна труба окремо?

5.11. При спільній дії двох труб бак наповнюється через 1 год 20 хв. Якщо ж першу трубу відкрити на 10 хв, а другу на 12 хв, то наповниться тільки 2/15 бака. За скільки годин може наповнити бак кожна труба окремо?

5.12. Перша труба заповнює водою резервуар, об'єм якого 10 м^3, на 5 хвилин швидше, ніж сама друга труба. Скільки кубічних метрів витікає за годину з кожної труби, якщо з першої за годину витікає на 10 м^3 більше, ніж із другої?

5.13. Один насос може наповнити басейн на 24 год швидше, ніж другий. Через 8 год після того як було включено другий насос, включили перший, і через 20 годин спільної роботи виявилося, що наповнено 2/3 басейну. За скільки годин може наповнити басейн кожен насос, працюючи самостійно?

5.14. Перший насос перекачує 90 м^3 води на 1 год швидше, ніж другий 100 м^3. Скільки води щогодини перекачує кожен насос, якщо перший перекачує за годину на 5 м^3 води більше, ніж другий?

5.15. Одна труба наповнює басейн на 2 години довше, ніж друга. Перша труба була відкрита 2 години, а потім її закрили і відкрили другу трубу. Після того як вода наповнювала басейн через другу трубу 3 години, виявилося, що заповнено лише ¾ басейна. За скільки годин можна заповнити басейн через кожну трубу, якщо вона буде діяти окремо?

5.16. За 2 години через дві труби було заповнено половину резервуару. За скільки годин можна заповнити резервуар окремо через кожну із двох труб, якщо через першу трубу резервуар заповнюється на 6 годин швиде, ніж через другу?

5.17. В одному басейні є 200 м^3 води, а в другому – 112 м^3. Відкривають крани, через які заповнюють басейни. Через скільки годин кількість води в басейнах буде однаковою, якщо в другий басейн вливається на 22 м^3 більше води, ніж у перший?

5.18. Через годину після початку рівномірного спускання води в басейні її залишилося 400 м^3, а ще через три години – 250 м^3. Скільки води було в басейні?

5.19. Чан наповнюється двома кранами А та В. Наповнення чану тільки через кран А триває на 22 хв довше, ніж через кран В. Якщо ж відкрити обидва крани, то чан наповниться за 1 год. За який час можна заповнити чан через кожен кран, якщо він буде діяти окремо?

5.20. Дві труби заповнюють басейн за 4 год. За скільки часу заповнить басейн кожна труба, якщо друга труба заповнює його у два рази довше?

5.21. Дві труби заповнюють басейн за 4,5 год. Якщо відкрити тільки першу трубу, то басейн заповниться на 8 год бистріше, ніж якщо відкрити тільки другу. Скільки часу буде заповнюватися басейн тільки через другу трубу?

5.22. Одна труба наповнює басейн за 5 годин. Друга труба призначена для спорожнення басейну. Якщо при порожньому басейні залишити відкритими обидві труби, то басейн наповниться через 7,5 год. За який час вода з повного басейну витікає через другу трубу?

5.23. До резервуару підведено п`ять труб. Перша запонює його за 40 хв, друга, третя і четверта разом – за 10 хв; друга, третя і п`ята – за 20 хв, п`ята і четверта – за 30 хв. За який час його заповнюють усі п`ять труб одночасно?

5.24. Насос викачує з басейну 2/3 води за 7,5 хв. Насос працював 5 хв, після чого в басейні залищилося 20 м^3 води. Визначити місткість басейну.

5.25. При одночасній роботі двох насосів басейн заповнюється за 4 години. Цей самий басейн буде заповнено водою, якщо перший насос буде працювати 2 год, а потім – другий 8 год. За скільки годин буде заповнюватися басейн тільки першим насосом?

5.26. Басейн, який містить 30 м^3 води, спочатку було випорожнено, а потім заповнено до початкового рівню. На це пішло 8 годин. Скільки часу тривало заповнення, якщо при заповненні насос перекачує за годину на 4 м^3 води менше, ніж при випорожненні?

5.27. Дві труби наповнили басейн місткістю 54 м^3. При цьому перша труба була відкрита 3 год, а друга – 2 год. Яка пропускна спроможність першої труби, якщо 1 м^3 вона заповнює на 1 хв повільніше, ніж друга?

5.28. Сама перша труба наповнює басейн на 3 год швидше, ніж сама друга. Для того, щоб наповнити басейн, відкрили одночасно обидві труби, але через 10 год першу трубу закрили. Після цього одна друга труба заповнила басейн за 5 год 45 хв. За скільки часу заповнить басейн сама перша труба?

5.29. Басейн заповнюється через дві труби за 3 год 45 хв. Якщо заповнити половину басейну, відкривши тільки першу трубу, а решту – лише через другу трубу, то на це піде 8 год. За скільки часу заповнить басейн кожна труба?

5.30. Із гарячого крану ванна заповнюється за 23 хв, з холодного – за 17 хв. Маша спочатку відкрила тільки гарячий кран. Через скільки хвилин вона повинна відкрити холодний, щоб на момент наповнення ванни гарячої води налилося у 1,5 рази більше, ніж холодної?

****

6.1. Скільки грамів 4-відсоткового і скільки грамів 10-відсоткового розчинів солі треба взяти, щоб отримати 180 г 6-відсоткового розчину?

6.2. Після того як змішали 50%-й і 20%-й розчини кислоти, отримали 900 г 30%-го розчину. Скільки грамів кожного розчину змішали?

6.3. До розчину, що містить 40 г солі, добавили 200 г води, після чого його концентрація зменшилася на 10%. Скільки води містив розчин; якою була в ньому масова частина солі?

6.4. Після того як змішали 60-відсотковий і 30-відсотковий розчини кислоти, отримали 600 г 40-відсоткового розчину. Скільки грамів кожного розчину змішали?

6.5. Змішали 30-відсотковий розчини соляної кислоти з 10-відсотковим і отримали 600 г 15-відсоткового розчину. Скільки взяли грамів кожного розчину?

