б) $\dfrac{x^2-px-2}{x^2-3x+4}>-1$, $x \in R$;

в) $(p^2+p-2)\cos 2x + 2(p+5)\sin x - (p^2+p-6) \geq 0$, $x \in R$;

г) $\cos^2 x - \sin x \cos x + 2\sin^2 x \leq p$, $x \in R$.

3. Довести тотожність:

а) $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \ldots \cdot \log_{n+1} n = \log_{n+1} 2$, $n \in N$;

б) $\cos^2(\alpha+\beta) - \sin^2(\alpha-\beta) = \cos 2\alpha \cos 2\beta$, $\alpha, \beta \in R$;

в) $\sin\alpha \sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\frac{1}{4}\sin 3\alpha$, $\alpha \in R$;

г) $\operatorname{tg}\alpha + 2\operatorname{tg}2\alpha + 4\operatorname{tg}4\alpha + \ldots + 2^{n-1}\operatorname{tg}2^{n-1}\alpha + 2^n\operatorname{ctg}2^n\alpha = \operatorname{ctg}\alpha$, $\alpha \neq \frac{\pi k}{2^n}$, $k \in Z$;

д) $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \ldots + \cos n\alpha = \dfrac{\sin\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$, $\alpha \neq 2\pi k$, $k \in Z$; $n \in N$;

є) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $x \in [-1;\ 1]$.

4. Якщо α, β, γ — кути трикутника, то:

а) $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leq \left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-\sin\frac{\beta}{2}\right)\left(1-\sin\frac{\gamma}{2}\right)$;

б) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \geq \sqrt{3}$;

в) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$;

г) $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma} = ctg\dfrac{\alpha}{2}ctg\dfrac{\beta}{2}$.

Відповіді до вправ

2. а) $(-6;\ 6)$; б) $(-7;\ 1)$; в) $(-3;\ 3)$; г) $\left(\frac{3+\sqrt{2}}{2};+\infty\right)$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Самойленко А. М., Вишенський В. А., Перестюк М. О. Збірник задач з математики. — К.: Вища шк., 1982.
2. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. — М.: Мир, 1965.
3. Соминский И. С., Головина Л. И., Яглом И. М. О математической индукции. — М.: Наука, 1967.
4. Гельфанд С. И., Гервер М. Л., Кириллов А. А., Константинов Н. Н., Кушниренко А. Г. Задачи по элементарной математике. — М.: Наука, 1965.
5. Яремчук Ф. П., Рудченко П. А. Алгебра и элементарные функции. — К.: Наукова думка, 1987.

ПЕРЕТВОРЕННЯ ФІГУР: ОСЬОВА СИМЕТРІЯ

Іван ЛЕНЧУК — професор кафедри методики навчання математики, фізики та інформатики Житомирського державного університету ім. І. Я. Франка, доктор педагогічних наук

Анотація. Анонсовано методику застосування осьової симетрії в якості засобу розв'язування планіметричних задач на побудову. З'ясовано шляхи структурної типізації задач із метою їх алгоритмізації та комп'ютеризації, що сприятиме спрощенню як викладання, так і учіння цього специфічного розділу геометрії.

Ключові слова. Метод перетворень, конструктивізм, задачі на побудову, осьова симетрія, аналіз, доведення, дослідження.

Иван ЛЕНЧУК. Метод преобразований: осевая симметрия.

Аннотация. Анонсирована методика использования осевой симметрии в качестве средства решения планиметрических задач на построение. Установлены пути структурной типизации задач с целью их алгоритмизации и компьютеризации, что позволит упростить как преподавание, так и изучения этого специфического раздела геометрии.

Ключевые слова. Метод преобразований, конструктивизм, задачи на построение, осевая симметрия, анализ, доказательство, исследование.

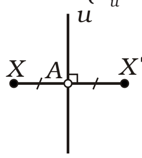
Ivan LENCHUK. Converaion MethoD: Parallel Transport.

Annotation. Announced a technique of using an axial symmetry as a means of solving plan metric problems on the build. Set out how structural typing tasks for the purpose of algorithmization and computerization, allowing to simplify both the teaching and learning of this particular section of geometry.

Keywords. The method of transformation, constructivism, multi, axial symmetry, analysis, proof, research.

