АЛГЕБРАЇЧНИЙ МЕТОД: ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ НА ПОБУДОВУ

Іван ЛЕНЧУК — професор кафедри методики навчання математики, фізики та інформатики Житомирського державного університету ім. І. Я. Франка, доктор педагогічних наук

Анотація. Вирізнено специфічні особливості алгебраїчного методу в задачах конструктивної планіметрії, представлено евристичну схему його застосування. Змістову сутність методу продемонстровано розв'язанням серії олімпіадних задач. Наведено приклад типізації задач на побудову трикутників, де базовим узято поняття площі фігур.
Ключові слова. Основні алгебричні побудови, формальне вираження довжини відрізка, компактність побудови відрізка за формулою.
Иван ЛЕНЧУК. Алгебраический метод: олимпиадные задачи на построение.
Аннотация. Выделено специфические особенности алгебраического метода в задачах конструктивной планиметрии, сформулировано эвристическую схему его применения. Содержательную сущность метода продемонстрировано решением серии олимпиадных задач. Наведено пример типизации задач на построение треугольников, где базовым взято понятие площади фигур.
Ключевые слова. Основные алгебраические построения, формальное выражение длины отрезка, компактность построения отрезка по формуле.
Ivan LENCZUK. Algebraic method: Olympiad problem on the build.
Summary. Highlighted the specific features of the algebraic method in problems of constructive geometry, formulated the heuristic scheme of its application. A meaningful essence of the method is demonstrated by solving a series of programming problems. Induced example typing task on constructing triangles where the base is taken the concept of the square shapes.
Keywords. The main algebraic construction, the formal expression of the segment length, compactness of the line by the formula.

Кожен метод розв'язання задач на побудову ґрунтується на залежностях між геометричними величинами. Проте в суто **геометричних** методах такі залежності не виражалися аналітично (виключення становить відшукання деяких ГМТ). В **алгебраїчному** *методі* залежності між заданими і шуканими величинами *записуються у вигляді рівнянь.* У зв'язку з цим схема розв'язання конструктивних задач набуває помітно іншого змісту.

Алгебраїчний метод метою й одночасно результатом **аналізу** *вбачає здобуття одного або кількох рівнянь, що пов'язують потрібні для побудови величини із заданими* (відомими). На цьому аналіз завершується.

Для виконання побудови *треба спочатку розв'язати здобуті рівняння і дістати явні вирази шуканих величин через задані.* Тоді залишається відобразити геометрично ці вирази побудовою за допомогою лінійки та циркуля. Проте це не завжди легко та, навіть, не завжди можна зробити (іноді не вдається розв'язати саме рівняння, що містить шукану величину). Відомості про критерій можливості розв'язання задачі на побудову циркулем і лінійкою можна знайти в багатьох книгах (див., напр., [1, 3]).

Евристичну схему процесу розв'язування геометричних задач на побудову алгебраїчним методом можна подати таким переліком дій:

Припустивши, що шукана фігура Ф *повністю задовольняє умову задачі, виділяють* (*помічають*) *ті невідомі відрізки* (*один або кілька*), *до визначення яких зводиться побудова фігури* Ф (*для побудови кутів в алгебричному методі теж треба вводити відрізки*).

Скориставшись у кожному окремому випадку найбільш слушними фактами геометрії, складають рівняння, з яких вибрані невідомі виражають аналітично через відрізки, відомі за умовою задачі.

За одержаними формулами будують визначені невідомі відрізки.

Виконують побудови, якими завершується відшукання фігури Ф.

Зазначимо, що в алгебраїчному методі всі необхідні побудови зводяться до побудови відрізків (отже, й відповідні вирази теж матимуть вимірність відрізка). Якраз тому потрібно вміти виконувати *основні дії* над відрізками. З цього і будемо виходити, а побудову відрізків, що виражаються складнішими формулами, розглянемо у процесі розв'язування задач.

Нагадаємо, що до ***основних алгебраїчних*** (ОАП) належать **побудови**, задані найпростішими формулами [4]: ОАП$_1$, $x = a \pm b$ — *додавання і віднімання відрізків* (у останньому випадку $a > b$); ОАП$_2$, $x = na$ — *множення відрізка a на натуральне число n*; ОАП$_3$, $x = \frac{a}{n}$ — *ділен-*

ня відрізка a на натуральне число n; ОАП$_4$, $x=\frac{m}{n}a$ — *множення відрізка на раціональне число* (m та n — натуральні числа); ОАП$_5$. $x=\frac{ab}{c}$ — побудова четвертого пропорційного відрізка; ОАП$_6$. $x=\sqrt{a^2\pm b^2}$ — *відщукання гіпотенузи або катета* (при $a > b$) *прямокутного трикутника*; ОАП$_7$. $x=\sqrt{ab}$ — *побудова середнього геометричного відрізка.*

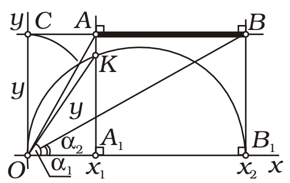
Хоча побудови ОАП$_{1-7}$ належать до алгебраїчного метода, *без них часто не можна обійтися при використанні суто геометричних методів.*

Мета цієї статті — проілюструвати застосування алгебраїчного метода на конкретних конструктивних пропозиціях підвищеної складності.

Розглянемо спочатку кілька непростих задач («із родзинкою»), наведемо також для деяких з них суто геометричні способи пошуку результату.

Задача 1. Між двома паралельними прямими побудувати перпендикулярний до них відрізок так, щоб із заданої точки він був видний під найбільшим кутом.

Розв'язання. Якщо задана точка лежить між заданими прямими, то шуканий перпендикуляр, очевидно, має проходити через цю точку, а згаданий кут дорівнюватиме 180°. На малюнку 1 зображено випадок, коли задана точка O лежить поза смугою, утвореною накресленими прямими AA_1 та BB_1. Нехай AB — шуканий відрізок.



