ТЕОРЕТИКО-МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ МЕТОДОМ ПОДІБНОСТІ

Іван ЛЕНЧУК — професор кафедри методики навчання математики, фізики та інформатики Житомирського державного університету ім. І. Я. Франка, доктор педагогічних наук

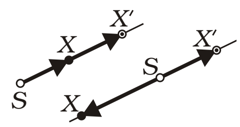
Анотація. Компактно, у зручній для практичного використання формі сформульовані означення, перераховані основні поняття, з'ясовано ідею та евристичну схему методу подібності в задачах конструктивній планіметрії. Розглянуто різні способи задавання подібності й гомотетії на зображеннях. Факти в послідовному викладенні логічно строго обґрунтовані.
Ключові слова. Метод перетворень, конструктивізм, задачі на побудову, гомотетія, подібність, геометричні способи задавання.

Иван ЛЕНЧУК. Теоретико-методические основы решения задач методом подобия.
Аннотация. Компактно, в удобной для практического использования форме сформулированы определения, перечислены основные понятия, установлено идею и эвристическую схему метода подобия в задачах конструктивной планиметрии. Рассмотрено разные способы задания подобия и гомотетии на изображениях. Факты в последовательном изложении логически строго обоснованы.
Ключевые слова. Метод преобразований, конструктивизм, задачи на построение, гомотетия, подобие, геометрические способы задания.

Ivan LENCHUK. Theoretical-methodical bases of solving problems by the method of similarity.
Summary. Compact, convenient for practical use formulated form definitions are listed the basic concepts, and established the idea of the heuristic method of similarity in the problems of constructive geometry. Considered different ways to define similarity and dilation in images. The facts in a sequential statement is logically justified.
Keywords. The method of transformation, constructivism, mathematics, dilation, similarity, geometric methods in the job.

У викладанні й учінні перетворення *подібності* ($X'Y' = k \cdot XY$, де $k > 0$) надто важливо: привернути увагу суб'єктів навчання до того факту, що *рух і гомотетія є його частинними випадками*; глибше, детальніше, на суто геометричній основі подати означення і властивості гомотетії — центрального площинного перенесення фігури F у фігуру F' (див. [6, *156*], мал. 234).

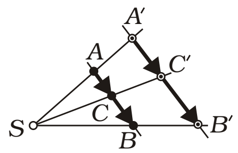
Учителю-професіоналу незрозуміло, чому б учням 9-го класу не навести **вичерпне означення** гомотетії, дещо перефразувавши його тлумачення за сценарієм класичного підручника: «Нехай F — дана фігура і S — фіксована точка (центр гомотетії). Через довільну точку X фігури F проведемо пряму SX і відкладемо на ній відрізок SX' так, щоб $\overline{SX'} = k \cdot \overline{SX}$ (*), де k — додатне або від'ємне число. Перетворення фігури F, при якому кожна її точка X переходить у точку X' за законом, котрий задано векторною рівністю (*), ***називається гомотетією*** *відносно центра* S. Тут число k називається *коефіцієнтом гомотетії*; якщо $k > 0$, то гомотетія називається *додатною* $\left(\overline{SX'} \uparrow\uparrow \overline{SX}\right)$, якщо $k < 0$ — *від'ємною* $\left(\overline{SX'} \uparrow\downarrow \overline{SX}\right)$ (мал. 1). Фігури F і F' називаються *гомотетичними*».



Мал. 1

Такий стан речей дивує ще й тому, що далі — в доведенні *теореми* 11.1: «***Гомотетія є перетворення подібності***» — автор все ж користується векторним задаванням гомотетії. Й учень, який на достатньому рівні засвоїв тему «Вектори» (властивості множення вектора на число), може запитати вчителя, як виглядатиме малюнок 235 у тому ж підручнику, коли у векторній рівності $\overline{SX'} = k \cdot \overline{SX}$ число k буде від'ємним? Що в цьому випадку відповість учитель? Схожі недомовки обов'язково мали б прочитуватися між рядками тексту, оскільки підручник слугує учителю лише стислим конспектом.

