КОМБІНАЦІЇ МЕТОДІВ ПЕРЕТВОРЕНЬ ТА АЛГЕБРИЧНОГО МЕТОДУ

Іван ЛЕНЧУК — професор кафедри алгебри та геометрії Житомирського державного університету імені Івана Франка, доктор педагогічних наук

Анотація. Прикладами задач на побудову підвищеного рівня складності, з метою їх розв'язання, розглянуто методичні аспекти комбінованого застосування методів рухів, подібності (гомотетії) та алгебричного аналізу. Різнохарактерними ситуаціями демонструються тісні конструктивні зв'язки групи перетворень фігур евклідової планіметрії з їх формально-логічним представленням.
Ключові слова. Рухи, подібність, гомотетія, алгебричний метод, комбінації методів, конструктивізм.

Иван ЛЕНЧУК. Комбинации методов преобразований и алгебраического метода.
Аннотация. Примерами задач на построение повышенного уровня сложности, с целью их решения, рассмотрено методические аспекты комбинированного применении методов движений, подобия (гомотетии) и алгебраического анализа. Разнохарактерными ситуациями демонстрируются тесные конструктивные связи группы преобразований фигур евклидовой планиметрии с их формально-логическим представлением.
Ключевые слова. Движения, подобие, гомотетия, алгебраический метод, комбинации методов, конструктивизм.

Ivan LENCHUK. A combination of methods of transformation and Algebraik methods.
Summary. Examples of tasks to build high levels of complexity in order to solve them, considered the methodological aspects of the application of the combined movements of the methods of similarity (dilation) and algebraic analysis. Diverse situations demonstrate the close connection design group of transformations of Euclidean plane geometry figures with their formal-logical representation.
Keywords. Movement, like, homothetic, algebraic method, a combination of methods, constructivism.

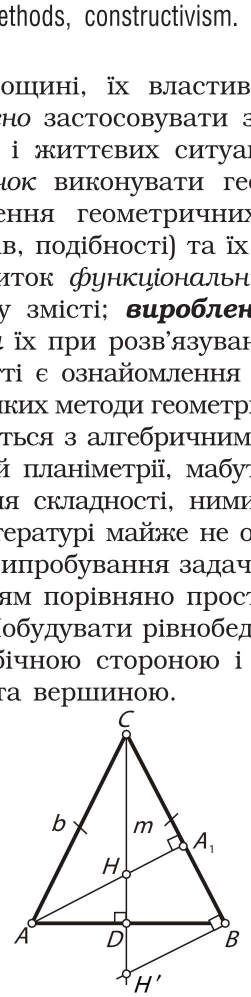
Оволодіння прийомами закономірних наочно-образних перетворень і побудов у планіметрії можна вважати найпершим здобутком *професійних якостей вищого ґатунку*. Зусилля майбутнього вчителя (учня) в розвитку інтуїції, накопиченні досвіду, придбанні усталених умінь та навичок кваліфікованого розв'язування конструктивних задач підвищеної складності передбачають серйозну підготовчу роботу. Основою результативних пошуків є глибоко осмислене проникнення у зміст підвалин, принципів і способів дій у специфічній, оригінальній дисципліні, *активна*, *системна особистісна практика* у вирішенні різного роду питань взаємних розташувань і взаємних виражень фігур геометрії, зокрема (*пріоритетно*), *побудовними методами. Повнота*, *вичерпне розмаїття* зображувальних закономірностей фігур, яких у планіметрії не так уже й багато, *властиві лише ситуаційним реаліям у* ***конструктивному*** *вираженні.* Змістові, різнохарактерні малюнкові конструкції отримують у наслідок їх позиційного і метричного варіювання, комбінування в уявленнях і представленнях учня, візуального моделювання в динамічних перетвореннях.

