ПЕРЕТВОРЕННЯ ФІГУР: ЗАДАЧІ НА МЕТОД ПОДІБНОСТІ

Іван ЛЕНЧУК — професор кафедри методики навчання математики, фізики та інформатики Житомирського державного університету ім. І. Я. Франка, доктор педагогічних наук

Анотація. Анонсовано методику застосування перетворення подібності фігур (зокрема, гомотетії) як засобу розв'язування задач на побудову в геометрії основній школі. За повною схемою розв'язано достатню кількість метричних і позиційних задач. Наведено приклади структурної типізації задач, що сприятиме їх алгоритмізації та комп'ютеризації.
Ключові слова. Метод перетворень, конструктивізм, задачі на побудову, гомотетія, подібність, аналіз, доведення, дослідження.

Иван ЛЕНЧУК. Преобразование фигур: задачи на метод подобия.
Аннотация. Анонсировано методику применения преобразования подобия фигур (в частности, гомотетии) как средства решения задач на построение в геометрии основной школы. По полной схеме решено достаточное количество метрических и позиционных задач. Наведены примеры структурной типизации задач, что будет способствовать их алгоритмизации и компьютеризации.
Ключевые слова. Метод преобразований, конструктивизм, задачи на построение, гомотетия, подобие, анализ, доказательство, исследование.

Ivan LENCHUK. Transformation of shapes: the way of similarity method.
Summary. Announced the technique of the similarity of the figures (in particular dilation) as a means of solving the construction problems in geometry in the secondary school. To complete the scheme resolved a sufficient amount of metric and positional problems. Induced examples of structural typing tasks that will contribute to their algorithmization and computerization.
Keywords. The method of transformation, constructivism, mathematics, dilation, similarity, analysis, proof, research.

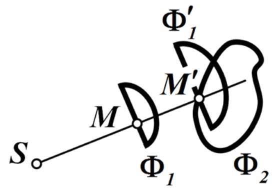
Узявши до уваги вичерпно описані [3] теоретичні факти та практичні рекомендації щодо візуального моделювання фігур перетворенням подібності, перейдемо до розв'язування конструктивних задач цим методом.

Нагадаємо лише, що **метод подібності** в його застосуванні до задач **має чіткі евристики**. Коли треба побудувати деяку фігуру чи встановити місце точки, пов'язаної з розташуванням якоїсь фігури, то надто часто вигідно будувати не шукану фігуру, а фігуру, подібну шуканій. Після цього слід із багатьох подібних фігур вибрати одну, яка задовольняє умови питання чи тільки своїми розмірами, чи своїм розташуванням і своїми розмірами.

Мета даної статті полягає у розкритті прикладами методичних нюансів розв'язування позиційних і метричних задач на побудову методом подібності (гомотетії), демонстрації процесу типізації задач у цьому методі.

Розпочнемо з перетворення гомотетії. Найпростішою з типових на метод гомотетії (*опорною*) пропонуємо таку задачу.

Задача 1. На двох даних фігурах Φ_1 і Φ_2 знайти такі точки M та M', щоб $\overrightarrow{SM'}:\overrightarrow{SM}=m:n$, де S — дана точка, а m і n — дані відрізки (кажуть, що $\vec{a}:\vec{b}=\lambda$, якщо $\vec{a}=\lambda\vec{b}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$).



Мал. 1

Аналіз. Нехай шукані точки M та M' зображено на малюнку 1. Розглянемо гомотетію $H_S^k\left(k=\frac{m}{n}\right)$. З умови випливає, що точка M' є образом точки M у цій гомотетії, а оскільки $M \in \Phi_1$, маємо $M'=H_S^k(M)\in\Phi_1'=H_S^k(\Phi_1)$ (1). Отже, $M' \in \Phi_2 \cap \Phi_1'$, тому $M \in \Phi_1 \cap SM'$ (2). Аналіз закінчено.

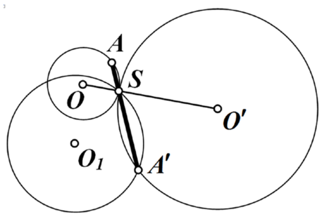
Доведення безпосередньо випливає з аналізу.

Наступні дві задачі свідомо оберемо такими, котрі будуть лише простою демонстрацію опорної, але — з реальними фігурами. При цьому задачу під номером 3 розв'яжемо трьома способами.

Задача 2. Через точку перетину двох даних кіл провести січну, яка ділиться цією точкою в заданому відношенні.

Аналіз. Нехай на малюнку 2 (O) й (O_1) — дані кола, а $\frac{SA'}{SA}=\frac{m}{n}=k$, де m та n — задані (накреслені) відрізки. Розглянемо гомотетію H_S^{-k} із внутрішнім центром S. Коло $(O')=H_S^{-k}((O))$ має пройти через точку A' (1). Отже, $A' \in (O_1) \cap (O')$.

Після цього січну $A'SA$ можна легко побудувати (2). Аналіз закінчено.



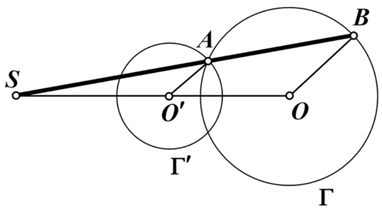
Мал. 2

Доведення безпосередньо випливає з аналізу.

Задача 3. Із даної поза колом Г точки S провести до нього таку січну, щоб відношення її зовнішньої частини до внутрішньої дорівнювало відношенню заданих відрізків.

Розв'язання.

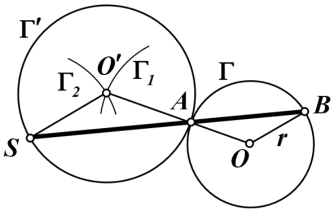
Перший спосіб. Аналіз. Нехай на малюнку 3 $SA : AB = m : n$, де m та n — задані відрізки. Тоді отримаємо таке: $SA : AB = m : (m + n) = k$. Отже, $A = H_S^k(B) \in H_S^k(\Gamma) = \Gamma'$, звідки маємо: $A \in \Gamma' \cap \Gamma$ (у розумінні опорної задачі, тут коло Г відіграє роль фігур Φ_1 й Φ_2 одночасно) (1). Тоді $B \in \Gamma \cap SA$ (2). Аналіз закінчено.



Мал. 3

Доведення. За побудовою істинно, що $SA : SB = m : (m + n) \Rightarrow SA = \lambda m$, $SB = \lambda(m + n)$ (λ — деяке додатне дійсне число). Звідси $AB = SB - SA = \lambda n \Rightarrow SA : SB = m : n$.