Далі, як *теорему*, потрібно довести твердження про те, що ***гомотетія зберігає відношення відрізків на прямій***, яке за складністю міркувань і перетворень порівнянне із твердженням теореми 11.1 та, крім цього, ним презентується одна із ключових властивостей гомотетії (див. мал. 3).



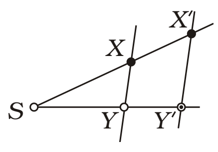
Мал. 2

Отже, нехай (мал. 2) задано пряму AB і на ній точку C таку, що $AC : CB = \lambda$; нехай також точка S і число k — центр та коефіцієнт гомотетії відповідно. Тоді $\overline{AC} = \lambda \cdot \overline{CB}$ (*), що очевидно. За теоремою 11.1 [6], $\overline{A'C'} = k \cdot \overline{AC}$ і $\overline{C'B'} = k \cdot \overline{CB}$. Або, $\overline{AC} = \frac{1}{k} \cdot \overline{A'C'}$ і $\overline{CB} = \frac{1}{k} \cdot \overline{C'B'}$. Тепер, скориставшись рівністю (*), маємо: $\frac{1}{k} \cdot \overline{A'C'} = \lambda \cdot \frac{1}{k} \cdot \overline{C'B'}$. Звідси випливає $\overline{A'C'} = \lambda \cdot \overline{C'B'}$, що й потрібно було довести.

Такі та схожі до них доведення надто важливі, оскільки вони у своєму роді є тренувальними вправами використання векторів у геометрії, що учням завжди дається досить не просто.

Із цих теорем як наслідок отримуємо, що *гомотетія переводить усяку пряму, яка не проходить через її центр, у пряму, паралельну заданій, а пряму, яка містить центр гомотетії, в себе.*

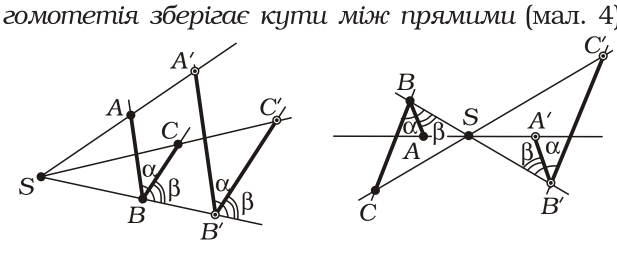
Більше того, й це в геометрії принципово важливо, наслідком останньої теореми є часто вживаний *геометричний спосіб задавання гомотетії*: ***центром та парою відповідних точок***; на малюнку 3 — центром S та точками X і X'. Щоб побудувати точку Y', відповідну в цій гомотетії будь-якій даній точці Y, потрібно: 1) SY; 2) XY; 3) $X'Y' \parallel XY$; 4) $Y' = SY \cap X'Y'$.



Мал. 3

Такими, що часто використовуються, є ще й інші наслідки: *гомотетія переводить промінь у промінь, відрізок — у відрізок, три точки, що не лежать на одній прямій, — у три точки, які також не лежать на одній прямій.*

Нарешті, скориставшись фактом, що гомотетія пряму, якій не належить центр цього перетворення, переводить у пряму їй паралельну, та пригадавши властивості кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною, легко доводимо, що *гомотетія зберігає кути між прямими* (мал. 4).



Мал. 4

Якщо кожна гомотетія з центром у точці S і коефіцієнтом гомотетії k переводить точку A в точку A', то із факту $\left(\overline{SA'} = k \cdot \overline{SA} \Rightarrow \overline{SA} = \frac{1}{k} \cdot \overline{SA'}\right)$ прямо випливає, що інша гомотетія з цим самим центром S і коефіцієнтом гомотетії $\frac{1}{k}$ точку A' переведе в точку A. Тобто, h_S^k і $h_S^{\frac{1}{k}}$ — *суть два взаємно обернені перетворення*:

$$h_S^k(A) = A', \quad h_S^{\frac{1}{k}}(A') = A.$$

Їх послідовне виконання переводить точку A в себе:

$$\left(h_S^{\frac{1}{k}} \cdot h_S^k\right)(A) = A.$$

Тож маємо *тотожне* перетворення, яке інколи зручно позначати формулою виду: $h_S^{\frac{1}{k}} \cdot h_S^k = 1$.