Окрім загальних завдань, побудовна планіметрія реалізує ще й такі специфічні для етапу поглибленого навчання математики освітні завдання: формування *знань* про геометричні фігури на площині, їх властивості, а також *умінь діяльнісно* застосовувати здобуті знання в навчальних і життєвих ситуаціях; розвиток *умінь і навичок* виконувати геометричні побудови; вивчення геометричних перетворень площини (рухів, подібності) та їх властивостей, а також розвиток *функціональних уявлень* на геометричному змісті; ***вироблення умінь застосовувати*** їх при розв'язуванні задач [2].

Метою статті є ознайомлення із задачами, в розв'язуванні яких методи геометричних перетворень комбінуються з алгебричним методом. Це в конструктивній планіметрії, мабуть, задачі найвищого ступеня складності, ними в навчально-методичній літературі майже не опікуються.

Тематичні випробування задачами розпочнемо розв'язанням порівняно простої пропозиції.

Задача 1. Побудувати рівнобедрений трикутник за його бічною стороною і відрізком між ортоцентром та вершиною.



Мал. 1

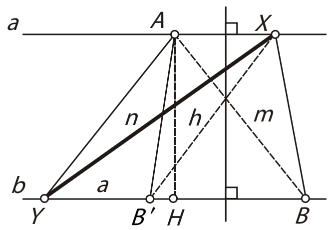
Розв'язання. Нехай трикутник ABC на малюнку 1 задовольняє умову задачі, а саме: $AC = BC = b$, H — його ортоцентр і $CH = m$. Скомбінуємо **центральну симетрію** з **алгебраїчним методом**. Із цим розглянемо точку $H' = S_D(H)$ та позначимо $DH = DH' = x$. Тоді у прямокутному трикутнику BCH' матимемо таке:

$b^2 = (m + x)(m + 2x)$.

Звідки $x = \frac{1}{4}\left(\sqrt{m^2 + 8b^2} - 3m\right)$.

Відрізок x у ланцюжку НАП [1, *23—24*] легко зобразити, а за ним — і шуканий трикутник ABC. Задачу розв'язано.

Задача 2. На двох паралельних прямих задано по точці A та B. Помістити між цими прямими відрізок XY заданої довжини так, щоб $\angle AXB = 2\angle AYB$.



Мал. 2

Розв'язання. Нехай малюнок 2 задовольняє умову задачі: $a \parallel b$, h — відстань між прямими; $XY = n$, де n — заданий відрізок; $\angle AXB = 2\angle AYB$. Розглянемо **симетрію** S_u, де u — серединний перпендикуляр відрізка AX. Тоді $X = S_u(A)$. Нехай $B' = S_u(B)$; отже, $XB' = AB = m$ (відомий відрізок). Трикутник, рівний трикутнику YXB', можна побудувати за двома сторонами m й n, що виходять з однієї вершини, та висотою h (1). Це дає відрізок $a = YB'$. Далі $\angle YB'A = \angle B'AX = \angle BXA = 2\angle AYB'$. Якщо побудувати трикутник, рівний трикутнику YAB' (2), то побудова точок Y (3) й X (4) стає очевидною. Отже, **задача** звелася до *побудови трикутника за його основою і висотою за умови, що один із кутів при основі вдвічі більший за інший.*

Спочатку покажемо шлях розв'язання *допоміжної* задачі **алгебраїчним** методом. Позначимо $\angle AYB = \varphi$, $YH = x$. Очевидно, відшукання відрізка x дасть розв'язок задачі.

Маємо $\frac{h}{x} = \operatorname{tg}\varphi$, $\frac{h}{x-a} = -\operatorname{tg}2\varphi$.

