МЕТОД ПЕРЕТВОРЕНЬ: ПАРАЛЕЛЬНЕ ПЕРЕНЕСЕННЯ

Іван ЛЕНЧУК — професор кафедри методики навчання математики, фізики та інформатики Житомирського державного університету ім. І. Я. Франка, доктор педагогічних наук

Анотація. Анонсовано методику застосування паралельного перенесення як засіб розв'язування планіметричних задач на побудову. З'ясовано шляхи структурної типізації задач із метою їх алгоритмізації та комп'ютеризації, що сприятиме спрощенню як викладання, так і учіння цього специфічного розділу геометрії.

Ключові слова. Метод перетворень, конструктивізм, задачі на побудову, паралельне перенесення, аналіз, доведення.

Иван ЛЕНЧУК. Метод преобразований: параллельный перенос.

Аннотация. Анонсирована методика использования параллельного переноса в качестве средства решения планиметрических задач на построение. Установлены пути структурной типизации задач с целью их алгоритмизации и компьютеризации, что позволит упростить как преподавание, так и изучения этого специфического раздела геометрии.

Ключевые слова. Метод преобразований, конструктивизм, задачи на построение, параллельный перенос, анализ, доказательство.

Ivan LENCHUK. Converaion method: parallel transport.

Summary. Announced the methodology of using parallel transport as a means of solving planimetric construction problems. It was established way of typing the structural problems with a view to their algorithms and computerization, to simplify both the teaching and study of this particular section geometry.

Keywords. The method changes, constructivism, the task of building, parallel translation, analysis, proof.

У навчальних програмах для 5 — 9 класів ЗОНЗ із математики [3], зокрема в пояснювальній записці, наголошується: «*В основу побудови змісту й організації процесу навчання математики покладено компетентнісний підхід, відповідно до якого кінцевим результатом навчання предмета є сформовані певні компетентності як здатності учня успішно діяти в навчальних і життєвих ситуаціях і нести відповідальність за свої дії*».

При цьому підкреслюється, що: «*Необхідною умовою формування компетентностей є діяльнісна спрямованість навчання, яка передбачає постійне включення учнів до різних видів педагогічно доцільної активної навчально-пізнавальної діяльності, а також практична його спрямованість. Необхідно, де це можливо, не лише показувати виникнення математичного факту із практичної ситуації, а й ілюструвати його застосування на практиці*».

Переконливо! Проте до структури програми, її змістового наповнення навчальним матеріалом є претензії. Приміром:

- задачі на побудову зовсім відсутні у 7 класі, як і вся змістова лінія «Геометричні побудови» в курсі геометрії основної школи;
- ознаки подібності трикутників (8-й клас) вирвані з контексту теми «Геометричні перетворення» (9-й клас), а у графі державних вимог до рівня знань не акцентується в розв'язуванні яких задач учень мав би вміти застосовувати означення і властивості перетворень.

У цілому ж, складається враження, що перед укладачами програми було поставлене завдання вихолощення **диво-науки** до непізнання.

Але навчання найпершої з наук послуговує становленню особистості учня, його розвитку, а «… елементарна геометрія вміщує ще дві *великі загальні **ідеї***, які лягли в основу всієї подальшої розбудови геометрії… . Мова йде про **дедуктивний** метод і **аксіоматичне** обґрунтування геометрії, по-перше, і про **геометричні перетворення** та *теоретико-групове обґрунтування геометрії*, по-друге. **Ці ідеї вельми змістовні та плодотворні**» [7, *4*].

Оскільки перетворення геометричних фігур, які вводять в кінці вивчення курсу планіметрії, об'єктивно не можуть виступати як апарат доведення теорем і розв'язування задач, то постфактум констатуємо, що даний матеріал традиційно подають «**бездіяльнісно**», окремим розділом геометрії, не пов'язаним ні з жодним матеріалом, а тому й не засвоюється учнями належним чином. Після формального «прочитання» — відразу забувається. Проте *такий стан речей **алогічний, антинауковий***, оскільки «Геометрія є наука, яка вивчає властивості фігур, що не змінюються при перетвореннях деякої групи перетворень» [7, *12*]. До того ж, елементарна евклідова геометрія вивчає властивості фігур, утворених **прямими лініями** і **колами**, що моделюються **лінійкою** та **циркулем**, а групою перетворень цих фігур є перетворення **подібності** (зокрема, рухи і гомотетія).

