РОЛЬ РИСУНКА В ЗАДАЧАХ ПЛАНІМЕТРІЇ

Іван ЛЕНЧУК — професор кафедри методики навчання математики, фізики та інформатики Житомирського державного університету ім. І. Я. Франка, доктор педагогічних наук
Микола ПРАЦЬОВИТИЙ — декан фізико-математичного факультету Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова, доктор фізико-математичних наук, професор

Анотація. У статті прикладами продемонстровано стрижневу роль якісних рисунків у творчому конструюванні правил-орієнтирів образно-уявлюваної, візуально зображувальної та формально-логічної діяльності учня в пошуку шляхів розв'язування планіметричних задач «із родзинкою». Роз'яснено місце і сутність слова «Рисунок» у розмовній лексиці, наукових та навчальних працях геометричного толку.
Ключові слова. Планіметрія, рисунок, задачі «з родзинкою» на обчислення, доведення, побудову.

Иван ЛЕНЧУК, Николай ПРАЦЕВИТЫЙ. Роль рисунка в задачах планиметрии.
Аннотация. В статье примерами продемонстрировано стержневую роль качественных рисунков в творческом конструировании правил-ориентиров образно-воображаемой, визуально изображаемой и формально-логической деятельности ученика в поиске путей решения планиметрических задач «с изюминкой». Разъяснены место и сущность слова «Рисунок» в разговорной лексике, научных и учебных трудах геометрического толка.
Ключевые слова. Планиметрия, рисунок, задачи с «изюминкой» на вычисление, доказательство, построение.

Ivan LENCHUK, Nikolay PRATSIOVYTYI. The role of drawing in problems of plane geometry.
Summary. In this article, the examples demonstrated a pivotal role of quality drawings in creative design rules-guidelines imagery and imaginary, depicted visually and formally logical activities of the student in the search of ways to solve planimetric problems «with a twist». Explained the place and the essence of the word «figure» in colloquial speech, scientific and educational works in the geometric sense.
Keywords. Planimetry, drawing, problem with «highlight» of the calculation, proof construction.

«Геометрія — це наука, яка з неправильних рисунків робить правильні висновки»

(математичний гумор)

Словник-довідник з українського літературного слововживання лаконічно й чітко роз'яснює значення одного з головних засобів навчання геометрії, а саме: ***рисунок*** — це: «Зображення чого-небудь рисками на площині; креслення» [3, *324*], а слово «*рисувати*» тлумачить як «*креслити*». Змістове значення спорідненого слова «***малювати***» дещо інше: «зображати когось, щось на площині олівцем, пером, фарбами тощо; переносно — зображати словами, викликати в уяві певні образи тощо» [3, *214*].

Сьогодні часто у математичних книжках чи статтях пишуть **мал**., що означає **малюнок** (наприклад, [6]). Це не відповідає нормальному українському слововжиткові, адже слово **малюнок** наша рідна мова пов'язує переважно з кольоровим (живописним) зображенням (*Книжка з* ***малюнками***; *Дитячі* ***розмальовки*** *фарбами*; *Гарними* ***малюнками*** *тішать нас онучки*) або із враженням від картин природи (*Чарівна краса* ***мальовничого*** *куточка України* (*озера Світязь*) *стоїть перед очима*). Тому під ілюстраціями, що є графічними або схематичними зображення геометричних об'єктів (фігур та відношень), треба писати **рис**., тобто **рисунок**. Адже слово рисунок походить від прадавнього українського слова **риса** (*рґза – із глаголичного письма*), що утворило й інші слова: *рисувальник*, *обрис*, *нарис*, *зарисовка* (а не *замальовка*, як дехто вважає). Синонімами слова «**рисунка**» є слова *візерунок*, *шкіц* (*ескіз*), *креслення*, *контур*. Синонімами **малюнка** виступають: *образ*, *образок*, *картинка*, *малювання*, *мальовничий*, *розмальовка*, *куншт* (*Ось привезли і* ***малювання*** *— І. Котляревський*; *А скільки образків версальських,* ***малярських кунштів*** *і божків*! — *П. Гулак-Артемовський*).

Коли доводиться працювати із планіметричними фігурами на дошці чи в зошиті, потрібно на їх бінарних моделях (зображеннях) дотримуватися визначених умовою задачі позиційних і метричних співвідношень між окремими елементами фігур (рівні відрізки чи кути повинні бути рівними, прямі кути — прямими, паралельні прямі — паралельними, різносторонній трикутник — різностороннім, дотичні до кола — справді дотичними і т. ін.). Лише за вказаних умов рисунок матиме статус *правильного* і *наочного*, а спостерігач (зокрема, сторонній) сприйматиме геометричний об'єкт таким, яким він є в оригіналі. Важливими додатковими засобами поліпшення якісного представлення та читання рисунка є стандартизовані лінії («риски») визначених типів і традиційно вживані умовні позначення.

Рисунок у геометрії являє собою умовне **графічне зображення** фігури чи комбінації кількох фігур. Це не розкраска і не твір живопису фарбами, не картина й не ілюстрація до книги. Його призначення однозначно чітке: візуальне поінформування учня про **істинне** взаємне розміщення, форму та розміри геометричної конструкції та її окремих елементів. Рисунок на інтуїтивному рівні ефективно сприяє «баченню» розумом ситуації, що склалася, формує в уявленнях й упорядковує закономірну логіку міркувань, підказує покроковий шлях до розв'язку задачі. Саме тому до геометричних зображень висувають дві надважливі вимоги: *правильності* та *наочності*.