Другий спосіб. У першому способі роль центра гомотетії відігравала задана точка S. Однак за згаданий центр можна взяти також будь-яку з шуканих точок A або B. За цих умов коефіцієнт, рівний $\left(-\frac{m}{n}\right)$, буде об'єктом внутрішньої гомотетії, а $\frac{m+n}{n}$ — зовнішньої. Ми зупинимося, наприклад, на першому випадку, другий пропонуємо читачеві розглянути самостійно.



Мал. 4

Аналіз. Розглянемо гомотетію, яка визначається центром A і парою точок $B \to S$, тобто $H_A^{-\frac{m}{n}}$ (мал. 4). Тоді коло $\Gamma' = H(\Gamma)$ проходитиме через точку S і дотикатиметься до кола Г в точці A. Центр O' кола Γ' можна побудувати, адже

$$\frac{AO'}{AO}=\frac{m}{n} \Rightarrow \frac{AO'}{AO}+1=\frac{m}{n}+1 \Rightarrow \frac{OO'}{OA}=\frac{m+n}{n} \Rightarrow$$

$\Rightarrow OO'=r\frac{m+n}{n}$ і $O' \in \Gamma_1\,(O,\ OO')$ (1).

Далі, $\frac{SO'}{BO}=\frac{m}{n} \Rightarrow SO'=r\frac{m}{n}$;

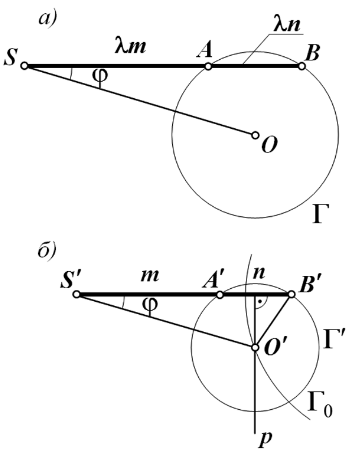
тому $O' \in \Gamma_2\,(S,\ SO')$ (2). Отже, $O' \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$. Тепер можна провести коло Γ' (3), що дасть точку A, а тому й січну SAB (4). Аналіз закінчено.

Доведення. Кола Г і Γ' дотикаються (що й визначає місце точки A). Справді,

$$SO'+r=r\left(\frac{m}{n}+1\right)=r\frac{m+n}{n}=OO'.$$

Точка дотику двох кіл є центром їхньої гомотетії, тому

$$SA:AB=SO':OB=\frac{r\,m}{n}:r=m:n.$$



Мал. 5

Третій спосіб. Аналіз. Оскільки, за умовою, $SA : AB = m : n$, маємо $SA = \lambda m$, $AB = \lambda n$ ($\lambda > 0$) (мал. 5, *а*). Виконаємо тривіальне перетворення подібності площини з коефіцієнтом $k=\frac{1}{\lambda}$. Тоді конфігурація, зображена на малюнку 5, *а*, перейде в подібну до неї конфігурацію на малюнку 5, *б*, в якій $S'A' = m$, $A'B' = n$ (m і n — задані відрізки). Далі матимемо таке:

$\Delta S'O'B' \sim \Delta SOB \Rightarrow O'S' : O'B' = OS : OB = \mu$, $\angle O'S'B' = \angle OSB = \varphi$.

Трикутник $S'O'B'$ можна побудувати. Справді, сторона $S'B' = m + n$ (1). Вершина O' лежить на серединному перпендикулярі p відрізка $A'B'$ (2). З іншого боку, вона належить колу Аполлонія Γ_0, яке можна побудувати, виходячи з уже накресленого відрізка $S'B'$ і знайденого відношення μ, в якому він ділиться внутрішнім і зовнішнім чином (3). Отже, $O' \in p \cap \Gamma_0$. Залишається в конфігурації на малюнку 5, *а* провести січну SAB під заданим кутом φ до відрізка SO (4). Аналіз закінчено.

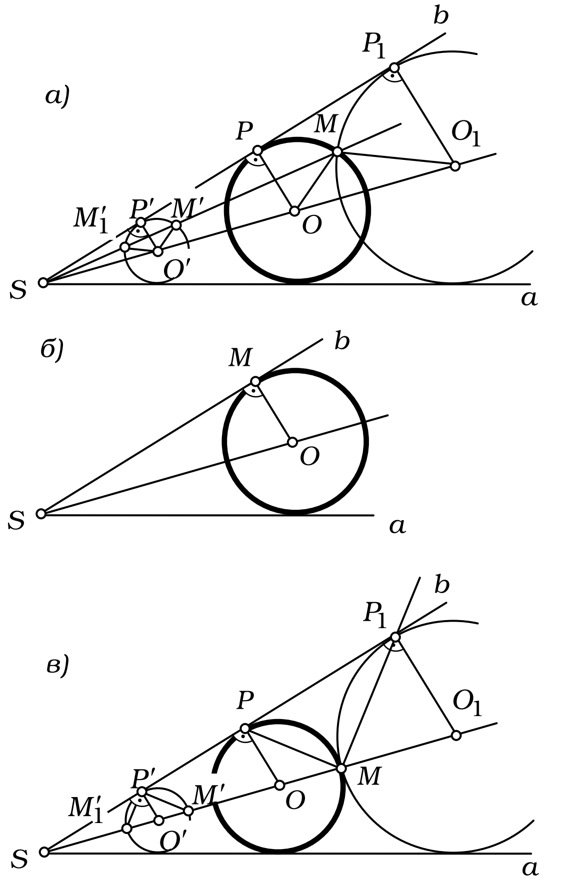
Доведення. За побудовою $\frac{SO}{r}=\frac{S'O'}{r'}$ і $\angle OSB = \angle O'S'B'$. Звідси легко довести подібності трикутників: $\Delta SOB \sim \Delta S'O'B'$, $\Delta SOA \sim \Delta S'O'A'$. Тому маємо

$$\frac{SA}{S'A'}=\frac{SB}{S'B'}=\frac{r}{r'} \Rightarrow \frac{SB}{SA}=\frac{S'B'}{S'A'} \Rightarrow \frac{SB-SA}{SA}=\frac{S'B'-S'A'}{S'A'},$$

тобто $\frac{AB}{SA}=\frac{A'B'}{S'A'}=\frac{n}{m}$, що задовольняє умову. Задачу розв'язано повністю.

Розглянемо дві задачі на метод гомотетії із класичного підручника.

Задача 4. Вписати у заданий кут *Asb* коло, яке проходить через задану точку *M* (див. [4], § 11, задача 8).



Мал. 6

Аналіз. Нехай коло з центром *O* задовольняє умову задачі (мал. 6, *а*). Для її розв'язання, очевидно, досить знайти центр кола *O.* З цією метою розглянемо будь-яку гомотетію з центром у точці *S*. Вона переведе коло з центром *O* в деяке коло з центром *O′*, уписане в заданий кут (1). Це коло вже не може проходити через задану точку *M*, але за властивостями гомотетії воно допомагає побудувати шукане коло. Справді, нехай $M'=H_S^k(M)$ (на малюнку $0 < k < 1$). Тоді $M' \in (O') \cap SM$ (2). Оскільки $O \in SO'$ і $MO \parallel M'O'$, центр *O* тепер можна побудувати (3). Аналіз закінчено.