Такі умовиводи дозволяють елементарними міркуваннями довести ще одну принципово важливу **теорему**: *Нехай* ***p — перетворення подібності*** *з коефіцієнтом* ***k***, *а* ***h — гомотетія*** *з цим самим коефіцієнтом* ***k*** *та з центром у будь-який точці* **S**. *Тоді* ***існує один і лише один рух r*** *такий, що* ***p = r · h*** (*). Говорять: усяке перетворення подібності можна розкласти в добуток гомотетії на рух (представити композицією гомотетії і руху).

Доведення. Розглянемо перетворення $r = p \cdot h_S^{\frac{1}{k}}$ (**), яке однозначно є подібністю з коефіцієнтом $k \cdot \frac{1}{k} = 1$ (див. [6], §11, п. 102). Однак, саме рух кваліфікується як перетворення подібності з коефіцієнтом, рівним 1.

Отже, в рівності (**) r — рух. Із неї ж (суто формально) отримаємо:

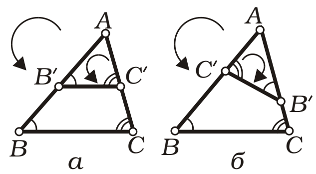
$$r \cdot h_S^k = \left(p \cdot h_S^{\frac{1}{k}}\right) \cdot h_S^k, \text{ або } r \cdot h_S^k = p \cdot \left(h_S^{\frac{1}{k}} \cdot h_S^k\right) = p.$$

Таким чином, **існування** руху r, який задовольняє умову (*), доведено.

Нехай тепер r_1 — довільний рух, що є складовим у рівності $p = r_1 \cdot h_S^k$. Звідси, за вже апробованою схемою, маємо $p \cdot h_S^{\frac{1}{k}} = r_1$. Урахувавши рівність (**), приходимо до висновку, що $r_1 = r$; **єдиність** руху теж доведено.

Якраз ця теорема з невигадливою і суворою логікою міркувань спонукає до важливого висновку: *перетворення* ***подібності*** *володіє властивостями,* ***спільними*** *для перетворень* ***гомотетії і руху***. Отже істинно мають місце твердження: *перетворення подібності переводить пряму в пряму, зберігає відношення відрізків на прямій, промінь переводить у промінь, відрізок — у відрізок, а три точки, які не лежать на одній прямій, — у три точки, що не лежать на одній прямій; кут переводить у* *рівний йому кут* (*перпендикулярні прямі — в перпендикулярні прямі*).

Якщо у представленні подібності добутком гомотетії на рух ($p = r \cdot h$) останній є паралельним перенесенням чи поворотом, то така подібність *не змінює орієнтацію* фігур на площині (з малюнка 4 навіч випливає, що будь-яка гомотетія — додатна чи від'ємна — зберігає орієнтацію). Якщо ж у композиції перетворень рух є симетрією відносно прямої, то цей різновид подібності *змінює орієнтацію* плоских фігур на протилежну: пара подібних трикутників ABC і $A'B'C'$ на малюнку 5, *а* однаково орієнтовані, а на малюнку 5, *б* — протилежно (відрізки BC і $B'C'$ інколи називаються «антипаралельними»).



Мал. 5

Далі компактно наведемо зручні у використанні означення, перерахуємо основні поняття, з'ясуємо **ідею** та **евристичну схему** *методу подібності*, а також розглянемо різні способи задавання подібності й гомотетії.

Гомотетією називається перетворення площини, що визначається законом $\overline{SM'}=k\overline{SM}$ ($k \neq 0$), де k — коефіцієнт гомотетії ($k > 0$ відповідає додатній гомотетії, а $k < 0$ — від'ємній). Точка S, очевидно, переходить сама в себе, тобто при будь-якому k це — подвійна точка; вона є *центром гомотетії.* Відповідні точки M та M' завжди лежать на одній прямій з центром S. Якщо $k \neq 1$, то S є єдиною подвійною точкою; при $k = 1$ маємо тотожне перетворення, а при ($k = -1$) — центральну симетрію. Гомотетію будемо позначати символом H_S^k. Обернене перетворення (яке образи точок переводить в їхні прообрази) теж є гомотетією $H_S^{\frac{1}{k}}$.