Отже, якщо мова йде про креслення різних споруд, технічних пристроїв, зображень до задач і теорем навчальних дисциплін геометричного циклу, треба вживати слово ***рисунок***, якщо ж ідеться про твори образотворчого мистецтва, то треба вживати слово ***малюнок***.

Правильно виконаний рисунок спроможний продукувати несуперечливі закономірні міркування, спонукати до істинного розуміння суто геометричних міжелементних зв'язків і формальних співвідношення елементів фігури, мотивувати навчально-пізнавальний інтерес до геометрії. У цілому *стиль* конструктивізму, як форма візуалізації геометрії, мало поцінований, ним майже не переймаються; знаючи напевне, що *об'єктом геометрії ЗОШ* є ***фігура***, а *головним засобом навчання* — ***рисунок***, учитель традиційно не приділяє належної уваги якісному виконанню рисунків учнями.

Маємо на **меті** продемонструвати прикладами стрижневу роль ретельно виконаних рисунків у творчому конструюванні правил-орієнтирів образно-уявлюваних, побудовних і формально-логічних дій учня в пошуку шляхів розв'язування планіметричних задач.

Пояснити чому так важлива увага до задач «із родзинкою» зовсім не складно, оскільки ніхто немає сумнівів, що геометричні пропозиції в одиндва кроки, за усталеним зразком, мінімального рівня складності не відповідають діяльнісному принципу навчання, не розвивають особистість. Вправами, які не мають геометрично завуальованого підтексту, неможливо об'єктивно оцінити стиль мислення учня, знання фактичного матеріалу, його інтуїтивні та творчі здібності. Разом із тим, структура, геометрична суть задачі в будь-якій ситуації піддається покроковому розшифруванню виключно завдяки старанному виконанню адекватного умові ***рисунка*** та добре поставленому *образному* і *логічному мисленню*.

Наведемо приклади розв'язування кількох задач на обчислення, доведення та побудову з акцентом на їх рисункову складову.

Задача 1. У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) кут ABC дорівнює 20°. На стороні AB узято точку M так, що $\angle MCA = 60°$; на стороні CB — точку N так, що $\angle NAC = 50°$. ***Знайти*** кут NMA.

Специфіка задачі полягає в тому, що в її умові задано градусну міру двох кутів і вимагається знайти градусну міру ще одного кута. Для ліпшого унаочнення ситуації, доцільно модель-зображення геометричної фігури зі всіма елементами робити не лише з використанням циркуля та лінійки, але також — транспортира.

Нехай кут B у рівнобедреному трикутнику ABC справді дорівнює 20°, а точки M і N розташовуються на його бічних сторонах AB і CB відповідно так, що $\angle MCA = 60°$ і $\angle NAC = 50°$ (рис. 1). З'єднавши точки M і N відрізком, легко помітити, що $\angle NMA = \angle NMC + \angle CMA$, де $\angle CMA = 40°$ (адже $\angle BAC = 80°$, що очевидно). Тож задачу зведено до відшукання кута NMC.

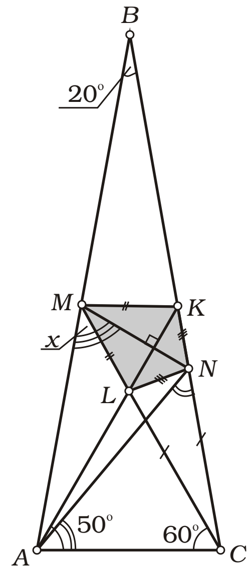


Рис. 1

Виконаємо *додаткові побудови*: візьмемо на стороні BC точку K так, щоб ще й $\angle KAC = 60°$, а відрізок MK був паралельним AC; точку $L = AK \cap CM$ з'єднаємо з точкою N.

Тепер уважно поглянемо на чотирикутник $MKNL$. Він візуально надто схожий на дельтоїд. Потрібно довести зримо прочитаний факт.

Трикутник ALC — рівносторонній, що теж очевидно, а трикутник ANC — рівнобедрений, оскільки $\angle ANC = 180° - (80° + 50°) = 50°$. Отже, $AC = CL = CN$, а $\angle CLN = \angle CNL = (180° - 20°) : 2 = 80°$. Кут MLC — розгорнутий, тому $\angle MLN = 180° - 80° = 100°$. З іншого боку, прямі MK і AC паралельні, а KC – січна, отже й $\angle MKN = 100°$. Окрім того, легко помітити, що $\angle KLN = \angle LKN = 100° - 60° = 40°$, адже трикутник MKL теж рівносторонній. Таким чином, як з'ясувалося, в чотирикутнику $MLNK$ кути у протилежних вершинах K і L, а також прилеглі до них пари сторін MK і ML, NK і NL відповідно рівні, тому цей чотирикутник справді є дельтоїдом, що й було очевидячки зрозуміло з акуратно виконаного рисунка. Залишається лише кут при вершині M трикутника MKL розділити навпіл ($\angle NML = 60° : 2 = 30°$) і додати його градусну міру до градусної міри кута NML: $\angle NMA = \angle NMC + + \angle CMA = 40° + 30° = 70°$. Задачу розв'язано.