Доведення. За побудовою, обернена гомотетія переводить коло з центром *O′* у коло з центром *O* та радіусом *OM.* Сторони *a* і *b* кута переходять при цьому самі в себе. Оскільки коло з центром *O′* уписано в заданий кут, а гомотетія зберігає градусну міру кутів, коло *O* також буде вписаним у заданий кут *aSb* ($O'P' : OP = r' : r = k$).

Дослідження. Оскільки точка *M* лежить усередині кута *aSb*, промінь *SM* перетинає коло (*O′*) у двох точках *M′* і M_1', отже й прямі, які містять точку *M* і гомотетичні *O′M′* та $O'M_1'$, перетнуть бісектрису даного кута у двох точках *O* і O_1. Тому задача матиме *два* розв'язки: кола (*O*) і (O_1).

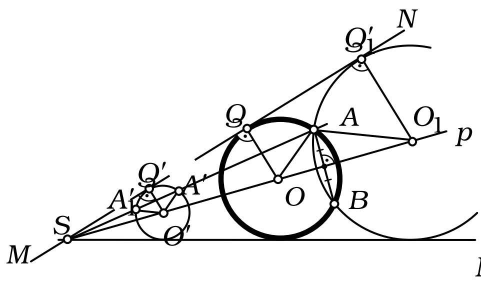
Якщо ж точка *M* належить будь-якій стороні кута (нехай, напр., $M \in b$, мал. 6, *б*), задача матиме *єдиний* розв'язок; притому центр шуканого кола (*O*)

є перетином бісектриси даного кута і перпендикуляра до *b*, проведеного в точці *M*, що очевидно.

Частинним є також випадок, коли точка *M*, згідно з умовою, належить бісектрисі кута *aSb* (мал. 6, *в*). Тут (див. «*Спосіб* 1» задавання гомотетії [3]), для відшукання центрів кіл (*O*) і (O_1), до діла скористатися, наприклад, точкою дотику *P′* допоміжного кола (*O′*) до сторони кута *b* ($O'P' \perp b$), а саме: 1) $MP \parallel M'P'$, $MP_1 \parallel M_1'P'$; 2) (PO, P_1O_1) $\perp b$. Як і в загальному випадку, розв'язків *два.* Інших особливих розташувань точка *M* не має. Задачу розв'язано повністю.

Типовими до цієї задачі є такі.

Задача 5. Через дві задані точки *A* і *B* провести коло, дотичне до заданої прямої *MN*.

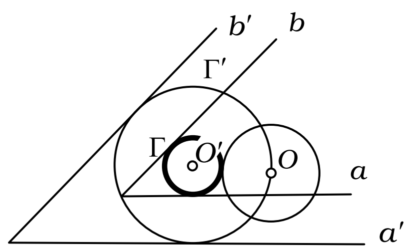


Мал. 7

Розв'язання. Якщо врахувати, що центр шуканого кола *O* належить серединному перпендикуляру *p* відрізка *AB*, можна вважати кут *NSp* (отже, й кут *NSN′* із бісектрисою *p*) побудованим (мал. 7); таким чином, розв'язання задачі відразу зводиться до попередньої.

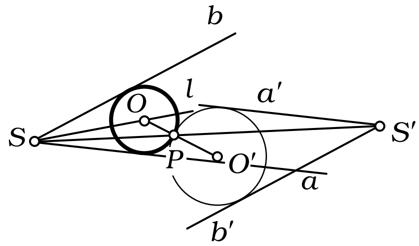
Умову задачі 5 інколи формулюють ще й так: *дано кут NSp і всередині кута точку A; на стороні кута p знайти точку, відстані від якої до даної точки A і до іншої сторони кута SN були б рівні.*

Задача 6. Вписати в заданий кут коло, що дотикається до вже заданого кола.



Мал. 8

Перший спосіб. Аналіз. Нехай коло Г вписане в кут (ab) і дотикається до кола з центром O і радіусом r (мал. 8). Розглянемо коло Г′ із тим самим центром O' та радіусом $O'O$. Воно проходить через відому точку O і є вписаним у кут ($a'b'$), сторони якого є паралельними сторонам заданого кута (ab) та лежать від них на відстані r. Оскільки кут ($a'b'$) можна побудувати, то задача звелася до задачі 4.



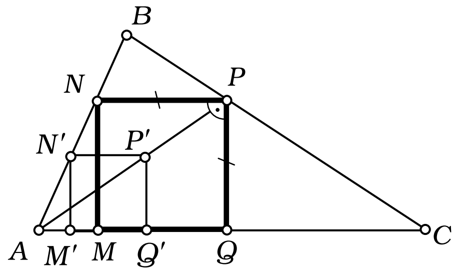
Мал. 9

Другий спосіб. Аналіз. Розглянемо гомотетію з центром P, що переводить шукане коло з центром O у задане коло з центром O' (мал. 9). Одночасно ця ж гомотетія переводить кут (ab) в кут ($a'b'$) (1). Зауважимо, що побудову кута ($a'b'$) здійснюємо ще не маючи точки P, а спираючись на факт, що $a' \parallel a$, $b' \parallel b$ і прямі a' та b' є дотичними до кола з центром O'. Отже, повністю маємо конфігурацію, що є гомотетичною до конфігурації, частину якої відомо (кут (ab)), а частина є шуканою (коло з центром O). Оскільки точки S і S' є відповідними в цій самій гомотетії, пряма SS' проходить через точку P. Крім того, $P \in (O')$; отже, точку P можна побудувати (2). Тоді центр O шуканого кола визначиться як точка перетину прямої $O'P$ із бісектрисою l кута (ab) (3). Аналіз закінчено.

Доведення. Як і в задачі 4, воно безпосередньо випливає із властивостей гомотетії. Задачу розв'язано.

Задача 7. Впишіть у даний трикутник квадрат, дві вершини якого лежать на одній стороні (напр., AC), а дві інші вершини — на двох інших сторонах (див. [4], § 11, задача 9).

Аналіз. Нехай чотирикутник $MNPQ$ задовольняє умову задачі: це такий квадрат, що (M, Q) $\in AC$, $N \in AB$ і $P \in BC$ (мал. 10). Виберемо на прямій AP будь-яку точку P', відмінну від точок A і P. Узявши число $k = AP' : AP$ за коефіцієнт гомотетії з центром A, побудуємо чотирикутник $M'N'P'Q' = H_A^k(MNPQ)$. Тоді $M'N'P'Q'$ теж є квадратом, причому $N' \in AB$, (M', Q') $\in AC$. Оскільки квадрат $M'N'P'Q'$, як один із визначеного класу подібних фігур, побудувати неважко (1), задача зводиться до виконання перетворення гомотетії (2) з коефіцієнтом $\frac{1}{k}$ $\left(H_A^{\frac{1}{k}}(M'N'P'Q') = MNPQ \right)$.



