РОЛЬ І МІСЦЕ ВИНОСНИХ КРЕСЛЕНЬ У КОНСТРУКТИВНІЙ СТЕРЕОМЕТРІЇ

Іван ЛЕНЧУК — професор кафедри алгебри та геометрії Житомирського державного університету імені І. Франка, доктор педагогічних наук;
Микола ПРАЦЬОВИТИЙ — професор кафедри вищої математики Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова, декан фізико-математичного факультету, доктор фізико-математичний наук

Анотація. На конкретних прикладах продемонстровано роль і значення виносних креслень у пошуку розв'язання стереометричних задач, їх унаочнення та внутрішньої геометризації. В якості виносних креслень пропонується використовувати креслення-розгортки поверхонь тіл.
Ключові слова: стереометрія, виносні креслення, розгортка, геометризація, унаочнення.

И. Г. Ленчук, Н. В. Працевитый.
РОЛЬ И МЕСТО ВЫНОСНЫХ ЧЕРТЕЖЕЙ В КОНСТРУКТИВНОЙ СТЕРЕОМЕТРИИ.
Аннотация. На конкретных примерах продемонстрировано роль и значение выносных чертежей при поиске решений стереометрических задач, их наглядного представления и внутренней геометризации. В качестве выносных чертежей предлагается использовать чертежи-развёртки поверхностей тел.
Ключевые слова: стереометрия, выносные чертежи, развёртка, геометризация, наглядное представление.

I. G. Lenchuk, N. V. Pratsiovytyi.
THE ROLE AND PLACE OF REMOTE DRAWINGS IN CONSTRUCTIVE STEREOMETRY.
Summary. With concrete examples, the role and importance of remote drawings when searching for solutions of stereometric problems, their visual presentation and internal geometrization are demonstrated. As remote drawings it is proposed to use drawings-sweep surfaces of bodies.
Keywords: stereometry, remote drawings, scanning, geometrization, visual representation.

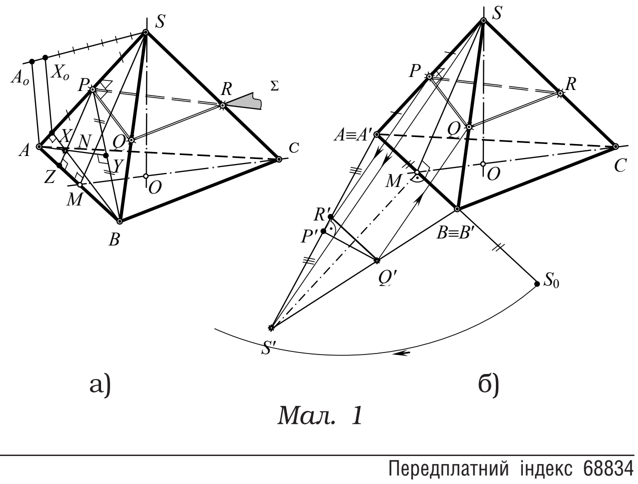
Б***інарне зображення*** окремого елемента або перерізу стереометричного тіла (комбінації тіл), на якому допустиме виконання метричних побудов і замірів як у планіметрії, називатимемо ***виносним кресленням***.

Отже, виносне креслення у стереометрії — це зображення плоскої фігури, подібної до оригіналу (дві фігури називаються подібними, якщо одна з них отримується з іншої в результаті перетворення подібності, тобто існує перетворення подібності, яке одну з них переводить в іншу).

Кожне виносне креслення виконується з обов'язковим дотриманням ряду вимог, що гуртуються на властивостях перетворень подібності, точніше: на інваріантах групи перетворень подібності — властивостях фігур, які залишаються незмінними при будь-якому перетворенні подібності, включаючи частинний випадок — рух (синонім: переміщення, ізометричне перетворення). Серед рухів простору важливу роль відіграє обертання навколо прямої. При виконані виносного креслення в якості осі обертання обирають, як правило, лінію нульового рівня, яка «лежить» на картинній площині. Таке просторове перетворення ще називають *суміщенням*.