6.6. Скільки кілограмів 25-відсоткового і скільки кілограмів 50-відсоткового сплавів міді треба взяти, щоб отримати 20 кг 40-відсоткового сплаву?

6.7. Маємо два водно-сольових розчини. Перший розчин містить 25%, а другий – 40% солі. Скільки треба взяти кілограмів першого розчину і скільки кілограмів другого, щоб отримати розчин масою 50 кг, що містить 34% солі?

6.8. Є 400 г 5%-го розчину солі. Скільки потрібно добавити солі, щоб одержати 20%-й розчин солі?

6.9. Маємо два сплави міді і цинку. Перший сплав містить 9%, а другий – 30% цинку. Скільки треба взяти кілограмів першого сплаву і скільки кілограмів другого, щоб отримати сплав масою 300 кг, який містить 23% цинку?

6.10. Змішали 30-відсотковий розчин соляної кислоти з 10-відсотковим і отримали 600 г 15-відсоткового розчину. Скільки взяли грамів кожного розчину?

6.11. Морська вода містить 5% солі. Скільки прісної води потрібно додати до 30 кг морської води, щоб концентрація солі склала 1,5%?

6.12. Є 735 г 16%-го спиртового розчину йоду. Потрібно одержати 10%-й розчин йоду. Скільки грамів спирту для цього потрібно додати?

6.13. Щоб отримати 50 кг 46-відсоткового сплаву цинку, взяли його 40-відсотковий і 50-відсотковий сплави. Скільки взяли кілограмів 40-відсоткового сплаву?

6.14. Скільки грамів води треба додати до 40 л 25%-го розчину сірчаної кислоти, щоб одержати 10%-й розчин?

6.15. 52 кг сплаву алюмінію з магнієм містять 45% алюмінію. До сплаву додали магнію так, що отримали новий сплав, який містить 13% алюмінію. Знайти масу нового сплаву.

6.16. Є сталь двох сортів, один з яких містить 5%, а інший 10% нікелю. Скільки тонн кожного з цих сортів потрібно взяти, аби одержати сплав, який містить 8% нікелю, якщо в другому сплаві нікеля на 4 т більше, ніж у першому?

6.17. Сплавляючи два однакових за масою зливки чавуну із різним вмістом хрому, одержали сплав, у якому містилося 12 кг хрому. Якби маса першого зливка була в 2 рази більше, то в сплаві містилося б 16 кг хрому. Відомо, що вміст хрому у першому зливку на 5% менший, ніж у другому. Знайдіть відсотковий вміст хрому в кожному зливку.

6.18. У посудині міститься певна кількість водного розчину кислоти. Аби зменшити концентрацію кислоти на 34% (було р%, а стало – 34%), у посудину потрібно долити 3 л води, а для того, щоб зменшити концентрацію на 17%, потрібно долити 1 л води. Яка концентрація кислоти в посудині?

6.19. Є два розчини кислоти: один 60-відсотковий, другий 90-відсотковий. Скільки кубічних сантиметрів треба взяти кожного розчину, щоб отримати 100 см^3 кислоти 75-відсоткової концентрації?

6.20. Скільки грамів 3-відсоткового і скільки грамів 8-відсоткового розчинів солі потрібно взяти, щоб отримати 260 г 5-відсоткового розчину?

6.21. Маємо два водно-сольових розчини. Концентрація солі у першому розчині становить 25%, а у другому – 40%. На скільки більше потрібно взяти кілограмів одного розчину, ніж другого, щоб отримати розчин масою 50 кг, концентрація солі в якому 34%?

6.22. 14 кг сплаву міді з оловом містить 45% міді. Скільки олова треба додати до цього сплаву, щоб одержати новий сплав з 35-відсотковим вмістом міді?

6.23. Обчисліть масу і масову частину (у %) срібла в сплаві з міддю, знаючи, що сплавивши його з 3 кг чистого срібла, дістануть сплав, який містить 90% срібла, а сплавивши його з 2 кг сплаву, який містить 90% срібла, дістануть сплав з 84%-ю масовою часткою срібла.

6.24. Є два сплави, які складаються з цинку, міді та олова. Відомо, що перший сплав містить 40% олова, а другий – 26% міді. Відсотковий вміст цинку в обох сплавах однаковий. Сплавившм 150 кг першого і 250 кг другого сплавів, отримали новий сплав, у якому виявилося 30% цинку. Визначте, скільки кілограмів олова міститься в отриманому новому спаві.

6.25. Два шматки латуні мають масу 30 кг. Перший шматок містить 5 кг чистої міді, а другий – 4 кг. Скільки відсотків міді містить перший шматок латуні, якщо у другому міді на 15% більше, ніж у першому?

6.26. До 400 г 5%-го розчину солі додали солі й одержали 24%-й розчин. Яка маса утвореного розчину в грамах?

6.27. Відомо, що 14 кг сплаву міді з оловом містять 46% міді. Скільки треба додати до цього сплаву олова, щоб отримати новий сплав, що містить 28% міді?

6.28. У першому бідоні було молоко, масова частка жиру якого становила 3%, а в другому – вершки жирністю 18%. Скільки треба взяти молока і скільки вершків, щоб отримати 10 кг молока з масовою часткою жиру 6%?

6.29. У першому бідоні було молоко, масова частка жиру якого становила 2%, а в другому – 5%. Скільки треба взяти молока з кожного бідона, щоб отримати 12 кг молока з масовою часткою жиру 4%?

6.30. Відомо, що 14 кг сплаву міді з оловом містить 46% міді. Скільки олова треба додати до цього сплаву, щоб одержати новий сплав з 28-відсотковим вмістом міді?

***

7.1. Вкладник поклав до банку на два різні рахунки загальну суму 1500 грн. По першому з них банк виплачує 7% річних, а по другому 10% річних. Через рік вкладник отримав 120 грн відсоткових грошей. Скільки гривень він поклав на кожен рахунок?

7.2. Підприємець поклав у банк 50 000 грн під 10% річних. Яка сума буде у нього на рахунку через 2 роки?

7.3. За два столи і чотири стільці заплатили 2200 грн. Після того як столи подешевшали на 10%, а стільці – на 20%, за один стіл і два стільці заплатили 960 грн. Якою була початкова ціна одного стола і одного стільця?