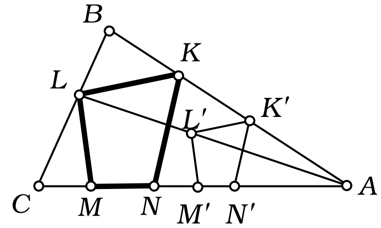
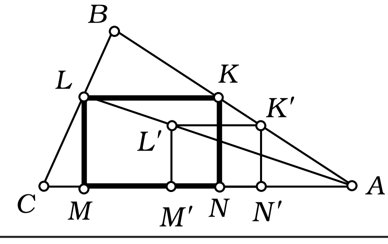
Мал. 10

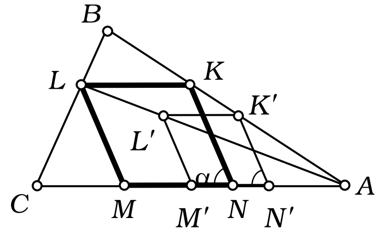
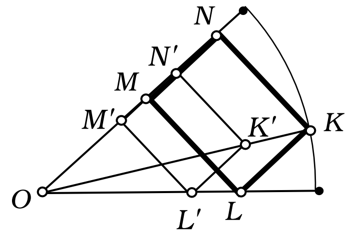
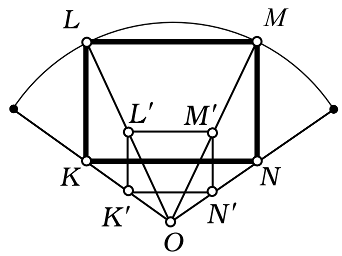
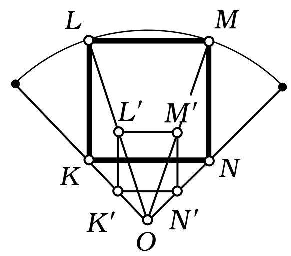
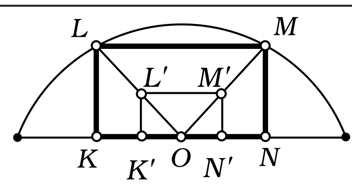
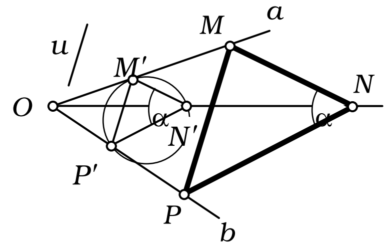
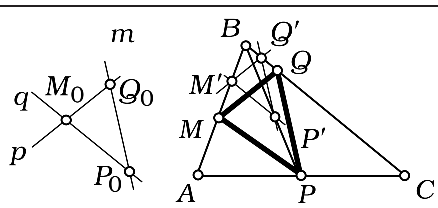
Доведення. За побудовою $M'N'P'Q'$ — квадрат. Але чотирикутник $MNPQ$ гомотетичний квадрату $M'N'P'Q'$, тобто також є квадратом із вершинами, розташування яких задовольняє умову задачі; отже, він є шуканим.

Дослідження. Задача завжди має *єдиний* розв'язок.

Типових задач в означеному щойно класі багато. Пропонуємо читачеві самостійно за умовами і якісним малюнковим вираженням деталізувати схеми пошуку розв'язків нижче наведених задач (*таблиця 1*).

Таблиця 1

№ задачі (малюнка)	Умова задачі	Малюнок (розв'язок)
8 (11)	У заданий трикутник уписати чотирикутник заданої форми	
9 (12)	У заданий трикутник уписати прямокутник, подібний до заданого із двома вершинами на одній із сторін трикутника	

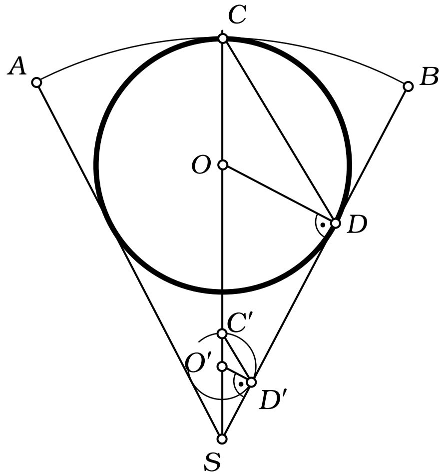
<table>
<tr><th>№ задачі (малюнка)</th><th>Умова задачі</th><th>Малюнок (розв'язок)</th></tr>
<tr><td>10 (13)</td><td>У даний трикутник ABC уписати ромб із даним гострим кутом так, щоб одна його сторона лежала на основі AC, а дві інші вершини — на бічних сторонах AB і BC</td><td>
</td></tr>
<tr><td>11 (14)</td><td>У заданий сектор уписати прямокутник заданої форми із стороною на радіусі сектора</td><td>
</td></tr>
<tr><td>12 (15)</td><td>У заданий сектор уписати прямокутник заданої форми із двома вершинами на дузі сектора</td><td>
</td></tr>
<tr><td>13 (16)</td><td>У заданий сектор уписати квадрат із двома вершинами на дузі сектора</td><td>
</td></tr>
<tr><td>14 (17)</td><td>У заданий сегмент уписати прямокутник із заданим відношенням його сторін</td><td>
</td></tr>
<tr><td>15 (18)</td><td>Усередині кута aOb задано точку N. Уписати в цей кут трикутник MNP так, щоб його сторона MP була паралельна заданій прямій u, а кут MNP дорівнював заданому</td><td>
</td></tr>
<tr><td>16 (19)</td><td>У заданий трикутник ABC уписати інший трикутник так, щоб його сторони були паралельні заданим прямим p, q, m</td><td>
</td></tr>
</table>

У кожній із задач, поданих під номерами 7—16, шукану фігуру Ф, згідно з умовою, потрібно розмістити певним чином по відношенню до заданих ліній і точок, визначених на зображенні. При цьому (як і в задачах 4 — 6) вилучення однієї з умов образно індукує в уявленнях вчителя (учня) систему фігур, кожна з яких задовольняє решту умов, а також подібна і подібно розташована до фігури Ф. Побудова будь-якої з фігур системи дає «ключ» до розв'язання задачі. Тут щоразу на малюнку (в задачах 4 — 16) можна виділити одну описану фігуру та двійку внутрішньо розташованих гомотетичних фігур, центр гомотетії котрих однозначно визначається з умови задачі.

Розглянутий тип задач можна доповнити ще й такими.