Задача 2. Сторони гострокутного трикутника ABC рівні a, b і c. ***Знайти*** периметр трикутника, вершинами якого є основи висот трикутника ABC.

Нехай задано гострокутний трикутник ABC, а точки P, Q і R є основами його висот і вершинами трикутника, периметр якого потрібно знайти (рис. 2).

Якщо до виконання рисунка поставитися відповідально, витримавши перпендикулярність висот і відповідних сторін заданого трикутника, то неважко візуально зафіксувати надто суттєву реальність: *висоти* трикутника ABC виглядають водночас *бісектрисами* трикутника PQR. Можна припустити, що цей факт, за умов його строгого обґрунтування та принагідно вмілого застосування, може виявитися одним із визначальних у пошуку шляху до результату.

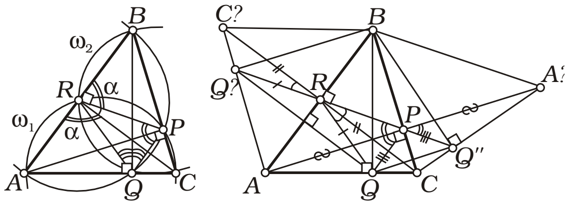
Розглянемо, наприклад, висоту CR до сторони AB. Прямі кути ARC і APC спираються на відрізок AC, тому чотирикутник $ARPC$ є вписаним у коло ω_1, отже, $\angle ARP + \angle ACP = 180°$. Проте кут ARB — розгорнутий, а це означає, що $\angle ARP + \angle BRP = 180°$. Із цих двох рівностей отримуємо:

$$\angle ACP = \angle BRP = \alpha. \qquad (1)$$

Аналогічні міркування слід провести стосовно чотирикутника $BRQC$ і кола ω_2 (рис. 2, a). Тут

$$\angle ACP = \angle ARQ = \alpha. \qquad (2)$$

З рівностей (1) і (2) випливає, що $\angle ARQ = \angle BRP$. Далі легко побачити, що $\angle PRC = 90° - \alpha$ і $\angle QRC = = 90° - \alpha$, тому $\angle PRC = \angle QRC$, а це якраз і засвідчує те, що RC є бісектрисою кута PRQ.



а б

Рис. 2

Міркуючи аналогічно, доводимо, що висоти AP і BQ трикутника ABC є бісектрисами кутів RPQ і PQR відповідно.

Отже, завдячуючи якісному рисунку, образно-інтуїтивно висловлене припущення набуло статусу *геометричної закономірності*.

Тепер пригадаємо евристичний припис відшукання довжини відрізка в геометрії. Як правило, відрізок відносять до деякого вдало вибраного трикутника й шукають рівний чи подібний до нього трикутник, який обов'язково або вже є метрично розмірним, або ж порівняно просто може бути приведеним до такого. Наразі в нашій ситуації саме трикутник PQR варто розгорнути на пряму, тобто подати його периметр сумою сторін ($2p = QR + RP + PQ$), а потім працювати з розгорткою як із відрізком за вже сформульованим щойно приписом. До того ж, уже зараз на рисунку можна помітити, що зримо сформована і підкріплена чіткою логікою міркувань *геометрична закономірність* дієво посприяє як у виконанні розгортки, так і в розв'язанні задачі в цілому (рис. 2, b).

Таким чином, скористаємося перетворенням осьової симетрії відносно сторони AB трикутника ABC: $S_{AB}(AC) = AC'$; $S_{AB}(QR) = Q'R$, де $Q' \in AC'$ і Q та Q' лежать з одного боку від CC'. Оскільки трикутник ABC гострокутний, точки Q і P розміщені з різних боків відносно CC', отже й Q' та P — з різних боків від CC'. За властивістю симетрії $Q'R = QR$, а $\angle Q'RC' = \angle QRC$. Але ж RC — бісектриса кута QRP, тому $\angle QRC = \angle CRP$, отже точки Q', R, P — лежать на одній прямій. Далі аналогічно розглядаємо симетрію відносно сторони BC трикутника ABC і доводимо, що $Q''P = QP$, а точки Q'', P, R теж лежать на одній прямій. Відрізок $Q'' - P - R - Q'$ й буде розгорткою трикутника PQR. Тепер $2p = QR + RP + PQ = = Q'R + RP + PQ''$.

Далі, як планувалося вище, оберемо відрізок $Q'Q''$ стороною трикутника $Q'BQ''$ та порівняємо його за формою із трикутником $C'BC$. За властивостями осьової симетрії матимемо $BQ' = BQ = BQ''$. Це означає, що трикутник $Q'BQ''$ — рівнобедрений. Оскільки $C'B = BC$, то трикутник $C'BC$ теж рівнобедрений. Очевидно також, що $\angle C'BR = \angle CBR$ і $\angle C'BC = 2\angle ABC$, а $\angle Q'BQ'' = 2\angle ABQ + 2\angle QBC = 2\angle ABC$. Отже, $\angle Q'BQ'' = \angle C'BC$. Із таких міркувань випливає, що трикутники $Q'BQ''$ і $C'BC$ подібні.