7.4. За 2 футбольних і 6 волейбольних м’ячів заплатили 340 грн. Після того, як футбольний м’яч подешевшав на 20%, а волейбольний подорожчав на 10%, за 1 футбольний і 1 волейбольний м’ячі заплатили 84 грн. Якою була початкова ціна кожного м’яча?

7.5. Стіл і стілець коштували разом 650 грн. Після того як стіл подешевшав на 20%, а стілець подорожчав на 20%, вони стали коштувати разом 568 грн. Знайдіть початкову ціну стола і початкову ціну стільця.

7.6. Вкладник поклав до банку на два різні рахунки 1200 грн. По першому з рахунків банк виплачує 6% річних, а по другому – 8% річних. Через рік клієнт отримав 80 грн відсоткових грошей. Скільки гривень він поклав на кожен рахунок?

7.7. На дров`яному складі продали першого дня 17% усіх дров, другого дня – 18%, а третього – лише 5% усіх дров. Після чого на складі лишилося 6000 $м^3$ дров. Скільки кубічних метрів дров було на складі і скільки продали першого дня?

7.8. За 4 кг огірків і 5 кг помідорів заплатили 87 грн. Після того, як огірки подорожчали на третину, а помідори подешевшали на третину, за 4 кг огірків і 5 кг помідорів заплатили 86 грн. Визначте початкову вартість одного кілограма огірків і одного кілограма помидорів.

7.9. За перший день учень прочитав 40% сторінок усієї книжки, за другий – 1/3 усіх сторінок, а за третій – решту 56 сторінок. Скільки сторінок у книзі?

7.10. До магазину привезли цукор і борошно, усього 63 мішки, загальна вага 4,8 т. Мішків із борошном було на 25% більше, ніж з цукром. Маса кожного мішку із цукром складала ¾ маси мішка з борошном. Скільки завезли цукру і скільки борошна (у тоннах)?

7.11. Двоє робітників виготовили за перший день 100 деталей. За другий день перший робітник виготовив деталей на 20% більше, ніж за перший день, а другий робітник – на 10% більше, ніж за перший день. Усього за другий день вони виготовили 116 деталей. Скільки деталей виготовив за перший день перший робітник?

7.12. За кілограм одного продукту і 10 кілограмів другого продукту заплатили 20 грн. Якщо при сезонній зміні цін перший продукт подорожчає на 15%, а другий подешевшає ан 25%, то за таку саму кількість цих продуктів доведеться заплатити 18,2 грн. Скільки коштує кілограм кожного продукту?

7.13. У школі 60% учнів займаються в спортивних секціях, з них 20% співають у хорі. Скільки відсотків учнів школи і займаються в спортивних секціях, і співають у хорі?

7.14. За перший день туристи пройшли 25% всього шляху, за другий – 3/5 того, що залишилося, а за третій – решту 30 км. Скільки кілометрів пройшли туристи за три дні?

7.15. У трьох спортивних секціях займається 96 спортсменів. Кількість учасників шахової секції складає 0,8 від числа учасників боксерської секції, а число біатлоністів складає $33\frac{1}{3}\%$ загальної кількості учасників шахової та боксерської секцій. Скільки спортсменів займається в кожній із секцій?

7.16. Вкладник поклав до банку 2000 грн. За перший рік йому було нараховано певний відсоток річних, а другого року банківський відсоток було збільшено на 4%. У кінці другого року на рахунку було 2332 грн. Скільки відсотків становила банківська ставка у перший рік?

7.17. У бакн поклали 1200 грн. Через рік вкладник зняв 240 грн, а ще через рік на цьому рахунку виявилося 1071 грн. Скільки відсотків річних нараховує банк?

7.18. Доярка від двох корів надоїла за рік 8100 кг молока. Наступного року удій від першої корови збільшився на 15%, а від другої корови – на 10%, а тому доярка за рік надоїла 9100 кг молока від цих корів. Скільки молока надоїла доярка від кожної корови за перший рік?

7.19. Банк через рік нарахував вкладнику у вигляді відсотків 60 грн, а вкладник поклав у банк ще 240 грн. Через рік вкладник отримав 2369 грн. Скільки грошей спочатку було покладено в банк?

7.20. Вкладник поклав до банку 4000 грн. За перший рік йому було нараховано певний відсоток річних, а другого року банківський відсоток було зменшено на 4%. У кінці другого року на рахунку було 4664 грн. Скільки відсотків становила банківська ставка у перший рік?

7.21. За два столи і чотири стільці заплатили 220 грн. Після того як столи подешевшали на 10%, а стільці – на 20%, за один стіл і два стільці заплатили 96 грн. Якою була початкова ціна одного стола і одного стільця?

7.22. Вкладник поклав до банку 5000 грн. За перший рік йому було нараховано певний відсоток річних, а другого року банківський відсоток було зменшено на 2%. У кінці другого року на рахунку було 5940 грн. Скільки відсотків становила банківська ставка у перший рік?

7.23. Відомо, що 4 кг огірків і 3 кг помідорів коштували 17 гривень. Після того як огірки подорожчали на 50%, а помідори подешевшали на 20%, за 2 кг огірків і 5 кг помідорів заплатили 18 гривень. Знайдіть початкову вартість 1 кг огірків і 1 кг помідорів.

7.24. Відомо, що 2 банки фарби і 3 банки олії коштували 32 гривні. Після того, як фарба подешевшала на 50%, а олія подорожчала на 40%, за 6 банок фарби і 5 банок олії заплатили 58 гривень. Знайдіть початкову вартість однієї банки фарби і однієї банки олії.

7.25. Депозит, внесений у банк, щороку збільшується на 15%. Яким буде грошовий прибуток через три роки, якщо спочатку було покладено 800 грн?

7.26. За два футбольних і шість волейбольних м'ячів заплатили 340 грн. Після того як футбольний м'яч подешевшав на 20%, а волейбольний подорожчав на 10%, за один футбольний і один волейбольний м'ячі заплатили 84 грн. Якою була початкова ціна кожного з м'ячів?

