6. Функцію $f(x)$ задано таблицею

x	–2	0	1	2	3	4	6
$f(x)$	10	7	4	–3	0	3	8

При яких значеннях a функції $g(x) = ||x + a| - 3|$ і $f(x)$ набувають однакових значень у точці $x = 4$?

А) 2; Б) – 8; 6;
В) – 6; – 3; 3; Г) – 10; – 4; 2;
Д) – 8; – 6; – 2; 0.

7. Виберіть парну функцію, яка на проміжку (1; 3) набуває від'ємних значень.

А) $y = 2 - \sqrt{x}$; Б) $y = 2 - \sqrt{5}$;
В) $y = x\sqrt{3 - x}$; Г) $y = 3 - |x|$;
Д) $y = \frac{-x}{x^2+1}$.

8. Укажіть функцію, графік якої можна одержати з графіка функції $y = f(x)$ за допомогою паралельного перенесення.

А) $y = -0,5\,(3 - 2\,f(x + 5))$;
Б) $y = 0,5\,f(x) - 2$;
В) $y = 0,2\,(f(4x + 2) - 7)$;
Г) $y = f(0,1x) + 10$;
Д) $y = (7 + f(x + 5)) : 3$.

III рівень

9. Знайдіть область значень функції $y = |x - a| + 2\,|x + a|$, яка визначена на проміжку $(0; +\infty)$.

А) $(0; +\infty)$;
Б) $(2|a|; +\infty)$;
В) $[-2a; +\infty)$ при $a < 0$, $(3a; +\infty)$ при $a \geq 0$;
Г) $(2a; +\infty)$ при $a \geq 0$, $(-\infty; -2a)$ при $a < 0$;
Д) $(2a; +\infty)$ при $a \geq 0$, $(-3a; +\infty)$ при $a < 0$.

10. При яких значеннях x функція

$$y = -\sqrt{9 + 6x + x^6} + \sqrt[3]{3}$$

набуває додатних значень?

А) $x \in (-\infty; +\infty)$; Б) $x \in (-\infty; -3)$;
В) $x \in \left(-\infty; -\sqrt[3]{3}\right)$; Г) $x = -\sqrt[3]{3}$;
Д) $x \in \varnothing$.

Відповіді

Варіант	Завдання									
	I рівень				II рівень				III рівень	
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
Функція. Основні властивості функцій										
1	В	Б	В	Д	Г	Б	В	А	Б	Г
2	А	Б	Г	В	Д	В	А	Б	В	А
3	В	Б	Г	Г	В	А	Д	В	Б	Г
4	Г	В	Б	Д	Б	Г	А	В	Д	А
5	Б	А	В	Г	Г	Б	А	Д	Б	В
6	А	В	Г	Б	Д	Г	Б	А	В	Д

ПРОФІЛЬНЕ НАВЧАННЯ

ЗАДАЧІ НА ПОБУДОВУ: КОМБІНАЦІЇ РУХІВ

Іван ЛЕНЧУК — професор кафедри алгебри та геометрії Житомирського державного університету імені Івана Франка, доктор педагогічних наук

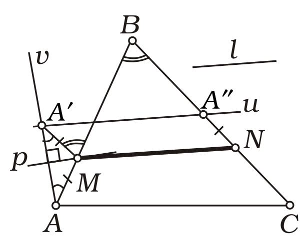
У навчальній програмі з математики для учнів 5 — 9 класів ЗОНЗ одним із специфічних освітніх завдань визначено: «Забезпечення оволодіння учнями мовою геометрії, розвиток їх просторових уявлень і уяви, ***умінь виконувати геометричні побудови*** *за допомогою геометричних інструментів* (лінійки з поділками, транспортира, косинця, ***циркуля і лінійки***)».

Успішне виконання вельми важливого завдання гарантується, зокрема, прищепленням навичок оперувати перетвореннями геометричних фігур при розв'язуванні задач на побудову.

Щоб ефективно розв'язати конструктивну задачу достатньо, у більшості випадків, доречного й умілого застосування одного-єдиного методу (окрім методу ГМТ; останній, у певному розумінні, є універсальним – візуальне використання геометричних перетворень у побудовах часто супроводжується застосуванням методу ГМТ).