Подібністю називається перетворення, яке змінює відстані між точками в k разів ($k > 0$). Отже, якщо точкам A і B відповідають точки A' та B', то $A'B' = kAB$. Гомотетія — окремий випадок загального перетворення подібності; при цьому в разі від'ємної гомотетії коефіцієнтом подібності буде $|k|$.

Загальне перетворення подібності можна **задати** *парою відповідних подібних трикутників.* Якщо вони орієнтовані однаково, то говорять про **власно-подібне** перетворення площини; якщо ж — протилежно, то йдеться про **дзеркально-подібне** перетворення. Подібність на площині можна **задати** також *двома відповідними відрізками AB й $A'B'$*, якщо при цьому вказати, власно-подібне чи дзеркально-подібне перетворення хочемо мати. Справді, якщо M — довільна точка площини, то досить на відрізку $A'B'$ побудувати трикутник $A'M'B'$, подібний до трикутника AMB, з урахуванням орієнтації. Точка M' і буде образом точки M ($k = A'B' : AB$).

Метою статті є теоретико-методична та, частково, практична підготовка вчителя до розв'язування конструктивних задач методом подібності.

Ідея методу подібності полягає в тому, що *з умов* ***розв'язуваних*** *суто геометричних задач у кожному окремому випадку можна виділити групу даних, які визначають деякий клас подібних фігур.*

Отже, треба навчитися ділити умову задачі на дві частини. *Перша група умов дає можливість побудувати допоміжну фігуру, подібну до шуканої.* Наприклад, для побудови трикутника ця група може містити такі дані: два кути трикутника; кут і відношення сторін, які його утворюють; відношення трьох сторін. *Друга група умов визначає розміри шуканої фігури*, а іноді ще й її *положення.* Тут може бути відома яка-небудь лінійна величина (сторона, висота тощо) і розташування певної частини фігури.

Таким чином, *метод подібності здебільшого використовується тоді, коли в умові задачі задано лише один лінійний елемент, а решта — або кути, або відношення відрізків* ([4], ситуація 3).

Загалом за **евристичною схемою** методу подібності діють так:

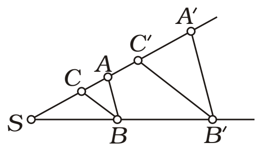
Виділяють дві групи даних в умові задачі і, відкинувши ту, яка визначає розміри фігури, будують фігуру, подібну до шуканої (*один із безлічі розв'язків у неозначеній задачі*).

Взявши до уваги відкинуті умови та виконавши перетворення подібності допоміжної фігури, будують шукану фігуру.

Часто-густо на першому кроці схеми дій *допоміжна фігура виявляється просто гомотетичною до шуканої* (*або до заданої*). Тоді *метод загального перетворення подібності заміюється окремим методом гомотетії.* Отже, потрібно навчитися вирізняти цей випадок і вміти за умовою задачі чи на етапі аналізу відшукувати елементи потрібного перетворення. У зв'язку з цим, зупинимося докладніше на деяких питаннях гомотетії, особливо на її **конструктивному** аспекті.

Спочатку розглянемо **різні способи задавання гомотетії** та одночасно покажемо побудову відповідних точок. З означення гомотетії випливає, що вона визначається центром S і коефіцієнтом $k \neq 0$. Проте для використання усякого перетворення у процесі розв'язування конструктивних задач потрібно знати **геометричні способи його задавання** (при цьому слід ураховувати, що класичні побудови виконуються циркулем та лінійкою).

Спосіб 1. Гомотетія повністю визначається центром S та парою відповідних точок A й A', що лежать із центром на одній прямій (мал. 6). Справді, вектори $\overrightarrow{SA'}$ та $\overrightarrow{SA}$ — колінеарні, тобто $\overrightarrow{SA'} = k\overrightarrow{SA}$. Отже, коефіцієнт гомотетії відомий. З'ясуємо хід побудови відповідних точок у двох випадках.



