ЗАДАЧІ НА ПОБУДОВУ: КОМБІНАЦІЇ РУХІВ І ПОДІБНОСТІ

Іван ЛЕНЧУК — професор кафедри алгебри та геометрії Житомирського державного університету імені Івана Франка, доктор педагогічних наук

Анотація. Прикладами розв'язання планіметричних задач на побудову продемонстровано методику використання з цією метою комбінованих методів перетворень: гомотетичного повороту (із заданим центром і центром, який потрібно побудувати); дзеркально-подібного перетворення і оберненого до нього гомотетичного відбиття; гомотетичного паралельного переносу.

Ключові слова. Гомотетичний поворот, дзеркально-подібне перетворення, гомотетичне відбиття, гомотетичний паралельний перенос.

Иван ЛЕНЧУК. Задачи на построение: комбинации движений и подобия.

Аннотация. Примерами решения планиметрических задач на построение продемонстрировано методику использования с этой целью комбинированных методов преобразований: гомотетичного поворота (с заданным центром и центром, который нужно построить); зеркально-подобного преобразования и обратного к нему гомотетичного отражения; гомотетичного параллельного переноса.

Ключевые слова. Гомотетия и поворот, зеркально-подобное преобразование, гомотетия и отражение, гомотетия и параллельный перенос.

Ivan LENCHUK. Construction problems: combinations of moves and likeness.

Summary. Examples of solving problems in the construction of planimetric demonstrated technique of using for this purpose the combined methods of transformation: homothetic rotation (with a given center and the center, which is required to build); mirror-like transformation and return him homothetic reflection; homothetic parallel transfer.

Keywords. Homothetic rotate, mirror-like transformation, reflection homothetic, homothetic parallel translation.

Систематичне розв'язування задач конструктивного характеру робить вагомий внесок у формування окремих ключових *компетентностей* учня, зокрема загальнонавчальної (уміння вчитися), комунікативної (здатності грамотно формулювати і висловлювати судження) та загальнокультурної. Формування цих компетентностей підпорядковується реалізації загальних завдань шкільної математичної освіти [2].

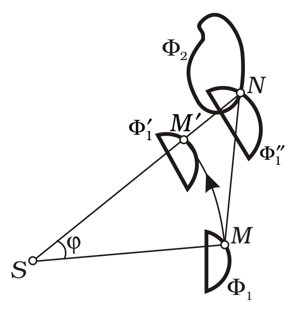
Мету даної статті ми бачимо *у вибірковій типізації задач*, в розв'язанні яких методи рухів комбінуються з методом подібності (зокрема, гомотетії). Більшість із задач *олімпіадного* характеру мають підвищений ступінь складності та майже не аналізуються в навчально-методичній літературі.

Якщо тільки *перетворення подібності* відрізняється від **руху** і **гомотетії** (тобто є загальним), то його *можна представити композицією цих двох перетворень*: $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{h}$, що зумовлює виділення відповідних **типів** задач на побудову.

Спочатку зупинимося на задачах, пов'язаних із композицією **гомотетії** та **повороту** (*гомотетичного повороту*), в яких відповідний центр не треба спеціально будувати, оскільки він уже є серед заданих точок і його, образно кажучи, залишається тільки побачити.

Задача 1 (*типова задача*). Побудувати трикутник заданої форми так, щоб одна його вершина лежала в заданій точці, а дві інші — на заданих лініях.

Аналіз. Нехай трикутник *MSN* задовольняє умову задачі (мал. 1). Це означає, зокрема, що відомо кут φ та відношення сторін *SM* : *SN* = = *m* : *n*. Очевидно, для побудови досить знайти одну з точок *M* або *N*. Знайдемо останню. Для цього спочатку розглянемо **поворот** R_S^{φ}. При цьому відрізок *SM* перейде у відрізок *SM'* = *SM*, фігура Φ_1 — у фігуру Φ_1' (1). Оскільки $M \in \Phi_1$, маємо $M' \in \Phi_1'$. Далі розглянемо **гомотетію** H_S^k, де $k = \frac{n}{m}$. Тоді $N = H_S^k(M')$, $H_S^k(\Phi_1') = \Phi_1''$ (2), а оскільки $M' \in \Phi_1'$, маємо $N \in \Phi_1''$; тому $N \in \Phi_2 \cap \Phi_1''$. Для відшукання точки *M* досить провести з точки *S* промінь під кутом φ до променя *SN* (3).

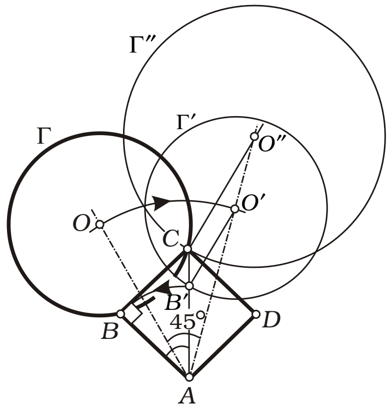


Мал. 1

Доведення. З побудови випливає, що *M* і *N* — відповідна пара точок у гомотетичному повороті, визначеному центром S, кутом φ і коефіцієнтом k, а це означає, що трикутник MSN має форму, що задовольняє умову задачі.