Мета цієї статті вбачається *у вибірковому поданні задач*, в яких виникає потреба одне й те саме перетворення руху використовувати кілька разів або ж вдаватися до застосування кількох різних рухів.

Задача 1. У заданому напрямі провести січну до бічних сторін трикутника так, щоб сума відрізків цих сторін від основи до січної дорівнювала заданому відрізку.

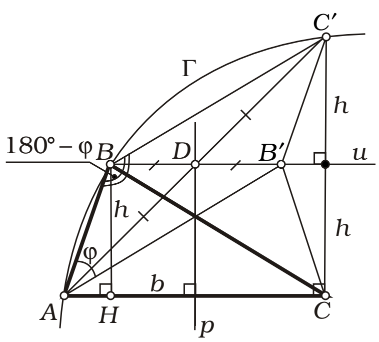


Мал. 1

Аналіз. Нехай на малюнку 1 шукана січна $MN \parallel l$ (заданий напрям), а $AM + CN = s$ (заданий відрізок). Очевидно, досить знайти одну з точок M або N. Для відкладання на малюнку відрізка s **повернемо** відрізок MA в положення $MA' \parallel BC$, а потім **паралельно перенесемо** відрізок MA' на вектор $\overrightarrow{MN}$ у положення NA''. Матимемо таке: $CA'' = CN + NA'' = CN + MA' = CN + MA = s$; отже, точку A'' можемо побудувати (1). Оскільки $A'A'' \parallel l$, пряму u, яка проходить через точку A'', теж неважко побудувати (2). Трикутник AMA' рівнобедрений, тому $\angle A'AB = \frac{1}{2}\angle A'MB = \frac{1}{2}\angle B$; отже, пряму v можна побудувати (3), звідки $A' = u \cap v$. Тоді $M = AB \cap p$, де p — серединний перпендикуляр відрізка AA' (4). Залишається провести шукану січну $MN \parallel l$ (5).

Доведення. Враховуючи побудову, маємо: $MN \parallel l$ і $MA = MA'$; отже, $\angle A'MB = 2\angle A'AB = \angle B$, звідки $A'M \parallel A''N$. Таким чином, фігура $MA'A''N$ — паралелограм, тому $NA'' = MA' = MA$; отже, $CN + AM = s$. Звідси випливає, що січна MN повністю задовольняє умову. Задачу розв'язано.

Задача 2. Побудувати трикутник за його основою, висотою та різницею кутів при основі.

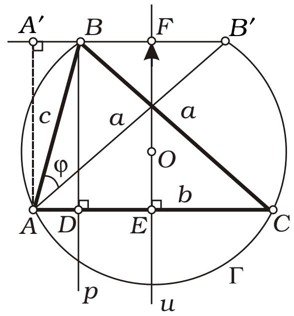


Мал. 2

Аналіз. Нехай трикутник ABC (мал. 2) задовольняє умову задачі, а саме, $AC = b$, $\angle A - \angle C = \varphi$ і висота $BH = h$. Розглянемо **симетрію** відносно серединного перпендикуляра p основи AC: $S_p(\Delta ABC) = \Delta CB'A$. Отримаємо $\angle BAB' = \angle A - \angle C = \varphi$ — задана різниця кутів. До цього ж виконаємо ще одну **симетрію** відносно прямої u, яка проходить через вершину B і паралельна основі трикутника AC: $S_u(\Delta BCB') = \Delta BC'B'$. Неважко переконатися, що чотирикутник $ABC'B'$ — паралелограм; отже, $\angle ABC' = 180° - \varphi$ і його можна побудувати (1). Можна також побудувати прямокутний трикутник $AC'C$, катети якого відомі ($AC = b$ — задана основа, $CC' = 2h$ — подвійна висота) (2). Третя вершина B є перетином прямої u з дугою кола Г, що вміщує кут $180° - \varphi$ (коло Аполлонія, 4). Аналіз закінчено.