Мал. 1

$\angle AOB = \alpha_1 - \alpha_2$. Цей кут гострий, він найбільший, коли найбільшим є його тангенс. У зображеній на малюнку системі координат маємо:

$$\left(\operatorname{tg}\alpha_1=\frac{y}{x_1},\ \operatorname{tg}\alpha_2=\frac{y}{x_2}\right)\Rightarrow$$

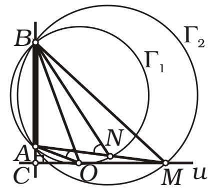
$$\Rightarrow\ \operatorname{tg}\left(\alpha_1-\alpha_2\right)=\frac{y\left(x_2-x_1\right)}{y^2+x_1x_2}=f\left(y\right).$$

Складемо рівняння

$$f'(y)=0:\ \frac{\left(x_2-x_1\right)\left(y^2+x_1x_2\right)-2y^2\left(x_2-x_1\right)}{\left(y^2+x_1x_2\right)^2}=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ y^2=x_1x_2,\ \text{а}\ y=\sqrt{x_1x_2}\ \ (\text{ОАП}_7).$$

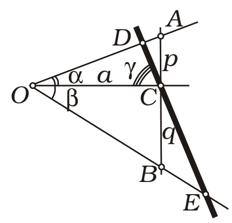
Із геометричних міркувань випливає, що в точці O функція $f(y)$ досягає максимуму. На малюнку 1 чітко показано побудову відрізка AB: на OB_1 як на діаметрі описано півколо, звідки $OK = y$; тоді дуга радіусом y із центром у точці O висікатиме точку C на осі Oy, а остання визначає пряму CAB.



Мал. 2

Цю саму задачу можна розв'язати також й **не алгебраїчним методом**, якщо звести її до такої: *на заданій прямій u знайти таку точку O, з якої заданий відрізок AB видно під найбільшим кутом* (мал. 2). Тут пряма u й відрізок AB перпендикулярні між собою. Ідея розв'язання — розглянути ГМТ, з яких відрізок AB видно під сталим кутом, тобто розглянути дугу кола, що проходить через точки A та B. На малюнку 2 зображено два таких кола: Γ_1, яке дотикається до заданої прямої u в точці O, і Γ_2, що перетинає цю пряму. Зрозуміло, що точка O є шуканою. Справді, адже $\angle AMB < \angle ANB = \angle AOB$. З іншого боку, $CO^2 = CA \cdot CB$, що відповідає першому способу розв'язання задачі.

Задача 2. Провести через задану точку таку січну до сторін заданого кута, щоб різниця відрізків на його сторонах дорівнювала заданому відрізку.



Мал. 3

Розв'язання. Нехай на малюнку 3 точка C лежить усередині заданого кута AOB, $AB \perp OC$, DE — шукана січна; $OE - OD = t$, де t — заданий відрізок. Якщо позначити $AC = p$, $BC = q$, $OA = m$, $OB = n$, $OD = x$, то $OE = x + t$. Згідно із теоремою синусів, маємо:

$$\frac{a}{x}=\frac{\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\gamma}=\frac{p}{m}\operatorname{ctg}\gamma+\frac{a}{m};$$

$$\frac{a}{x+t}=\frac{\sin(\gamma-\beta)}{\sin\gamma}=\frac{a}{n}-\frac{q}{n}\operatorname{ctg}\gamma.$$

Виразивши з обох рівнянь $\operatorname{ctg}\gamma$ і прирівнявши праві частини отриманих виражень, дістаємо рівняння для встановлення x:

$$(p+q)x^2-[(mq+np)-t(p+q)]x-mqt=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x=\frac{1}{2}\left(\frac{mq+np}{p+q}-t\right)+\sqrt{\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{mq+np}{p+q}-t\right)^2+\frac{mqt}{p+q}}.$$

З метою моделювання відрізка x в оптимальному режимі, рекомендуємо дотримуватися такого порядку: $mq+np=a_1^2+a_2^2=a_3^2$, $p+q=a_4$ (відрізок a_4 з'являється в побудові як результат операцій із відрізками m, n, p, q);

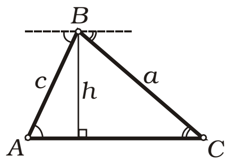
$\frac{a_3^2}{a_4} = a_5$; $\frac{1}{2}\left(\frac{mq+np}{p+q} - t\right) = \frac{1}{2}(a_5 - t) = a_6$;

$\frac{mq}{a_4} = a_7$; $\sqrt{a_7 t} = a_8$;

$\sqrt{a_6^2 + a_8^2} = a_9$; $x = a_6 + a_9$.

Маючи точку D, легко провести шукану січну.

Задача 3. Побудувати трикутник за його висотою, різницею бічних сторін та різницею кутів при основі.



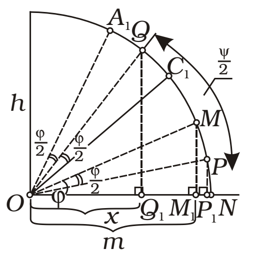
Мал. 4

Розв'язання. Припустимо малюнок 4 задовольняє умову задачі, тобто нехай: $\angle A - \angle C = \varphi$, $a - c = t$; отже, відомо h, t і φ. Відразу помічаємо, що $h \cdot \left(\frac{1}{\sin\angle C} - \frac{1}{\sin\angle A}\right) = t$. Звідси елементарними перетвореннями одержимо:

$$2h\cos\frac{\angle A+\angle C}{2}\sin\frac{\angle A-\angle C}{2} =$$

$$= \frac{t}{2}\left[\cos(\angle A - \angle C) - \cos(\angle A + \angle C)\right] =$$

$$= \frac{t}{2}\left[\cos(\angle A - \angle C) + 1 - 2\cos^2\frac{\angle A+\angle C}{2}\right]. \qquad (*)$$



Мал. 5

Тепер доцільно діяти так. Для зменшення кількості нових відрізків, виберемо один із заданих відрізків, наприклад h, за радіус кола (мал. 5). Побудуємо такі кути: $\angle NOM = \varphi$, $\angle NOP = \frac{\varphi}{2}$. Тоді

$$\cos(\angle A - \angle C) = \frac{OM_1}{OM} = \frac{m}{h}, \quad \sin\frac{\angle A-\angle C}{2} = \frac{PP_1}{OP} = \frac{p}{h}$$