Демонстрацію з реальними планіметричними фігурами правила-орієнтира конструктивних дій, який описано в тексті типової задачі, можна детально здійснити шляхом розв'язання наступної пропозиції.

Задача 2. Побудувати квадрат, одна вершина якого лежить у заданій точці, а протилежна і одна із двох суміжних вершин — на заданому колі.



Мал. 2

Аналіз. Нехай на малюнку 2 точка A і коло Γ — задані, а чотирикутник $ABCD$ задовольняє умову задачі. **Поворот** із центром у заданій точці A на кут 45° (наприклад, за годинниковою стрілкою) переводить коло Γ в коло Γ′, а вершину квадрата B, що належить колу Γ, — в точку $B' = \Gamma' \cap AC$ (тут $\angle BAB' = 45°$, $AB = AB'$). У свою чергу, **гомотетія** з центром у цій самій точці A та з коефіцієнтом k, що дорівнює $\sqrt{2}$, призведе до такого результату: $H_A^k(B') = C$; $H_A^k(\Gamma') = \Gamma''(O'', r'' = O''C)$; тут $C = \Gamma \cap \Gamma''$, а $O''C \parallel O'B'$.

Побудова. 1) Здійснюємо **поворот** із центром у точці A на кут 45° кола Γ ($\angle OAO' = 45°$, $AO = AO'$ і $\Gamma' = S_A^{45°}(\Gamma)$).

2) Коло Γ′ піддаємо перетворенню **гомотетії** з центром у точці A і коефіцієнтом

$k = \sqrt{2}$ $\left(\Gamma'' = H_A^{\sqrt{2}}(\Gamma')\right)$.

3) Знаходимо точку C перетину кіл Γ і Γ″.

4) З'єднуємо точки A і C.

5) Фіксуємо спільну точку B' відрізка AC і кола Γ′.

6) **Поворотом** із центром у точці A на кут (– 45°) будуємо точку B ($S_A^{-45°}(B') = B$).

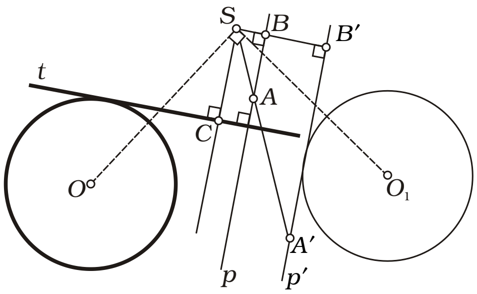
7) Провівши через точки A і C прямі, відповідно паралельні відрізкам BC і BA, знаходимо точку D.

Стверджуємо, що $ABCD$ — шуканий квадрат.

Доведення. Воно випливає безпосередньо із властивостей повороту і гомотетії, а також обумовлюється відомим співвідношенням між стороною та діагоналлю квадрата. Задачу розв'язано.

Додамо, що в разі виконання найпершого повороту проти годинникової стрілки, далі коефіцієнт гомотетії k береться рівним $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Обґрунтуйте цей факт і виконайте самостійно малюнок. Корисно також провести дослідження кількості розв'язків за малюнками 1 і 2.

Задача 3. Задано коло та дві точки. Провести до кола таку дотичну, щоб відношення відстаней від першої точки до цієї дотичної та до перпендикуляра, опущеного на дотичну із другої точки, дорівнювало заданому відношенню.



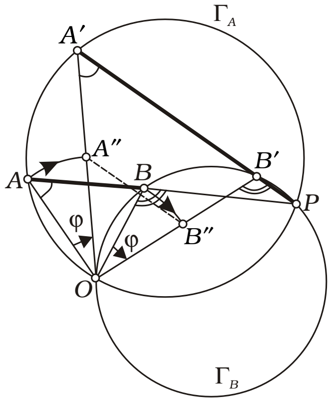
Мал. 3

Аналіз. Нехай на малюнку 3 задано коло (O), першу точку S, другу — A, шукану дотичну t, причому $SC : SB = m : n = k$ (задане відношення). Якби точки B і C лежали на одній прямій з S, то їх можна було б розглядати як відповідні в гомотетії з центром S. Оскільки $SC \perp SB$, виникає думка **повернути** систему $\{t - (O)\}$ на 90° навколо точки S. При цьому точка C перейде в точку $B' = H_S^k(B)$, дотична t — у пряму $p' \parallel p$, коло з центром O — в коло з центром O_1 (1), що дотикається до p'. Очевидно, $p' = H_S^k(p)$; тому пряма p' проходить через точку $A' = H_S^k(A)$, яку можна побудувати (2). Отже, маючи коло з центром O_1 та точку A', можна провести дотичну p' (3), а отже, і перпендикулярну до неї шукану дотичну t (4).