Задача 17. Уписати в заданий сектор коло (воно має дотикатися до дуги сектора і його радіусів).

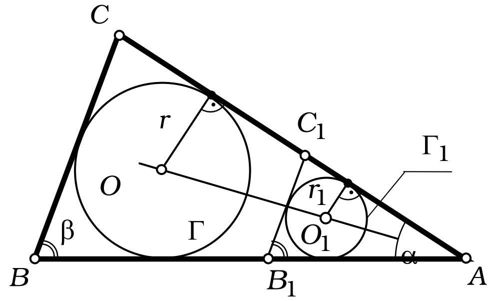
Аналіз. Очевидно, досить знайти центр *O* шуканого кола (мал. 20). Нехай деяка гомотетія з центром *S* переводить коло з центром *O* в коло з центром *O′*. Останнє легко побудувати (1). Відрізки *CD* та *C′D′* є відповідними. Оскільки відрізок *C′D′* можна побудувати (2), а точка *C* визначається під час побудови кола з центром *O′*, можна побудувати також відрізок *CD* || *C′D′* (3). Після цього можна будувати коло з центром *O* (4).



Мал. 20

Доведення. Коло з центром *O* дотикається до сторін кута як гомотетично розташоване до вписаного в цей кут кола з центром *O′*. Воно дотикається також до дуги сектора, оскільки їхня спільна точка *C* (довести, що $C \in (O)$) лежить на лінії центрів. Задачу розв'язано.

Задача 18. Побудувати трикутник за двома заданими його кутами α і β та радіусом *r* уписаного кола.



Мал. 21

Аналіз. Нехай трикутник *ABC* (мал. 21) задовольняє умову задачі: $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$ і $\Gamma(O, r)$ — уписане коло. З'єднаємо точку *O* з вершиною *A* і на прямій *OA* — бісектрисі кута *A* — виберемо будь-яку точку O_1, відмінну від точок *A* і *O*. Побудуємо коло $\Gamma_1(O_1, r_1)$, дотичне до сторін трикутника *AC* і *AB*. Гомотетія H_A^k, де $k = r_1 : r$, коло Γ переведе в коло Γ_1, а дотичну *BC* до кола Γ — в дотичну B_1C_1 до кола Γ_1, причому, за відомою властивістю гомотетії, $BC \parallel B_1C_1$, тому $\angle CBA = \angle C_1B_1A = \beta$. Отож, будь-який трикутник AB_1C_1 із заданими кутами α і β побудувати неважко (1); далі відомим прийомом у трикутник AB_1C_1 уписуємо коло $\Gamma_1(O_1, r_1)$ (2) і, на завершення, виконуємо гомотетію $H_A^{\frac{1}{k}}$ (де $\frac{1}{k}=\frac{r}{r_1}$). Тоді $H_A^{\frac{1}{k}}(B_1)=B$, $H_A^{\frac{1}{k}}(C_1)=C$ і, як результат, знайдемо трикутник *ABC* (3). Аналіз закінчено.

Доведення. За побудовою $H_A^{\frac{1}{k}}(\Delta AB_1C_1)=$ $= \Delta ABC$, тому $\angle A = \alpha$ і $\angle AB_1C_1 = \angle B = \beta$. Оскільки коефіцієнт гомотетії $\frac{1}{k}=\frac{r}{r_1}$, радіус кола Γ, в яке переходить коло Γ_1, дорівнює *r*. Нарешті, за побудовою коло Γ_1 уписане у трикутник AB_1C_1, але тоді, згідно із властивостями гомотетії, коло Γ уписане у трикутник *ABC*. Таким чином, усі умови задачі трикутник *ABC* задовольняє.

Дослідження. Перераховані в аналізі кроки побудови виконуються однозначно, тому коли трикутник, два кути якого задані (α і β), істинно існує, розв'язок *єдиний*. Й це можливо за умови, що $\alpha + \beta < \pi$. Коли ж $\alpha + \beta \geq \pi$ — задача розв'язків *не матиме*. Задачу розв'язано.

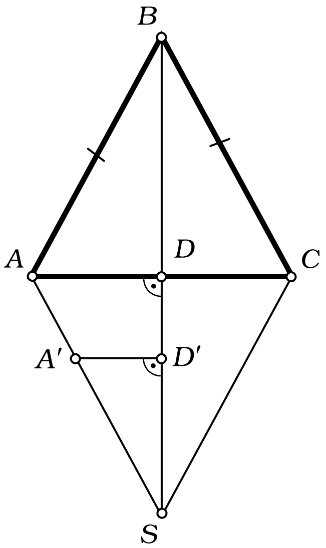
Відомо, що фігури, які задовольняють усі умови задачі на побудову, різняться між собою як за формою чи (і) розмірами, так і за розташуванням відносно заданих фігур. Перший різновид конструктивних пропозицій інколи називають **метричними**, другий — **позиційними.** Серед щойно розв'язаних задач лише остання метрична. Все ж у певному розумінні всі вони (окрім номерів 7 — 16) споріднені (належать до одного підтипу), оскільки в основу методу розв'язання кожної з них покладено **гомотетію** двох кіл.

Чимало задач, в кожній з яких *задається відрізок, що є деякою лінійною комбінацією визначених умовою відрізків*, також **типізують,** розв'язуючи їх методом подібності. При цьому розрізняють два випадки:

1. *Форму шуканої фігури не відомо.* Тоді заданий відрізок-комбінацію треба ввести так, щоб це допомогло визначити згадану форму, а потім і саму шукану фігуру (дивись, наприклад, задачу 19).

2. *Форму шуканої фігури* з самого початку *відомо.* Тоді розташування *заданого* відрізка-комбінації для подальших міркувань фактично не грає ролі (геометричний зміст відрізка-комбінації тут лише вказує як знайти при введенні допоміжної фігури відрізок, що відповідає даному). Справді, в гомотетії (в загальному перетворенні подібності теж) усі лінійні розміри та їх лінійні комбінації змінюються пропорційно, незалежно від початкового положення. На практиці заданому відрізковікомбінації зумисне надають найпростішого, побудовно зручного розташування (наприклад, один із кінців розміщуємо в центрі гомотетії). В цьому разі така точка перейде сама в себе, а відповідні відрізки лежатимуть на одній прямій. Проілюструємо викладене кількома характерними прикладами.

Задача 19. Побудувати рівнобедрений трикутник за його бічною стороною і сумою основи з висотою.