Завершуємо задачу формально-аналітичним виразом периметра p.

Отже, $\dfrac{Q'Q''}{C'C} = \dfrac{BQ''}{BC} \Leftrightarrow \dfrac{2p}{2h_C} = \dfrac{h_B}{a}$.

Звідси $2p = \dfrac{2h_B h_C}{a}$.

Але $h_B = \dfrac{2S_{\Delta ABC}}{b}$, а $h_B = \dfrac{2S_{\Delta ABC}}{c}$, де

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}$.

Остаточно отримаємо:

$$2p = \frac{2h_B h_C}{a} = \frac{8S^2_{\Delta ABC}}{abc} = \frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{2abc}.$$

Задачу, наповнену конструктивним змістом, розв'язано.

Задача 3. Задано трапецію $ABCD$. Відомо, що відстань між серединами основ AB і CD дорівнює відстані між серединами діагоналей AC і BD. ***Довести***, що кут ADB є тупим.

Нехай рисунок 3 задовольняє умову задачі, а саме: точки P і Q є серединами основ трапеції, а M і N — серединами її діагоналей. Зображення, виконане візуально правильно, прямо підказує шлях розв'язання задачі.

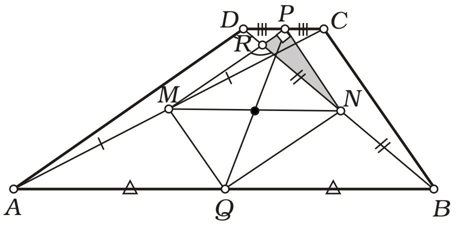


Рис. 3

Помічаємо, що відрізок MP є середньою лінією трикутника ADC, а QN — трикутника ADB. Обидва відрізки паралельні спільній стороні трикутників AD і дорівнюють її половині. Таким чином, чотирикутник $MPNQ$ — паралелограм із рівними діагоналями, тобто це — прямокутник. Неважко також побачити, що $\angle ADB = \angle MRN$, як відповідні кути при паралельних прямих AD і MP. Але кут MRN є зовнішнім для трикутника RPN і дорівнює сумі двох внутрішніх не суміжних із ним кутів: $\angle MRN = \angle RPN + \angle RNP$, де $\angle RPN = 90°$, а кут RNP — гострий. Таким чином, кут ADB справді є тупим.

Задача 4. Через фіксовану точку M усередині кола проведено дві взаємно перпендикулярні хорди AC і BD. Нехай K і L — середини хорд AB і CD відповідно. ***Довести***, що значення виразу $AB^2 + CD^2 - 2KL^2$ не залежить від вибору хорд AC і BD.

На рисунку 4 зображено коло $\mathbf{Г}(O, R)$, точку M у внутрішній області кола та дві будь-які взаємно перпендикулярні хорди AC і BD, що перетинаються в точці M.

Якщо кожну з точок O і M з'єднати відрізками з точками K і L, які ділять навпіл хорди AB і CD відповідно, то відразу кидається у вічі фігура $OKML$, візуально вельми схожа на паралелограм. Для доведення цього факту зручно ввести позначення: нехай $\angle ABM = \alpha$. Тоді у прямокутному трикутнику ABM відрізок MK є його медіаною, проведеною з вершини прямого кута M. Отже, трикутник AKM — рівнобедрений ($AK = KM$), а $\angle ABM = 2\alpha$, оскільки це — зовнішній кут трикутника KBM. Так як $OK \perp AB$, то $\angle OKM = 90° - 2\alpha$. Неважко зрозуміти, що $\angle AKM = \angle DCM = \alpha$, адже кожен із них спирається на одну й ту саму дугу AD кола $\mathbf{Г}$. Міркуючи аналогічно, констатуємо, що трикутники DLM і AKM подібні, а $\angle OLM = 90° - 2\alpha$.

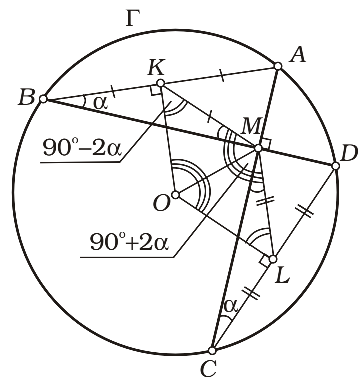


Рис. 4

Тепер легко знайти кут KML. Справді, $\angle KMB = \angle LMC = \alpha$, а кут BMC — прямий. Тому $\angle KML = 90° + 2\alpha$. Оскільки сума кутів чотирикутника рівна 360°, то й $\angle KML = 360° - 2(90° - 2\alpha) - (90° + 2\alpha) = 90° + 2\alpha$. Звідси робимо висновок, що $OKML$ є дійсно паралелограмом, адже його протилежні кути попарно рівні.

У всякого паралелограма, як відомо, сума квадратів діагоналей рівна подвоєній сумі квадратів сусідніх сторін, тобто:

$OM^2 + KL^2 = 2(KM^2 + ML^2)$.