Перетворення подібності в елементарній геометрії не лише розділ курсу, поцінований у творчому формуванні особистості суб'єкта навчання, це – ***інструмент***, ***засіб*** розбудови найпершої з наук, ефективний ***апарат*** педагогічно і методично виваженого виконання супутніх уявлюваних операцій з її фігурами. Як результат, у багатьох випадках, й особливо в конструктивній планіметрії, процес візуального вирішення не простих, різнохарактерних пропозицій відчутно пришвидшується, оптимізується.

Ідея методу *геометричних перетворень у найбільш загальному випадку полягає в тому, що на першому етапі розв'язування задачі — у процесі проведення* **аналізу** *— поряд із заданими в умові фігурами і тими, які потрібно побудувати, розглядаються й інші, одержані із заданих чи шуканих фігур* (або з їхніх частин) *за допомогою того чи іншого перетворення.* При цьому в кожному окремому випадку треба вибрати те перетворення визначених фігур, після виконання якого побудова зводиться безпосередньо до деякої елементарної задачі або хоча б до простішої побудови.

Залежно від того, яким саме геометричним перетворенням скористалися, говорять про певний різновид методу геометричних перетворень: про метод паралельного перенесення, повороту відносно точки на даний кут, осьової симетрії чи подібності (зокрема, гомотетії). Вдалий вибір перетворення для розв'язання конкретної конструктивної задачі вважається, певною мірою, **мистецтвом** того, хто її розв'язує. Означити евристичні приписи (як це властиво методу ГМТ), описати чіткі орієнтири на той чи інший метод, які містить у неявному вигляді умова задачі, або такі, що виникають під час аналізу, не просто. Можна лише змоделювати певні *типові ситуації* (без претензій на завершеність та повноту), розуміння і доречне використання яких буде спрямовувати учня на правильний шлях.

Ситуація 1. Часто побудувати фігуру важко тільки тому, що її частини або фігури, задані в умові задачі, віддалені одна від одної. Тут, використавши рух, вигідно зблизити «розкидані» задані чи шукані фігури так, щоб згрупувати їх у деяку нову фігуру, яку легко побудувати. Такими, наприклад, є задачі на побудову многокутників (не трикутників). У цьому випадку **зближення дає змогу звести задачу до побудови деякого трикутника** за відомими трьома його елементами.

Ситуація 2. Конструктивна задача **зводиться до побудови деякої точки,** яка є спільною для якоїсь заданої лінії l_1 та іншої лінії l'_2, одержаної із заданої лінії l_2 за допомогою певного перетворення.

Ситуація 3. Аналізуючи задачу, вдається помітити, що порівняно просто **можна побудувати фігуру Ф′, з якої шукана фігура Ф може бути одержана за допомогою певного геометричного перетворення.** Іноді задача зводиться до побудови такої фігури Ф′, яка задовольняє всі умови задачі, крім, можливо, єдиної. Таке часто трапляється тоді, коли серед заданих елементів шуканої фігури Ф є лише один відрізок, а решта — кути та відношення відрізків. У цьому випадку, як правило, зручно скористатися подібністю (зокрема, гомотетією).

Ситуація 4. Іноді **зручно використати перетворення, що переводить шукану фігуру в себе.** Деякі з таких перетворень можуть одночасно, разом із шуканою фігурою, переводити окремі з відомих елементів так, що їхні образи в перетині з іншими відомими елементами дадуть ключ до розв'язання задачі.