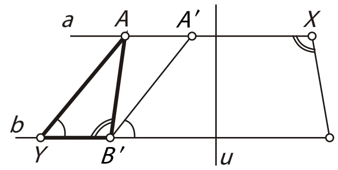
З цих двох рівностей, з урахуванням $\left(\operatorname{tg}2\varphi = \frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}^2\varphi}\right)$,

дістаємо рівняння для визначення x:

$3x^2 - 2ax - h^2 = 0$, звідки

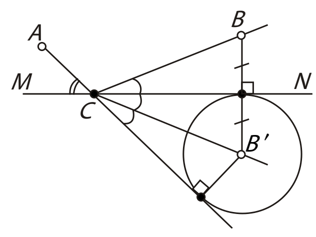
$$x = \frac{a}{3} + \sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{h\sqrt{3}}{3}\right)^2}.$$

Відрізок, що виражається цією формулою, неважко побудувати.



Мал. 3

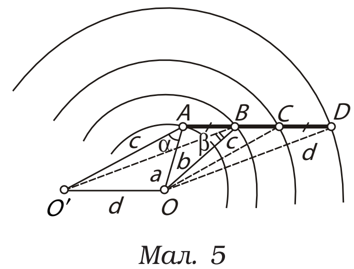
Зупинимося тепер на **суто геометричному** методі розв'язання даної задачі. Для цього повернемося до аналізу допоміжної задачі за малюнком 3. Отже, треба побудувати трикутник YAB'. **Перенесемо** відрізок YA на вектор $\overrightarrow{YB'}$ у положення $B'A'$. Тоді $\angle YB'A = 2\angle BB'A'$, причому розташування точок A й A' на прямій a є відомим, оскільки відомо відрізок $AA' = YB' = a$.



Мал. 4

Таким чином, **допоміжна задача** звелася ще й до такої самостійної пропозиції: *з одного боку від прямої MN задано точки A та B. Побудувати на MN таку точку C, щоб $\angle MCA = 2\angle NCB$.* Остання в розв'язанні тривіальна. Нехай на зображенні (мал. 4) $\angle MCA = 2\angle NCB$. Розглянемо в **осьовій симетрії** точку $B' = S_{MN}(B)$, а також коло Γ з центром у точці B', що дотикається до MN. Тоді AC є дотичною до кола Γ, що очевидно. Ця остання задача дає можливість побудувати точку B' на малюнку, після чого легко будуються на заданих прямих точки X та Y. Задачу розв'язано.

Задача 3. Задано чотири концентричних кола. Побудувати січну так, щоб її відрізок між двома колами менших радіусів дорівнював відрізку між колами більших радіусів.



Мал. 5

Розв'язання. Нехай a, b, c, d — радіуси заданих кіл, а малюнок 5 задовольняє умову: $AB = CD$. Тоді $AC = BD$; отже, при **перенесенні** трикутника OCD на вектор $\overrightarrow{CA}$ він займе нове розташування $O'AB$. Чотирикутник $OO'AB$ — трапеція, бічні сторони якої дорівнюють b і c, а діагоналі — a та d. Якщо таку трапецію побудувати, то задачу можна буде вважати розв'язаною.

Справді, оскільки пари рівних відрізків $O'A = OC = c$ й $O'B = OD = d$ лежать між паралельними прямими AB та $O'O$, маємо $O'A \parallel OC$ й $O'B \parallel OD$; тому при **перенесенні** трикутника $AO'B$ на вектор $\overline{O'O}$ точки A і B перейдуть відповідно в точки C та D. Тоді $AB = CD$, а отже, січна $ABCD$ — шукана.

Для побудови трапеції за її діагоналями і бічними сторонами використаємо **алгебричний метод**. За теоремою косинусів, у трикутнику $O'AO$ $O'O^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\alpha = b^2 + d^2 - 2bd\cos\beta$. Рівність площ трикутників $O'AO$ та $O'BO$ дає $ac\sin\alpha = bd\sin\beta$. Нехай $a^2 + c^2 = m^2$, $b^2 + d^2 = n^2$, $2ac = p^2$, $2bd = q^2$ (відрізки m, n, p, q не важко побудувати). Тоді $q^2\cos\beta = n^2 - m^2 + p^2\cos\alpha = r^2 + p^2\cos\alpha$ і $q^2\sin\beta = p^2\sin\alpha$ (може статися, що в дійсності $n^2 - m^2 = r^2$, проте для відшукання лише шляхів побудови принципового значення це не має). Виключивши з наведених рівностей кут β, дістанемо $q^4 = r^4 + 2p^2r^2\cos\alpha + p^4$, звідки $\cos\alpha = \frac{q^4 - r^4 - p^4}{2p^2r^2}$.