Доведення. Проведемо через точку A пряму $p \parallel p'$ й опустимо з S перпендикуляри на t та p'. Дістанемо точки C, B і B'. Прямі p та p', а отже, й точки B і B' є відповідними в **гомотетії** з центром S, що переводить точку A в точку A'; тому $SB' : SB = m : n$. Поворот $R_S^{-90°}$ переводить коло з центром O_1 у коло з центром O (за побудовою). Оскільки $t \perp p'$ (за побудовою), $R_S^{-90°}(p') = t$. Через те, що при цьому $\angle CSB' = 90°$, маємо $R_S^{-90°}(B') = C$; тому $SC : CB = m : n$. Отже, дотична t задовольняє умову. Задачу розв'язано.

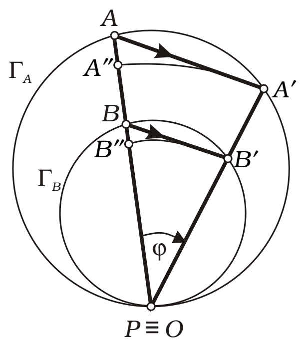
Тепер зупинимося на задачах, в яких ***центра*** **гомотетичного повороту** ***немає*** серед заданих точок, і для розв'язання відповідного прикладу згаданий центр слід спочатку побудувати. З'ясуємо цю побудову. Нехай деяке власноподібне перетворення $f(k \neq 1)$ задано відрізками

AB й $A'B'$. Якщо $AB \parallel A'B'$, то f буде гомотетією з центром $S = AA' \cap BB'$. Отже, нехай AB $A'B'$. Позначимо $AB \cap A'B' = p$ та розглянемо кола Γ_A і Γ_B, що визначаються відповідно трійками точок P, A, A' та P, B, B'. Можливі два випадки.



Мал. 4

***Випадок* 1.** Кола Γ_A і Γ_B перетинаються ще в одній точці O (мал. 4). Матимемо: $\angle OAP = \angle OA'P$ і $\angle OBP = \angle OB'P \Rightarrow \Delta OAB \sim \Delta OA'B' \Rightarrow \angle AOB = \angle A'OB' \Rightarrow \angle AOA' = \angle BOB' = \varphi$. Нехай $\Delta A''OB'' = R_O^{\varphi}(\Delta AOB)$. Тоді, очевидно, $\Delta A'OB' = H_O^k(\Delta A''OB'')$ ($k = A'B' : AB$). Отже, перетворення подібності f **розкладено** на **поворот** навколо деякої точки O (яку вміємо будувати) та **гомотетію** з центром у тій самій точці.

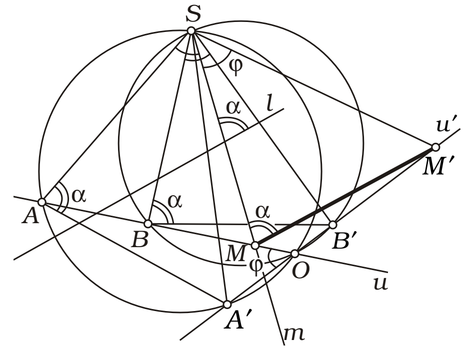


Мал. 5

***Випадок* 2.** Кола Γ_A і Γ_B дотикаються, $O \equiv P$ — центр їх гомотетії і звідси випливає, що $AA' \parallel BB'$ (мал. 5). Навпаки, якщо $AA' \parallel BB'$, то кола Γ_A і Γ_B в точці P дотикаються ($O \equiv P$).

Отже, в останньому випадку кола Γ_A і Γ_B для побудови точки O проводити не треба. На малюнку 5 показано **розклад** перетворення f на **гомотетію** H_O^k та **поворот** R_O^{φ}: $A \to A'' \to A'$, $B \to B'' \to B'$. Очевидно, що в обох випадках порядок виконання перетворень, на які розкладено перетворення f, допустимо змінювати. Наголосимо, що точка O є подвійною точкою гомотетичного повороту: $O \to O$ (або інакше $O' \equiv O$). Це важливий момент, який буде використаний при розв'язуванні задач.

Задача 4. На прямих u та u' задано точки A й A'. Знайти на цих прямих такі точки M і M', щоб пряма MM' мала заданий напрям, а відношення $A'M' : AM$ дорівнювало заданому відношенню.