Проте, $KM = \frac{1}{2}AB$, а $ML = \frac{1}{2}CD$, тому

$$OM^2 + KL^2 = \frac{AB^2 + CD^2}{2}.$$

Звідси остаточно отримаємо:

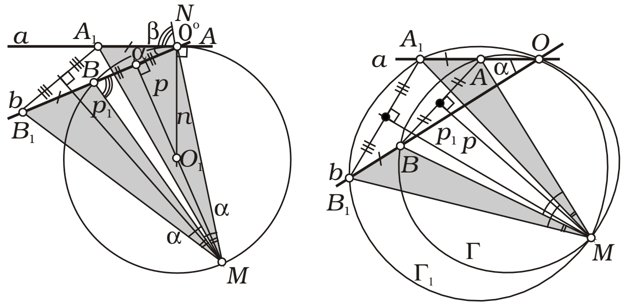
$AB^2 + CD^2 - 2KL^2 = 2OM^2$,

що не залежить від AC і BD.

Задача 5. Уздовж двох прямих, які перетинаються, з однаковими швидкостями рухаються дві точки. ***Довести***, що знайдеться така фіксована точка площини, яка в кожний момент часу від них рівновіддалена.

Нехай на рисунках 5, *а* і 5, *б* $O = a \cap b$, а $\angle(a, b) = \alpha$; A і A_1 — два розташування точки на прямій a; B і B_1 — розташування відповідно в ці ж моменти часу іншої точки на прямій b ($AA_1 = BB_1$).

Розглянемо спочатку випадок, коли точки O і A співпадають (див. рис. 5, *а*). Побудуємо геометричне місце точок, з яких відрізок AB видно під кутом α. Для означеної мети, по-перше, проведемо серединний перпендикуляр p відрізка AB і, по-друге, перпендикуляр n до прямої a в точці A. Їх перетин (O_1) й буде центром дуги кола $\mathbf{Г}$ (AMB), із кожної точки якої відрізок AB видно під заданим кутом α, що просто обґрунтувати [2, *10 — 11*]. Отже, в рівнобедреному трикутнику ABM, де $M = p \cap \mathbf{Г}$, кут при вершині M дорівнює α, а кути при основі AB рівні між собою (нехай $\angle MBA = \angle MAB = \beta$). У свою чергу, $\angle NAB = 180° - \beta = \alpha + \beta$, оскільки він розгорнутий і, водночас, зовнішній для трикутника ABM. Але кут B_1BA теж розгорнутий, й тому $\angle B_1BM = 180° - \beta = \alpha + \beta$. У результаті отримуємо, що $MB = MA$, $BB_1 = AA_1$ і $\angle A_1AM = \angle B_1BM$; отже, $\Delta A_1AM = \Delta B_1BM$ (за двома сторонами та кутом між ними).



а б

Рис. 5

А зараз проведемо серединний перпендикуляр p_1 до відрізка A_1B_1 у трикутнику MA_1B_1, в якому кут A_1MB_1 також рівний α, що очевидно (див. рис. 5, *а*). Стверджуємо, що p_1 перетне дугу кола **Г** у тій самій точці *M*.

Справді, якщо припустити, що точна A_1 рухається в протилежному напрямі ($A_1 \to A$), а B_1 — у напрямі *B* ($B_1 \to B$) з однаковою швидкістю, то коли A_1 зіллється з *A*, B_1 — зіллється з *B*: $\Delta MA_1B_1 \to \Delta MAB$. При цьому трикутник A_1AM можна отримати із трикутника B_1BM перетворенням повороту на кут α з центром у точці *M*. Отже, трикутники *MAB* і MA_1B_1 подібні, а будь-яке розміщення точки *B* на промені *b* при такому повороті (рис. 5, *б*) переводить її в точку *A* на промені *a* так, що місце точки *M* на площині залишається незмінним. Задачу розв'язано.

Задача 6. Нехай *ABCD* — паралелограм; точка *E* лежить на промені *AB* ($B \in AE$), а точка *F* — на промені *AD* ($D \in AF$). Відрізки *ED* і *FB* перетинаються в точці *K*. ***Довести***, що чотирикутники *ABKD* і *CEKF* рівновеликі (рис. 6).

Цікаві, рисунково красиві пропозиції з суто геометричним змістом на рівновеликість та рівноскладеність багатокутників мають практичний, прикладний характер. Шкода, але у шкільному курсі цим питанням не приділяють належної уваги.

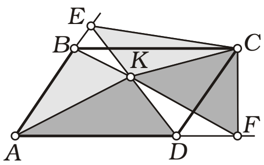


Рис. 6

Отже, згідно з умовою задачі, на продовженні сусідніх сторін *AB* і *AD* паралелограма *ABCD* будь-де вибираємо точки *E* і *F*. Отримавши зображення точки $K = ED \cap FB$, з'єднаємо її з точками *A* і *C*. Таким дійством кожен із чотирикутників *ABKD* і *KECF* розбито на два трикутники *ABK* і *AKD*, *KEC* і *KCF* відповідно. Порівняємо їх площі.

Якщо площу паралелограма *ABCD* позначити через *S*, то уважно оглядаючи рисунок неважко помітити, що

$S_{\Delta ABK} + S_{\Delta KCD} = \frac{1}{2}S$, а з іншого боку,

$S_{\Delta DEC} = S_{\Delta EKC} + S_{\Delta K} = \frac{1}{2}S$.