(тут m і p — відомі відрізки). Позначимо

$$\cos\frac{\angle A+\angle C}{2} = \cos\frac{\psi}{2} = \frac{x}{h}.$$

Записана вище рівність (*) дасть наступне:

$$2h\frac{x}{h}\cdot\frac{p}{h} = \frac{t}{2}\left(\frac{m}{h} + 1 - 2\frac{x^2}{h^2}\right); \text{ або}$$

$$2tx^2 + 4phx - th(m + h) = 0 \Rightarrow$$

$$x = \sqrt{\left(\frac{ph}{t}\right)^2 + \frac{h}{2}(m+h)} - \frac{ph}{t}.$$

Відрізок x легко побудувати. Якщо відкласти відрізок $OQ_1 = x$ і побудувати на колі відповідну Q_1 точку Q, то $\angle NOQ = \frac{\psi}{2}$. Тепер можна побудувати кути A та C:

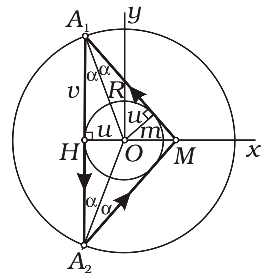
$$\angle A = \frac{\angle A+\angle C}{2} + \frac{\angle A-\angle C}{2} = \frac{\psi}{2} + \frac{\varphi}{2};$$

$$\angle C = \frac{\angle A+\angle C}{2} - \frac{\angle A-\angle C}{2} = \frac{\psi}{2} - \frac{\varphi}{2}$$

(мал. 5; тут $\angle A = \angle NOA_1$, $\angle C = \angle NOC_1$).

Після цього досить відкласти знайдені кути A і C у вибрану півплощину від доповняльних променів із початком у точці B (мал. 4) та, з урахуванням відрізка h, побудувати трикутник ABC. Задачу розв'язано.

Задача 4. Як треба вдарити кульку на круглому більярді, щоб після двох відбиттів вона пройшла через початкове місце?



Мал. 6

Аналіз. Нехай на малюнку 6 M — шукана точка, з якої треба вдарити більярдну кульку, A_1 — перша точка відбиття, A_2 — друга. Радіуси OA_1 й OA_2 — нормалі граничного кола стола з центром у точці O. За відомим законом відбиття матимемо: $\angle MA_1O = \angle OA_1A_2 = \angle A_1A_2O = \angle OA_2M = \alpha \Rightarrow \angle MA_1A_2 = \angle MA_2A_1 = 2\alpha$; отже, трикутник A_1MA_2 — рівнобедрений, тут $MA_1 = MA_2$. Опустимо з центра O перпендикуляри на сторони трикутника A_1MA_2. Кожен із них дорівнює $R\sin\alpha$, тому сторони трикутника A_1MA_2 дотикаються до деякого кола з центром O. Завдяки симетрії, точки H, O та M лежать на одній прямій. Згідно з позначеннями, маємо

$$\frac{m+u}{v} = \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Однак $\operatorname{tg}\alpha = \frac{u}{v}$, а $v^2 = R^2 - u^2$, тому

$$m + u = \frac{2uv^2}{v^2-u^2} - \frac{2u(R^2-u^2)}{R^2-2u^2},$$

звідки $2mu^2 + R^2u - mR^2 = 0$.

Для побудови потрібно із записаного рівняння виразити u, а саме:

$$u = \frac{-R^2 \pm \sqrt{R^4 + 8m^2R^2}}{4m}.$$

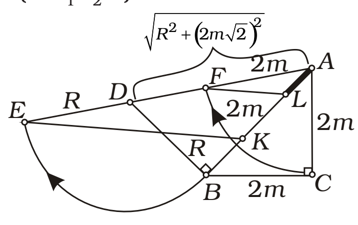
Очевидно, перед коренем слід залишити лише знак «плюс». Саму ж побудову бажано провести якомога меншою кількістю операцій. Із цим, надамо виразу u такого вигляду:

$$u = \frac{2mR}{\sqrt{R^2 + \left(2m\sqrt{2}\right)^2} + R}.$$

Побудуємо прямокутний трикутник ABC, в якому $AC = BC = 2m$, $AB = 2m\sqrt{2}$ (мал. 7). На відрізку AB будуємо прямокутний трикутник ABD, в якому

$$BD = R \Rightarrow \ AD=\sqrt{R^2+\left(2m\sqrt{2}\right)^2}\ .$$

Далі, як показано на малюнку, відкладаємо відрізки $AF = 2m$, $DE = R$, $AK = R$ і проводимо прямі EK та $FL \parallel EK$. Очевидно, відрізок AL дорівнює u. Після цього можна описати згадане вище внутрішнє коло радіусом u (див. мал. 6) і визначити шуканий шлях кульки на більярдному столі (MA_1A_2M).



Мал. 7

Доведення. Його зручно провести координатним методом. Однак, записуючи в послідовному перерахунку рівняння всіх трьох дотичних, щоб потім упевнитися, що при знайденому значенні u остання з них проходить через точку M, матимемо громіздкі вирази. Тому треба шукати «обхідний» шлях.

Будемо спочатку вважати, що внутрішнє коло має довільний радіус r у системі координат, яку вибрано на малюнку 6. Розглянемо дотичні MA_1 та MA_2. Враховуючи симетрію, координати точок A_1 й A_2 можна позначити так: $A_1(x_0, y_0)$, $A_2(x_0, -y_0)$; точка M має координати $(m, 0)$. Залишається довести, що коли $r = u$ (u — знайдене вище значення), матимемо $x_0 = -u$. Це й означатиме, що хорда A_1A_2 теж є дотичною до кола з радіусом u.