Доведення. Основа і висота трикутника ABC дорівнюють заданим величинам (за побудовою). Нехай $D = u \cap AC'$, а $B' = Z_D(B)$. Оскільки D є середина відрізків AC' та BB', чотирикутник $ABC'B'$ — паралелограм. Звідси $\angle BAB' = \varphi$. Серединний перпендикуляр p основи AC проходить через точку D, тому $S_p(\Delta ABC) = \Delta CB'A$, а отже, $\angle A - \angle C = \angle BAC - \angle B'AC = \angle BAB' = \varphi$. Таким чином, трикутник ABC задовольняє всі умови. Задачу розв'язано.

Задача 3. Побудувати трикутник за його основою, різницею квадратів бічних сторін та різницею кутів при основі.

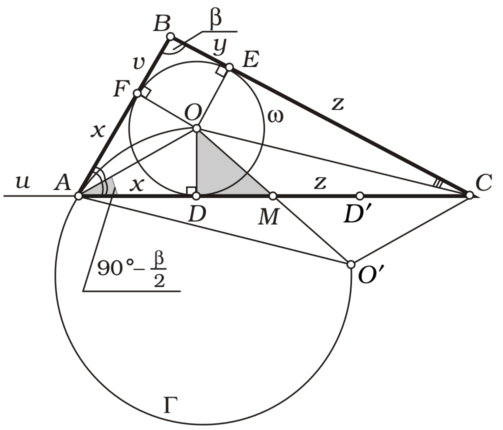


Мал. 3

Аналіз. Нехай у трикутнику ABC на малюнку 3 $AC = b$, $a^2 - c^2 = k^2$ і $\angle A - \angle C = \varphi$, де b, k та φ — задані величини. Із співвідношення $a^2 - c^2 = k^2$ випливає, що вершина B належить перпендикуляру p до основи AC, який можна побудувати ([2, *12*], приклад 2) (1). Важливо, що цей пункт побудови визначає положення точки D на основі AC. Тепер розглянемо **симетрію** відносно серединного перпендикуляра u основи AC. Нехай $B' = S_u(B)$. Маємо $\angle BAB' = \angle BAC - \angle B'AC = = \angle BAC - \angle BCA = \varphi$. Крім того, довжина відрізка $BB' = 2DE$ є відомою. Отже, у трикутнику BAB' відомо основу BB' і кут φ при вершині A. Виконаємо **паралельне перенесення** відрізка AE на вектор $\overrightarrow{EF}$. Дістанемо на прямій BB' точку A', положення якої відносно відрізка BB' теж відоме: $A'F = AE = \frac{b}{2}$. Отже, трикутник BAB' можна побудувати за його основою BB', кутом φ при вершині та проекцією A' вершини A на пряму BB' (2). Після цього залишиться побудувати точку $C = S_u(A)$, де u — серединний перпендикуляр відрізка BB' (3). Трикутник ABC є шуканим.

Доведення. Оскільки $B = S_u(B')$, отримаємо $BC = S_u(B'A)$, тому $\angle BCA = \angle B'AC$; отже, $\angle BAC - \angle BCA = \angle BAC - \angle B'AC = \varphi$ (за побудовою). Позначимо, як в аналізі, $AC \cap u = E$, а проекцію точки B на AC — через D. Матимемо $AC = 2AE = 2A'F = b$. Нарешті, $DE = BF$, а довжина цього відрізка під час побудови вибиралася, виходячи з того, що відповідна точка D на відрізку b задовольняє умову $CD^2 - AD^2 = k^2$. Проте цю умову задовольняють усі точки перпендикуляра BD; отже $CB^2 - AB^2 = k^2$. Таким чином, трикутник ABC є шуканим. Задачу розв'язано.

Задача 4. Побудувати трикутник за різницею його бічних сторін, кутом при вершині й радіусом уписаного кола.