7.27. Два робітники виготовили за зміну 68 деталей, причому перший робітник зробив на 30% деталей менше, ніж другий. Скільки деталей зробив кожен робітник?

7.28. На дослідному полі під жито відвели ділянку в 20 га, а під пшеницю – в 30 га. У минулому році з обох ділянок зібрали 2300 ц зерна. Цього року врожайність жита підвищилась на 20%, а пшениці – на 30%, і тому зібрали зерна на 610 ц більше, ніж минулого року. Яка врожайність кожної культури цього року?

7.29. За два столи і чотири стільці заплатили 2200 грн. Після того як столи подешевшали на 10%, а стільці – на 20%, за один стіл і два стільці заплатили 960 грн. Якою була початкова ціна одного стола і одного стільця?

7.30. Після першого вдосконалення продуктивність верстата зросла на 10%, після другого – ще на 10%. На скільки відсотків зросла продуктивність верстата внаслідок двох удосконалень?

***

8.1. Кілька учнів поділили порівну між собою 180 яблук. Якби учнів було на 3 менше, то кожний із них отримав би на 3 яблука більше. Скільки було учнів?

8.2. За 12 зошитів і 8 олівців заплатили 52 грн. Скільки коштує один зошит і скільки один олівець, якщо 7 зошитів дорожчі за 4 олівці на 13 грн?

8.3. У двох ящиках лежали яблука. Якщо з одного ящика перекласти в другий 45 яблук, то в обох ящиках їх стане порівну. Якщо з другого ящика перекласти в перший 20 яблук, то в першому стане у 3 рази більше яблук, ніж у другому. Скільки яблук було в кожному ящику?

8.4. За 5 кг цукерок і 4 кг печива заплатили 60 грн. Скільки коштує один кілограм цукерок і скільки один кілограм печива, якщо 3 кг цукерок дорожчі за 2 кг печива на 14 грн?

8.5. Якщо на кожну машину вантажити 3,5 тони вантажу, то залишиться 4 т; якщо на кожну машину вантажити 4,5 т, то для завантаження всіх машин не вистачить 4 т вантажу. Скільки було машин?

8.6. Число років сина становить 2/11 числа років батька, а число років доньки – 5/11 числа років батька. Скільки років батькові, якщо синові й дочці разом 28 років.

8.7. Три ланки школярів збирали шипшину. Перша ланка зібрала 3/10 усієї кількості, друга ланка – на 4 кг більше, ніж третя, причому ця різниця становить 2/25 усієї кількості шипшини. Скільки кілограмів шипшини зібрала кожна ланка?

8.8. Ділянка площею 864 га поділена на три поля так, що третє поле має площу, яка дорівнює сумі площ перших двох полів. Визначити площу кожного поля, якщо площа другого поля відноситься до площі першого як 11:5.

8.9. На одному складі міститься вугілля в 2 рази більше, ніж на іншому. Якщо на перший склад привезти ще 8 т вугілля, а на другий 14,5 т, то на обох складах буде вугілля порівну. Скільки тон вугілля було на кожному складі спочатку?

8.10. В одному баку бензину було вдвічі більше, ніж на другому. Якщо перелити з першого бака в другий 25 л бензину, то в баках буде бензину порівну. Скільки літрів бензину було в кожному баку відпочатку?

8.11. На фермі відвели дві суміжні ділянки для посадки овочів, причому перша ділянка була в 4 рази більше за другу. Якщо відділити від першої ділянки 10 га і додати її до другої, то друга ділянка буде складати 2/3 решти частини першої ділянки. Визначити площу кожної з них.

8.12. У двох приміщеннях складені солодощі, причому в першому солодощів у 3 рази більше, ніж у другому. Після того, як із першого приміщення вивезли 20 т солодощів, а в друге помістили ще 20 т, з'ясувалося, що в другому приміщенні кількість солодощів становить 5/7 від решти солодощів із першого приміщення. Скільки тон солодощів було відпочатку в кожному приміщенні?

8.13. Декілька учнів поділили порівну між собою 120 горіхів. Якби учнів було на 2 більше, то кожний із них отримав би на 2 горіхи менше. Скільки було учнів?

8.14. Першого дня засіяли 1/5 першого поля і 1/6 другого поля, що становило 90 га. Другого дня засіяли ¼ частину першого поля, що залишилася, а це на 85 га менше половини частини другого поля, що залишилася після першого дня роботи. Знайти площу кожного поля.

8.15. Перше число в 3 рази більше, ніж друге. Якщо перше число зменшити на 7, а друге збільшити на 13, то отримаємо рівні числа. Знайти перше число.

8.16. Туристи повинні пройти за день 20 км. Пройшовши деяку відстань, вони зробили зупинку. Яку відстань пройшли туристи до зупинки, якщо 2/3 цієї відстані дорівнюють половині шляху, який їм залишилося пройти?

8.17. Шпагат, довжина якого 60 м, розрізали так, що 2/7 однієї частини дорівнюють ¼ другої. Яка довжина кожної частини?

8.18. За перший день учень прочитав 2/9 сторінок усієї книги, за другий – 4/7 того, що залишилося, а за третій – решту 90 сторінок. Скільки всього сторінок у книзі?

8.19. В одній пачці було в 2 рази більше зошитів, ніж у другій. Коли з другої пачки переклали до першої 10 зошитів, то в другій пачці стало в 4 рази менше, ніж у першій. Скільки зошитів було в кожній пачці відпочатку?

8.20. У першій бригаді було в 4 рази більше робітників, ніж у другій. Після того, як з першої бригади пішло 10 робітників, а в другу прийшло 8 робітників, то робітників у першій бригаді стало в 2 рази більше, ніж у другій. Скільки робітників було в кожній бригаді?

8.21. Задану кількість деталей робітник виготовив за три дні. За перший день він виготовив 1/3, а за другий – 2/7 усіх деталей, а за третій – решту 16 деталей. Скільки всього деталей виготовив робітник?