Задача 1. Задано правильну трикутну піраміду $SABC$ зі стороною основи, рівною a. Бічне ребро піраміди у два рази більше сторони основи. **Побудуйте** на поверхні піраміди геометричне місце точок (ГМТ), рівновіддалених від її вершин S і A. **Знайдіть** формально-аналітично, графічно і графоаналітично площу фігури, яку утворює ГМТ у перетині з пірамідою. **Оцініть** точність графічних операцій для а, «знятого» із малюнка.

Нагадаємо, що працюючи строго за правилами конструктивної геометрії досягти візуальних результатів у наочному представленні розв'язань задач можна лише на метрично визначених зображеннях [1, § 34]. Тут метрика стереометричної фігури на повному проекційному кресленні має бути обумовлена виключно п'ятьма метричними параметрами: $AB = BC$, $BC = AC$, $SA = SB$, $SB = SC$, $SA = 2 \cdot AB$ (мал. 1).



Мал. 1

Насамперед варто змоделювати покроковий загально геометричний підхід до вирішення сформульованої пропозиції в уявленнях, тобто визначитися із правилом-орієнтиром покрокових побудов у просторовій конструкції.

Наразі відомо, що геометричним місцем точок простору, рівновіддалених від вершин S і A, є площина Σ, перпендикулярна SA та інцидентна точці P, яка ділить цей відрізок навпіл. Отже, першим просторовим дійством, що визріває у метрично-позиційній схемі, має бути проведення через точку P ($SP = PA$) площини Σ обумовленого напряму, а на другому кроці — відшукання фігури перерізу поверхні піраміди цією площиною. Повне розуміння, «бачення» цих операцій забезпечує правильний шлях у наступних діях побудови безпосередньо на бінарному зображенні тривимірного тіла.

Перший спосіб (мал. 1, *а*). Скористаємося безпосередньо внутрішніми взаємними залежностями між визначальними елементами піраміди, які випливають прямо з умови задачі (метод «без методів»).

Констатуємо, що трикутник APB рівнобедрений ($SP = PA = AB$). Тому ділимо відрізок PB точкою Y навпіл і проводимо першу висоту AY цього трикутника. Але у трикутнику SAB, оскільки він теж рівнобедрений ($SA = SB$), медіана SM є одночасно і висотою. Таким чином, відрізок PZ, проведений паралельно SM, є ще однією (другою) висотою трикутника APB. Висоти трикутника, як відомо, перетинаються в одній точці. Нехай $N = AY \cap PZ$. Отже, третя висота BX трикутника APB однозначно визначається його вершиною B і ортоцентром N. Цією операцією у грані SAB установлено перпендикулярний напрям до ребра SA. Залишилося лише через точку P у цій самій грані провести відрізок PQ, паралельний XB, а через точку Q у грані SBC — відрізок QR, паралельний BC (адже площина Σ розділяє ребра SB і SC правильної піраміди у перетині з ними в одному і тому ж відношенні, що очевидно). Точки P, Q і R в об'єднанні зі всіма точками відрізків PQ, QR і RP (трикутник PQR) й будуть шуканим ГМТ на поверхні піраміди.

Цікавим у запропонованому алгоритмі **конструктивних** дій є факт збігу (злиття, накладання) кроків проведення через точку P площини, перпендикулярної ребру SA, і відшукання перерізу піраміди цією площиною. Дві, загалом різні за геометричною суттю операції (метрична і позиційна), в цьому конкретному випадку неподільні.

Другий спосіб (мал. 1, *б*). Сумістимо грань SAB із картинною площиною: змоделюємо виносне креслення лівої грані піраміди, обравши в якості оригінального на зображенні ребро $AB \equiv A'B'$. Тут у побудові $MS' \perp AB$ і $AS' = BS' = 2A'B'$. Провівши через точку P' ($A'P' = P'S'$) відрізок $P'Q'$ справді під прямим кутом до $A'S'$, одержимо точку Q', яка з шуканою точкою Q пов'язана пропорцією: $S'Q' : Q'B' = SQ : QB$. Точку Q будуємо у звичайний спосіб, а точку R — як у попередньому випадку.