Реалізуємо цей план. Маємо

$$\sin\angle OMA_1=\frac{r}{m}\ \Rightarrow\ \mathrm{tg}\angle OMA_1=\frac{r}{\sqrt{m^2-r^2}}\,,$$

а через те рівняннями дотичних MA_1 і MA_2 будуть відповідно такими:

$$y=-\frac{r}{\sqrt{m^2-r^2}}\cdot(x-m)\ \text{ і }\ y=\frac{r}{\sqrt{m^2-r^2}}\cdot(x-m).$$

Рівняння зовнішнього (граничного) кола матиме вигляд $x^2 + y^2 = R^2$. Звідси, для визначення координати x_0, дістаємо рівняння

$$x_0^2+\frac{r^2}{m^2-r^2}(x-m)^2=R^2$$

або, після нескладних перетворень, $m^2x_0^2 - 2mr^2x_0 + r^2(m^2 + R^2) - m^2R^2 = 0$ (*).

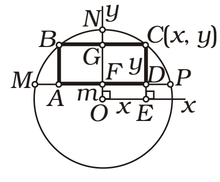
Неважко переконатися (шляхом підстановки), що при $r = u$, $x_0 = -u$ й це рівняння стає тотожністю (тут, як і вище, значно складніше розв'язувати рівняння (*) і доводити, що при $r = u$ менший з його коренів дорівнює «$-u$»).

Дослідження. Маємо

$$u=\frac{2mR}{\sqrt{R^2+8m^2}+R}\,.$$

Звідси випливає, що задача має розв'язок при будь-якому $m \in [0, R]$. Якщо $m = R$, то трикутник, сторонами якого прямує кулька, є рівностороннім. При $m = 0$ трикутник вироджується в будь-який з діаметрів круглого більярду. У цьому випадку проходження кульки через початкове положення відбувається вже після першого відбиття. Проте, згідно з формулюванням задачі, цей шлях кульки теж слід вважати розв'язком. Більше того, такий тривіальний шлях можна вибрати також при $m \neq 0$, але тут діаметр, що є траєкторією руху кульки, буде повністю визначений. Задачу розв'язано.

Задача 5. У накреслений сегмент уписати прямокутник із заданим периметром.

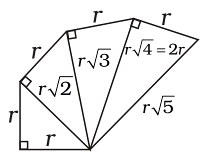


Мал. 8

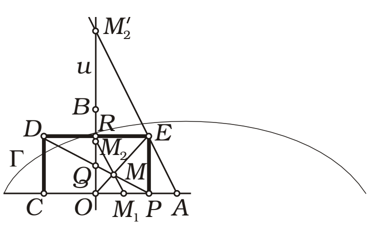
Розв'язання. Центр O заданого сегмента MNP (мал. 8) слід вважати відомим. Позначимо $ON = r$, $OF = m$, а периметр прямокутника $ABCD$ — через $2p$ (r, m, p — відомі відрізки). Очевидно, досить побудувати вершину прямокутника C (x, y). Маємо $x^2 + y^2 = r^2$. Крім того, $p = 2x + y - m \Rightarrow 2x = p + m - y = s - y$. Отже, звідси $4x^2 = s^2 - 2sy + y^2$. Виключаючи x^2, дістаємо таке:

$$\Rightarrow\ y=\frac{s}{2}\pm2\sqrt{\left(\frac{r\sqrt{5}}{5}\right)^2-\left(\frac{s}{5}\right)^2}\,.$$

Бачимо, що відрізок y, а водночас і шуканий прямокутник легко побудувати за наявності відрізка $r\sqrt{5}$. Побудову останнього показано на малюнку 9. Цей малюнок взагалі демонструє процес побудови відрізка $r\sqrt{n}$, де n — натуральне число. Звичайно, побудову відрізка $r\sqrt{5}$ зовсім не обов'язково виконувати таким способом. Досить побудувати лише останній прямокутний трикутник зі сторонами r і $2\sqrt{r}$. Відрізок $x=r\sqrt{n}$ можна побудувати безпосередньо як середній геометричний відрізків r та nr: $x=\sqrt{r\cdot nr}$.



Мал. 9



Мал. 10

Цю ж задачу можна розв'язати в інший спосіб — суто **геометрично**.

Аналіз. Нехай малюнок 10 задовольняє умову задачі: прямокутник *CDEP*, уписаний в сегмент Г, має заданий периметр; *O* — середина основи сегмента, *u* — його вісь симетрії. З'єднавши *O* з *E*, а *D* із *P*, дістанемо точки *M* і *Q*. Трикутники *MOQ* та *MEP* подібні між собою, причому *OQ* : *EP* = 1 : 2. Отже, *OM* : *ME* = *QM* : *MP* = = 1 : 2. Сума відрізків *OQ* й *OP*, очевидно, становить чверть заданого периметра. Відкладемо відрізки *OA* та *OB*, що дорівнюють цій чверті (1). Тоді *BQ* = *OP*, *QO* = *PA*; отже, точки *Q* і *P* ділять відрізки *BO* й *OA* в однакових відношеннях. Розглянемо на них ще такі точки M_2 і M_1, які ділять їх у відношенні 1 : 2 (2). Тоді точка *M* належить відрізкові M_1M_2. Урахувавши, що *OM* : *ME* = 1 : 2, розглянемо гомотетію H_0^3. Матимемо $H_0^3(M)=E$. Тому $E\in\Gamma\cap AM_2'$, де $AM_2'=H_0^3(M_1M_2)$ (3). Після цього залишається побудувати решту вершин *D*, *C* і *P* (4). Аналіз закінчено.

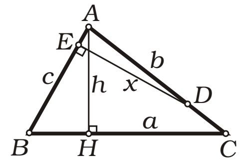
Доведення. Розглянемо точки $M = OE \cap M_1M_2$ та $Q = u \cap MP$ (нагадаємо, що в доведенні ці точки виникають після побудови точки *E*). Оскільки $\Delta MOQ \sim \Delta MEP$ за побудовою, а *OM* : *OE* = 1 : 3, матимемо *OM* : *ME* = 1 : 2 ⇒ *OQ* : *EP* = *QM* : : *MP* = 1 : 2. Звідси випливає, що точки *P* і *Q* ділять в однаковому відношенні відрізки *OA* та *BO*, а оскільки *OA* = *BO*, дістаємо *BQ* = *OP* і *QO* = *PA*. Отже, $QO+OP=OP+PA=\frac{1}{4}$ периметра. Тоді сума *OP* + *PE* + *ER* становить половину заданого периметра, а оскільки пряма *u* є віссю симетрії сегмента, побудований чотирикутник *CDEP* має заданий периметр. Задачу розв'язано.