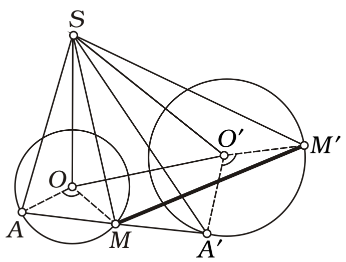
Мал. 6

Аналіз. Нехай задане в умові відношення дорівнює $m : n = k$ (m, n — задані відрізки). Шукані точки M та M' розглядатимемо як одну з пар відповідних точок у **гомотетичному повороті**, який пряму u переводить у пряму u', а точку A — в точку A'. Кут повороту — це кут φ між заданими прямими (мал. 6). Якщо взяти на u довільну точку B, то на прямій u' можна визначити відповідну їй точку B' (з якогось боку від A') за умовою $A'B' : AB = m : n$ (1). Нехай $u \cap u' = O$. Як показано вище, центр S гомотетичного повороту належить перетину кіл, описаних навколо трикутників OAA' й OBB' (2), причому $S' \equiv S$. Оскільки для довільної відповідної пари точок B, B' маємо $S'B' : SB = SB' : SB = k$ і $\angle BSB' = \varphi$, всі трикутники типу ASA', BSB', MSM', ... подібні між собою; отже, $\angle SAA' = \angle SBB' = \angle SMM' = \ldots = \alpha$ (кут, відомий після побудови точки S). Нехай на малюнку 6 M та M' — шукані точки. За умовою $MM' \parallel l$ (заданий напрям). Отже, $\angle(l, m) = \angle SMM' = \alpha$, тому пряму m легко побудувати (3). Тоді $M = m \cap u$. Провівши через точку M пряму, паралельну l, дістанемо у перетині із прямою u' іншу точку M' (4).

***Доведення*.** Його дуже легко провести від супротивного. Припустимо, що точка M' не задовольняє умову задачі. Це означає, що $A'M' : AM \neq k$. Тоді розглянемо на u' таку точку M'', щоб $A'M'' : AM = k$ (із відповідного боку від A'). Пара точок M, M'' є відповідною у заданому гомотетичному повороті; отже, $\angle SMM'' = \alpha$. Проте за побудовою $\angle SMM' = \alpha$, тому через точку M проходять дві прямі, паралельні l, що суперечить аксіомі паралельності. Задачу розв'язано.

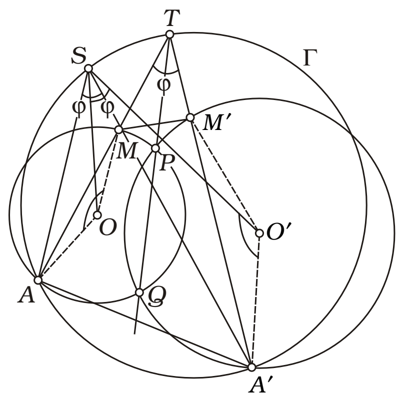
Типовими (на гомотетичний поворот) є ще такі дві задачі, в розв'язанні яких зорієнтуватися самостійно за вже готовими малюнками надто просто.

Задача 5. На колах із центрами O й O' задано точки A та A'. Знайти на цих колах такі точки M й M', щоб $\angle AOM = \angle A'O'M'$, а відрізок MM' мав задану довжину (мал. 7).



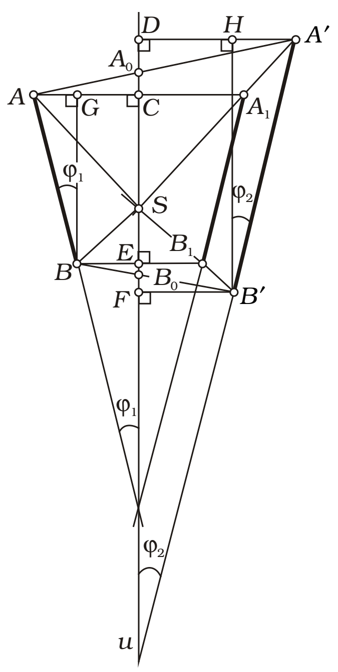
Мал. 7

Задача 6. На колах із центрами O й O' задано по точці A та A'. Побудувати на цих колах ще по точці M й M' так, щоб $\angle AOM = \angle A'O'M'$ і точки A, A', M, M' лежали на одному колі (мал. 8).



Мал. 8

Усі ми знаємо, що в послідовному застосуванні гомотетія зберігає орієнтацію площини, а осьова симетрія — змінює її. Отже, композиція цих перетворень, узятих у довільному порядку, змінює орієнтацію площини. Указане ***перетворення*** фігур ще називають ***дзеркально-подібним***.



Мал. 9

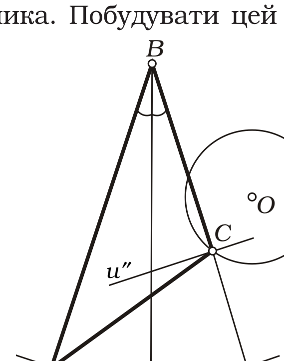
А зараз розглянемо **обернену задачу**: *розкласти дзеркально-подібне перетворення f на* ***гомотетію*** *та* ***осьову симетрію***. Нехай воно задано двома нерівними відрізками AB й $A'B'$ (мал. 9). Візьмемо на відрізках AA' і BB' такі точки A_0 та B_0, щоб $\frac{A'A_0}{AA_0} = \frac{B'B_0}{BB_0} = \frac{A'B'}{AB} = k$. Проведемо пряму $u \equiv A_0B_0$ й опустимо на неї перпендикуляри AC, $A'D$, BE, $B'F$. Розглянемо також відрізки $BG \perp AC$ і $B'H \perp A'D$. Матимемо $\frac{A'D}{AC} = \frac{A'A_0}{AA_0} = k$, $\frac{B'F}{BE} = \frac{B'B_0}{BB_0} = k$, а тому $\frac{A'H}{AG} = \frac{A'D - B'F}{AC - BE} = \frac{kAC - kBE}{AC - BE} = k = \frac{A'B'}{AB}$.