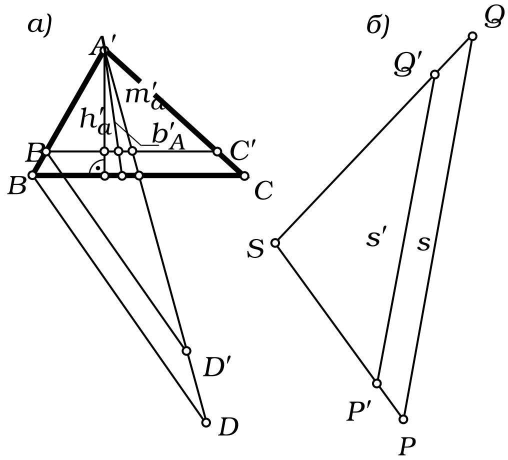


Мал. 22

Аналіз. Нехай трикутник ABC задовольняє умову задачі (мал. 22). На цьому малюнку $DS = AC$, а відрізки BS й $AB = BC$ мають відповідно задані довжини. Оскільки $DS = 2AD$ (один катет у два рази більший іншого), форму прямокутного трикутника ADS відомо. Будь-яка гомотетія з центром S переводить трикутник ADS у трикутник $A'D'S$ тієї самої форми; отже, останній можна побудувати (1). Тоді у трикутнику SAB будуть відомі основа SB, кут S при ній і протилежна бічна сторона AB, а тому цей трикутник можна побудувати (2). Після цього легко побудувати шуканий трикутник ABC (3). Аналіз закінчено.

Доведення. Воно випливає з того, що трикутники ADS й $A'D'S$ — гомотетичні; отже, $DS = 2AD = AC$, звідки $BD + AC = BS$.

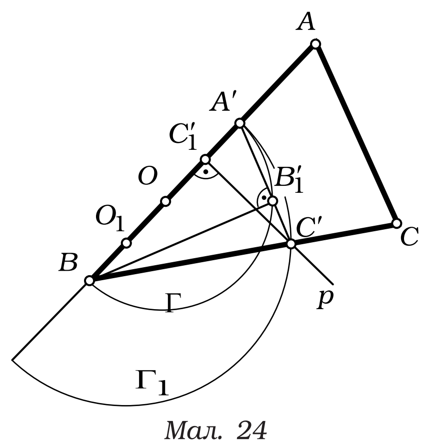
Задача 20. *Побудувати трикутник за відомими відношеннями усіх трьох його сторін і сумою* $S = m_a + h_a + b_A$.



Мал. 23

Розв'язання. Тут за умовою задачі $a : b : c = q : n : p$, де q, n, p — задані відрізки. Отже, їх безпосередньо можна взяти за сторони $a' = q$, $b' = n$, $c' = p$ трикутника $A'B'C'$, подібного до шуканого. Будуємо цей трикутник (мал. 23, *а*). Відрізком, що відповідає даному, за умовою є $s' = m_a' + h_a' + b_a'$. Тому треба спочатку у трикутнику $A'B'C'$ побудувати відрізки m_a', h_a', b_a', а потім їх суму s'. При цьому s' можна, наприклад, побудувати як відрізок $A'D'$. Тоді точкою, що відповідатиме D', буде кінець D відрізка $A'D = s$. Можна s' відкласти у вигляді відрізка $P'Q'$, узявши за центр гомотетії довільну точку S; відрізок s тут треба помістити між сторонами кута $P'SQ'$ паралельно $P'Q'$ (див. мал. 23, *б*). У першому випадку гомотетія визначається центром A' і парою точок D', D, у другому — центром S та парою точок P', P або парою точок Q', Q. В обох випадках розв'язком буде трикутник, гомотетичний до трикутника $A'B'C'$. Нарешті, можна було б взагалі знайти трикутник ABC як такий, що відповідає трикутнику $A'B'C'$ у довільному перетворенні подібності, яке відрізок завдовжки s' переводить в який-небудь відрізок завдовжки s. На малюнку 23, *а* показано відповідну побудову в гомотетії (A', $D' \to D$). Тут шуканим є трикутник $A'BC$.

Задача 21. Побудувати трикутник за його основою і відношеннями, в яких висоти ділять бічні сторони.

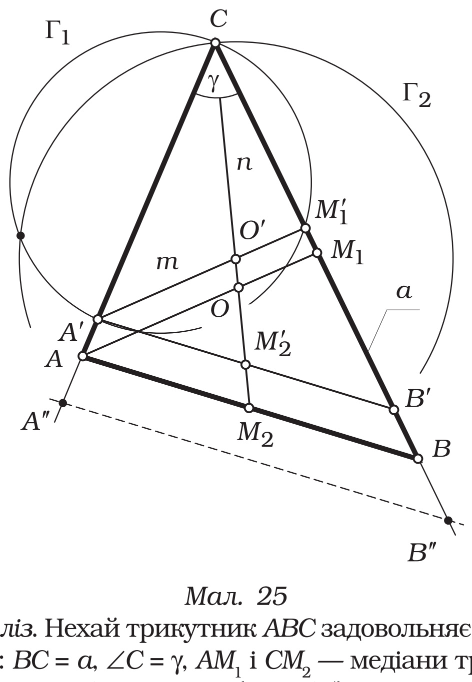


Мал. 24

Аналіз. Нехай трикутник ABC є шуканим (мал. 24). Розглянемо деяку гомотетію H_B, що переводить його у трикутник $A'BC'$. Якщо цей трикутник буде побудований, то відклавши відрізок $BC = a$ і здійснивши гомотетію (B, $C' \to C$), дістанемо трикутник ABC (це буде остання побудова (5)). Отже, слід побудувати трикутник $A'BC'$ подібний до шуканого лише за вказаними відношеннями без урахування основи. За умовою задачі $\frac{BC_1'}{C_1'A'} = \frac{k}{l}$ (k й l — задані відрізки). Вибравши довільно відрізок BA', можна поділити його в цьому відношенні точкою C_1' (1). Тоді вершина C' лежатиме на перпендикулярі p (2). Точка B_1' належить колу Γ діаметром BA', а отже, з відомим центром O (3). За умовою задачі $\frac{A'B_1'}{B_1'C'} = \frac{m}{n}$ (m, n — задані відрізки) $\Rightarrow$ $\frac{A'C'}{A'B_1'} = \frac{m+n}{n}$. Тому, застосувавши до кола Γ гомотетію з таким коефіцієнтом і центром у точці A', дістанемо коло Γ_1, що пройде через точку C' (4): $C' \in p \cap \Gamma_1$. Аналіз закінчено.

Доведення. Нехай на малюнку 24 $B_1' = \Gamma \cap A'C'$. Тоді $\angle A'B_1'B = 90°$ й $A'B_1' : B_1'C' = m : n$ за побудовою. Отже, у трикутнику $A'BC'$ висоти ділять бічні сторони в заданих відношеннях. Тому гомотетичний до нього трикутник ABC повністю задовольняє умову задачі. Задачу розв'язано.

Задача 22. Побудувати трикутник ABC за його стороною BC, кутом C і відношенням медіан: $AM_1 : CM_2 = m : n$, де m, n — дані відрізки.