Мал. 6

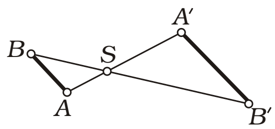
Нехай спочатку B — довільна точка площини, що не належить прямій SA. Проведемо через A' пряму, паралельну AB. Тоді в перетині із прямою SB дістанемо відповідну точку B'. Справді,

$$\Delta A'SB' \sim \Delta ASB \Rightarrow \frac{\overrightarrow{SA'}}{\overrightarrow{SA}} = \frac{\overrightarrow{SB'}}{\overrightarrow{SB}} = k \;\Rightarrow\; \overrightarrow{SB'} = k\overrightarrow{SB}.$$

Зауважимо, що з указаної подібності прямо випливає рівність $A'B' = kAB$.

Якщо точка C лежить на прямій SA, то відповідну точку C' знайдемо аналогічно після вказаної побудови пари точок B, B' ($B'C' \parallel BC$).

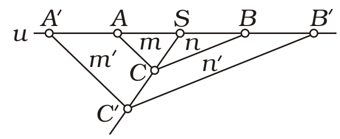
Спосіб 2. Гомотетію можна задати двома парами відповідних точок A, A' і B, B', які не лежать на одній прямій. Проте, лише за певних умов. З'ясуємо ці умови. По-перше, за властивістю гомотетії має бути $AB \parallel A'B'$. Нехай далі $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{A'B'}$. Тоді має виконуватись умова $AB \neq A'B'$, оскільки інакше матимемо паралельне перенесення. Отже $AA' \nparallel BB'$, а тому $AA' \cap BB' = S$ — центр гомотетії. Це випадок додатної гомотетії і він відповідає малюнку 6. Нехай тепер $\overrightarrow{AB} \downarrow\uparrow \overrightarrow{A'B'}$. Тут, незалежно від співвідношення відрізків AB й $A'B'$, перетин прямих AA' та BB' існує і дає центр S від'ємної гомотетії (мал. 7). Задавання, а водночас побудову відповідних точок у цьому випадку зведено до способу 1, розглянутого вище.



Мал. 7

Наслідок. *Для того, щоб два нерівних відрізки були гомотетичними, необхідно й достатньо, щоб вони були паралельними.*

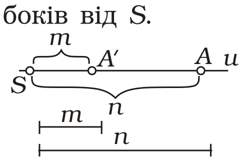
Спосіб 3. Гомотетію можна задати також двома парами A, A' та B, B' відповідних точок, які лежать на одній прямій (мал. 8). Справді, візьмемо будь-яку точку $C \notin u$ і побудуємо точку C' виходячи з того, що в гомотетії відповідні прямі завжди є паралельними ($m' \parallel m$, $n' \parallel n$). Тоді очевидно, що $S = u \cap CC'$ буде центром шуканої гомотетії, й у результаті знову матимемо перший спосіб задавання.



Мал. 8

В якості вправи, пропонуємо читачеві розглянути різні розташування відповідних пар на прямій u і відшукати таке, при якому не буде гомотетії.

Спосіб 4. Гомотетію задано центром S та коефіцієнтом $k = \pm\frac{m}{n}$, де m і n — відомі відрізки (мал. 9). Тут не вистачає пари відповідних точок для зведення гомотетії до першого способу. Для її побудови проведемо через S довільну пряму u і запишемо рівність $\overrightarrow{SA'} = k\overrightarrow{SA}$. Нехай спочатку $k = \frac{m}{n}$. Тоді матимемо $\frac{SA'}{SA} = \frac{m}{n}$. Звідси випливає, що шукану пару точок можна одержати безпосереднім відкладанням відрізків m та n від точки S на одному й тому самому промені прямої u. Якщо $k = -\frac{m}{n}$, то відрізки m й n варто відкладати з різних боків від S.

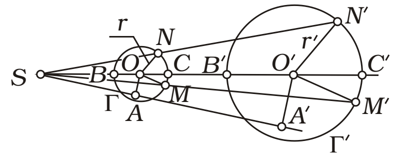


Мал. 9

Спосіб 5. Гомотетію задано центром S і коефіцієнтом k як числом. Це той випадок, що безпосередньо фігурує в означенні гомотетії. Якщо k — раціональне число ($k = \pm\frac{a}{b}$; a, b — натуральні числа), то вибираємо довільно одиничний відрізок q та будуємо відрізки $m = aq$ й $n = bq$. Цим дійством задавання гомотетії зведемо до способу 4. Якщо k — ірраціональне число, то задавання гомотетії в геометричному розумінні циркулем та лінійкою реалізувати неможливо.