Евристичні схеми розв'язування задач на побудову будь-яким рухом дуже схожі:

1. *Припускаємо, що зображена на малюнку фігура задовольняє умову задачі. Один із заданих елементів або елемент, що легко будується, рухаємо вибраним методом* (*паралельним перенесенням, поворотом навколо точки, осьовою симетрією*) *до певного, чітко визначеного розташування. Внаслідок такого перетворення одержуємо допоміжну фігуру.*

2. *Задачу розв'язуємо відносно побудованої допоміжної фігури і решти заданих, тим самим зводячи її або до відомої задачі, або до простішої.*

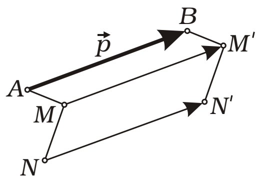
3. *Від одержаного розв'язку задачі із допоміжною фігурою оберненим перетворенням переходимо до шуканої фігури.*

Мету даної статті ми вбачаємо в розгляді *застосування перетворень до розв'язування планіметричних задач на побудову.* Розпочати цей процес доцільно з використання найпростішого перетворення, яке асоціюється з прямолінійним рухом, — із **паралельного перенесення.**

Метод використовують (в основному) для об'єднання роз'єднаних частин деяких фігур (ситуація 1). Особливо часто ним користуються для побудови багатокутників. Іноді він буває корисним для розв'язання задач із колом та на «найкоротший шлях».

Паралельне перенесення варто розглядати як еквівалент поняття вектора: одне визначається через інше. Саме такий зв'язок зручний при розв'язуванні задач.

Нехай паралельне перенесення задано вектором $\vec{p}$. Візьмемо яку-небудь фігуру Ф, зокрема точку (Ф — прообраз). Нехай перенесення $\vec{p}$ переводить фігуру Ф у фігуру Ф′ (образ фігури Ф). Писатимемо $\Phi' = \vec{p}(\Phi)$. Позначимо початок і кінець вектора $\vec{p}$ відповідно через A та B (мал. 1). Якщо M — довільна точка площини й $M' = \vec{p}(M)$, то фігура $ABM'M$ — паралелограм. І навпаки: будь-яка задана пара (M і M') відповідних точок цілком визначає паралельне перенесення – зсув усякої фігури Ф у фігуру Ф′ за напрямком $M \to M'$ на відстань, рівну довжині відрізка MM'. Це у формальному запису можна виразити так: $\overrightarrow{MM'} = \vec{p}$. Зокрема, $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$ $(B = \vec{p}(A))$.



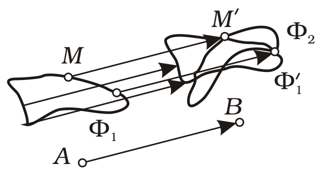
Мал. 1

Якщо $M' = \vec{p}(M)$ та $N' = \vec{p}(N)$, то $MM'N'N$ — паралелограм (обернене не завжди правильне, але якщо $MM'N'N$ — паралелограм і $M' = \vec{p}(M)$, то й $N' = \vec{p}(N)$).

Демонстрацію методу паралельного перенесення розпочнемо з розв'язування однієї з **найтиповіших** (опорних) задач, що припускає досить загальне формулювання.

Задача 1. *Побудувати відрізок із кінцями на двох заданих фігурах так, щоб він дорівнював заданому відрізкові та був паралельним йому.*

Зауважимо, що кожна із заданих фігур може бути прямою, кутом, трикутником, колом тощо. Для простоти, під фігурою розумітимемо лінію.



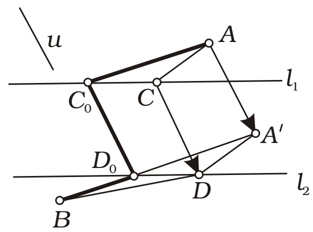
Мал. 2

Аналіз. Нехай є фігури $Ф_1$ й $Ф_2$, відрізок AB, і нехай точки M та M' — кінці шуканого відрізка (мал. 2; ситуація 1). Зрозуміло, що досить знайти лише одну з точок M або M', оскільки іншу відшукаємо, якщо через знайдену точку проведемо пряму, паралельну AB. Відрізок AB визначає два протилежних вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BA}$. Будемо розглядати один із них, наприклад $\overrightarrow{AB}$. Цей вектор визначає деяке паралельне перенесення $\vec{p}$. Оскільки відрізок MM' дорівнює і паралельний відрізкові AB, маємо $\vec{p}(M) = M'$. Нехай $Ф'_1$ — фігура, одержана з фігури $Ф_1$ при паралельному перенесенні $\vec{p}$: $\vec{p}(Ф_1) = Ф'_1$. Оскільки точка M належить фігурі $Ф_1$, відповідна їй при паралельному перенесенні точка M' належить фігурі $Ф'_1$. Коротко: $M \in Ф_1 \Rightarrow$ $\Rightarrow \vec{p}(M) \in \vec{p}(Ф_1)$, тобто $M' \in Ф'_1$. Отже видно, що одна з шуканих точок M' належить одночасно двом фігурам: $Ф'_1$ і (за припущенням) $Ф_2$, тобто $M' \in Ф_1' \cap Ф_2$. У зображеному на малюнку 2 випадку перетин ліній $Ф'_1$ й $Ф_2$ складається з чотирьох точок, тому за M' можна взяти будь-яку з них. Аналіз закінчено.