Мал. 25

Аналіз. Нехай трикутник ABC задовольняє умову задачі: $BC = a$, $\angle C = \gamma$, AM_1 і CM_2 — медіани трикутника і $AM_1 : CM_2 = m : n$ (мал. 25). Проведемо між сторонами кута ACB (зовні чи всередині трикутника) будь-який відрізок, паралельний стороні AB, завдяки чому отримаємо, наприклад, трикутник $A''B''C$ ($A''B''$ зображено штриховою лінією), подібний шуканому. Очевидно, що таких трикутників існує безліч; серед них напевно знайдеться трикутник $A'B'C$, медіанами якого є вже задані відрізки $A'M_1' = m$ і $CM_2' = n$ (у подібних трикутників відповідні лінійні елементи пропорційні).

Отже, вилучивши тимчасово з умови задачі лінійний елемент ($BC = a$), зводимо її до наступної: *побудувати трикутник $A'B'C$ за кутом C і медіанами m_a, m_c, де $\angle C = \gamma$; $m_a = m$; $m_c = n$.*

У розв'язанні цієї останньої задачі методом ГМТ доречні такі міркування. Точка C, з одного боку, належить дузі Γ_1 сегмента, який спирається на відрізок $A'M_1'$ і вміщує кут γ (1). Точка $O' = A'M_1' \cap CM_2'$, як точка перетину медіан, розділяє кожну з них у відношенні $2 : 1$, рахуючи від вершини; отже, $A'O' : O'M_1' = 2 : 1$ (2), а $O'C = \frac{2}{3}CM_2' = \frac{2}{3}n$ (3), тому точка C, з іншого боку, віддалена від O' на відстань $\frac{2}{3}n$ і належить колу $\Gamma_2\left(O', \frac{2}{3}n\right)$ (4). Перетином побудованих ГМТ й буде точка C (5). Оскільки $CM_1' = M_1'B'$, то допоміжний трикутник $A'B'C$ легко будується (6).

Нарешті, взявши до уваги лінійний елемент із умови задачі ($BC = a$) й пам'ятаючи про те, що $AB \parallel A'B'$, можемо без зусиль остаточно побудувати трикутник ABC, подібний трикутнику $A'B'C$ (7). Аналіз закінчено.

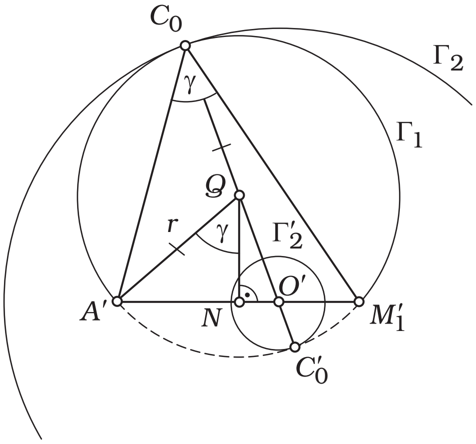
Доведення. У трикутнику $A'B'C$ $\angle C = \gamma$, $A'M_1' = m$ — його медіана і $A'O' : O'M_1' = 2 : 1$ за побудовою, тому CM_2', що містить точку O', також медіана цього трикутника і $CM_2' = n$ $\left(CO' = \frac{2}{3}n\right)$; $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C$, а отже: $AM_1 : CM_2 = A'M_1' : CM_2' = m : n$; крім того, $CB = a$. Таким чином, трикутник ABC задовольняє всі умови задачі.

Дослідження. Тут умова існування розв'язків буде рівносильна умові перетину кіл Γ_1 і Γ_2, які висікають вершину трикутника C. Якщо кола дотикаються в точці C_0 (мал. 26), матиме місце така рівність (див. [4], п. 108): $C_0O' \cdot O'C_0' = A'O' \cdot O'M_1'$ (*), де $C_0O' = \frac{2}{3}n$, $A'O' = \frac{2}{3}m$, $O'M_1' = \frac{1}{3}m$ і $O'C_0' = 2r - \frac{2}{3}n$. Навіч із малюнка зрозуміло, що $r = \frac{m}{2\sin\gamma}$, (див. трикутник $A'QN$); отже, із рівності (*) випливає, що

$$\frac{2}{3}n = \frac{m}{2\sin\gamma} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m^2}{\sin^2\gamma} - \frac{8}{9}m^2} \quad (**).$$

Оскільки $\sin\gamma \geq 1$, $\frac{m^2}{\sin^2\gamma} > \frac{8}{9}m^2$ і підкореневий вираз завжди більший нуля, що вказує на два можливі варіанти дотикання кіл Γ_1 і Γ_2 (Γ_2'; див. мал. 26). Знак «+» у рівності (**) відповідає гострому куту γ, знак «–» — тупому (особливий випадок $\gamma = 90°$). Очевидно, що

$$QO' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m^2}{\sin^2\gamma} - \frac{8}{9}m^2}.$$



Мал. 26

Ми випишемо всі можливі розв'язки лише для гострого кута γ; решту випадків із ретельним виконанням малюнків неважко дослідити самостійно.

Таким чином, умови існування розв'язків задачі (для $\gamma < 90°$) мають наступне формальне вираження: $\frac{1}{3}m < \frac{2}{3}n \le r + QO'$. Зокрема, що стосується їх кількості, можливі варіанти:

1) $\frac{2}{3}n > r + QO'$ або $\left\{\frac{2}{3}n < r + QO'; \frac{2}{3}n \le \frac{1}{3}m\right\}$, розв'язків *немає*;

2) $\frac{2}{3}n = r + QO'$ або $\left\{\frac{2}{3}n < r + QO'; \frac{1}{3}m \le \frac{2}{3}n \le \frac{2}{3}m\right\}$, розв'язок *єдиний*;

3) $\left\{\frac{2}{3}n < r + QO'; \frac{2}{3}n > \frac{2}{3}m\right\}$, розв'язків *два*.

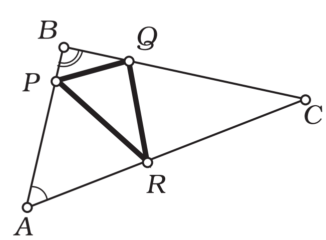
Задачу розв'язано повністю.

Наголошуємо, що зараз у проведенні дослідження та геометричному тлумаченні можливих розв'язків малюнок відіграв вирішальну роль.

Нарешті, представимо двома прикладами ще один тип задач на побудову вписаних трикутників з обумовленою формою.