Мал. 4

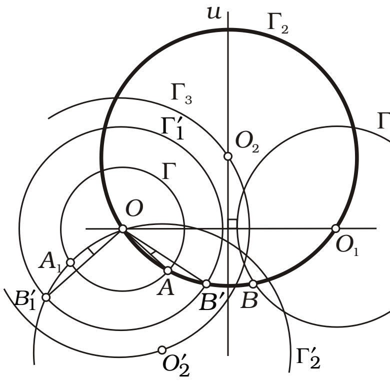
Аналіз. Нехай трикутник ABC (мал. 4) задовольняє умову задачі; згідно з позначеннями матимемо: $\angle B = \beta$, $\omega(O, r)$ — уписане коло і $BC - BA = (y + z) - (y + x) = z - x = m$ є заданим відрізком. Одночасно $z - x = m$ — різниця проекцій бічних сторін AO і OC трикутника AOC на основу AC. Напевне, що вже маючи останній трикутник, можна легко побудувати трикутник ABC (3). У трикутнику AOC відомо також висоту $OD = r$ і легко знайти $\angle AOC = 90^\circ + \frac{\beta}{2}$.

Для використання відомої різниці $z - x = m$, виконаємо **симетрію** основи AC відносно її середини M; тут $A \to C$, $D \to D'$. Тоді маємо: $CD' = x$, $DD' = z - x$, $DM = \frac{1}{2}(z - x)$, а відрізок DM відомо. Отже, можна побудувати прямокутний трикутник ODM (1). Побудова трикутника AOC тепер уже спирається на наступну **задачу:** *на заданій прямій u задано точку M, поза прямою — точку O. Побудувати на u відрізок AC із серединою в точці M так, щоб кут AOC дорівнював заданому* (2). Якщо **ввести в розгляд** точку $O' = S_M(O)$ (2.1), то очевидно, що чотирикутник $AOCO'$ буде паралелограмом і $\angle OAO' = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$ легко побудувати (2.2), а дуга кола Γ, яка вміщує цей кут (2.3), перетне задану пряму u в точці A; тут $C = S_M(A)$ (2.4).

Доведення. Трикутник ABC за побудовою (3) є описаним навколо кола ω з радіусом r і $\angle AOC = 90^\circ + \frac{\beta}{2}$; отже, врахувавши, що AO і CO — бісектриси відповідних кутів при основі трикутника ABC, отримаємо таке: $\angle ABC = 180^\circ - (\angle A + \angle B) = 180^\circ - 2(\angle OAC + \angle OCA) = 180^\circ - 2(180^\circ + \angle AOC) = 180^\circ - 2\left(180^\circ - \left(90^\circ + \frac{\beta}{2}\right)\right) = \beta$.

Якщо ще й пригадати, що пари точок D і D', A і C — центральносиметричні відносно точки M, та ввести позначення $AF = AD = p$, $BF = BE = q$, $CD = CE = t$, то одержимо $BC - BA = (q + t) - (q + p) = t - p$; але ж $t = CD = p + (z - x)$, тому $BC - BA = (p + (z - x)) - p = z - x = m$. Таким чином, побудований трикутник ABC задовольняє всі умови. Задачу розв'язано.

Задача 5. Задано два кола з центрами O й O_1. Провести через точки O та O_1 третє коло, що перетинає задані кола в точках A і B, розташованих з одного боку прямої OO_1 так, що $\angle AOO_1 - \angle BO_1O = \varphi$, де φ — заданий кут.