Отже, $S_{\Delta ABK} + S_{\Delta KCD} = S_{\Delta EKC} + S_{\Delta KCD}$. Уже звідси прямо випливає, що

$S_{\Delta ABK} = S_{\Delta EKC}$. (3)

Аналогічно:

$S_{\Delta AKD} + S_{\Delta BKC} = \frac{1}{2}S$; з іншого боку,

$S_{\Delta BCF} = S_{\Delta BCK} + S_{\Delta K} = \frac{1}{2}S$.

Отже, $S_{\Delta AKD} + S_{\Delta BKC} = S_{\Delta BKC} + S_{\Delta KCF}$. Звідси

$S_{\Delta AKD} = S_{\Delta KCF}$. (4)

Коли просумувати рівності (3) і (4), то отримаємо такий результат:

$S_{\Delta ABK} + S_{\Delta AKD} = S_{\Delta EKC} + S_{\Delta KCF}$.

Отже, матимемо: $S_{ABKD} + S_{CEKE}$, що й вимагалось довести.

Задача 7. Інструментом рисункових операцій є лінійка з поділками 1 см. Потрібно з її допомогою ***побудувати*** пряму *b*, перпендикулярну до вже накресленої прямої *a*.

Розв'язування будь-якої задачі на побудову (за встановленою схемою) розпочинається з аналізу та з конструювання алгоритму покрокових операцій на шляху до результату. Дефакто етап аналізу є образно-логічним переходом від *дескриптивного* означення шуканої фігури до *конструктивного* (в аналізі мають бути чітко вирізненні кроки побудови). Рисунок виконаний «від руки», з якомога більш точним візуальним дотриманням градусної міри кутів, взаємних розташувань і лінійних співвідношень між елементами, є обов'язковим атрибутом цього надважливого етапу.

Як у даному випадку побудувати правильний рисунок?

Учню варто пам'ятати, що в реальних фігурах геометрії на площині перпендикулярність між прямими асоціюється в першу чергу з висотами трикутника. Тож на заданій прямій *a* (рис. 7) виберемо будь-який відрізок *BC* і будь-де поза прямою точку *A*. Проведемо висоти *BK*, *CL* і *AP* у трикутнику *ABC*. Нехай *M* є їх точкою перетину. Констатуємо, що трикутники *BLC* і *BKC* — прямокутні, отже їх медіани у вершинах прямих кутів *L* і *K* сходяться в точці *O*, яка є серединою гіпотенузи *BC*; до того ж, $BO = OC = OL = OK$.

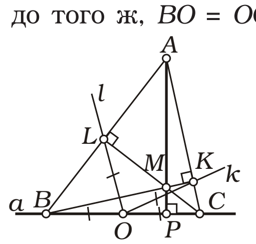


Рис. 7

На цьому етап аналізу можна вважати завершеним, оскільки проведені міркування чітко вирізнили кроки побудови: 1) на заданій прямій a довільно вибираємо точку O; 2) від точки O в обох напрямах відкладаємо відрізки OB і OC із довжиною в 1 см кожний; 3) з точки O у вибрану півплощину проводимо два будь-як розташовані промені l і k; 4) на цих променях відкладаємо відрізки OL і OK відповідно з тією ж довжиною 1 см; 5) проводимо промені BL і CK та фіксуємо їх точку перетину A; 6) з'єднуємо попарно точки B і K, C і L відрізками та фіксуємо їх точку перетину M; 7) нарешті, з'єднавши точки A і M прямою, отримуємо шуканий результат.

Доведення і дослідження в цій задачі очевидні.

Задача 8. Бісектриси кутів A, B і C трикутника ABC перетинають його описане коло в точках A_1, B_1 і C_1 відповідно. Нехай P є точкою перетину прямих B_1C_1 та AB, а Q — прямих B_1A_1 та BC. Як за допомогою циркуля і лінійки ***побудувати*** трикутник ABC, маючи зображення описаного кола, точок P і Q і знаючи в якій півплощині прямої PQ лежить вершина B.

Даним прикладом можливо продемонструвати повну схему розв'язання конструктивних задач планіметрії.

Аналіз. Припустимо, що рисунок 8 задовольняє умову задачі. З того, що AA_1, BB_1, CC_1 є бісектрисами кутів шуканого трикутника, та пославшись на теорему про вписаний у коло кут, отримаємо:

$$\angle B_1C_1C + \angle CC_1A_1 + \angle C_1A_1A =$$
$$\angle B_1BC + \angle CAA_1 + \angle C_1CA =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\angle ABC + \angle CAB + \angle BCA\right) = 90^\circ.$$

Таким чином, у трикутнику C_1A_1D ($D=B_1C_1 \cap AA_1$) $\angle C_1DA_1 = 90^\circ$. Отже, AA_1 вміщує відрізок A_1D, який є висотою трикутника $A_1B_1C_1$. До того ж, аналогічно з'ясовуємо, що $BB_1 \perp A_1C_1$, а $CC_1 \perp A_1B_1$, тобто бісектриси трикутника ABC визначають водночас висоти трикутника $A_1B_1C_1$.