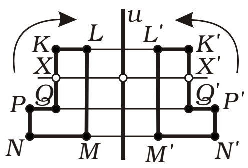
Учень, ознайомлюючись з означенням *симетрії відносно прямої*, глибоко не замислюється над уявлюваною природою цього руху, акцентуючи увагу на суто конструктивній складовій перетворення. Точки X та X' називаються *симетричними* відносно прямої u, якщо ця пряма (вісь) є серединним перпендикуляром відрізка XX'

(мал. 1). Перетворення, при якому кожній точці заданої фігури ставиться у відповідність точка, симетрична їй відносно прямої u, називається *осьовою симетрією* або *відбиттям у прямій u*, або *дзеркальним відбиттям* (S_u — позначення).



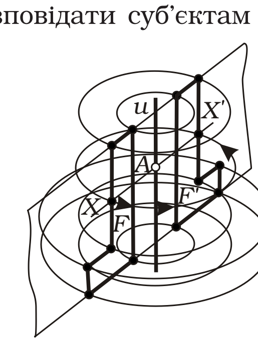
Мал. 1

Однак дійство в побудові симетричних точок навряд чи є переміщенням **фігури** F по площині (мал. 2) у буквальному сенсі, а ключова фраза: «Поняття руху в геометрії пов'язане із звичайним уявленням про переміщення» [3, *126*] у такій ситуації стає некоректною, це — рух на площині окремих точок фігури F за чітким побудовним правилом, але не фігури в цілому.



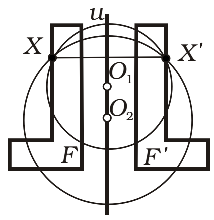
Мал. 2

Тож *паралельне перенесення і поворот*, з одного боку, та *симетрія відносно прямої*, з іншого, *мають різну природу*. А саме, останній рух, як перетворення фігури F у фігуру F', доцільно «бачити» *просторовим*, а не площинним (мал. 3). Це означає, що фігура F, обертаючись навколо прямої u, спочатку «виходить» із площини дошки (зошита) у простір, а потім «лягає» на неї. Кожна точка фігури F рухається при цьому по своєму власному колу у площині, перпендикулярній до прямої u, і з центром на прямій u, описуючи дугу з кутовою мірою 180°. Отже, *симетрію відносно прямої u* варто уявляти як *поворот* на кут 180° із виходом у простір. Завдяки саме такому природному походженню симетрії відносно прямої, остання *змінює площинну орієнтацію фігур на протилежну* (див. мал. 2), про що обов'язково потрібно розповідати суб'єктам навчання.



Мал. 3

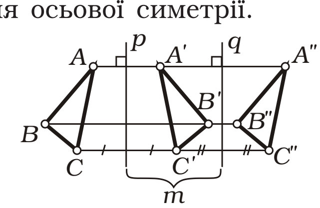
Цікаво, що конструкцію осьової симетрії можна обґрунтувати (означити і продемонструвати, мал. 4) по іншому, що геометрично не менш привабливо: «Точки X і X' називаються симетричними відносно прямої u, якщо кожне коло з центром на прямій u, яке проходить через точку X, проходить одночасно і через точку X'» [4, *169*, *170*]. Тут знову спостерігаються лише площинні переміщення окремих (усіх) точок фігури F, коли кожна з них має своєю траєкторією щонайменше два різні кола з центрами на прямій u. Показово, що в першому означенні визначальним інструментом операцій є *лінійка*, а у другому *циркуль* — традиційні інструменти побудов.



Мал. 4

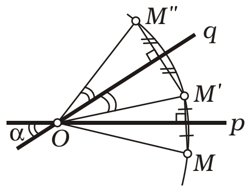
Поряд із тим, ідея формальної уніфікації площинних рухів, хоча б із метою їх алгоритмізації й комп'ютерного представлення, вирішується досить просто, оскільки між нібито різними в уявленнях паралельним перенесенням і поворотом, з одного боку, та осьовою симетрією, з іншого, існують тісні конструктивні зв'язки. В них, дещо неочікувано, особлива роль відведена осьовій симетрії, про що свідчать такі міркування.

Нехай трикутник ABC (мал. 5) осьовою симетрією відносно прямої p переведено у трикутник $A'B'C'$. Останній трикутник ще однією симетрією відносно прямої q, що паралельна прямій p, переведено у трикутник $A''B''C''$. Зрозуміло, що композицію двох осьових симетрій можна замінити одним-єдиним паралельним перенесенням трикутника ABC на відстань $AA'' = BB'' = CC'' = 2m$ за напрямом $AA'' \parallel BB'' \parallel CC''$ — у трикутник $A''B''C''$. Справді, напрям цього перенесення перпендикулярний до p і q, а довжина відрізка зсуву дорівнює подвоєній ($2m$) відстані між осями, що випливає з означення осьової симетрії.