Доведення. Нехай побудовано фігуру $Ф'_1 = \vec{p}(Ф_1)$ (*) і нехай $M' \in Ф_2 \cap Ф'_1$ (**). Проведемо через M' пряму, паралельну відрізкові AB. Із співвідношень (*) та (**) випливає, що на цій прямій існує така точка M фігури $Ф_1$, яка є прообразом точки M' при паралельному перенесенні $\vec{p}$, тобто $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$, а звідси й випливає, що відрізок MM' дорівнює і паралельний відрізкові AB. Задачу розв'язано.

Окремий тип становлять конструктивні задачі, розв'язання яких пов'язане з відшуканням найбільшого (найменшого) значення певної величини та на з'ясування місця розташування фігури відносно даних фігур у визначених метричних межах. Розглянемо приклади таких задач.

Задача 2. *Між точками A та B проходять дві паралельні прямі l_1 й l_2. Знайти на них такі точки C і D, щоб відрізок CD мав заданий напрям, а довжина ламаної $ACDB$ була мінімальною.*



Мал. 3

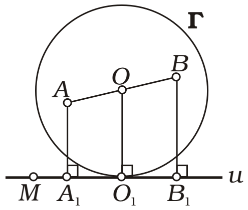
Аналіз. Виберемо спочатку будь-які точки $C \in l_1$ та $D \in l_2$ лише за умови, що $CD \parallel u$, де u — заданий напрям (мал. 3). З умови випливає, що середня ланка CD ламаної $ACDB$, незалежно від її місця, має ту саму довжину. Отже, мінімум довжини всієї ламаної досягається при мінімумі суми $AC + DB$. Щоб визначити цей мінімум, доцільно об'єднати на малюнку шляхи AC і DB, для чого треба переставити місцями ланки AC та CD. Останнє досягається паралельним перенесенням ланки CA на вектор $\overrightarrow{CD}$. При цьому $C \to D$, $A \to A'$ (стрілка показує, що одна точка переходить в іншу) (1) і $AC + CD + DB = CD +$ $+ AC + DB = AA' + A'D + DB$. Тепер очевидно, що рівність $\min(AC + DB) = \min(A'D + DB)$ буде істинною тоді й лише тоді, коли точки A', D та B лежатимуть на одній прямій. Отже, цей висновок визначає потрібне положення точки D: $D \equiv D_0 = BA' \cap l_2$ (2), а водночас і точки C_0: $C_0D_0 \parallel u$ (3). Аналіз закінчено.

Доведення. Нехай, згідно з аналізом, точки A', D_0 та B лежать на одній прямій. Тоді $AC_0 + C_0D_0 + D_0B = C_0D_0 + AC_0 + D_0B = AA' +$ $+ A'D_0 + D_0B = AA' + A'B$. Оскільки відрізок $A'B$ менший за всяку ламану ($A'DB$), побудована ламана AC_0D_0B задовольняє умову задачі. Задачу розв'язано.

Задача 3. *Провести через дану точку пряму так, щоб сума відстаней її від двох інших даних точок дорівнювала даному відрізкові.*

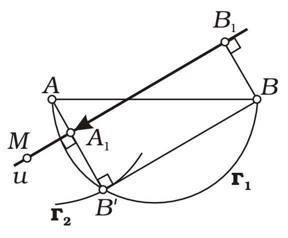
У цю задачу фактично включено дві: одна відповідає випадку, коли дані точки лежать з одного боку від шуканої прямої, інша — коли ці точки розташовані в різних півплощинах відносно шуканої прямої.