Звідси $\frac{AG}{AB} = \frac{A'H}{A'B'}$, а отже, згідно з позначеннями $\varphi_1 = \varphi_2$ (*). Нехай $A_1B_1 = S_u(AB)$. На підставі рівності (*) маємо $A_1B_1 \parallel A'B'$. Позначимо $S = A_1A' \cap u$. Тоді $\frac{SA'}{SA_1} = \frac{A'D}{A_1C} = \frac{A'D}{AC} = k$. Крім того, ($\frac{A'B'}{A_1B_1} = \frac{A'B'}{AB} = k$ і $\angle SA_1B_1 = \angle SA'B'$) $\Rightarrow \Delta SA_1B_1 \sim \Delta SA'B' \Rightarrow \angle A_1SB_1 = \angle A'SB'$; таким чином, точки S, B_1 та B' лежать на одній прямій.

Таким чином, нами доведено, що перетворення f розкладається на ***гомотетію з центром*** $S \in u$ і **симетрію *відносно осі*** u. Неважко переконатися, що ці перетворення можна з тим самим результатом виконувати у зворотному порядку (вони переставні). S — єдина подвійна точка перетворення f (подібність, що має дві подвійні точки, очевидно, вироджується в рух). Комутативну композицію розглянутих перетворень $f = S_u \cdot H_S^k = H_S^k \cdot S_u$ називають **гомотетичним відбиттям**.

Наступну задачу будимо розв'язувати за допомогою цього перетворення.

Задача 7. У шуканому трикутнику задано його вершину, напрям бісектриси, що виходить з неї і відношення бічних сторін. Задано також пряму та коло, яким мають належати кінці основи трикутника. Побудувати цей трикутник.



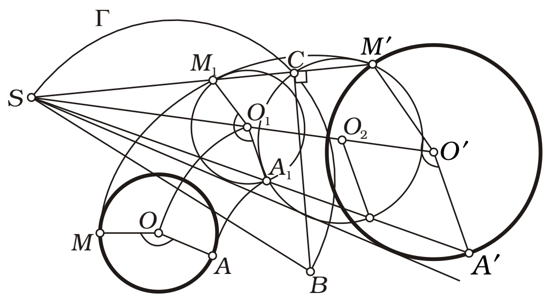
Мал. 10

Аналіз. Нехай у трикутнику ABC (мал. 10) b_B — бісектриса кута B, $BA : BC = m : n$ (m, n — задані відрізки), $A \in u$, $C \in (O)$. Очевидно, **симетрія** S_{b_B} переводить пряму BA у пряму BC. Нехай $u' = S_{b_B}(u)$ (1). Оскільки точка A належить прямій u, точка $A' = S_{b_B}(A)$ лежить на прямій u'. Одночасно точка A' належить прямій BC. При цьому $BA' : BC = BA : BC = m : n$; а тому **гомотетія** $H_B^k\left(k = \frac{n}{m}\right)$ переводить точку A' у точку C. Отже, через C проходить пряма $u'' = H_B^k(u')$ (2). Таким чином, одна з шуканих вершин C належить перетину прямої u'' із колом, що має центр O. Для побудови вершини A залишається **дзеркально відбити** пряму BC у прямій b_B (3).

Доведення. Воно випливає із властивостей розглянутих перетворень. Легко бачити, що розв'язана задача аналогічна задачі 1 із тією різницею, що поворот навколо центра гомотетії замінюється відповідним відбиттям.

Є задачі на побудову, поверховий огляд умови кожної з яких мало свідчить про те, що її розв'язання може пов'язуватись із використанням перетворення подібності; виявляється це лише у процесі аналізу. Розглянемо кілька таких задач.

Задача 8. На колах із центрами O й O' задано по точці A та A'. Побудувати на них точки M і M', рівновіддалені від заданої точки B, за умови $\angle AOM = \angle A'O'M'$.