Мал. 5

Тепер виконаємо аналогічні дії за умови, що осі симетрії p і q перетинаються під гострим (тупим) кутом α, не рівним нулю (мал. 6). Якщо $\alpha = 90°$, матимемо випадок центральної симетрії. Таким чином, нехай перше перетворення симетрії відносно осі p переводить точку M у точку M', а друге — відносно осі q — переводить точку M' у точку M''. Із малюнка вочевидь випливає, що дві послідовно виконані осьові симетрії також можна замінити одним перетворенням — поворотом навколо точки $O = p \cap q$, яким точку M переведено в точку M''. Тут кут повороту дорівнює подвоєному куту (2α) між осями p і q. Справді, за властивостями симетрії матимемо, що: $OM = OM' = OM''$; $\angle MOM'' = \angle MOM' + \angle M'OM'' = 2\angle pOM' + 2\angle M'Oq = 2(\angle pOM' + \angle M'Oq) = 2\angle pOq = 2\alpha$.



Мал. 6

Таким чином, *геометрично однотипні* в уявленнях учня перетворення *паралельного перенесення* і *повороту* навколо даної точки на певний кут моделюються композицією (добутком) двох *осьових симетрій*, що дозволяє у графічному представленні на екранах ПК кожне з них виражати виключно перетворенням осьової симетрії. Цей факт засвідчує, що всі три площинні рухи тісно конструктивно споріднені.

Ідея методу осьової симетрії полягає в тому, що *разом із заданими і шуканими фігурами розглядаються також фігури, симетричні деяким із них відносно вибраної осі. При вдалому виборі осі та фігури, яку потрібно дзеркально відбивати, розв'язання задачі може значно полегшитися або звестися до простішої задачі, або дати безпосередній результат.*

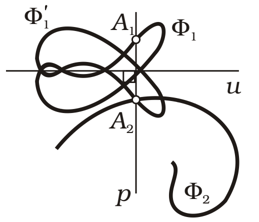
Метою статті є демонстрація прикладами можливостей перетворення **осьової симетрії** в конструктивній планіметрії.

У зв'язку з викладеним, *орієнтацією на метод осьової симетрії* нерідко може бути *наявність у деяких геометричних фігур їхніх осей симетрії.* Тому за відомими даними, що включають (або дають можливість установити) розташування саме такої прямої, можна побудувати трикутник, ромб, квадрат тощо, скориставшись методом осьової симетрії.

Типовою (**опорною**) у методі осьової симетрії є така задача.

Задача 1. На двох заданих лініях (фігурах) Φ_1 і Φ_2 знайти пару точок, симетричних відносно заданої прямої.

Аналіз. Нехай $A_1 \in \Phi_1$, $A_2 \in \Phi_2$, а точки A_1, A_2 — симетричні відносно прямої u (мал. 7). Розглянемо $S_u(\Phi_1) = \Phi_1'$ (1). Оскільки $A_1 \in \Phi_1$, маємо $S_u(A_1) \in S_u(\Phi_1)$, тобто, виходячи із припущення, $A_2 \in \Phi_1'$. Разом із $A_2 \in \Phi_2$ це дає $A_2 \in \Phi_1' \cap \Phi_2$. Точку A_1 легко знайти як одну з точок перетину прямої $p \perp u$ з фігурою Φ_1 (2). Аналіз закінчено.

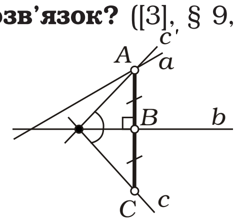


Мал. 7

Доведення. Воно випливає безпосередньо з аналізу задачі та означення симетрії. Задачу розв'язано.

Як уже відмічалося [2], програми шкільного курсу геометрії не надають належної уваги прищепленню учням умінь і навичок у розв'язуванні задач на побудову. Усе ж таки, задачі **конструктивного характеру** є у класичному шкільному підручнику [3]. Більше того, до умови однієї з таких задач автор додає запитання, яке зобов'язує вести її розв'язання за повною схемою. Отже, в навчанні конструктивній планіметрії етап дослідження не варто відкидати так категорично, як це інколи розуміють учителі!

Задача 2. Дано три прямі a, b і c, які попарно перетинаються. Як побудувати відрізок, перпендикулярний до прямої b, середина якого лежить на прямій b, а кінці на прямих a і c? **Чи завжди задача має розв'язок?** ([3], § 9, задача 24).