Зауважимо, що застосування **алгебраїчного** метода значно спростило розв'язання цієї задачі, що порівнюючи неважко помітити.

Зараз вносимо на розгляд і до розв'язання серію задач на трикутники, де використовується *поняття площі*, в тому числі її аксіоматичні властивості та відомі обчислювальні формули для усталених геометричних фігур.

Зокрема, наповнимо цей **тип** задач вартими уваги пропозиціями на прямокутні трикутники, котрі, як на перший погляд, непосильні школярам. Однак ми виходимо з того, що традиційно в навчанні геометрії алгебраїчний аналіз (порівняно з суто геометричними підходами) є більш звичним і прийнятним для учнів. Ця обставина, за умови наполегливості вчителя у трактуванні та відпрацюванні методу, сприятиме його поглибленому розумінню і формуванню на такій основі тривких навичок у застосуванні алгебри до дещо нестандартних (олімпіадних) ситуацій в геометрії.

Задача 6. Побудувати трикутник за його основою, висотою та добутком бічних сторін.



Мал. 11

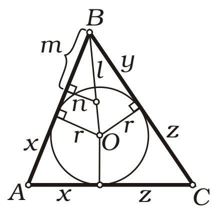
Розв'язання. Згідно з позначеннями на малюнку 11 та за умовою задачі маємо: 2*S* = *ah* = = *bc* sin ∠*A*, де добуток *bc* задано у вигляді або k^2, або *pq*. Покладемо $\sin\angle A=\frac{x}{q}$ (на малюнку $D \in AC$, *x* = *DE*, *q* = *DA*). Тоді

$$ah=pq\frac{x}{q}=px \;\Rightarrow\; x=\frac{ah}{p}.$$

Отже, відрізок *x*, а тому і кут *A* легко побудувати (пророби́ть це самостійно).

Щоб завершити пошук результату, слід розв'язати порівняно просту **задачу** на метод ГМТ, а саме: *побудувати трикутник за його основою, висотою та кутом при вершині* (див. [5], § 3, задача 16).

Задача 7. Побудувати трикутник за його периметром, кутом при вершині, а також сумою радіусів уписаного й описаного кіл.



Мал. 12

Розв'язання. Задано 2*p*, кут *B* і *R* + *r* = *s* (мал. 12). Згідно з позначеннями знайдемо:

$$y=r\cdot\text{ctg}\frac{\angle B}{2}=\frac{mr}{n} \;\Rightarrow\; b=x+z=p-y=p-\frac{mr}{n}.$$

Також із цього ж малюнка візуально видно, що

$$a+c=p+y=p+\frac{mr}{n}.$$

Із відомої рівності $S=rp=\frac{abc}{4R}$ матимемо таке:

$$ac=\frac{4Rrp}{b}=\frac{4rnp(s-r)}{pn-mr}.$$

Ще одна відома рівність $(p-a)(p-b)(p-c)=$ $=pr^2$, з урахуванням рівності $p-b=\frac{mr}{n}$, дає $p^2-p(a+c)+ac=\frac{prn}{m}$. Підставивши сюди вирази для *ac* та *a* + *c* (після нескладних формальних спрощень) матимемо:

$$\frac{mr}{n}=y=\frac{4mns-pl^2}{(2n)^2-l^2}, \text{ а } b=p-\frac{4mns-pl^2}{(2n)^2-l^2},$$

$$a+c=p+\frac{4mns-pl^2}{(2n)^2-l^2}.$$

Отже, розв'язання зведено до простої задачі на побудову *трикутника за відомими основою,* *кутом при вершині та сумою бічних сторін* (див. [3], тема 5, задача 22).

Деталізуємо алгоритм побудови відрізків b й $a + c$. Послідовно маємо:

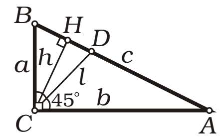
$$\frac{4mns-pl^2}{(2n)^2-l^2}=\left[\frac{4mn}{l}s-\left(\sqrt{pl}\right)^2\right]:\left(\frac{4mn}{l}-l\right)=$$

$$\left(\frac{4mn}{l}-l\right)=\frac{m_1s-m_2^2}{m_3-l}=\frac{m_4^2-m_2^2}{m_5}=\frac{m_6^2}{m_5}=m_7.$$

Таким чином, $b = p - m_7$, $a + c = p + m_7$.

Зауважимо, що знаючи r (з рівності $\frac{mr}{n}=y$) можна виразити через уже відомі відрізки $a + c$ та ac, а також знайти після цього окремо сторони a та c, однак це пов'язано з більш копіткими побудовами.

Задача 8. Побудувати прямокутний трикутник за гіпотенузою c і бісектрисою l прямого кута.



Мал. 13

Аналіз. Майже очевидно, що задача легко розв'яжеться, якщо пощастить виразити через c і l (а потім ще й побудувати) висоту h шуканого трикутника, проведену до гіпотенузи ([6], § 11, задача 53). Із малюнка 13 вельми добре видно, що

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ADC} + S_{\Delta DBC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}ch=\frac{1}{2}bl\sin 45°+\frac{1}{2}al\sin 45° \text{ або}$$

$$ch=\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)l \quad (*).$$

Щоб виключити з цього співвідношення невідомі катети a і b, запишемо ще дві властиві винятково прямокутному трикутнику рівності:

$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ і } \frac{1}{2}ch=\frac{1}{2}ab.$$

З них прямо випливає: $a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ch$. З урахування формули (*), матимемо $2c^2h^2 = (a + b)^2l^2$ або $2c^2h^2 = (c^2 + 2ch)l^2$. Таким чином, шукана висота буде знайдена з рівняння $2ch^2 - 2l^2h - cl^2 = 0$, з якого матимемо *єдиний* додатний розв'язок:

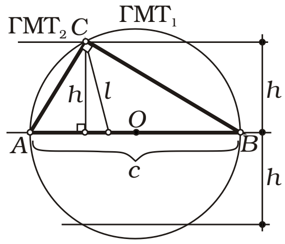
$$h=\frac{l\left(l+\sqrt{l^2+2c^2}\right)}{2c} \quad (**).$$

Побудова за формулою (**) досить проста:

1. Будуємо відрізок m, який є гіпотенузою прямокутного трикутника з катетами l і $c\sqrt{2}$: $m=\sqrt{l^2+2c^2}$ (ОАП$_6$).