Третій спосіб (мал. 1, *а*). У рівнобедреному трикутнику SAB опустимо із точки B перпендикуляр на його бічну сторону SA і розрахуємо на цій стороні місце розташування точки X ***аналітично***.

Нехай $AB = a$; отже, $SA = SB = 2a$. Позначимо $AX = x$, тоді $XS = AS - x$. У трикутнику SAB справедлива рівність: $AB^2 - x^2 = SB^2 - (AS - x)^2$. Звідси маємо: $x = AX = \frac{a}{4}$, $XS = \frac{7a}{4}$ і $AX : XS = 1 : 7$. ***Графічне*** завершення задачі, яке за узагальненою теоремою про пропорційні відрізки моделює на зображенні знайдене відношення, не викликає труднощів.

Щоб представити площу рівнобедреного трикутника PQR формулою як функцію параметра a, виразимо через a, наприклад, його бічні сторони ($PQ = PR$) і кут QPR між ними.

1. Трикутник AXB прямокутний, тому

$$XB^2 = AB^2 - AX^2 = \frac{\sqrt{15}\,a}{4}.$$

2. $\Delta SXB \backsim \Delta SPQ$, отже

$$\frac{PQ}{XB} = \frac{SP}{SX} \Rightarrow PQ = \frac{\sqrt{15}\,a}{7}.$$

3. $\angle CXB = \angle RPQ$ ($XB = XC$, $BC = a$); із трикутника CXB за теоремою косинусів отримаємо

$$\cos\angle RPQ = \frac{7}{15} \text{ і, отже, } \sin\angle RPQ = \frac{4\sqrt{11}}{15}.$$

4. $$S_{\Delta PQR} = \frac{1}{2}PQ^2 \cdot \sin\angle RPQ = \frac{2\sqrt{11}}{49}a^2. \quad (*)$$

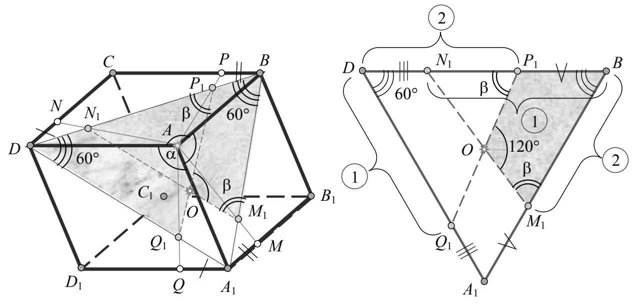
Заміри (див. винесене креслення на мал. 1, *б*), виконані на ПК у системі автоматизованого проектування «КОМПАС 3D-LT v.10» із точністю 4-го знаку після коми, мають такі значення: $A'B' = 23{,}4232$ мм, $P'Q' = P'R' = 12{,}9087$ мм, $Q'R' = 13{,}4972$ мм. Підрахунок площі трикутника PQR за формулою Герона дає результат: $S_{\Delta PQR} = 74{,}2625$ мм^2.

Якщо $a = 23{,}4232$ мм підставити у формулу (*), то отримаємо дещо інше значення шуканої площі: $S_{\Delta PQR} = 74{,}2716$ мм^2, яке приймаємо за істинне.

Тут абсолютна похибка комп'ютерних випробувань складає $0{,}0091$ мм^2, а відносна — $1{,}222 \cdot 10^{-2}$ %. Задачу розв'язано повністю.

Задача 2. Усі грані паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — ромби, а кожен із плоских кутів при вершині A рівний α. На ребрах A_1B_1, CD, BC і A_1D_1 узято відповідно точки M, N, P і Q так, що $A_1M = BP$, $DN = A_1Q$. Знайдіть кут між лініями перетину площини (A_1BD) із площинами (AMN) і (APQ).