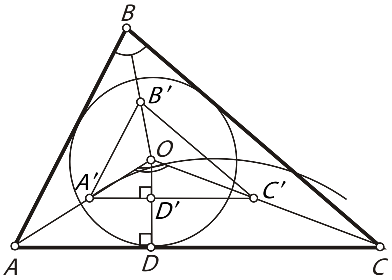
Якщо $\cos\alpha = \frac{x}{2p}$, то

$$x = \frac{q^4 - r^4 - p^4}{pr^2} = \frac{1}{p}\left[\left(\frac{qq}{r}\right)^2 - r^2 - \left(\frac{pp}{r}\right)^2\right] =$$

$$\frac{1}{p}\left[\left(m_1^2 - r^2\right) - m_2^2\right] = \frac{1}{p}\left(m_3^2 - m_2^2\right) = \frac{m_4 m_4}{p}.$$

Знаючи відрізок x, легко побудувати кут α, а отже й саму трапецію. Задачу розв'язано.

Задача 4. Побудувати трикутник за його площею, кутом при вершині та відношенням, в якому ділиться основа точкою дотику вписаного кола.



Мал. 6

Розв'язання. Нехай (мал. 6) у шуканому трикутнику ABC відомо кут B, $AD : DC = m : n$ і $S = q^2$ (m, n та q — задані відрізки); (O) — вписане коло. Наразі $\angle AOC = \frac{1}{2}(180° + \angle B)$ можна побудувати (1). Розглянемо **гомотетію** з центром у точці O, що переводить трикутник ABC у деякий трикутник $A'B'C'$. Оскільки $A'D' : D'C' = m : n$, точку D' (на довільно взятому відрізку $A'C'$) також можна побудувати (2). Користуючись дугою відповідного сегмента, що вміщує кут $\frac{1}{2}(180° + \angle B)$ (3), не важко побудувати точку O (4). Тоді стає відомим увесь трикутник $A'B'C'$ ($A'O$ і $C'O$ в ньому — бісектриси) (5). Тепер залишається побудувати **гомотетичний** до нього трикутник ABC із площею S. Позначимо: $A'C' = b'$, а відповідну їй висоту — через h' (ці відрізки відомі); нехай також $AC = b$ (шуканий відрізок). **Алгебрично** маємо:

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{b}{b'}\right)^2 = \frac{2q^2}{b'h'} \Rightarrow b = \sqrt{2b'\frac{q^2}{h'}} \quad (6).$$

Після побудови основи $b = AC$ уже неважко побудувати трикутник ABC (7). Задачу розв'язано.

Задача 5. Побудувати трикутник ABC, знаючи довжину кожної із трьох його висот h_a, h_b і h_c.

Розв'язання. Вихідною позицією в пошуку розв'язку є всім відомі **алгебраїчні** представлення площі трикутника $ah_a = bh_b = ch_c$ (*), де a, b і c — відповідні даним висотам сторони трикутника. Далі можна міркувати двояко.

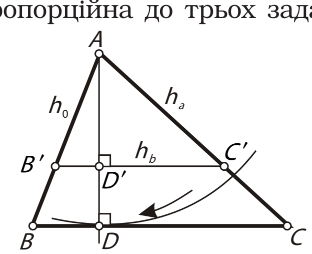
Спосіб 1. Розділивши рівності (*) на $h_a h_b$, матимемо

$$\frac{a}{h_b} = \frac{b}{h_a} = \frac{c}{\frac{h_a h_b}{h_c}}.$$

Звідси очевидно, що шуканий трикутник **подібний** (за трьома сторонами) трикутнику зі сторонами

$$h_a,\ h_b \text{ і } h_0 = \frac{h_a h_b}{h_c},$$

серед яких остання сторона встановлюється як четверта пропорційна до трьох заданих висот.