***Випадок перший**. Аналіз.* Нехай малюнок 4 відповідає такій умові: сума відрізків ($AA_1 + BB_1$) істинно дорівнює заданому відрізкові s. Розглянемо середню лінію OO_1 прямокутної трапеції A_1ABB_1. Маємо $OO_1 \perp u$ та $OO_1 = \frac{s}{2}$. Отже, шукана пряма u є дотичною до кола $\mathbf{\Gamma}$ із центром усередині O заданого відрізка AB і радіусом, що дорівнює половині заданої суми. Аналіз закінчено.



Мал. 4

Доведення. Нехай дотичну u із даної точки M до кола $\mathbf{\Gamma}$ побудовано. Опустимо на u перпендикуляри AA_1, BB_1 й OO_1. Очевидно, OO_1 — середня лінія трапеції A_1ABB_1. Отже, $AA_1 + BB_1 = 2OO_1 = s$. Таким чином, пряма u задовольняє умову задачі.



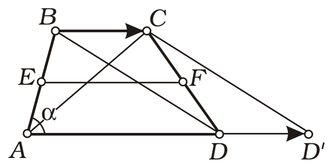
Мал. 5

***Випадок другий.** Аналіз.* Нехай справді на малюнку 5 $AA_1 + BB_1 = s$. Перенесемо відрізок BB_1 на вектор $\overrightarrow{B_1A_1}$: $B_1 \to A_1$, $B \to B'$. Оскільки кожен із кутів AA_1B_1 та $B'A_1B_1$ — прямий, точки A, A_1 і B' лежать на одній прямій. Трикутник $AB'B$ — прямокутний із прямим кутом B' і катетом AB', що дорівнює заданому відрізкові s. Отже, точка B' належить перетину кіл: $\mathbf{\Gamma_1}$ із діаметром AB (1) та $\mathbf{\Gamma_2}$ з центром у точці A і радіусом, що дорівнює s (2). Пряма u паралельна прямій $B'B$ (3). Аналіз закінчено.

Доведення. Нехай побудову, описану в аналізі, виконано. Розглянемо прямокутний трикутник $AB'B$ й опустимо на u перпендикуляр BB_1. Оскільки $u \,||\, B'B$, маємо $u \perp AB'$. Нехай $A_1 = u \cap AB'$ (якщо пряма u перетинає відрізок AB, то точка A_1 лежить між точками A та B'). Чотирикутник A_1B_1BB' — прямокутник; отже, $BB_1 = B'A_1$. Звідси $AA_1 + BB_1 = AA_1 + B'A_1 = s$, тобто пряма u задовольняє умову задачі. Задачу розв'язано повністю.

Однією з найбільш цікавих фігур планіметрії вважається ***трапеція***.

Задача 4. *Побудувати трапецію за її діагоналями, середньою лінією та одним із кутів при основі.*



Мал. 6

Аналіз. Нехай малюнок 6 задовольняє умову задачі. Оскільки обидві діагоналі задано, спробуємо «об'єднати їхні кінці». Для цього перенесемо діагональ BD на вектор $\overrightarrow{BC}$: $B \to C$, $D \to D'$. Тоді у трикутнику ACD' основа $AD' = AD + DD' = AD + BC = 2EF$. Отже, допоміжний трикутник ACD' легко побудувати за трьома його сторонами (1). Тоді вершини A і C шуканої трапеції відомі. Третя вершина B лежить на прямій, що проходить через точку C паралельно AD' (2). Одночасно вона лежить на прямій AE, яка утворює із прямою AD' заданий кут α (3). Отже, точку B побудовано. Оскільки $BD \,||\, CD'$, можна побудувати останню вершину D (4). Аналіз задачі закінчено.

Доведення. Нехай побудову виконано. З неї безпосередньо випливає, що $ABCD$ — трапеція із заданими діагоналлю AC та кутом $BAD = \alpha$ при основі AD. Із побудови також випливає, що $DBCD'$ — паралелограм, в якого CD' дорівнює другій діагоналі; отже, й діагональ $BD = CD'$ і має вже задану в умові задачі довжину. Нарешті, $EF = \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{1}{2}(AD + DD') = \frac{1}{2}AD'$, а це означає, що середня лінія трапеції теж є відрізком заданої довжини. Задачу розв'язано.