У позиційно-метричній задачі **конструктивного змісту** надто важливо якісно (вдало) змоделювати стереометричну ситуацію із паралелепіпедом у наочному зображенні (мал. 2, *а*). Малюнок повинен містити всі визначальні елементи конструкції в уявлюваному візуально прийнятному розташуванні. Якщо досвід у такій діяльності незначний, слід терпеливо й акуратно доходити результату (формувати навички) методом «спроб і помилок».



а) б)

Мал. 2

Оскільки при метрично визначеному зображенні ромба використовуються два метричні параметри ($\angle A = \alpha$; $AB = AD$), а кожен із плоских кутів при вершині A рівний α, то всі грані паралелепіпеда — рівні ромби. Звідси випливає, що діагоналі ромбів зі спільною вершиною A, розташовані навпроти цієї вершини, теж рівні. А це ж означає, що трикутник A_1BD рівносторонній, тобто кожен з його кутів дорівнює 60°.

Лінії перетину площини (A_1BD) з площинами (AMN) і (APQ) будуються просто, а саме (див. мал.): $N_1M_1 = (A_1BD) \cap (AMN)$; $P_1Q_1 = (A_1BD) \cap (APQ)$, де точки $N_1 = BD \cap AN$ і $P_1 = BD \cap AP$ належать верхній грані паралелепіпеда, а точки $M_1 = A_1B \cap AM$ і $Q_1 = A_1D \cap AQ$ — відповідно правій і передній граням. Точка O є перетином відрізків N_1M_1 і P_1Q_1. Отже, згідно з вимогою задачі, належить знайти градусну міру кута P_1OM_1.

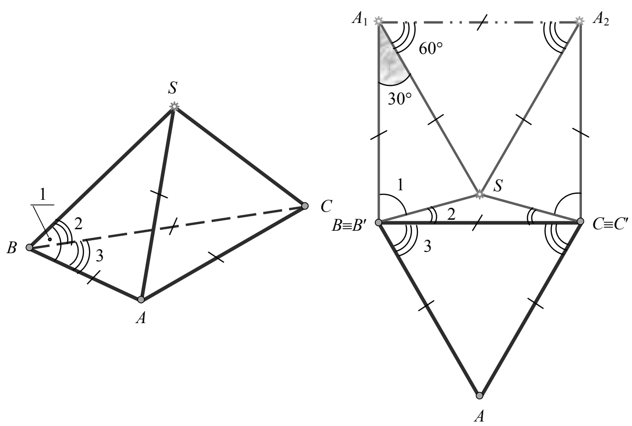
Помічаємо, що за двома сторонами і кутом між ними ($DN = A_1Q$, $AD = AA_1$, $\angle ADC = \angle AA_1Q$) трикутники ΔAND і ΔAQA_1 рівні. Звідси $\angle AND = \angle AQA_1$. Крім того, діагоналі DB і A_1D рівних ромбів ділять їх кути у вершинах D і A_1 на рівні половинки, а $DN = A_1Q$ за умовою. Тому $\Delta DNN_1 = \Delta A_1QQ_1$ за стороною і прилеглими кутами. Отже, $DN_1 = A_1Q_1$. Звідси та із уже з'ясованого факту, що трикутник A_1BD рівносторонній, випливає, що $DQ_1 = BN_1$. Аналогічно доводимо, що $\Delta A_1MM_1 = \Delta BPP_1$ та, відповідно, $A_1M_1 = BP_1$ і $BM_1 = DP_1$.

Подальший аналіз умови задачі й малюнка до неї значно краще провести на виносному кресленні (мал. 2, *б*). На такій картині міжелементні зв'язки і відношення краще візуалізуються, вони «істинні» за формою й розмірами (з деяким коефіцієнтом подібності). Тому особа, яка розв'язує задачу, зможе безпосередньо транспортиром заміряти кут P_1OM_1 і знайти наближене його значення.

Справді, з того, що $DQ_1 = BN_1$, $BM_1 = DP_1$ і $\angle D = \angle B = 60°$ прямо випливає рівність трикутників DP_1Q_1 і BM_1N_1, звідки $\angle DP_1Q_1 = \angle BM_1N_1 = \beta$ (див. мал.). $\angle BP_1O = 180° - \beta$ (як суміжний із кутом β) і $\angle BP_1O + \angle BM_1O = 180°$, а чотирикутник BP_1OM_1 є вписаним у коло, тому $\angle P_1OM_1 + \angle B = 180°$. Отже, як результат, отримуємо: $\angle P_1OM_1 = 120°$. Задачу розв'язано.