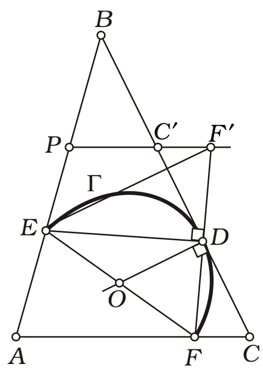
Мал. 11

Аналіз. Припустимо, що малюнок 11 задовольняє умову задачі. **Повернемо** коло O навколо точки B (як показано на малюнку) на кут, який дорівнює куту між прямими OA й $O'A'$, у положення (O_1) (1). Тоді буде $O_1A_1 \parallel O'A'$, $O_1M_1 \parallel O'M'$; отже, пряма M_1M' проходитиме через центр S **гомотетії** кіл із центрами O_1 та O' (2). Оскільки $BM_1 = BM'$, задача зводиться до побудови на цих колах відповідних у гомотетії точок, рівновіддалених від заданої точки. Нехай C — середина відрізка M_1M'. Кут BCS прямий, тому точка C належить колу Г діаметром BS (3). Розглянемо середину O_2 відрізка O_1O' (4). Коло з центром O_2, що проходить через точку C, є гомотетичним до кіл з центрами O_1 й O' у гомотетіях із центром S (зрозуміло, з різними коефіцієнтами). Отже, його можна побудувати (воно дотикається до спільної дотичної кіл із центрами O_1 та O') (5). Тоді $C \in (O_2) \cap$ Г. Пряма SC дає точку M' (а також M_1 (6)), а коло з центром B радіусом BM' — точку M (7).

Доведення. За побудовою маємо кут BCS — прямий, точка C є серединою відрізка M_1M'; отже, $BM_1 = BM'$, а за дальшою побудовою $BM' = BM$. Оскільки пари точок A_1, A' й M_1, M' — відповідні в гомотетії кіл із центрами O_1 та O', дістаємо $\angle A'O'M' = \angle A_1O_1M_1$. Поворот, обернений до (1), переводить коло з центром O_1 у коло з центром O, а точку A_1 — у точку A. За побудовою точку M_1 він переводить у точку M, а тому $\angle A_1O_1M_1 = \angle AOM$. Отже, $\angle A'O'M' = \angle AOM$. Задачу розв'язано.

У процесі розв'язування останньої задачі використовувались і **поворот**, і **гомотетія**, а ***гомотетичний поворот*** не застосовувався, оскільки центр S розглянутих гомотетій і центр повороту B — різні точки.

Задача 9. Побудувати півколо з кінцями діаметра на сторонах AB та AC заданого трикутника ABC так, щоб воно дотикалося до сторони BC у заданій точці D.



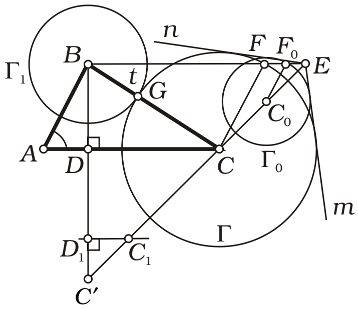
Мал. 12

Аналіз. Нехай малюнок 12 задовольняє умову задачі, а точка O є центром шуканого півкола Г. Оскільки $\angle EDF = 90°$, для побудови діаметра півкола досить знайти одну з точок E або F. Розглянемо $\Delta EDF' = S_{ED}(\Delta EDF)$. Точки F, D й F' лежать на одній прямій, причому $FD = DF'$; отже, у трикутнику EFF' відрізок OD — середня лінія, звідки $EF' \parallel OD$. Радіус OD півкола Г перпендикулярний до сторони BC, тому $EF' \perp BC$. Нехай пряма $C'P$ є образом прямої CA в центральній **симетрії** Z_D (1). Тоді кут APC' — відомий. Оскільки $Z_D(F) = F'$ та $F \in AC$, маємо $F' \in C'P$. Отже, у трикутнику EDF' сторона EF' має кінці на сторонах кута APC', причому її напрям відомий ($EF' \perp BC$); його вершина лежить у заданій точці D і кут EDF' — прямий. Цей трикутник із використанням **подібності** можна побудувати (див. [1, *79*], приклад 6) (2). Тоді $F = AC \cap F'D$ (3), і для побудови півкола Г маємо три точки D, E й F (4).

Доведення. За побудовою $\angle EDF = 90°$; отже, Г є півколом, діаметр якого дорівнює EF. Оскільки прямі AC і PC' є центральносиметричними відносно точки D, маємо $F = Z_D(F')$. Отже $FD = DF'$, тому $OD \parallel EF'$, де O — середина

EF (центр півкола Г). Звідси $OD \perp BC$, а отже, сторона BC є дотичною до кола Г. Задачу розв'язано.

Задача 10. Побудувати трикутник за різницею його бічних сторін, сумою висоти із проекцією більшої бічної сторони на основу та кутом, що лежить проти більшої з бічних сторін.