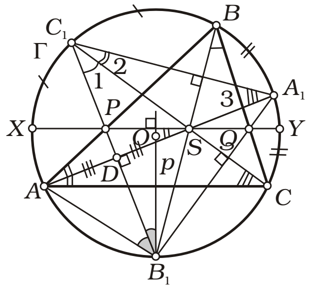


Рис. 8

Далі зовсім неважко помітити, що $\angle AB_1C_1 = \angle C_1B_1B$, адже вони спираються на рівні дуги AC_1 і C_1B. Нехай S — точка перетину висот трикутника $A_1B_1C_1$ (бісектрис трикутника ABC). Оскільки пряма B_1C_1 висікає висоту і бісектрису трикутника AB_1S одночасно, вона є серединним перпендикуляром відрізка AS у рівнобедреному трикутнику B_1AS, й саме завдячуючи цьому факту ($APSB_1$ — дельтоїд) $\angle CAS = \angle PAS = \angle PSA$. Звідси, скориставшись ознакою паралельних прямих, матимемо $PS \,||\, AC$. Так само доводимо, що $SQ \,||\, AC$. Аналіз завершено.

Побудова. 1) Зафіксуємо точки перетину прямої PS із заданим колом $\mathbf{\Gamma}$: $(X, Y) = PS \cap \mathbf{\Gamma}$. 2) Через центр кола O до відрізка XY проводимо серединний перпендикуляр p. 3) У півплощині прямої XY, відмінній від півплощини вершини B, знаходимо точку перетину серединного перпендикуляра з колом: $B_1 = p \cap \mathbf{\Gamma}$. 4) У перетині променів B_1P і B_1Q з колом $\mathbf{\Gamma}$ знаходимо дві інші вершини трикутника $A_1B_1C_1$ відповідно: $C_1 = B_1P \cap \mathbf{\Gamma}$, $A_1 = B_1Q \cap \mathbf{\Gamma}$. 5) Нарешті, проводимо висоти трикутника $A_1B_1C_1$, котрі в перетині з колом висікатимуть усі три вершини шуканого трикутника ABC, а саме: $A_1A \perp B_1C_1$, $C_1C \perp B_1A_1$, $B_1B \perp C_1A_1$.

Доведення випливає прямо з аналізу та побудови.

Дослідження, яке зручно (і надто просто) провести прослідкувавши кроки побудови, засвідчує, що задача завжди має *єдиний* розв'язок.

Пропозиція суто конструктивного характеру розв'язана повністю.

Задача 9. Точка M лежить усередині трикутника ABC. Пряма, що проходить через точку M і паралельна стороні AC, перетинає сторону AB у точці N, а сторону BC — у точці K. Пряма, що проходить через точку M і паралельна стороні AB, перетинає сторону AC у точці D. Пряма, що проходить через точку M і паралельна стороні BC, перетинає сторону AC у точці L. Ще одна пряма проходить через точку M і перетинає сторони AB і BC відповідно в точках P і R так, що $PM = MR$. Точка Q ділить відрізок DL навпіл. ***Знайти*** площу трикутника PQR, якщо $CK : CB = a$ і площа трикутника ABC дорівнює S.

Споглядаючи акуратний рисунок, виконаний із дотриманням указаних у тексті задачі вимог, дуже важко «з ходу» помітити шлях її розв'язування — не вистачає значимих закономірних зв'язків між умовою та вимогою. Тому спочатку варто зробити вивірені ***добудови***, ввівши в розгляд ще інші, допоміжні фігури.

Осмислена розумом (часто — підмічена **інтуїтивно**), *доречна добудова якісного рисунка є важливим компонентом візуальної діяльності учня в унаочненні геометрії, про що в жодному разі не варто забувати вчителю.*

Отже, з'єднаємо відрізками пари точок M і B, P і D, R і L та опустимо з точки B перпендикуляри h_1 і h_2 на прямі ML та MD відповідно (рис. 9). Далі, скориставшись синтетичним методом міркувань, отримаємо суттєво важливі проміжні результати (*етап накопичення фактів*).

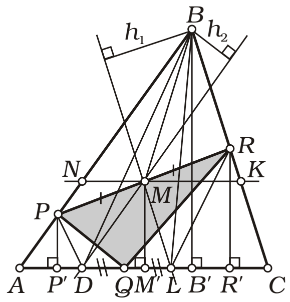


Рис. 9

По-перше, $S_{\Delta MRL} = S_{\Delta MBL}$, оскільки в цих трикутників є спільними основа ML і висота h_1. Із аналогічних причин $S_{\Delta PMD} = S_{\Delta BMD}$, в яких MD є спільною основою, а h_2 — висотою. Звідси безпосередньо випливає, що

$$S_{DPRL} = S_{\Delta DBL}, \quad (5)$$

адже трикутник DML є спільним складовим у розбитті на три трикутники як чотирикутника $DPRL$, так і трикутника DBL.