Задача 3. У тетраедра $SABC$ основа ABC є правильним трикутником, а бічне ребро SA рівне стороні основи. До того ж, сума плоских кутів при кожній з вершин B і C дорівнює по 150°. Знайдіть суми плоских кутів при вершинах A і D.

Розв'язання. Оскільки сума плоских кутів при вершині B (і при вершині C) рівна 150°, а в основі тетраедра лежить рівносторонній трикутник (мал. 3), то $\angle 3 = 60°$ і на два інші кути (в сумі) залишається 90°.



а) *б)*

Мал. 3

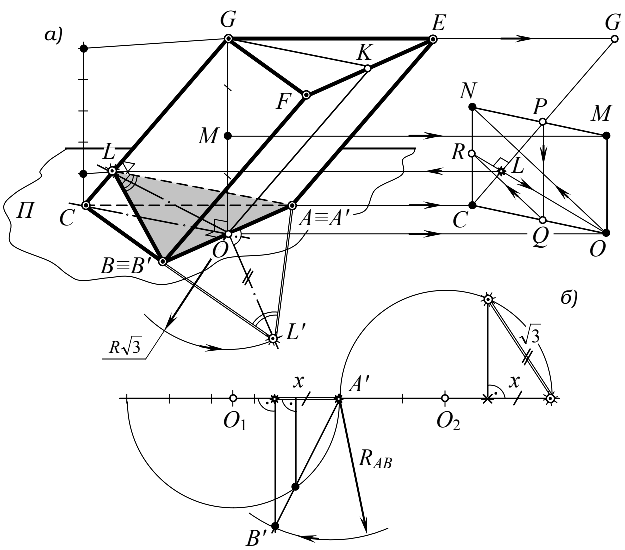
Отже, побудуємо на виносному кресленні розгортку поверхні тетраедра. Це по іншому кажучи, означає – сумістимо із картинною площиною всі його грані.

Уявімо собі таке: тетраедр основою ABC «поставлено» на площину зображень, розрізи зроблено уздовж ребер SA, AB і AC, а в якості осей обертання взято відповідно ребра BC, SB і SC. За умови, що довжина відрізка BC істинна (мал. 3, *б*), методом суміщення отримуємо оригінальну за формою і розмірами розгортку поверхні тетраедра $SABC$.

Привертаємо увагу до того факту, що після такого дійства ребра основи піраміди AB і AC «роздвоїлися» й розмістилися на картинній площині перпендикулярно ребру основи BC ($BA_1 \perp BC$, $CA_2 \perp BC$), адже $\angle 1 + \angle 2 = 90°$. Окрім того, оскільки $SA = AB = AC = BC$, маємо, що бічні грані SA_1B і SA_2C на розгортці є рівнобедреними трикутниками, фігура BA_1A_2C — квадратом, а SA_1A_2 — рівностороннім трикутником. Звідси $\angle SAC = \angle SAB = 30°$ і $\angle BAC = 60°$.

Отже, сума трьох кутів при вершині A дорівнює 120°, але це неможливо, оскільки у будь-якому тригранному куті, як відомо, кожен із плоских кутів **строго** менший суми, проте більший різниці, двох інших кутів, що у нашому випадку не виконується. Таким чином, сформульована задача є некоректною, а саме: її умова суперечлива.

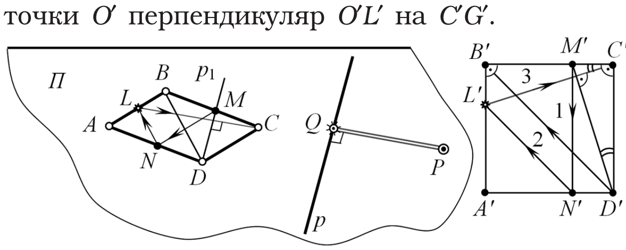
Задача 4. Задано зображення $EFGABC$ похилої призми, в основі якої лежить рівносторонній трикутник ABC, а вершина G проекціюється в точку O — середину ребра $AB = \sqrt{5}$. Побудуйте нормальний переріз призми і знайдіть площу трикутника перерізу, якщо $GO = 2 \cdot CO$.