2. Знаходимо суму n відрізків l і m: $n = l + m$ (ОАП$_1$).

3. Висоту трикутника h, що є четвертим пропорційним відрізком до l, n і $2c$, одержуємо шляхом виконання ОАП$_5$. Побудова методом ГМТ трикутника ABC за бісектрисою і висотою, проведеними з вершини прямого кута, чітко проілюстрована малюнком 14.



Мал. 14

Доведення випливає безпосередньо з побудови та із застосуванням зворотних міркувань до тих, які вже наведені в аналізі.

Дослідження. Очевидно, що точка C в побудові реально існує тоді й лише тоді, коли $h\le\frac{c}{2}$, тобто, коли

$$\frac{l\left(l+\sqrt{l^2+2c^2}\right)}{2c}\le\frac{c}{2}.$$

Після спрощення (розв'язання нерівності) ця умова буде такою: $l\le\frac{c}{2}$. Якщо $l<\frac{c}{2}$, пара прямих і коло перетинаються в чотирьох точках; отже, матимемо чотири трикутники. Але ж всі вони рівні між собою, й тому говорять, що задача має *єдиний* розв'язок. Якщо $l=\frac{c}{2}$, тобто прямі та коло дотикаються, розв'язком буде рівнобедрений прямокутний трикутник. Можна просто довести, що два прямокутні трикутники з рівними гіпотенузами і рівними бісектрисами прямих кутів рівні між собою. Тому інших розв'язків задача *немає*.

Задача 9. Побудувати прямокутний трикутник за сумою його катетів і висотою, проведеною до гіпотенузи.

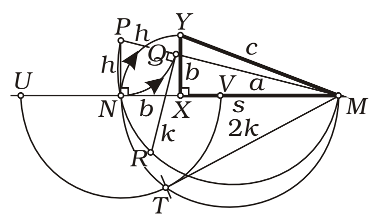
Розв'язання. За умовою задачі $a + b = s$, де s — заданий відрізок. Крім того, маємо очевидні рівності $a^2 + b^2 = c^2$ та $2S = ab = ch$, де h — задана висота. Тоді $(ab)^2 = h^2c^2 = h^2(a^2 + b^2)$ (*). Далі $a^2 + b^2 + 2ab = s^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = s^2 - 2ab$; тому рівність (*) матиме вигляд:

$$(ab)^2 + 2h^2(ab) - h^2s^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ab=h\left(\sqrt{h^2+s^2}-h\right)=k^2.$$

За теоремою Вієта катети a і b є коренями рівняння

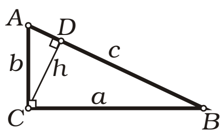
$$x^2 - sx + k^2 = 0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}\left(s\pm\sqrt{s^2-4k^2}\right).$$



Мал. 15

Відповідну побудову показано на малюнку 15. Її можна виконати в такому порядку. Спочатку побудуємо відрізок k. Для цього будуємо прямокутний трикутник MNP із катетами $MN = s$ та $NP = h$. Тоді, якщо відкласти $PQ = PN = h$, то $QM = \sqrt{h^2+s^2} - h$ (див. вираз k^2). Далі досить на MP побудувати півколо і провести $QR \perp MP$; $QR = k$. Ще побудуємо півколо на MN і зробимо на ньому відмітку радіусом $MT = 2k$. Отримаємо $NT = \sqrt{s^2 - 4k^2}$. Проведемо, нарешті, півколо з центром у точці N радіусом NT. Тепер легко будуємо трикутник MXY, в якого $MX = \frac{1}{2}MU = a$, $XY = \frac{1}{2}MV = XN = b$.

Задача 10. Побудувати прямокутний трикутник за різницею його катетів та висотою, проведеною до гіпотенузи.



Мал. 16

Розв'язання. Якщо (мал. 16) $a - b = s$ і $CD = h$ ($h \perp AB$) — дані відрізки у прямокутному трикутнику ABC, то $ab = ch$ і $a^2 + b^2 = c^2$. Крім цього, з умови маємо, що $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = s^2$, тому $s^2 = c^2 - 2ch$. Отже, гіпотенуза c шуканого трикутника однозначно виражається з такого рівняння: $c^2 - 2ch - s^2 = 0$. Звідси $c = h + \sqrt{h^2+s^2}$. Таким чином, побудову зведено до дійства, аналогічного як у задачі 8.

Небезінтересно, що через s і h, до того ж, можна легко виразити катети шуканого прямокутного трикутника ABC. Справді, $b = a - s$, а $ab = a(a - s) = a^2 - as = ch$. Звідси

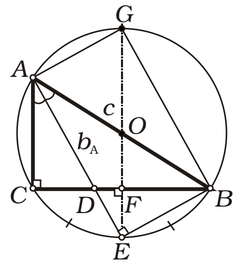
$$a^2 - sa - ch = 0 \text{ і } a = \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + h\left(h + \sqrt{h^2+s^2}\right)};$$

$$b = \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + h\left(h + \sqrt{h^2+s^2}\right)} - s$$

$$= \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + h\left(h + \sqrt{h^2+s^2}\right)} - \frac{s}{2}.$$

Тут побудови лінійкою та циркулем можна подати таким ланцюжком ОАП: 1) $m = \sqrt{h^2+s^2}$ (ОАП$_6$); 2) $c = h + m$ (ОАП$_1$); 3) $p = \sqrt{hc}$ (ОАП$_7$); 4) $q = \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + p^2}$ (ОАП$_6$); 5) $a = \frac{s}{2} + q$ (ОАП$_1$); 6) $b = q - \frac{s}{2}$ (ОАП$_1$).

Задача 11. Побудувати прямокутний трикутник за його гіпотенузою і бісектрисою гострого кута.