Якщо ***базовою*** (у своєму роді) обрати саме цю задачу, в якій треба **побудувати трапецію** за чотирма накладеними на неї умовами, то дуже схоже (паралельним перенесенням на вектор $\overrightarrow{BC}$) розв'язуються й інші задачі. Ми не будемо словесно в усталеному порядку описувати умови і схеми розв'язання пропозицій, котрі подані нижче, а всю конструктивну складову змоделюємо якісними зображеннями, чим зайвий раз підкреслимо надзвичайні інформаційні та процедурні можливості, образну строгість і, навіть, естетичну привабливість малюнків побудовної геометрії.

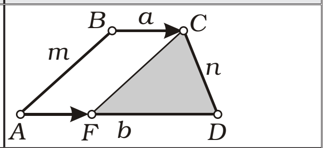
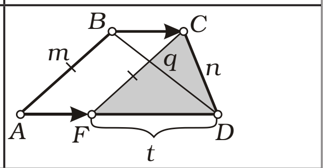
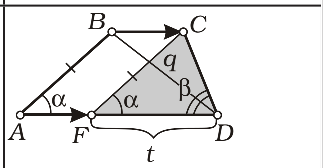
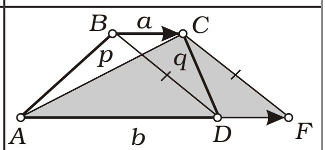
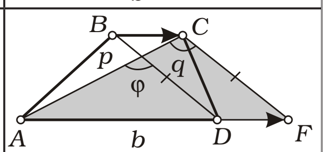
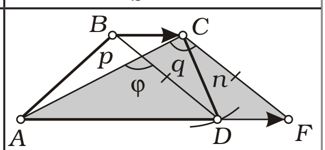
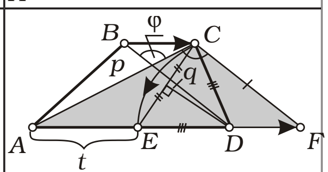
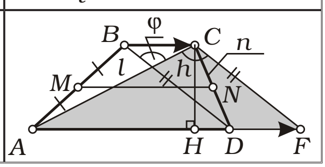
Для зручності введемо умовні позначення елементів трапеції:

a — верхня, b — нижня основи;
α, β — кути при основі;
p, q — діагоналі;
φ — кут між діагоналями;
m — ліва, n — права сторони;
h — висота;

l — середня лінія;

t — різниця основ;

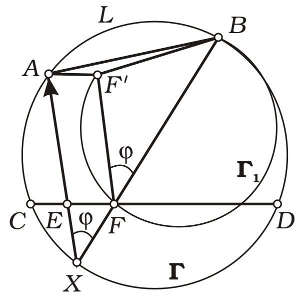
α — кут нахилу бічної сторони до основи.

№ задачі (малюнка)	Елементи трапеції, задані умовою	Малюнок (розв'язок)
5 (7)	a, b, m, n	
6 (8)	$b - a = t, m, n, q$	
7 (9)	$b - a = t, q, \alpha, \beta$	
8 (10)	a, b, p, q	
9 (11)	b, p, q, φ	
10 (12)	n, p, q, φ	
11 (13)	$b - n = t, p, q, \varphi$	
12 (14)	l, h, n, φ	

Уважно оглянувши таблицю, можна без зусиль відтворити етапи аналізу, доведення і дослідження кожної із задач. Такі *вправи на* «**читання**» готових креслень конструктивної планіметрії надто важливі, окремо ж узята фігура (трапеція) гарантовано вивчається. Увага, складовою останнього номера є базова задача 2 з уже сформованого типу задач у методі ГМТ [2].

У всіх розглянутих вище задачах *вектор перенесення був не тільки допоміжним засобом аналізу, а й безпосередньо використовувався для викреслювання фігури як реалізації проведеного аналізу.* Іншими словами, *тут перенесення є складовою частиною побудови*, одним з її кроків. Значно більшу кількість становлять задачі, в яких перенесення *лише допомагає виконати аналіз, а в самій побудові участі не бере.* В цих задачах вектор перенесення безпосередньо умовою задачі не виражений, він визначається або внаслідок аналізу, або навіть після виконання побудови. На двох прикладах саме таких задач зараз і зупинимось.