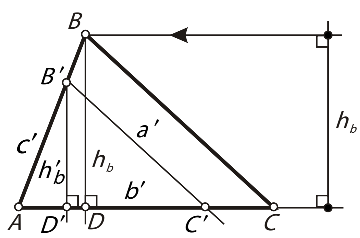


Мал. 7

Будуємо спочатку вже визначений трикутник $AB'C'$ (мал. 7), після чого на висоті (промені) AD', що відповідає стороні h_b, відкладаємо відрізок $AD = AC' = h_a$, і через точку D проводимо паралельну до $B'C'$ пряму, що дасть шуканий трикутник ABC.

Дослідження. Побудова зводиться до відшукання трикутника $AB'C'$; необхідно, щоб виконувалися нерівності:

$$\begin{cases} \frac{h_a h_b}{h_c} < h_a + h_b, \\ \frac{h_a h_b}{h_c} > h_a - h_b \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \frac{1}{h_c} < \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_a}, \\ \frac{1}{h_c} > \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_a}. \end{cases}$$



Мал. 8

Спосіб 2. Із рівностей (*) маємо

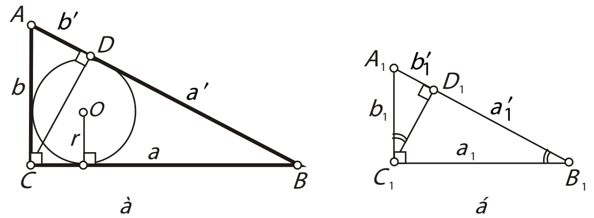
$$a=\frac{ch_c}{h_a},\ \ b=\frac{ch_c}{h_b};$$

тому для допоміжного трикутника

$$a'=\frac{c'h_c}{h_a},\ \ b'=\frac{c'h_c}{h_b}.$$

Отже, беручи c' довільно, можна побудувати трикутник $AB'C'$, **подібний** до шуканого (мал. 8). Тоді, використавши **гомотетію** та одну з пар відповідних висот (h'_b і h_b), будуємо шуканий трикутник ABC. Задачу розв'язано.

Задача 6. Побудувати прямокутний трикутник за радіусом уписаного в нього кола і відношенням одного катета до проекції іншого катета на гіпотенузу.



Мал. 9

Розв'язання. Нехай трикутник ABC (мал. 9, *а*) задовольняє умову задачі. «Забудемо» на деякий час про радіус r уписаного кола. Очевидно, що решта даних умови дозволяють побудувати довільний допоміжний трикутник $A_1B_1C_1$ (мал. 9, *б*), **подібний** до шуканого трикутника ABC. Маємо

$\frac{b_1}{a'_1}=\frac{m}{n}=\lambda$ (де m та n — задані відрізки);

$\Delta A_1D_1C_1 \sim \Delta A_1C_1B_1 \Rightarrow \frac{b_1}{b'_1}=\frac{a'_1+b'_1}{b_1}=\frac{a'_1}{b_1}+\frac{b'_1}{b_1}.$

Позначимо $\frac{b'_1}{b_1}$ через x. Тоді

$\frac{1}{x}=\frac{1}{\lambda}+x \Rightarrow \lambda x^2+x-\lambda=0 \Rightarrow$

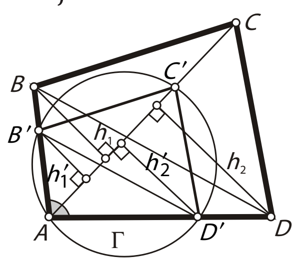
$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\lambda^2}}{2\lambda}=\frac{\sqrt{(2m)^2+n^2}-n}{2m} \Rightarrow$$

$$b'_1=\frac{b_1\left(\sqrt{(2m)^2+n^2}-n\right)}{2m}=\frac{b_1(p-n)}{q}=\frac{b_1t}{q},$$

де b_1 — будь-який відрізок, вибраний за власним уподобанням виконавцем побудови.