8.22. Куплено тканину двох сортів на 244 грн; метр тканини кожного сорту коштує стільки гривень, скільки метрів куплено тканини цього ж сорту. Якби за метр кожного сорту платили стільки гривень, скільки метрів тканини було куплено іншого ж сорту, то за всю тканину заплатили б на 4 грн менше. Скільки куплено метрів тканини кожного сорту?

8.23. Куплено певну кількість печива двох сортів, причому печива другого сорту на 3 кг більше, ніж першого сорту. За печиво першого сорту заплатили 420 грн і за печиво другого сорту 468 грн. Печиво другого сорту коштує дешевше від печива першого сорту на 6 грн за кілограм. Скільки куплено печива кожного сорту?

8.24. Найнято двох робітників з різною оплатою праці. Перший заробив 720 грн, а другий, працюючи на 6 днів менше, ніж перший, дістав 405 грн. Якби другий робітник працював стільки днів, скільки перший, а перший – стільки днів, скільки й другий, то обидва дістали б однакову суму. Скільки днів працював кожен?

8.25. В амфітеатрі 10 рядів, причому в кожному наступному ряду на 20 місць більше, ніж в попередньому, а в останньому ряду наявні 280 місць. Скільки людей вміщує амфітеатр.

8.26. Вага приладів для наукових досліджень у перших трьох космічних ракетах становила 1186,3 кг, причому прилади першої ракети важили на 28,7 кг менше, ніж прилади другої ракети, а відношення ваги приладів другої ракети до ваги приладів третьої ракети дорівнювало 26:29. Визначити вагу приладів другої космічної ракети.

8.27. На годівлю 8 коней і 15 корів відпускали щодня 162 кг сіна. Скільки сіна щоденно видавали кожному коневі і кожній корові, якщо відомо, що 5 коней одержували сіна на 3 кг більше, ніж 7 корів?

8.28. 5 кг антрациту і 4 кг коксу дають при спалюванні 68400 Гкал; 10 кг антрациту і 15 кг коксу дають 186500 Гкал. Скільки Гкал дає окремо 1 кг антрациту і 1 кг коксу?

8.29. У шкільній залі поставлено лавки. Якщо на кожну лавку посадити по 5 учнів, то не вистачить 8 лавок; якщо ж на кожну лавку посадити по 6 учнів, то 2 лавки залишаться вільними. Скільки лавок було поставлено в залі і скільки було учнів?

8.30. Для риття котловану було поставлено два екскаватори. Перший екскаватор, виймаючи за годину на 40 м^3 більше, ніж другий, працював 16 год, а другий – 24 год, причому обидва екскаватори вийняли за цей час 8640 м^3 землі. Скільки кубічних метрів землі виймав за годину кожний екскаватор окремо?

***

9.1. Між числами 2,5 і 20 вставте два таких числа, щоб вони разом із даними числами утворювали геометричну прогресію.

9.2. Сума другого і третього членів геометричної прогресії дорівнює 30, а різниця четвертого і другого дорівнює 90. Знайдіть перший член прогресії.

9.3. Знаменник звичайного дробу на 4 більший за його чисельник. Якщо чисельник цього дробу збільшити на 6, а знаменник на 5, то отриманий дріб буде на ½ більший за даний. Знайдіть даний дріб.

9.4. Між числами 5 і 1280 вставте три таких числа, щоб вони разом із даними числами утворювали геометричну прогресію.

9.5. Між числами 4 і 2500 вставте три таких числа, щоб вони разом із даними числами утворювали геометричну прогресію.

9.6. Перший член арифметичної прогресії дорівнює 5, а різниця дорівнює 6. Скільки треба взяти перших членів прогресії, щоб їх сума дорівнювала 1040?

9.7. Сума двох чисел дорівнює 7, а різниця чисел, обернених до даних, дорівнює 1/12. Знайдіть ці числа.

9.8. Якщо деяке двоцифрове число поділити на суму його цифр, то в частці одержимо 7, а якщо поділити це число на добуток його цифр, то неповна частка дорівнюватиме 3, а остача – 9. Знайдіть дане число.

9.9. Сума двох цілих чисел дорівнює 3, а різниця чисел, обернених до даних, дорівнює 7/10. Знайдіть ці числа.

9.10. Якщо деяке двоцифрове число, у якого число одиниць більше за число десятків, поділити на різницю його цифр, то в частці одержимо 12, а якщо поділити це число на добуток його цифр, то неповна частка дорівнюватиме 1, а остача – 16. Знайдіть дане число.

9.11. Різниця двох цілих дорівнює 6, а сума чисел, обернених до даних, дорівнює 7/20. Знайдіть ці числа.

9.12. Якщо деяке двоцифрове число поділити на суму його цифр, то неповна частка дорівнюватиме 4, а остача – 6. Якщо поділити це число на добуток його цифр, то неповна частка дорівнюватиме 1, а остача – 22. Знайдіть дане число.

9.13. Тризначне число закінчується цифрою 2. Якщо її перенести на початок запису числа, то одержане число буде на 18 більше за початкове. Знайдіть дане число.

9.14. Знайдіть два натуральні числа, коли відомо, що перше на 6 менше від подвоєного другого, а їх добуток дорівнює 20.

9.15. Цифра десятків двоцифрового числа на 3 менша за цифру одиниць, а добуток цього двоцифрового числа на суму його цифр дорівнює 70. Знайдіть це число.

9.16. Сума двох чисел дорівнює 18,7, а їх відношення дорівнює відношенню 5:6. Знайти ці числа.

9.17. Відношення двох чисел дорівнює відношенню 3,5 : 2,5, а різниця цих чисел становить 12. Знайти ці числа.

9.18. Відношення двох чисел дорівнює 2/3. Якщо зменшити більше з цих чисел на 2000, а менше на – 1000, то відношення першої різниці до другої буде становити 3/4. Знайти ці числа.

9.19. Як зміниться величина звичайного дробу, якщо його чисельник збільшити на 50%, а знаменник зменшити на 50%?

9.20. Якщо від чисельника і знаменника звичайного дробу відняти по одиниці, то дріб збільшиться на 1/6. Якщо до чисельника і знаменника додати по одиниці, то дріб зменшиться на 1/10. Знайдіть цей дріб.