Задача 5. *У колі задано хорди AB і CD. Знайти на колі таку точку X, щоб хорди AX та BX відтинали на хорді CD відрізок EF, який дорівнює заданому відрізкові.*



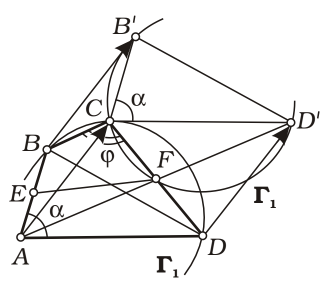
Мал. 7

Аналіз. Нехай малюнок 7 задовольняє умову задачі: X — шукана точка. Перенесемо відрізок EF на вектор $\overrightarrow{EA}$: $E \to A$, $F \to F'$. Маємо $AF' \parallel CD$ й $AF' = EF$. Таким чином, відрізок AF', а водночас і точку F' можна побудувати (1). З'єднаємо B і F' відрізком. Із $AX \parallel FF'$ випливає, що $\angle BFF' = \angle BXA = \varphi$. Градусна міра цього кута відома, оскільки BXA — кут вписаний і спирається на задану дугу ALB. Його можна знайти, якщо, наприклад, з'єднати з точками A та B точку C.

Висновок: точка F належать дузі $\mathbf{\Gamma_1}$ сегмента, що спирається на відрізок $F'B$ і вміщує кут φ (2); отже, $F \in \mathbf{\Gamma_1} \cap CD$. Тепер досить провести пряму BF (3): $X = \mathbf{\Gamma} \cap BF$. Аналіз закінчено.

Доведення. Нехай побудову виконано. З'єднаємо F із F' та X із A ($E = CD \cap AX$). Оскільки кожен із кутів BFF' і BXA дорівнює φ, маємо $FF' \parallel XA$. Однак $AF' \parallel CD$ (за побудовою). Звідси чотирикутник $AF'FE$ — паралелограм, а тому $FE = AF'$, тобто, за побудовою, відрізок EF має задану довжину. Задачу розв'язано.

Задача 6. *Побудувати чотирикутник за його діагоналями, двома протилежними кутами і відрізком, що сполучає середини двох протилежних сторін.*



Мал. 8

Аналіз. Припустимо, що чотирикутник $ABCD$ задовольняє умову задачі (мал. 8). Перенесемо трикутник ABD на вектор $\overrightarrow{AC}$: $A \to C$, $B \to B'$, $D \to D'$, $\Delta ABD \to \Delta CB'D'$, $\angle B'CD' = \angle BAD = \alpha$. Тоді чотирикутники $ABB'C$, $ACD'D$ і $BB'D'D$ — паралелограми. В них $BB' = AC = DD'$, $B'D' = BD$; отже, сторони паралелограма $BB'D'D$ рівні діагоналям шуканого чотирикутника. Оскільки точка F — середина діагоналі CD паралелограма $ACD'D$, вона одночасно є серединою його діагоналі AD'. Звідси у трикутнику BAD' відрізок EF є середньою лінією, тому діагональ BD' допоміжного паралелограма $BB'D'D$ дорівнює двом заданим відрізкам EF. За сторонами BB', BD та діагоналлю BD' цей паралелограм можна побудувати (1). Оскільки з точки C його сторони $B'D'$ і BD видно під заданими кутами α та γ відповідно, вона належить перетину дуг $\mathbf{\Gamma_1}$ і $\mathbf{\Gamma_2}$ двох сегментів, що вміщують зазначені кути (2; 3). Отже, маємо три вершини B, C і D шуканого чотирикутника. Для побудови четвертої вершини A досить провести дві прямі: через точку B паралельно $B'C$ (4) та через точку D паралельно $D'C$ (5); точка A є їх перетином. Аналіз закінчено.