Здобувши навички будувати в заданій гомотетії окремі гомотетичні точки, можна без проблем моделювати будь-які фігури, гомотетичні до вже зображених фігур. Наприклад, для побудови багатокутника, гомотетичного до заданого, досить побудувати образи всіх його вершин, що очевидно.

Тепер як слід з'ясуємо питання **гомотетії кіл**.



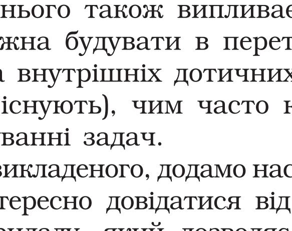
Мал. 10

Найперше зазначимо, що *коло в перетворенні гомотетії завжди переходить у коло.* Справді, нехай гомотетія задана центром S і парою точок A, A' (мал. 10). Г — будь-яке задане коло з центром O і радіусом r, а Г′ — його образ у цій гомотетії. Треба показати, що всі точки множини Г′ однаково віддалені від деякої фіксованої точки площини. Нехай O' — образ точки O, а M' — образ довільної точки M кола Г. За попереднім $O'M' = |k|\ OM = |k|\ r = \text{const}$. Отже, множина Г′ належить колу з центром O' і радіусом r'. Для завершення доведення треба показати обернене, що кожна точка кола (O') є образом деякої точки даного кола (O). Нехай тепер $N' \in (O')$, а N — прообраз точки N'. Оскільки $ON = O'N'\frac{1}{|k|} = \frac{r'}{|k|} = r$, маємо $N \in (O) \equiv \Gamma$.

Із доведення випливає, що *центри гомотетичних кіл є гомотетичними точками, а для побудови кола* Г′ *досить побудувати образи центра кола* Г *та будь-якої однієї його точки.*

Покажемо зараз, що будь-які два різні та нерівні кола є гомотетичними в додатній гомотетії і будь-які (без винятку) два кола — гомотетичними у від'ємній гомотетії. Нехай маємо зображення двох нерівних кіл Г та Г′ (мал. 11). Розглянемо в уяві перпендикуляри $OA = r$ й $O'A' = r'$ до лінії центрів. Оскільки $r \neq r'$, прямі OO' та AA' перетинаються в деякій точці S_1. Це й є центр додатної гомотетії заданих кіл. Справді, розглянемо гомотетію H_{S_1}, що переводить точку O в точку O'. За попереднім точка A переходить у точку A', а коло Г — в коло з центром O', яке проходить через точку A'. Однак центром O' та точкою A' коло визначається повністю; отже, $\Gamma' = H_{S_1}^{k}(\Gamma)\left(k = \frac{r'}{r}\right)$.

Аналогічно доводиться, що $S_2 = OO' \cap AA''$ (A' й A'' — діаметрально протилежні точки кола Г′) є центром від'ємної гомотетії заданих кіл (пропонуємо читачеві розглянути випадок, коли задані два кола є концентричними). Зауважимо, що іноді центри S_1 та S_2 ще називають *зовнішнім* і *внутрішнім* центрами гомотетії заданих кіл відповідно. На малюнку 11 зображено: $S = OO' \cap MM'$ — центр, а також M і M' — довільну пару відповідних точок у внутрішній гомотетії.

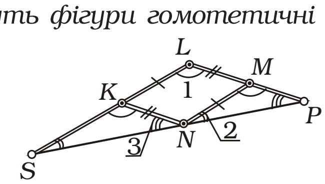


Мал. 11

З попереднього також випливає, що центри гомотетії можна будувати в перетині спільних зовнішніх та внутрішніх дотичних заданих кіл (якщо вони існують), чим часто користуються при розв'язуванні задач.