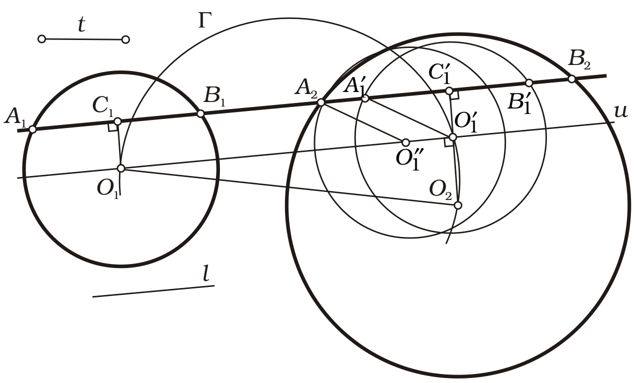


Мал. 5

Аналіз. Нехай малюнок 5 задовольняє умову задачі. Розглянемо **симетрію** відносно серединного перпендикуляра u відрізка OO_1; при цьому шукане коло Γ_2 перейде саме в себе, коло Γ_1 — у коло Γ_1', концентричне з колом Γ (1), а точка B — у спільну точку B' двох кіл у конструкції: Γ_2 та Γ_1'; $\angle AOB' = \angle AOO_1 - \angle B'OO_1 = \angle AOO_1 - \angle BO_1O = \varphi$. Отже, трикутник AOB' визначено з точністю до розташування (нагадаємо, що точки A і B є невідомими). Проте можна використати той факт, що коло Γ_2 є описаним навколо трикутника AOB'. Для цього **повернемо** коло Γ_2 навколо точки O в деяке положення Γ_2'; трикутник AOB' перейде в рівновеликий йому трикутник A_1OB_1', уписаний в коло Γ_2'. Цей останній трикутник легко побудувати (2), внаслідок чого можна побудувати й описане навколо нього коло Γ_2' (3). Оскільки $OO_2 = OO_2'$, центр O_2 лежить на відомій дузі Γ_3 (4); отже, $O_2 = \Gamma_3 \cap u$ (5). Тепер коло Γ_2 можна провести (6).

Доведення. За побудовою коло Γ_2 проходить через точки O й O_1. Далі $\Delta OO_2A = \Delta OO_2'A_1$ і $\Delta OO_2B' = \Delta OO_2'B_1'$ (за трьома сторонами), звідки матимемо (за побудовою): $\angle AOB' = \angle AOO_2 - \angle B'OO_2 = \angle A_1OO_2' - \angle B_1'OO_2' = \angle A_1OB_1' = \varphi$. Коло Γ_2 — симетричне відносно діаметра u; симетричними (за побудовою) відносно u є також кола Γ_1 та Γ_1'. Отже, $\angle B'OO_1 = \angle BO_1O$, а тому $\angle AOO_1 - \angle BO_1O = \angle AOO_1 - \angle B'OO_1 = \angle AOB' = \varphi$. Таким чином, коло Γ_2 є шуканим. Задачу розв'язано.

Задача 6. У заданому напрямі провести січну до двох заданих кіл так, щоб різниця утворених нею хорд дорівнювала заданому відрізку.

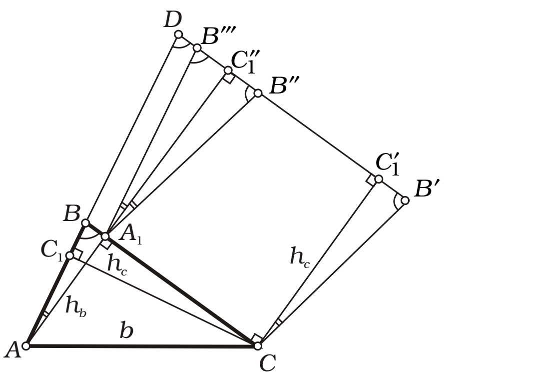


Мал. 6

Аналіз. Припустимо, що пряма A_1B_2 || l задовольняє умову задачі (мал. 6). Опустимо на A_1B_2 перпендикуляри O_1C_1 і O_2C_1' та виконаємо <u>*паралельне*</u> **перенесення** кола з центром O_1 на вектор $\overline{C_1C_1'}$ у розташування O_1'. Отримаємо $A_2A_1' = B_2B_1' = \frac{t}{2}$, де t — задана різниця хорд, а точка O_1' є перетином прямої u || l із колом **Г**, котрі легко побудувати (1, 2). Далі **перенесемо** коло з центром O_1' на вектор $\overrightarrow{A_1'A_2}$ у розташування O_1''. Проте $O_1'O_1'' = \frac{t}{2}$, тому точку O_1'' також можна побудувати (3). При цьому визначиться коло з центром у точці O_1'' та з радіусом кола (O_1), а тому — й точка $A_2 \in (O_2) \cap (O_1'')$ (4). Тепер уже неважко провести шукану січну (5).