Мал. 4

Зіставляючи в уявленнях метричні параметри елементів призми (мал. 4, *а*), помічаємо, що відрізки CO і OM у ролі суміжних сторін деякого паралелограма $NCOM$ (див. виносне креслення) однозначно визначають зображення квадрата-оригіналу $N'C'O'M'$, у площині якого бічне ребро призми $C'G'$ є січним. Воно перетинає сторону квадрата $M'N'$ в точці P'.

Тепер, за схемою проведення перпендикуляра із точки на пряму, коли картинна площина Π метрично визначена квадратом у формі будь-якого паралелограма (див. мал. 5), опускаємо з точки O' перпендикуляр $O'L'$ на $C'G'$.



Мал. 5

Очевидно, що трикутник $A'B'L'$ й буде шуканим нормальним перерізом заданої призми.

Щоб знайти на площині зображень «справжню» форму трикутника ABL і обчислити його площу, скористаємося добре відомими співвідношеннями, а саме: спочатку в основі призми — у трикутнику ABC, а потім — у прямокутному трикутнику COG, в якому відрізок OL є його висотою, проведеною з вершини прямого кута O на гіпотенузу CG.

Отож: $AB = BC = \sqrt{5}$ за умовою, тому $BO = \frac{\sqrt{5}}{2}$ і $CO = \sqrt{CB^2 - BO^2} = \frac{\sqrt{15}}{2}$, а $OG = \sqrt{15}$. Крім цього, $CG = \sqrt{CO^2 + OG^2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$; $CO^2 = CL \cdot CG \Rightarrow$ $\Rightarrow CL = \frac{3}{2\sqrt{3}}$; $LG = CG - CL = \frac{6}{\sqrt{3}}$ і $CL : LG =$ $= C'L' : L'G' = 1 : 4$. Цей результат дозволяє просто побудувати точку L ***графоаналітично*** (див. мал. 4, *а*).

Нарешті, у прямокутному трикутнику LOG $LO^2 = CL \cdot LG \Rightarrow LO = \sqrt{3}$. Урахувавши, що $AB \equiv A'B'$ у наступному перетворенні **графічно** (мал. 4, *б*) встановимо, щонайперше, одиницю довжини, відповідну саме тому відрізку, який на кресленні в операції суміщення залишиться без зміни. А потім, на базі так знайденого одиничного відрізка (x), будуємо відрізок $O'L' = \sqrt{3}$. Узявши до уваги, що $O'L' \perp A'B'$, зображаємо шуканий рівнобедрений трикутник $A'B'L'$ (мал. 4, *а*). Тут $S = \frac{1}{2} A'B' \cdot O'L' = \frac{\sqrt{15}}{2}$ кв. од. Задачу розв'язано.

Спробуйте самостійно за проведеними розрахунками знайти градусну міру двогранного кута при ребрі CG. Заміряйте на проекційному кресленні транспортиром кут $A'L'B'$ і оцініть точність виконаних побудов. Осмисліть і реалізуйте ***графічний*** метод відшукання форми трикутника $A'L'B'$ (порада: зробіть виносні креслення на площину зображень трикутників ABC і COG, узявши в якості оригінального відрізок $CO \equiv C'O'$).

ЛІТЕРАТУРА

1. Ленчук І. Г. Конструктивна стереометрія в задачах: Навчальний посібник для студентів математичних спеціальностей ВПНЗ / І. Г. Ленчук. — Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2010. — 368 с.

2. Четверухін М. Ф. Рисунки просторових фігур у курсі геометрії: посібник для викладачів / М. Ф. Четверухін. — К.: Радянська школа, 1953. — 188 с.