За темою викладеного, додамо наступне. Учням буде небезінтересно довідатися від учителя про існування приладу, який дозволяє викреслювати геометричну фігуру, перспективно-подібну (гомотетичну) вже накресленій фігурі, притому з будь-яким коефіцієнтом подібності. Такі прилади, історія появи котрих сягає початку XVII століття, називаються **пантографами**. Вони знайшли найширше застосування в будівництві та архітектурі, легкій промисловості, практичній геології, картографії ..., тобто всюди, де виникає потреба копіювати у змінюваному масштабі плани, схеми, карти, малюнки тощо. З точки зору навчання і виховання школярів ще більш вагомим є факт (можливість) матеріального моделювання характеристичного перетворення метричної геометрії, що зайвий раз підкреслює життєву спрямованість, практичну (прикладну) сутність предмета.

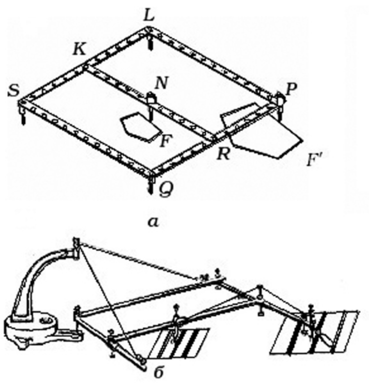
В основу конструкції пантографа покладено **теорему**, яка в доведенні вимагає лише розуміння ознак подібності трикутників і простих динамічних уявлень [1, 2]: *Нехай* (мал. 12) *KLMN — паралелограм; S і P — дві точки, взяті відповідно на продовженні суміжних сторін LK і LM й такі, які лежать на одній прямій з вершиною N, протилежною L. Якщо паралелограм видозмінюється, але довжини його сторін залишаються незмінними* (так званий, шарнірний паралелограм), *причому відрізки SL і LP теж не змінюються, а одна із трьох точок S, N, P є нерухомою, то дві інші опишуть фігури гомотетичні одна одній.*



Мал. 12

Закріпимо нерухомо наприклад точку S і, для зручності та визначеності, введемо позначення: $LP = a$, $KN = b$. Коли точка N у русі опише деяку фігуру, точка P має описати їй подібну фігуру в гомотетії $H_S^{\frac{a}{b}}$. Іншими словами, потрібно довести гомотетичність точок N і P у будь-якому можливому їх розташуванні, тобто ми маємо переконатися, що при зсуві точки N точка P хоч і займе іншу позицію, проте: 1) точки N і P лежатимуть на одному промені, який виходить із точки S; 2) завжди буде справедлива пропорція $SP : SN = a : b$.

Найперше, чотирикутник $KLMN$ залишається паралелограмом, адже довжини його сторін будуть незмінними, оскільки $KL = NM$ і $KN = LM$ (змінюються лише кути паралелограма). У вихідній ситуації точки S, N і P лежать на одній прямій, а $LP \parallel KN$ і $SL \parallel NM$, тому $\Delta SKN \sim \Delta NMP$ і $\frac{SK}{KN} = \frac{NM}{MP}$. Рівність після динамічної «деформації» конструкції залишиться істинною, оскільки довжини відрізків, які вміщує пропорція, сталі. Але ж і кути SKN і NMP (хоч і змінюють градусну міру) теж залишаються рівними, бо кожен із них дорівнює куту SLP (як відповідні кути при паралельних прямих). Отже й навпаки, трикутники SKN і NMP залишаються постійно подібними, а звідси випливає, що $\angle MNP = \angle KSN$, а $\angle MPN = \angle KNS$. Таким чином, $\angle SNP = \angle SNK + \angle KNM + \angle MNP = \angle SNK + \angle SKN + \angle KSN = 180°$, а це означає, що точки S, N і P лежать на одній прямій. У свою чергу, що очевидно, $\Delta SKN \sim \Delta SLP$; отже, $\frac{SP}{SN} = \frac{LP}{KN} = \frac{a}{b}$, що й потрібно було довести.



Мал. 13

Зображенням на малюнку 13, *а* наведено схему діючого пантографа найпростішого типу, придатного для практичного здійснення перетворення додатної гомотетії з раціональним коефіцієнтом (із певними обмеженнями, що притаманно, загалом, усякому фізичному приладу чи моделі).

Схожий пантограф, до речі, легко сконструювати самостійно.