По-друге, з рисунка видно, що

$$S_{DPRL} = S_{\Delta PQR} + S_{\Delta PQD} + S_{\Delta RQL}. \quad (6)$$

Проведемо до AC і позначимо через PP', RR' і MM' висоти трикутників DPQ, LRQ і DML відповідно. Тоді

$$S_{\Delta PQD} + S_{\Delta RQL} = \frac{1}{2} DQ \cdot PP' + \frac{1}{2} QL \cdot RR'.$$

Але $DQ = QL$ (за умовою), а $PP' + RR' = 2 \cdot MM'$ (MM' — середня лінія трапеції $PRR'P'$). Таким чином, *по-третє*,

$$S_{\Delta PQD} + S_{\Delta RQL} = \frac{1}{2} MM' \cdot DL = S_{\Delta DML}. \quad (7)$$

Із отриманих рівностей (5), (6) і (7) маємо таке:

$$S_{\Delta PQR} = S_{\Delta DBL} - S_{\Delta DML} = \frac{1}{2} DL \cdot BB' - \frac{1}{2} DL \cdot MM'.$$

Однак очеви-дно, що трикутники DML і ABC подібні, а $CK : CB = \alpha$, тому $DL = \alpha \cdot BB'$ і $MM' = \alpha \cdot AC$. Якщо ще й прийняти до уваги, що $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BB' = S$, то $S_{\Delta PQR} = S \cdot (\alpha - \alpha^2)$. Задачу розв'язано.

Легко бачити, що дана задача на обчислення, як і задача під номером 6 на доведення, належать до класу геометричних пропозицій на рівновеликість та рівноскладеність багатокутників. Напевно, що в обох випадках без якісного, завершеного рисунка визначитися з потрібними в міркуваннях розбиттями визначених фігур на трикутники було б досить не просто.

Завершуючи виклад, зробимо наголос на такому.

Сьогодні вчитель математики, який звичайно ж отримав диплом про вищу педагогічну освіту, практично не навчає правилам виконання рисунків до теорем і задач геометрії, не демонструє прикладами прийомів роботи з ними. Учні малознайомі з олімпіадними, творчими задачами, в яких рисунку відводиться визначальна роль. Переконатися в цьому надто просто, досить запропонувати студентам першого курсу фізико-математичного факультету університету перевірочну контрольну роботу середнього ступеня складності. За роки навчання у школі учні (майбутні вчителі) звикли мати справу з найпростішими, елементарними ситуаціями, де будь-як виконаний рисунок малозначущий на шляху до результату. Проте, це ще півбіди. Прикро інше: студенти не без участі вчителя розучилися слухати («не чують» викладача), не навчені аналізувати і вникати в суть справи, ***їх важко налаштувати*** на розуміння *обов'язково* правильного, старанного виконання *рисунка*, який ще в 7-му класі мав би природно ввійти у шкільний курс геометрії незамінним складовим елементом кожної більш-менш серйозної пропозиції.

Вивчення математики формує багато позитивних якостей особистості: кмітливість, настирність, акуратність, критичність і т. ін. Серед них учителю варто вирізняти *логічне мислення* і *просторове уявлення*, вміння осмислити, «побачити розумом» певні фігури, предмети не лише статичними, а й динамічними (у процесі та як результат перетворень). Зокрема в геометрії, при розв'язуванні задач «із родзинкою» за рисунком, доводиться це робити постійно. Дякуючи чому поступово виробляються потрібні житейські якості, без яких не можна обійтися у повсякденному плануванні вже дорослої діяльності з тим, щоб її результати були виваженими, раціональними, безпомилковими. До того ж, геометричні задачі розвивають інтуїцію, здатність розумного, правильного вибору шляху в непростих, заплутаних ситуаціях.

Цілеспрямоване навчання і самонавчання розв'язувати нестандартні, різного ступеня складності геометричні задачі з ефективним використанням у пошуковому, творчому стилі візуально якісних рисунків здатне розбурхати і закріпити пізнавальний інтерес до науки, яка виникла із *практичних* і *духовних* потреб, є *феноменом* загальнолюдської культури. Геометризація, візуальне унаочнення, моделювання в уяві та на рисунку різнохарактерних задач покликані принести відчутну користь учню.

Немає сумнівів, що гучний вислів «***Геометрія є вітаміном для мозку***» завжди залишатиметься актуальним на освітянській ниві.

ЛІТЕРАТУРА

1. Аргунов Б. И., Демидова И. Н., Литвиненко В. Н. Задачник-практикум по геометри: Учебное пособие. — М.: Просвещение, 1979. — 128 с.

2. Боравльов А. П., Ленчук І. Г. Аналіз у розв'язуванні задач на побудову: Навч. посіб. — К.: Вища шк., 2002. — 194 с.

3. Головащук С. І. Словник-довідник з українського літературного слововживання. — К.: Наукова думка, 2004. — 448 с.

4. Лейфура В. М., Мітельман І. М., Радченко В. М., Ясінський В. А. Математичні олімпіади школярів України: 1991 — 2000 рр.: Навч.-метод. посібник. — К.: Техніка, 2003. — 541 с.

5. Лейфура В. М., Мітельман І. М., Радченко В. М., Ясінський В. А. Математичні олімпіади школярів України: 2001 — 2006 рр.: Навч.-метод. посібник. — Львів: Каменяр, 2008. — 348 с.

6. Литвиненко Г. М., Собко М. С. Розв'язання екзаменаційних завдань з математики. — К.: Радянська шк., 1989. — 128 с.

7. Шарыгин И. Ф. Задачи по геометрии (планиметрия). — М.: Наука, 1982. — Б-ка «Квант». — Выпуск 17. — 160 с.