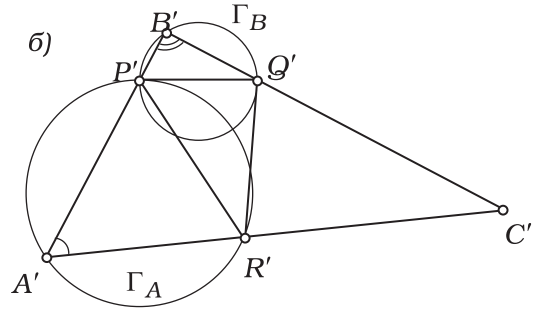
Задача 23. На стороні трикутника задано точку. Вписати в нього трикутник заданої форми так, щоб одна з його вершин лежала в цій точці.

а)



Мал. 27 а

б)

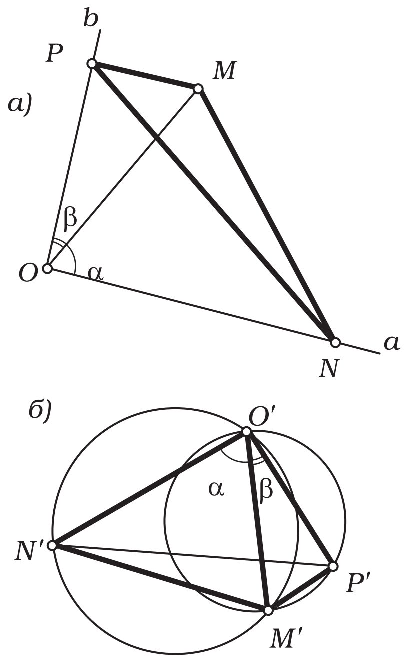


Мал. 27 б

Аналіз. Нехай трикутник ABC (мал. 27, *а*) — заданий, а трикутник PQR (подібний до іншого трикутника $P'Q'R'$) — шуканий; положення точки $P \in AB$ відомо. Розглянемо перетворення подібності, яке переводить конфігурацію на малюнку 27, *а* в конфігурацію на малюнку 27, *б*. На малюнку 27, *б* трикутник $P'Q'R'$ — відомий, а трикутник $A'B'C'$ легко побудувати. Справді, вершина A' належить дузі Γ_A сегмента, що побудований на відрізку $P'R'$ і вміщує кут, рівний куту A. Аналогічно $B' \in \Gamma_B$. Кола Γ_A та Γ_B можна побудувати (1). Далі $A'P' : P'B' = AP : PB$; отже (див. задачу 2), січну $A'B'$ можна побудувати (2). Оскільки $\angle APR = \angle A'P'R'$ і $\angle BPQ = \angle B'P'Q'$ (*), можна побудувати тепер трикутник ABC (3). Аналіз закінчено.

Доведення. $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$ за описаними щойно етапами побудови. Оскільки $A'P' : P'B' = AP : PB$, подібне перетворення площини, яке трикутник $A'B'C'$ переводить у трикутник ABC, переведе точку P' у точку P. З рівностей (*) випливає, що $P'R' \to PR$, $P'Q' \to PQ$; отже, $\Delta P'Q'R' \to \Delta PQR$, тому $\Delta PQR \sim \Delta P'Q'R'$. Задачу розв'язано.

Задача 24. У даний кут уписати трикутник заданої форми з вершиною в заданій точці.



Мал. 28

Аналіз. Нехай трикутник *MNP* задовольняє умову задачі (мал. 28, *а*). Для відшукання розв'язку досить визначити градусну міру кута *OMN*, оскільки після побудови відрізка *MN* (2), знаючи кут *PMN*, можна побудувати відрізок *MP* (3). Ідея розв'язання полягає в тому, що легко побудувати чотирикутник, подібний до чотирикутника *OPMN*. Справді, відомими є кути α та β і відомо трикутник $M'N'P'$ (мал. 28, *б*), подібний до шуканого трикутника *MNP*. Побудувавши на відрізках $M'N'$ та $M'P'$ дуги відповідних сегментів, дістанемо точку O' (1). У чотирикутнику $O'P'M'N'$ відомо кути α, β, $M'N'P'$ та $N'P'M'$. Користуючись теоремою синусів, можна довести, що так визначаються кути $O'N'P'$ й $O'P'N'$. А це означає, що ці кути визначають форму чотирикутника $O'P'M'N'$. Отже, чотирикутник $O'P'M'N'$ подібний чотирикутнику *OPMN*. Тому $\angle OMN = \angle O'M'N'$, що використано в побудовах 2 і 3. Аналіз закінчено.

Доведення. Розглянемо трикутники при відрізках *OM* та $O'M'$. Прямо з побудови випливає, що $\Delta OMN \sim \Delta O'M'N'$. Із побудови також маємо, що $\angle OMP = \angle O'M'P' \Rightarrow \Delta OMP \sim \Delta O'M'P'$. Тому чотирикутник *OPMN* подібний до чотирикутника $O'P'M'N'$, а отже, $\Delta PMN \sim \Delta P'M'N'$. Задачу розв'язано.

Завершуючи цикл статей на означену тему, додамо таке.

Історично конструктивізм, як засіб навчання геометрії, в українській школі завжди мав особливу значимість. Геометричні побудови традиційно були однією з основних змістових ліній планіметрії ЗОНЗ. Це зумовлювалося двома чинникам. *По-перше*, задачі на побудову (як ніякі інші) мають неабияку **дидактичну** цінність, оскільки не лише індукують практичні вміння виконання операцій циркулем і лінійкою, але й *творчо розвивають* ***образне*** *і* ***логічне*** *мислення учня, формують навички математичної* ***інтуїції*** *та* ***евристичної*** *діяльності. По-друге*, придбані знання, вміння і навички мають *затребувану суспільством* **прикладну спрямованість**, вони властиві працівникам різних галузей в їх професійній діяльності, а саме: будівельникам і архітекторам, інженерам-конструкторам, геодезистам, кравцям, столярам, тощо.

Серед методів розв'язання конструктивних задач **методи перетворень** *складають найбільш ємну групу*. Перетворення фігур, як ще одна змістова лінія диво-науки, засвоюються учнями виключно завдяки цим задачам.

Тож вилучення із програм основної школи теми «Геометричні побудови», алогічно поверхневе, не підкріплене практикою подання теми «Перетворення фігур» ми вважаємо прикрою, неприпустимою помилкою.

ЛІТЕРАТУРА

1. Б е в з Г. П. Геометрія: Підручник для 7 — 9 класів загальноосвітніх навчальних закладів / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. — К.: Вежа, 2001. — 272 с.

2. Б у р д а М. І. Геометрія: Підручник для 7 класу загальноосвіт. навч. закл. / М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова. — К.: Зодіак-ЕКО, 2007. — 208 с.

3. Л е н ч у к І. Г. Перетворення фігур: паралельне перенесення / І. Г. Ленчук // Математика в рідній школі. — 2016. — №__. — С.__ — __.

4. П о г о р є л о в О. В. Геометрія: Підручник для 7 — 9 класів середньої школи / О. В. Погорєлов. — К.: Освіта, 1998. — 224 с.