Далі, взявши до уваги відкинуту умову (r) та виконавши перетворення **подібності** допоміжного трикутника, будуємо шуканий трикутник ABC (останню дію, до речі, можна реалізувати **рухом**, накладаючи малюнки).

Задача 7. Побудувати чотирикутник $ABCD$ за його площею $S=k^2$, кутом A та відношенням $BC:CD:AC=m:n:p$, якщо відомо, що цей чотирикутник можна вписати в коло.



Мал. 10

Розв'язання. Нехай чотирикутник $ABCD$ задовольняє умову задачі (мал. 10). Оскільки навколо чотирикутника можна описати коло, сума його протилежних кутів дорівнює 180°, а це означає, що $\angle C=180°-\angle A$. Окрім того, $BC:CD=m:n$. Тому форма трикутника BCD відома; отже, вибираючи довільно коло Γ, можна побудувати трикутник $B'C'D'$, **подібний** трикутнику BCD. Задане відношення ($CD:AC=n:p$) визначає також відрізок $AC'=d'$ і, таким чином, — точку A на колі Γ. Тепер чотирикутник $AB'C'D'$, **подібний** чотирикутнику $ABCD$, можна побудувати. Далі до діла використаємо **алгебричний** метод, а саме:

$$\frac{1}{2}d\cdot(h_1+h_2)=k^2,\ \ \frac{h_1}{d}=\frac{h'_1}{d'},\ \ \frac{h_2}{d}=\frac{h'_2}{d'}.$$

Звідси матимемо:

$$d\cdot\left(\frac{dh'_1}{d'}+\frac{dh'_2}{d'}\right)=2k^2 \Rightarrow d=\sqrt{2k\frac{kd'}{h'_1+h'_2}}.$$

Отримавши формальний вираз для діагоналі $AC=d$ та скориставшись *основними* ***алгебраїчними*** *побудовами* [1, *23 — 24*], вже не важко побудувати вершину C, а отже й шуканий чотирикутник $ABCD$. Задачу розв'язано.

Завершуючи серію статей на тему планіметричних побудов, вважаємо за потрібне зробити кілька зауважень.

По-перше, вчитель повинен переконати учня, *що кінцевою, найвищою метою у змістовому навчанні диво-науки є задачі на побудову*, які, будучи складовою ланкою розділу «Планіметрія», водночас є його **квінтесенцією**. І, по-друге, — розв'язувати такі задачі потрібно системно, оскільки сутність принципу **системності** в оволодінні конструктивними методами планіметрії характеризується вельми важливими в особистісному розвитку факторами, притаманними цьому процесу, як-от:

Регулярне, осмислене накопичення та комплектування *багажу знань* конкретними закономірностями позиційного і метричного характеру. Навіть незначні, поодинокі прогалини у знаннях спричинюють нерозв'язання тієї чи іншої задачі.

Змістове, образне знайомство з методами перетворень геометричних фігур на площині. Ніщо так не сприяє *урозумінню* закономірностей *рухів й подібності* в геометрії, як розв'язування задач з їх використанням.

Усвідомлене наповнення «комірок» пам'яті переліком із простих та найбільш уживаних *ГМТ*, що надважливе, оскільки це — особливі фігури, зумисно сконструйовані як *інструмент* успішного розв'язання переважної більшості задач побудовного типу.

Строгість і дисципліна у практичній реалізації конструктивних пропозицій: ретельне *вивчення умови*; зважене і *акуратне виконання рисунка-*

зображення; *оволодіння евристичними приписами* і *методами* пошуку розв'язків з посиланнями лише на найпростіші та основні побудови; *дотримання схеми* розв'язання задач; *обов'язкове* і *кваліфіковане проведення аналізу*, як найважливішого етапу, а також — етапу *доведення*; серйозна практика у проведенні етапу *дослідження*.