Доведення. Нехай побудову вже виконано. Тоді очевидно, що в чотирикутнику $ABCD$ діагональ BD і кут BCD є заданими. Оскільки $BA \parallel B'C$ та $DA \parallel D'C$, дістанемо $\angle BAD = \angle B'CD' = \alpha$. Трикутники ABD та $CB'D'$ рівні, оскільки $BD = B'D'$, $\angle ABD = \angle CB'D'$ і $\angle ADB = \angle CD'B'$. Звідси $AB = CB'$ та $AD = CD'$. Отже, чотирикутники $ABB'C$ і $ACD'D$ – паралелограми. Таким чином, діагональ AC має задану довжину. Крім того, точка перетину F діагоналей CD та AD' паралелограма $ACD'D$ є серединою кожної з них. Якщо тепер розглянути середину E сторони AB, то відрізок EF буде середньою лінією у трикутнику BAD', звідки $EF = \frac{1}{2}BD'$, тобто, виходячи з побудови, він теж має задану довжину. Чотирикутник $ABCD$ повністю задовольняє умову задачі. Задачу розв'язано.

Окремо зауважимо, що на етапі аналізу, в пошуку шляху розв'язання задачі на побудову геометричної фігури відбувається покроковий перехід від дескриптивного її означення до конструктивного (побудовного). Та, до того ж, «Розв'язування задач полягає не стільки в побудові фігури, скільки у знаходженні способу, як це зробити, і відповідному доведенні. Задача вважається розв'язаною, якщо знайдено спосіб побудови фігури і доведено, що в результаті виконання зазначених побудов справді виходить фігура з потрібними властивостями» [4, *67 — 68*].

Тож саме завдяки цим обставинам ми вище сконцентрували свою увагу виключно на двох етапах: *аналізу* та *доведення*. Однак, у навчанні геометрії учнів не варто нехтувати етапом *дослідження* (див. [2] й наступні наші статті з цієї тематики), адже: «В більш складних задачах «дослідження» зачіпає інколи настільки тонкі питання і вимагає такої математичної строгості міркувань, що стає для учнів немов би першим досвідом, першим підходом до наукового вивчення математичних проблем» [6, *3*].

Уже розв'язані задачі спонукають до висновку, що фахове залучення паралельного перенесення як засобу дій у конструктивній планіметрії допускає типізацію задач на побудову за двома напрямами:

- обираючи об'єктом побудови певну фігуру з різними (варіативними) вихідними даними, концентрують увагу на образному, діяльнісному вивченні властивостей цієї фігури;
- віддавши пріоритети методу перенесення, зосередившись на ньому, вчаться типізувати задачі, в яких вектор перенесення є інструментом у проведенні аналізу, або ж — такі, де останній використовують як для проведення аналізу, так і для очікуваної побудови.

У будь-якому випадку надто важливо, що учень, оперуючи перенесенням фігур чи їх елементів, усі точки яких водночас переміщуються вздовж паралельних прямих на одну й ту саму відстань, глибше пізнає властивості самого перетворення, власноруч діє і візуально спостерігає собівартість такої діяльності у вирішенні неочевидних пропозицій в суто геометричному стилі. Це — справжня геометрія, яка розвиває.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бевз Г. П. Геометрія: Підручник для 7 — 9 класів загальноосвітніх навчальних закладів / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. — К.: Вежа, 2001. — 272 с.
2. Ленчук І. Г. Метод геометричних місць точок: типізація задач / І. Г. Ленчук // Матем. в рідній шк. — 2016. — № 1. — С. 26.
3. Навчальні програми для 5 — 9 кл. загальноосвітніх навчальних закладів // Наказ МОН України № 585 від 29.05. 2015 року «Про затвердження змін до навчальних програм для загальноосвітніх навчальних закладів II ступеня». — [Електронний ресурс]. — Режим доступу: http://school16.org/navchalni-programi-z-usih-predmetiv-dlya-1-11-klasiv.
4. Погорєлов О. В. Геометрія: Підручник для 7 — 9 класів середньої школи / О. В. Погорєлов. — К.: Освіта, 1998. — 224 с.
5. Слєпкань З. І. Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики / З. І. Слєпкань. — Тернопіль: Підручники і посібники, 2004. — 240 с.
6. Четверухин Н. Ф. Методы геометрических построений: Учебное пособие для ПИ / Н. Ф. Четверухин. — М.: Учпедгиз, 1952. — 148 с.
7. Яглом И. М. Геометрические преобразования, ч. I: Движения и преобразования подобия / И. М. Яглом. — М.: ГИТТЛ, 1955. — 282 с.