9.21. Якщо від чисельника і знаменника звичайного дробу відняти по одиниці, то дріб зменшиться на 1/10. Якщо до чисельника і знаменника додати по одиниці, то дріб збільшиться на 1/15. Знайдіть цей дріб.

9.22. Якщо двоцифрове число поділимо на суму його цифр, то дістанемо в частці 6 і в остачі 2. Якщо ж це число поділимо на добуток його цифр, то дістанемо в частці 5 і в остачі 2. Знайти це число.

9.23. Сума квадратів двох чисел дорівнює 208, а різниця квадратів цих чисел дорівнює 80. Знайти ці числа.

9.24. Якщо поділимо двоцифрове число на добуток його цифр, то дістанемо в частці 2 і в остачі 5. Якщо переставимо цифри цього числа в зворотному порядку і потім виконаємо вказане ділення, то в частці дістанемо 5, а в остачі 2. Знайти це число.

9.25. Добуток цифр двозначного числа у три рази менше, ніж саме число. Якщо до шуканого число додати 18, то вийде число, записане тими самими цифрами, але в зворотному порядку. Знайти це число.

9.26. Дано два двозначних числа, з яких друге записане тими самими цифрами, що і перше, але записане в зворотному порядку. Частка від ділення першого числа на друге число дорівнює 1,75. Добуток першого на цифру його десятків у 3,5 рази більше за друге число. Знайти ці числа.

9.27. Різниця двох чисел дорівнює 2, а різниця кубів цих чисел дорівнює 488. Знайти ці числа.

9.28. Якщо двозначне число розділити на суму його цифр, то в частці вийде 4 і залишиться в остачі 3. Якщо ж це число розділити на добуток його цифр, то в частці вийде 3 і в остачі – 5. Знайти це число.

9.29. Сума двох чисел, додана до суми їх квадратів дорівнює 152, а сума різниці цих чисел і різниці їх квадратів дорівнює 68. Знайти ці числа.

9.30. Сума квадратів трьох послідовних непарних чисел дорівнює 155. Знайти ці числа.

***

10.1. Площа прямокутника дорівнює 120 $см^2$, а периметр – 46 см. Знайдіть сторони прямокутника.

10.2. Площа прямокутника дорівнює 180 $см^2$. Якщо одну його сторону зменшити на 3 см, а другу – на 6 см, то одержимо прямокутник, площа якого дорівнює 72 $см^2$. Знайдіть початкові розміри прямокутника.

10.3. Площа прямокутника дорівнює 300 $см^2$. Якщо його довжину збільшити на 5 см, а ширину зменшити на 5 см, то його площа дорівнюватиме 250 $см^2$. Знайдіть початкові розміри прямокутника.

10.4. Сума катетів прямокутного трикутника дорівнює 79 см. Якщо один з катетів збільшити на 23 см, а другий зменшити на 11 см, то новий прямокутний трикутник матиме гіпотенузу такої самої довжини, що й заданий. Знайдіть довжини катетів заданого трикутника.

10.5. Фотокартку розмірами 12 см на 18 см оформлено в рамку постійної ширини. Визначити ширину рамки, якщо її площа дорівнює площі картки.

10.6. Площа прямокутного трикутника дорівнює 44 $см^2$. Якщо один з його катетів зменшити на 1 см, а другий збільшити на 2 см, то його площа дорівнюватиме 50 $см^2$. Знайдіть катети цього трикутника.

10.7. Ділянка землі має форму прямокутного трикутника, один з катетів якого на 20 м більший від другого. Знайдіть довжину межі ділянки, коли відомо, що її площа дорівнює 0,24 га.

10.8. Садову ділянку, яка має форму прямокутника, треба обгородити. Визначте довжину огорожі за умови, що довжина ділянки на 15 м більша за її ширину, а площа її дорівнює 700 $см^2$.

10.9. Якщо ширину прямокутника зменшити на 2 см, а довжину його збільшити на 5 см, то площа утвореного прямокутника буде на 20 $см^2$ більша за площу даного прямокутника. Якщо ж кожну сторону даного прямокутника збільшити на 3 см, то площа початкового прямокутника збільшиться на 90 $см^2$. Визначити сторони прямокутника.

10.10. Якщо довжину прямокутника збільшити на 6 м, а ширину зменшити на 3 м, то площа прямокутника не зміниться. Не зміниться площа даного прямокутника і в тому випадку, якщо початкову довжину його зменшити на 3 м, а ширину збільшити на 2,4 м. Визначити довжину і ширину даного прямокутника.

10.11. Спортивний майданчик прямокутної форми має площу 720 м^2. Якщо довжину майданчика збільшити на 6 м, а ширину зменшити на 4 м, то вийде прямокутник, рівновеликий даному. Знайти розміри спортивного майданчику.

10.12. Дано два прямокутники; довжина першого дорівнює 5 см, довжина другого 4 см, сума їх площ дорівнює 42 см^2. Якщо, не змінюючи ширину кожного з прямокутників, збільшити довжину першого вдвічі, а довжину другого на 1 см, то сума площ отриманих прямокутників буде на 33 см^2 більша, ніж сума площ даних прямокутників. Визначити ширину кожного прямокутника.

10.13. Площа прямокутного трикутника дорівнює половині добутку його катетів. Якщо один з катетів даного прямокутного трикутника збільшити на 2 см, а інший катет на 3 см, то площа отриманого трикутника буде на 50 см^2 більша, ніж площа даного трикутника; якщо ж кожен катет даного трикутника зменшити на 2 см, то площа його зменшиться на 32 см^2. Визначити катети даного трикутника.

10.14. Периметр прямокутника дорівнює 60 см, а різниця його вимірів дорівнює 20 см. Знайти сторони прямокутника.

10.15. Найбільша відстань між точками двох концентричних кіл дорівнює 18 см, найменша відстань – 10 см. Знайти радіуси цих кіл.

10.16. У трикутнику один з кутів дорівнює 40^0, а різниця двох інших кутів дорівнює 18°. Знайти величину кожного кута трикутника.