Діяльнісне надбання алгебричних, графічних та графоаналітичних умінь і навичок у застосуванні теоретичних фактів планіметрії до *візуального моделювання* практичних (прикладних) ситуацій шляхом повсякденного розв'язування нестандартних задач на обчислення, доведення і побудову.

Вчителю не варто забувати, що *об'єктом геометрії є фігура*, а *головним засобом навчання* – *малюнок*. В опануванні учнями закономірностей *диво-науки* ефективним, справді *розвивальним чинником* слугуватиме педагогічно виважене уявлювано-малюнкове **унаочнення** її різнохарактерних і різного рівня складності пропозицій конструктивними методами.

ЛІТЕРАТУРА

1. Боравльов А. П. Аналіз у розв'язуванні задач на побудову: Навч. посібник / А. П. Боравльов, І. Г. Ленчук. — К.: Вища школа, 2002. — 191 с.

2. Навчальна програма для поглибленого вивчення математики в 8—9 класах загальноосвітніх навчальних закладів. — [Електронний ресурс]. — Режим доступу: nuda...programa...matematiki-v... .

ВИКОРИСТАННЯ ВЕКТОРНОЇ НЕРІВНОСТІ КОШІ-БУНЯКОВСЬКОГО ПІД ЧАС РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ РІВНЯНЬ І ПАРАМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ

Тетяна ПЛИС — учитель СЗШ № 264 м. Києва

Нерівності і рівняння відіграють фундаментальну роль у більшості розділів сучасної математики. Це пов'язано з їх широким використанням і великим прикладним значенням. До їх розв'язування зводяться багато математичних, фізичних, хімічних та економічних задач.

Формування загальних універсальних прийомів і методів розв'язування і дослідження рівнянь та їх систем є однією із головних задач, що стоїть перед учителем математики. Такі прийоми можна поділити на три групи:

1) *логічні методи обґрунтування способу розв'язання* (рівносильні перетворення рівнянь, їх дослідження);

2) обчислювальні прийоми, завдяки яким проводиться спрощення самого рівняння, перевірка знайдених коренів тощо;

3) наглядно-графічні методи.

Але слід зазначити, що під час вивчення математики особливе значення має не тільки вміння розв'язувати, а й уміння шукати раціональніші способи цього розв'язання.

У цій статті розглядається один із нестандартних методів дослідження рівнянь і їх систем, а саме — метод використання векторної нерівності Коші-Буняковського.

Деякі класичні нерівності, до яких належить і нерівність Коші-Буняковського, «можна назвати чудовими, на скільки вони математично красиві і широко затребувані у прикладних задачах наукових дисциплін». За допомогою способу використання класичних нерівностей «у багатьох випадках можна здійснити дослідження на максимум і мінімум цілого ряду функцій без знаходження похідної», розв'язати деякі рівняння і їх системи, які, на перший погляд, дуже складні, але при використанні даного способу стають на диво простими.

У розглянутих прикладах використовують векторну інтерпретацію нерівності Коші-Буняковського та її наслідків:

$|\vec{u}\cdot\vec{v}| \le |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$. (I)

$\vec{u}\cdot\vec{v} \le |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$. (II)

Наслідок: знак рівності виконується за умовою колінеарності векторів у нерівності (I) та їх співнапрямленості у нерівності (II).

Перед розгляданням прикладів розв'язання алгебраїчних вправ із використанням даних нерівностей слід нагадати деякі відомості про вектори. А саме — умову їх колінеарності.

Умова колінеарності векторів:

вектори колінеарні, якщо їх координати пропорційні. Тобто якщо $\vec{u}(x_1;y_1;z_1)$ колінеарний $\vec{v}(x_2;y_2;z_2)$, тоді $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$.

вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ колінеарні, якщо $\vec{u}=\alpha\vec{v}$.

Перейдемо до розглядання прикладів.