Мал. 17

Розв'язання. *Спосіб 1.* Нехай у прямокутному трикутнику ABC (мал. 17) відомо $AB = c$ й $AD = b_A$. Розглянемо описане коло з центром O та середину E дуги BC. Тоді $E \in AD$. Якщо діаметр EG вибрати довільно, то для побудови залишається визначити положення вершини A, тобто виразити довжину відрізка AE через задані відрізки. Позначимо $AE = x$, $BE = y$. У прямокутному трикутнику BEG істинно $EF \cdot EG = y^2$. Із подібності трикутників EAG та EFD випливає, що $AE \cdot DE = EF \cdot EG = x(x - b_A) = y^2$ (*). Але $x^2 = c^2 - y^2$ (**). Додавши рівняння (*) і (**), отримаємо таке:

$$2x^2 - b_A x - c^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{b_A}{4} + \sqrt{\left(\frac{b_A}{4}\right)^2 + \left(\frac{c}{\sqrt{2}}\right)^2}.$$

Останній відрізок легко побудувати.

Спосіб 2. Враховуючи, що $\cos\frac{\angle A}{2} = \frac{x}{c}$, застосуємо теорему синусів до трикутника ABD:

$$\frac{c}{\sin\angle D} = \frac{b_A}{\sin\angle B} \text{ або } \frac{c}{\cos\frac{\angle A}{2}} = \frac{b_A}{\cos\angle A} = \frac{b_A}{2\cos^2\frac{\angle A}{2} - 1}.$$

Це врешті приводить до того самого рівняння.

На відміну від номерів 6 — 10, в останній задачі поняття і властивості площі не використовувалися. В ній принципово важливо розуміння учнем геометричної суті взаємозалежностей між елементами комбінації фігур: коло — прямокутний трикутник, уписаний в коло.

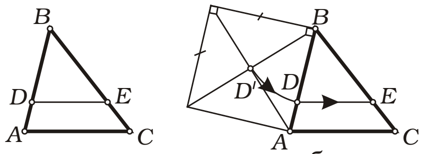
У попередніх задачах поняття площі використовувалось як зв'язувальна ланка між заданими і невідомими величинами. Розглянемо ще кілька задач, в яких це поняття фігурує вже в самій умові.

Задача 12. Прямою, паралельною до основи, поділити заданий трикутник на частини, площі яких, рахуючи від основи, дорівнюють заданому відношенню.

Розв'язання. Введемо позначення $S_{\Delta ABC} = S_A$, $S_{\Delta DBE} = S_D$ (мал. 18, *а*). Маємо

$$\frac{S_A}{S_D} = \frac{BA^2}{BD^2} \Rightarrow \frac{S_A - S_D}{S_D} = \frac{BA^2 - BD^2}{BD^2}.$$

Це і є, за змістом задачі, заданим відношенням. Однак за формою воно може бути різним, а від цього залежить остаточна побудова відрізка BD, який, що очевидно, дає розв'язок задачі, оскільки тоді можна провести шукану пряму DE.



а *б*

Мал. 18

Справді, нехай спочатку записане відношення дорівнює відношенню площ заданих прямокутників. Якщо сторонами першого прямокутника є відрізки a та b, а другого — c і d, то

$$\frac{BA^2-BD^2}{BD^2}=\frac{ab}{cd} \Rightarrow BD=\frac{BA\sqrt{cd}}{\sqrt{ab+cd}}.$$

У процесі побудови дістанемо послідовність відрізків $k_1=\sqrt{ab}$, $k_2=\sqrt{cd}$, $k_3=\sqrt{k_1^2+k_2^2}$ і, нарешті, $BD=\frac{BAk_2}{k_3}$. Цей відрізок легко побудувати.

Більш загально відношення площ можна задати у вигляді $\frac{a^n}{b^n}$, де a, b — задані відрізки. Тоді

$$\frac{BA^2-BD^2}{BD^2}=\frac{a^n}{b^n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BD=\sqrt{BA\frac{BAb^n}{a^n+b^n}}=\sqrt{BA\frac{BAb}{\frac{a^n}{b^{n-1}}+b}}.$$

Побудова відрізка

$$\frac{BAb}{\frac{a^n}{b^{n-1}}+b}$$

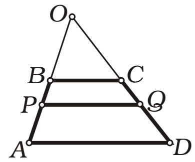
зводиться до послідовної побудови четвертого пропорційного відрізка, після чого остаточно відрізок BD будується як середнє геометричне.

Звичайно, розглядуване відношення можна задати також у такий спосіб, що задача не буде розв'язуватися за допомогою лінійки та циркуля, про що на початку статті вже йшлося. Згадуємо це тому, що іноді відношення площ задають конкретним числом, і тут не завадить знати, що побудова не завжди можлива (наприклад, коли відношення дорівнює π).

У частинному випадку відношення площ трикутників може дорівнювати за умовою відношенню певних натуральних чисел. Нехай, наприклад, $\frac{S_A}{S_D}=\frac{2}{1}$; отже, тут потрібно провести таку пряму DE, яка розділить зображений трикутник на дві рівновеликі частини ($S_{\Delta DBE}=S_{\Delta DEC}$). Тоді $\frac{BA^2}{BD^2}=\frac{2}{1} \Rightarrow BD=\frac{BA\sqrt{2}}{2}$.

Тривіальну побудову демонструє малюнок 18, *б*.

Задача 13. Прямою, паралельною до основ трапеції, поділити її на частини, відношення площ яких, рахуючи від меншої основи, задано.



Мал. 19

Розв'язання. Нехай пряма PQ є шуканою (мал. 19). Добудуємо трапецію $ABCD$ до трикутника AOD. Урахувавши результати задачі 12, матимемо різниці площ:

$$S_p-S_B=S_B\frac{OP^2-OB^2}{OB^2};$$

$$S_A-S_P=S_P\frac{OA^2-OP^2}{OP^2} \Rightarrow$$

$$\frac{S_P-S_B}{S_A-S_P}=\frac{S_B}{S_P}\cdot\frac{OP^2\left(OP^2-OB^2\right)}{OB^2\left(OA^2-OP^2\right)}=\frac{OP^2-OB^2}{OA^2-OP^2}$$

(оскільки $\frac{S_B}{S_P}=\frac{OB^2}{OP^2}$).