Доведення. Оскільки коло Г побудоване на відрізку O_1O_2 як на діаметрі, в перетині із прямою u утворюється прямий кут ($\angle O_1O_1'O_2 = 90°$), отже точка C_1' ділить хорду A_2B_2 навпіл. Окрім того, $O_1'O_1'' = \frac{t}{2}$ (за побудовою), а коло (O_1'') є результатом двох паралельних перенесень кола (O_1) за напрямом u || l, тому $A_2A_1' = B_2B_1' = \frac{t}{2}$. Остаточно маємо: $A_2B_2 - A_1B_1 = t$. Задачу розв'язано.

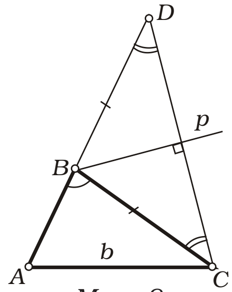
Задача 7. Побудувати трикутник за його основою, кутом при вершині та сумою висот бічних сторін.



Мал. 7

Аналіз. Нехай у трикутнику ABC (мал. 7) задано b, кут B та $h_a + h_c = s$. Для введення в розгляд відрізка s **повернемо** трикутник CC_1B у розташування $CC_1'B'$ так, щоб $CC_1' \perp CB$, <u>потім</u> **перенесемо** трикутник $CC_1'B'$ на вектор $\overrightarrow{CA_1}$ у положення $A_1C_1''B''$ і виконаємо **симетрію** відносно катета A_1C_1''. Дістанемо трикутник $A_1C_1''B'''$, катет якого $A_1C_1'' = h_c$ є продовженням висоти AA_1, а його гіпотенуза A_1B''' || AB. Якщо $C_1''B''' \cap AB = D$, то A_1BDB''' — паралелограм, в якого $BD = A_1B''' = BC$ та $\angle ADB''' = \angle B$. Крім того, $AC_1'' = s$. Отже, прямокутний трикутник $AC_1''D$ можна побудувати за його катетом і протилежним гострим кутом, причому гіпотенуза дорівнюватиме сумі бічних сторін AB та BC шуканого трикутника.

Таким чином, задачу зведено до такої, котра розв'язується методом геометричних місць точок аналогічно прикладу 5 ([2, 57]): «Побудувати трикутник ABC, якщо задано його основу b, протилежний кут B й суму бічних сторін $AB + BC$» (мал. 8).



Мал. 8

Доведення забезпечується міркуваннями аналізу. Задачу розв'язано.

Завершуючи, зауважимо, що перетворення є *інструментом*, *засобом розбудови* найпершої з наук, незамінним *апаратом* методично виваженого виконання уявлюваних операцій із фігурами та їх елементами. Як результат, у багатьох випадках, й особливо в конструктивній планіметрії, процес візуального вирішення не зовсім простих, різнохарактерних пропозицій відчутно пришвидшується, оптимізується.

Навчаючи планіметрії, учитель-професіонал збагачує задатки творчого мислення учня основної школи, стимулює інтелектуальний розвиток і мотивує пізнавальні інтереси. Дохідливо передати відчуття гармонії геометричного матеріалу, *візуально* продемонструвати його природну красу й одвічно прикладне спрямування найліпше задачами на побудову.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бевз Г. П. Геометрія: Підручник для 7 — 9 класів загальноосвітніх навчальних закладів / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. — К.: Вежа, 2001. — 272 с.

2. Боравльов А. П. Аналіз у розв'язуванні задач на побудову: Навч. посібник / А. П. Боравльов, І. Г. Ленчук. — К.: Вища шк., 2002. — 191 с.

3. Навчальні програми для 5 — 9 кл. загальноосвітніх навчальних закладів // Наказ МОН України № 585 від 29.05.2015 р. «Про затвердження змін до навчальних програм для загальноосвітніх навчальних закладів II ступеня». — [Електронний ресурс]. — Режим доступу: http://school16.org/navchalni-programi-z-usih-predmetiv-dlya-1-11-klasiv.

4. Погорєлов О. В. Геометрія: Підручник для 7 — 9 класів середньої школи / О. В. Погорєлов. — К.: Освіта, 1998. — 224 с.