10.17. Діагональ прямокутника дорівнює 10 см, а його периметр дорівнює 28 см. Знайдіть сторони прямокутника.

10.18. Одна із сторін прямокутника на 14 см більше від другої. Знайдіть сторони прямокутника, якщо його діагональ дорівнює 26 см.

10.19. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 13 см. Якщо один з його катетів збільшити на 4 см, то гіпотенуза збільшиться на 2 см. Знайдіть катети трикутника.

10.20. Площа прямокутного трикутника дорівнює 24 см^2, а його гіпотенуза 10 см. Чому дорівнюють катети трикутника?

10.21. На кожній із сторін прямокутника побудовано квадрат. Сума площ квадратів дорівнює 122 см^2. Знайдіть сторони прямокутника, коли відомо, що його площа дорівнює 30 см^2.

10.22. Периметр прямокутного трикутника дорівнює 84 см, а його гіпотенуза 37 см. Знайдіть площу цього трикутника.

10.23. Прямокутну ділянку землі площею 2400 м^2 обнесено огорожею, довжина якої дорівнює 200 м. Знайдіть довжину і ширину цієї ділянки.

10.24. Периметр прямокутного трикутника дорівнює 36 см, а його площа 54 см^2. Знайдіть сторони трикутника.

10.25. Площа прямокутного трикутника дорівнює 180 см^2, а його гіпотенуза 41 см. Чому дорівнюють катети трикутника?

10.26. Периметр прямокутника дорівнює 46 см, а діагональ його 17 см. Знайти сторони цього прямокутника.

10.27. Один із катетів прямокутного трикутника на 3 см більший від другого. Знайдіть катети трикутника, якщо його гіпотенуза дорівнює 15 см.

10.28. Довжина садової ділянки на 10 м більша за його ширину. Площу ділянки вирішили збільшити на 400 м^2. Для цього довжину збільшили на 10 м, а ширину – на 2 м. Знайти площу нової ділянки.

10.29. Периметр прямокутного трикутника дорівнює 132 см, сума квадратів його сторін дорівнює 6050. Знайти сторони цього трикутника.

10.30. Діагональ прямокутника дорівнює 15 см. Якщо одну з його сторін зменшити на 6 см, другу зменшити на 8 см, то периметр зменшиться в 3 рази. Знайдіть сторони прямокутника.

Текстові задачі із завдань основних сесій ЗНО

№ 28, 2019д. Шлях від пристані A до пристані B теплохід, що рухається за течією річки долає за 2 години. На зворотній шлях він витрачає на 15 хвилин більше. Швидкість течії річки дорівнює 2 км/год, власна швидкість теплохода є сталою. Визначте власну швидкість теплохода (у км/год).

№ 28, 2019. Маршрутний автобус, рухаючись зі сталою швидкістю, подолав відстань від від міста A до міста B за 5 год, а на зворотній шлях витратив на 30 хв менше. Визначте швидкість (у км/год) автобуса на маршруті від A до B, якщо вона на 8 км/год менша за швидкість на маршруті від B до A. Уважайте, що довжина маршрутів від A до B та від B до A, якими рухався маршрутний автобус, рівні.

№ 28, 2018д. Лідія редагує 80 сторінок рукопису у 8 разів швидше, ніж Максим редагує 480 сторінок. Скільки сторінок відредагує Максим за той самий час, за який Лідія відредагує 320 сторінок? Уважайте, що продуктивність роботи і Лідії, і Максима є сталою.

№ 27, 2018д. Третій член арифметичної прогресії вдвічі більший за її перший член. Визначте різницю цієї прогресії, якщо сума перших п’яти її членів дорівнює 190.

№ 28, 2018. У майстерні мали виготовити 240 стільців за n днів, причому щодня планували виробляти однакову кількість стільців. Однак, на прохання замовника, завдання виконали на 2 дні раніше запланованого терміну. Для цього довелося денну норму виготовлення збільшити на 4 стільці. Визначте n.

№ 28, 2017д. Човен проходить 24 км за течією річки і 12 км проти течії за 3 години. Визначте швидкість течії річки (у км/год). Уважайте, що власна швидкість човна та швидкість течії незмінні.

№ 28, 2017. Автобус вирушив з міста A до міста B, відстань між якими становить 150 км. Через 30 хв із міста A до міста B тією самою дорогою вирушив автомобіль, швидкість якого в $1\frac{1}{5}$ раза більша за швидкість автобуса. Скільки часу (у год) витратив на дорогу з міста A до міста B автомобіль, якщо він прибув до міста B одночасно з автобусом? Уважайте, що автобус та автомобіль ріхалися зі сталими швидкостями.

№ 28, 2016д. Фабрика виготовляє комплекти пластикових меблів, кожен з яких складається зі стола, дивана та двох крісел. На виготовлення дивана витрачається на 1 кг пластику більше, ніж на виготовлення стола, та на 3 кг більше, ніж на виготовлення одного крісла. Відомо, що на виготовлення 10 крісел, витрачається пластику стільки ж, як на виготовлення 2 столів та 4 диванів разом. Скільки кілограмів платстику витрачається на виготовлення одного комплекту пластикових меблів.

№ 28, 2016. У готелі для проживання туристсів є одномісні, двомісні та тримісні номери. Їх всього 124. Якщо всі номери в готелі заповнені, то одночасно в ньому проживає 270 туристів. Скільки всього в цьому готелі тримісних номерів, якщо кількість одномісних номерів дорівнює кількості двомісних номерів?

№ 29, 2015, I. Плавець під час першого тренування подолав дистанцію у 450 м. Кожного наступного тренування він пропливав на 50 м більше, ніж поперднього, поки не досягнув результату - 1000 м за одне тренування. Після цього під час кожного відвідування басейну плавець пропливав 1000 м. Скільки всього кілометрів плавець проплив за перші 10 тижнів тренувань, якщо він тренувався тричі кожного тижня?

№ 29, 2015, II. В інструкції з медичного застосування настою лікарської рослини зазначено, що його рекомендовано приймати щоденно упродовж 20 діб. Протягом першої доби пацієнт має випити 370 мл настою, а кожної наступної доби – на одну й ту саму кількість настою менше, ніж попередньої. Останньої доби прийом має становити 85 мл цього лікарського засобу. Яку кількість настою (у мл) вип'є пацієнт за ці 20 діб, якщо дотримуватиметься інструкції?