Це і є виразом шуканого відношення.

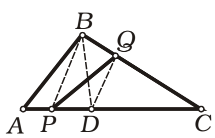
Побудова відрізка OP залежить від конкретного виразу відношення. Нехай, наприклад, $\frac{OP^2-OB^2}{OA^2-OP^2}=\frac{m^2}{n^2}$ (m та n — задані відрізки). Тоді маємо:

$$OP=\sqrt{\frac{OA^2m^2+OB^2n^2}{m^2+n^2}}=\sqrt{\frac{OA^2m^2+OB^2n^2}{m_1^2}}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{OAm}{m_1}\right)^2+\left(\frac{OBn}{m_1}\right)^2}=\sqrt{m_2^2+m_3^2}.$$

Знаючи відрізок OP, можна на малюнку 19 провести пряму PQ.

Задача 14. Через точку на стороні даного трикутника провести січну, яка ділить його площу в заданому відношенні.



Мал. 20

Аналіз. Нехай P — задана точка на AC, а $S_{ABQP} : S_{PQC} = m^2 : n^2$ (мал. 20). Розглянемо на основі AC точку D, що ділить її в такому самому відношенні. Якщо $AC = b$, $AD = x$, то

$$\frac{x}{b-x}=\frac{m^2}{n^2} \Rightarrow x=\frac{bm^2}{m^2+n^2}=\frac{bm^2}{m_1^2}=\left(\frac{bm}{m_1}\right)\frac{m}{m_1}=\frac{m_2m}{m_1};$$

отже, точку D легко побудувати (1). Далі маємо

$$\frac{AD}{DC}=\frac{S_{ABD}}{S_{DBC}} \Rightarrow \frac{S_{ABD}}{S_{DBC}}=\frac{S_{ABQP}}{S_{PQC}}.$$

Оскільки при цьому $S_{ABD}+S_{DBC}=S_{ABQP}+S_{PQC}$, дістаємо $S_{ABD}=S_{ABQP}$ (і $S_{DBC}=S_{PQC}$). Отже, $S_{ABP}+S_{PBD}=S_{ABP}+S_{PBQ} \Rightarrow S_{PBD}=S_{PBQ}$. Звідси $DQ \parallel PB$; тому пряму DQ, а отже і точку Q можна побудувати (2). Таким чином, можна побудувати шукану січну PQ (3). Аналіз закінчено.

Доведення. Воно безпосередньо випливає з аналізу.

У підсумку зазначимо наступне.

В **алгебраїчному** *методі задачу можна вважати розв'язаною, якщо знайдено остаточний аналітичний вираз величини, що забезпечує її побудову і який обов'язково допускає можливість побудувати всю шукану фігуру*. Проте часто буває важливим (доцільним з огляду на педагогічний процес) реально побудувати цю фігуру або, хоча б, описово простежити шлях побудови. В деяких із розглянутих задач цей процес реалізовується з елементами своєрідного **мистецтва**. З одного боку, за здобутими виразами побудови можна вести розрізнено, проміжні відрізки і кути будувати окремо в різних місцях дошки або зошита. Тоді доведеться робити чималу кількість зайвих побудов. Це — підхід за принципом «аби побудувати». Проте можна спочатку проаналізувати результати, підмітити цікаві зв'язки і продумати компактну побудову, тобто знайти найкоротший шлях малюнкового здобуття шуканої фігури. Це дисциплінує мислення, приносячи певне естетичне та моральне задоволення.

ЛІТЕРАТУРА

1. Адлер А. Теория геометрических построений. — Одесса: Матезис, 1924. — 304 с.

2. Бевз Г. П. Геометрія: Підручник для 7-9 класів загальноосвітніх навчальних закладів / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. — К.: Вежа, 2001. — 272 с.

3. Энциклопедия элементарной математики: В 4-х кн. — М.: Физматгиз, 1963. — Кн. 4. — 567 с.

4. Боравльов А. П. Аналіз у розв'язуванні задач на побудову: Навчальний посібник / А. П. Боравльов, І. Г. Ленчук. — К.: Вища шк., 2002. — 192 с.

5. Ленчук І. Г. Системний підхід у навчанні планіметричним побудовам: Навчально-методичний посібник / І. Г. Ленчук. — Житомир: вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2006. — 154 с.

6. Погорєлов О. В. Геометрія: Підручник для 7 — 9 класів середньої школи. — К.: Освіта, 1998. — 224 с.

Читайте в наступних номерах:

* * *

➢ «Математичний спринт» (*гра для учнів 8 — 9 класів*)

* * *

➢ Приклади розв'язування рівнянь, що мають цілу і дробову частину числа

* * *

➢ Навчально-теоретичні задачі з математики

* * *

➢ Інтегрований урок з математики та інформатики

На першій сторінці обкладинки використано картину французького художника Віктора Вазарелі.

ДЕРЖАВНЕ ІНФОРМАЦІЙНО-ВИРОБНИЧЕ ПІДПРИЄМСТВО ВИДАВНИЦТВО «ПЕДАГОГІЧНА ПРЕСА»

Директор видавництва
Олексій ОСЬКІН

Головний редактор редакції журналів
Ніна БЕРІЗКО

Адреса видавництва та редакції:

01054, Київ, вул. Олександра Довженка, 3
Тел.: 456-37-02
E-mail: 2345255@ukr.net
журнал «Математика в рідній школі»

Рекламний відділ:
тел. (044) 456-37-02
E-mail: pedpressa@ukr.net

Над номером працювали:
Олена ПОПОВИЧ
Ірина КОСОНОЦЬКА
Марина КОЛМАГОРОВА
Віктор ДЯЧЕНКО

Підписано до друку 03.08.2016.
Формат 60×84 1/8.
Папір офсет. Друк офсет.
Умов. друк. арк. 6,51.
Обл.-вид. арк. 7,2. Наклад 367 пр.
Зам.

Друк ТОВ «Фірма Антологія»
03680, Київ, вул. Олександра Довженка, 3
тел. (067) 693-12-19