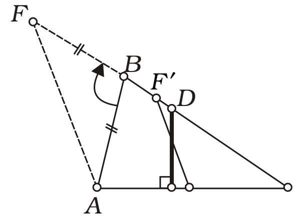


Мал. 13

Аналіз. Нехай у трикутнику ABC задано кут A, $BC - BA = t$ і $BD + DC = s$ (мал. 13). **Повернемо** відрізок DC у положення DC' та проведемо пряму CC'. Оскільки трикутник CDC' прямокутний і рівнобедрений, для всякої січної D_1C_1 перпендикулярної до BC', очевидно матимемо таке: $BD_1 + D_1C_1 = BD_1 + D_1C' = BC' = BD + DC' = BD + DC = s$. Зауважимо, що прямокутний рівнобедрений трикутник $C'BE$ можна побудувати (1). **Перенесемо** сторону AB на вектор $\overrightarrow{AC}$ у положення CF. Коло Г з центром у точці C радіусом CF перетинає сторону BC в точці G і дотикається в ній до кола Γ_1, що має центр B і радіус t; коло Γ_1 можна побудувати (2). З'ясуємо побудову кола Г. Розглянемо довільну **гомотетію** H_E. Вона переведе коло Г в деяке коло Γ_0, а радіус CF — у паралельний йому радіус C_0F_0. Отже, $\angle C_0F_0B = \angle CFB = \angle A$. Тому, взявши на відрізку $C'E$ довільну точку C_0, можна побудувати радіус C_0F_0 (3), а водночас і коло Γ_0, гомотетичне до кола Г (4). Обидва кола вписано в кут mEn, сторони якого після побудови кола Γ_0 стають відомими (5). Таким чином, задача зводиться до побудови кола Г, вписаного у відомий кут mEn, причому це коло дотикається до відомого кола Γ_1 (див. [1, *78*], приклад 4) (6). Разом із колом Г виникає трикутник FCB, рівний шуканому трикутнику ABC. Отже, останній тепер легко побудувати (7). Аналіз закінчено.

Доведення. За побудовою $AC \parallel BF$, $AB \parallel CF$ і відрізок C_0F_0 утворює з прямою BE кут, що дорівнює куту A. З гомотетії кіл Г та Γ_0 випливає, що $CF \parallel C_0F_0$. Отже, $AB \parallel C_0F_0$, звідки кут BAC теж має задану градусну міру кута A. Оскільки $AC \perp BD$, як вказується в аналізі, $BD + DC = BD + DC' = s$. За побудовою $AB = CF = CG$ і $BG = t$; отже, $BC - AB = BC - CG = BG = t$. Таким чином, трикутник ABC повністю задовольняє умову задачі.

Задача 11. Відрізком, перпендикулярним до основи, поділити периметр заданого трикутника в заданому відношенні.



Мал. 14

Аналіз. Нехай $\dfrac{EA+AB+BD}{DC+CE} = \dfrac{m}{n}$ (мал. 14), де m та n — задані відрізки. **Повернемо** BA в положення BF і з'єднаємо A з F (1). Матимемо $\dfrac{AE+FD}{CE+CD} = \dfrac{m}{n}$ (*). Тут використано ідею заміни трикутника ABC простішою ламаною ACF. Зіставимо тепер два різних поділи цієї ламаної двома різними способами: перший з них — за допомогою перпендикуляра DE, проте він поки що лише шуканий; другий (майже очевидний) — за допомогою подібності. Розглянемо **гомотетію** H_C^k з коефіцієнтом $k = \dfrac{n}{n+m}$.

Якщо

$$A'F' = H_C^k(AF), \text{ то } CA' = \frac{n}{n+m}CA,$$

$$CF' = \frac{n}{n+m}CF \quad (2),$$

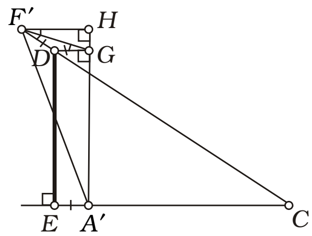
а тому

$$AA' = \frac{m}{n+m}CA, \quad FF' = \frac{m}{n+m}CF \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(AA' + FF' = \frac{m}{n+m}(CA + CF),\right.$$

$$\left. CA' + CF' = \frac{n}{n+m}(CA + CF)\right).$$

Отже, $\dfrac{AA'+FF'}{CA'+AF'} = \dfrac{m}{n}$ (це результат другого поділу — відрізком $A'F'$). Разом із рівністю (*) це дає $AA' + FF' = AE + FD$ та $CA' + CF' = CE + CD$ (адже тут та сама величина однозначно ділиться у заданому відношенні). Оскільки, наприклад, $CE > CA'$, маємо $CD < CF'$. Перепишемо останню рівність так: $CA' + CD' + DF' = CA' + A'E + CD$. Звідси $F'D = EA'$. Нагадаємо, що відрізок $A'F'$ при цьому вже маємо. Отже, **задача** звелася до такої: *у трикутнику $A'CF'$ перетнути його бічну сторону $A'F'$ відрізком DE, перпендикулярним до основи $A'C$ так, щоб $F'D = EA'$* (мал. 15). Для цього **перенесемо** відрізок EA' на вектор $\overrightarrow{ED}$ у положення DG. Розглянемо також пряму $F'H \perp A'G$. Ці прямі можна побудувати (3). Трикутник $F'DC$ рівнобедрений; таким чином, $\angle DGF' = \angle DF'G$. Оскільки $DG \parallel F'H$, маємо $\angle DGF' = \angle HF'G \Rightarrow \angle DF'G = \angle HF'G$. Тому точка G лежить на перетині перпендикуляра до $A'C$ із бісектрисою кута $CF'H$ в точці A' (4). Після цього відрізок DE визначається з відрізка GA' **паралельним перенесенням** (5).