$LSPQ$ — ромб. Рухома планка KR установлюється так, щоб $\frac{LS}{KS} = \frac{a}{b}$ і $KR \parallel SQ$; рухомий штифт у точці N — так, щоб $\frac{KR}{KN} = \frac{a}{b}$. При цьому точки S, N і P розташовуються на одній прямій і $\frac{SP}{SN} = \frac{a}{b}$. Отож, точка P опише фігуру, гомотетичну тій фігурі, яку описує точка N, якщо, звичайно, точку S закріпити в цій гомотетії.

На малюнку 13, *б* зображено простий механізм, що є одним із реальних варіантів пантографа, який також може бути практично використаним на будь-якому сучасному виробництві.

Деталізовані за змістом **методичні корективи** висвітлення тем «Рух» і «Подібність фігур» мають на увазі їх неабияку собівартість у курсі геометрії. Адже не секрет, що майбутні вчителі, тим паче учні, не завжди чітко розуміють призначення і суть планіметричних перетворень, «плавають» у теоретичному обґрунтуванні їх властивостей, не володіють практичними навичками використання останніх не тільки в пошуку розв'язків задач побудовного характеру (що в особистісному розвитку учнів конструктивною геометрією надважливо), але й задач на обчислення, й у доведеннях теорем (пригадайте ознаки подібності трикутників, які доводять строго шляхом поетапного використання гомотетії та руху).

Без усвідомленого опанування викладених тверджень і фактів нереально навчитися грамотно розв'язувати задачі на побудову з ефективним використанням перетворення подібності (зокрема, рухів і гомотетії). У підсумку такий стан справ призводить до нерозуміння, повного несприйняття учнями базового перетворення евклідової геометрії.

Відомо, що кожна із 13-ти знаменитих книг Евкліда (330 — 275 рр. до н. е.) «Начала» розпочинається означеннями понять, які зустрічаються вперше; далі слідують аксіоми (постулати); за аксіомами йдуть теореми і **задачі** на **побудову**, розташовані в суворій послідовності так, що доведення (розв'язання) всякої наступної пропозиції спирається на попередню. З цього приводу О. В. Погорєлов писав: «Цей твір дає першу, що дійшла до нас, строго логічну побудову геометрії. Викладення в ньому настільки бездоганне для свого часу, що протягом двох тисяч років із моменту появи «Начал» він був єдиним посібником тим, хто вивчає геометрію» [7, *162*]. Отже, *конструктивним задачам у геометрії відведено особливе місце*, а щоб уміло розв'язати кожну з них, *слід мати багаж знань і достатній досвід.*

Варто нарешті усвідомити місце, роль і питому вагу побудовних задач у планіметрії (особливо для учнів, які вивчають математику поглиблено), їх безспірну належність предмету, природну складність (вони — вершина курсу) і, поряд із цим, логічну та малюнкову досконалість. Набуття ще в 7 — 9 класах конструктивних умінь і навичок сприяє мотивації в навчанні (становленню пізнавального інтересу учнів до науки геометрії), якісному переосмисленню геометричних закономірностей і фактів, їх класифікації, систематизації та образному структуруванню.

ЛІТЕРАТУРА

1. Адамар Ж. Элементарная геометрия, в 2-х ч. Ч. 1: Планиметрия / Ж. Адамар. — М.: Учпедгиз, 1948. — 608 с.

2. Аргунов Б. И. Элементарная геометрия: Учебное пособие для ПИ / Б. И. Аргунов, М. Б. Балк. — М.: Просвещение, 1966. — 366 с.

3. Бевз Г. П. Геометрія: Підручник для 7 — 9 класів загальноосвітніх навчальних закладів / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. — К.: Вежа, 2001. — 272 с.

4. Ленчук І. Г. Перетворення фігур: паралельне перенесення / І. Г. Ленчук // Математика в рідній школі. — 2016. — № 3. — С. 37 — 42.

5. Методика розв'язування задач на побудову. / О. М. Астряб, О. С. Смогоржевський, М. Б. Гельфанд та ін. — К.: Рад. шк, 1960. — 388 с.

6. Погорєлов О. В. Геометрія: Підручник для 7 — 9 класів середньої школи / О. В. Погорєлов. — К.: Освіта, 1998. — 224 с.

7. Погорелов А. В. Геометрия: Учебное пособие / А. В. Погорелов. — М.: Наука, 1983. — 288 с.