№ 32, 2011. Двоє робітників, працюючи разом, можуть скосити траву на ділянці за 2 год і 6 хв. Скільки часу (у годинах) витратить на скошування трави на цій ділянці другий робітник, працюючи самостійно, якщо йому потрібно на виконання цього завдання на 4 год більше, ніж першому робітникові?

№ 30, 2010, I. Одним із мобільних операторів було запроваджено акцію «Довше розмовляєш – менше платиш» з такими умовами: плата за з’єднання відсутня; за першу хвилину розмовиабонент сплачує 30 коп., а за кожну наступну хвилину розмови – на 3 коп. менше, ніж за попередню; плата за одинадцяту та всі наступні хвилини розмови не нараховується; умови дійсні для дзвінків абонентам усіх мобільних операторів країни. Кільки за умовами акції коштуватиме абоненту цього мобільного оператора розмова тривалістю 8 хвилин (у гривнях)?

№ 30, 2010, II. Робітники отримали замовлення викопати криницю. За перший викопаний у глибину метр криниці їм платять 50 грн, а за кожний наступний – на 20 грн більше, ніж за попередній. Скільки грошей (у грн) сплатять робітникам за викопану криницю завглибшки 12 м?

№ 32, 2010, II. Тарас може доїхати на велосипеді від села до станції за 3 год, а пішки дійти за 7 год. Його швидкість пішки на 8 км/год менша, ніж на велосипеді. Знайдіть відстань від села до достанції (у км).

№ 26, 2009. У фермерському господарстві «Надія» кожен рік озимою пшеницею засівають 600 га полів. Середня врожайність цієї культури в 2007 році становила 24 центнери з одного гектара. Завдяки сприятливим погодним умовам у 2008 році озимої пшениці було зібрано на 19200 центнерів більше, ніж у 2007 році. Обчисліть середню врожайність озимої пшениці в господарстві «Надія» в 2008 році (у ц/га). (*Середня врожайність* сільськогосподарської культури – це відношення маси зібраного врожаю цієї кільтури до загальної площі полів, на яких вона була вирощена)

№ 29, 2008. Маємо два водно-сольових розчини. Концентрація солі у першому розчині становить 0,25, а у другому – 0,4. На скільки більше треба взяти кілограмів одного розчину, ніж другого, щоб отримати розчин масою 50 кілограмів, концентрація солі в якому – 0,34.

№ 24, 2007. На перегоні, довжина якого 240 км, поїзд рухався зі швидкістю на 10 км/год менше, ніж мало бути за розкладом, і запізнився на 48 хв. З якою швидкістю мав рухатися поїзд за розкладом?

Рекомендована література

1. Азаров А. И. Системы алгебраических уравнений. Текстовые задачи / А. И. Азаров, С. А. Барвенов, В. С. Федосенко, А. С. Шибут. – Минск : "ТетраСистемс", 1998. – 288 с.

2. Бевз Г. П. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. – К. : Зодіак-ЕКО, 2009. –133 с.

3. Бевз Г. П. Алгебра : підруч. для 7-9 кл. серед. шк. / Г. П. Бевз. – К. : Освіта, 2002. – 303 с.

4. Бевз Г. П. Методика викладання математики / Г. П. Бевз. – К. : Вища школа, 1989. – 367 с.

5. Бурда М. І. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з алгебри. 9 клас / М. І. Бурда, О. Я. Біляніна, О. П. Вашуленко, Н. С. Прокопенко. – Харків : Гімназія, 2009. – 224 с.

6. Бурда М. І. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики. 11 клас : у 2 кн. ; кн. 2. / М. І. Бурда, О. Я. Біляніна, О. П. Вашуленко, Н. С. Прокопенко. – Харків : Гімназія, 2008. – 224 с.

7. Горделадзе Ш. Г. Збірник конкурсних задач з математики / Ш. Г. Горделадзе, Н. М. Кухарчук, Ф. П. Яремчук. – К. : Вища школа, 1992.

8. Дубинчук О. С. Методика викладання алгебри в 7-9 класах : посібник для вчителя / О. С. Дубинчук, Ю. І. Мальований, Н. П. Дичек. – К. : Рад. школа, 1991. – 254 с.

9. Збірник задач і контрольних робіт з алгебри. 9 клас / за ред. А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Харків : Гімназія, 2009.

10. Крамор В. С. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа / В.С. Крамор – М. : Просвещение, 1990. – 416 с.

11. Майба Т. Б. Розв'язування текстових задач за допомогою систем рівнянь: готуємося до ДПА в 9 класі / Т. Б. Майба // Математика в школах України. – 2012. – № 13-15. – С. 46–51.

12. Мерзляк А. Г. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Харків : Гімназія, 2009. – 320 с.

13. Мерзляк А. Г. Алгебраїчний тренажер : посіб. для школярів та абітурієнтів / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – 2-ге вид., переробл. і доп. – Х. : Гімназія, 2010 – 272 с.

14. Нелін Є. О. Текстові задачі: досвід систематизації та узагальнення при підготовці до державної підсумкової атестації з аглебри в 9 класі / Є. О. Нелін, О. П. Неліна // Математика в школах України. – 2009. – № 7–8. – С. 28–31.

15. Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во втузы : учеб. пособ. / под ред. М. И. Сканави – М. : Высш. шк., 1980. – 541 с.

16. Слепкань З. І. Методика навчання математики : підручник. – 2-ге вид. / З. І. Слєпкань. – К. : Вища школа, 2006. – 582 с.

17. Фридман Л. М. Как научиться решать задачи : кн. для учащихся ст. кл. сред. шк. / Л. М. Фридман, Е. Н. Турецкий. – М. : Просвещение, 1989. – 192 с.

Навчальне видання

Королюк Олена Миколаївна

Практикум із розв’язування задач шкільного курсу математики. Текстові задачі

Навчально-методичний посібник

Надруковано з оригінал-макета автора