Мал. 15

Доведення. З побудови випливає наступне: $DE \perp AC$, $DG = EA'$, $\angle DGF' = \angle HF'G = \angle DF'H \Rightarrow DG = DF'$; отже, $EA' = F'D$. За побудовою

$$\frac{AA'+FF'}{CA'+CF'}=\frac{m}{n}$$ чи

$$\frac{(AE+EA')+(FD-F'D')}{(CE-CA')+(CD+F'D)}=\frac{AE+FB+BD}{CE+CD}=$$

$$=\frac{AE+AB+BD}{CE+CD}=\frac{m}{n},$$

що відповідає умові задачі. Задачу розв'язано.

Зазначимо, що *мистецтво* розв'язувати конструктивні задачі включає такі *розвивальні* складові: *моделювання* уявлюваних геометричних ситуацій та *читання* вже виконаних креслень; *винахідливість*, *інтуїція*, *досвід* у проведенні на зображенні саме тих допоміжних ліній, які структурують схему алгоритму відшукання розв'язку; достатній *багаж знань*, *умінь і навичок візуально* оперувати фактами та грамотно виконувати добудови.

За умови, що учень настирливо вчиться такому мистецтву, розв'язує якомога більше задач, у нього розвивається *винахідливість вищого порядку* — застосовувати евристику, геометричні ідеї того чи іншого методу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Боравльов А. П. Аналіз у розв'язуванні задач на побудову: Навч. посібник / А. П. Боравльов, І. Г. Ленчук. — К.: Вища шк., 2002. — 191 с.

2. Навчальні програми для 5 — 9 кл. загальноосвітніх навчальних закладів // Наказ МОН України № 585 від 29.05. 2015 року «Про затвердження змін до навчальних програм для загальноосвітніх навчальних закладів II ступеня». — [Електронний ресурс]. — Режим доступу: http://school16.org/navchalni-programi-z-usih-predmetiv-dlya-1-11-klasiv.

СУЧАСНІ ТЕХНОЛОГІЇ

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРИ КОНСТРУЮВАННІ РІВНЯНЬ, ЩО МІСТЯТЬ НЕВІДОМУ ПІД ЗНАКОМ МОДУЛЯ З ВИКОРИСТАННЯМ MAPLE-ТЕХНОЛОГІЇ

Василь КУШНІР — доктор педагогічних наук, професор кафедри математики Кропивницького державного педагогічного університету ім. В. Винниченка

Матеріал статі може бути використаний для різних цілей: як теми наукових проектів для учнів і студентів спеціалізованих шкіл і коледжів; як варіанти одно типових завдань для організації самостійної роботи учнів чи студентів; як тести тощо. Можливий як комп'ютерний, так і безкомп'ютерний варіанти такого використання.

Метою статті є створення на основі математичного моделювання і з використанням Maple технології конструювання рівнянь, що містять невідому під знаком модуля з різною кількістю розв'язків.

Задача 1. Сконструювати рівняння виду

$$|a \cdot x + b| - |c \cdot x + d| = m \cdot x + n, \quad (1)$$

щоб воно мало рівно три різні дійсні розв'язки.

Розв'язання. **1)** *Науковий підхід* щодо створення математичної моделі розв'язування задачі полягає у «зворотному підході» (задачі зворотного мислення за В. А. Крутеньким [3], зворотні задачі за П. М. Ердніевим [6]). Розгортаючи науковий підхід щодо конструювання рівняння виду (1), використаємо метод інтервалів розв'язування (1). Оскільки під знаками модулів стоять лінійні функції, то на кожному з трьох інтервалів можливі випадки існування одного розв'язку, його відсутність і безлічі розв'язків. Не існування на певному інтервалі розв'язку можливе коли: відповідне рівнянню (1) лінійне рівняння взагалі не має розв'язку; має розв'язок, що належить іншому інтервалу. Наведені особливості розв'язування рівняння (1) і покладені як ідеї створення математичної моделі задачі конструювання рівнянь виду (1). Розв'язування рівняння (1) зводиться до розбиття числової прямої на три інтервали, за умови, що $-\frac{b}{a}\le\frac{d}{c}$,

$$\left(-\infty,-\frac{b}{a}\right],\ \left(-\frac{b}{a},-\frac{d}{c}\right],\ \left[-\frac{d}{c},+\infty\right) \quad (2)$$

і розв'язанні рівняння (1) на кожному інтервалі (метод інтервалів). Поставимо завдання,