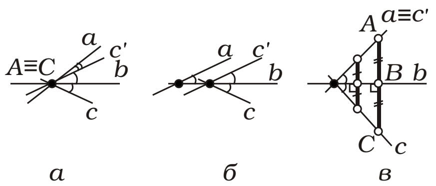


Мал. 8

Аналіз. Нехай відрізок AC (мал. 8) задовольняє умову задачі. Помічаємо, що точки A і C симетричні відносно прямої b. Тому дзеркальне відбиття від прямої b точки C перетворює її в точку A, а отже, пряму c — у пряму c' (1), яка обов'язково проходить через точку A. Таким чином, точка A може бути побудована (2) як точка перетину прямих c' і a. Відшукання після цього точок B і C очевидне (3).

Доведення прямо випливає із побудови.

Дослідження. Можливі такі випадки: 1) кути нахилу прямих a і c до прямої b різні, а прямі попарно перетинаються в різних точках (мал. 8), розв'язок *єдиний*; 2) кути нахилу прямих a і c до прямої b різні, але точка їх перетину належить прямій b (мал. 9, *а*), розв'язків *немає* (інколи говорять: розв'язком є відрізок AC, що вироджується в точку $A \equiv C$); 3) прямі a і c рівнонахилені до прямої b, але перетинають пряму b в різних точках ($a \parallel c'$, мал. 9, *б*), розв'язків *немає*; 4) прямі a, c рівнонахилені до прямої b і перетинають b в одній і тій самій точці ($a \equiv c'$, мал. 9, *в*), розв'язків *безліч*. Задачу розв'язано повністю.

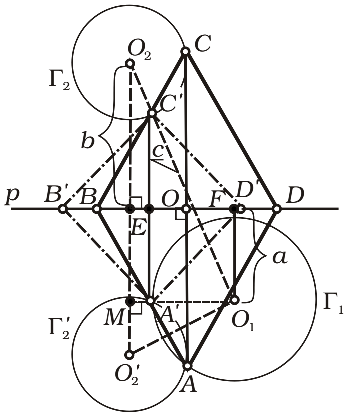


Мал. 9

Зіставлення правил-орієнтирів дій при розв'язанні задач 1 і 2 засвідчує, що остання з них, очевидно, є найпростішим втіленням у реальних фігурах попередньої (опорної). Тому не дивно, що якраз задача 2 є стрижневою для певного **типу** планіметричних конструкцій.

Розглянемо ще одну задачу цього типу.

Задача 3. Побудувати ромб із заданою діагоналлю m, яка лежала б на заданій прямій p так, щоб дві інші його вершини лежали на двох заданих колах Γ_1 і Γ_2.

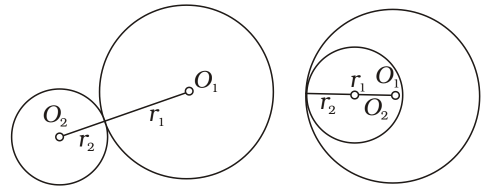


Мал. 10

Аналіз. Нехай ромб $ABCD$ задовольняє умову задачі (мал. 10). Тут: діагональ $BD = m$ і лежить на прямій p, точки A і C належать відповідно заданим колам Γ_1 і Γ_2. Очевидно, що пошук розв'язку зводиться до встановлення точок A і C. Останні ж взаємно симетричні відносно заданої прямої p, тому нехай точка A, наприклад, розташовується на колі Γ_2', симетричному до кола Γ_2. Отже, $A = \Gamma_2' \cap \Gamma_1$ (1). Напевно, що точка C належить колу Γ_2 і прямій AC, перпендикулярній прямій p (2). Нарешті, зафіксувавши точку $O = AC \cap p$, із умови, що $BO = OD = \frac{m}{2}$, можна легко побудувати дві інші вершини ромба B і D (3). Аналіз закінчено.

Доведення випливає з аналізу та означення осьової симетрії.

Дослідження. Нехай довжина відрізка O_1O_2 дорівнює c, а центри кіл $\Gamma_1(O_1, r_1)$ і $\Gamma_2(O_2, r_2)$ розташовані від прямої p відповідно на відстанях $O_1F = a$, $O_2E = b$ (див. мал. 10). Оскільки пряма p та кола Γ_1 і Γ_2 задані, відрізки r_1, r_2, a, b і c — відомі. Нехай також $O_1O_2' = d$, а $O_1M \perp O_2O_2'$ — висота трикутника $O_1O_2O_2'$ і $O_1M = n$.



Мал. 11

Щоб кола Γ_1 і Γ_2' перетиналися в точці A, необхідно, щоб відстань між їх центрами була не більша суми і не менша різниці радіусів r_1 і r_2 (мал. 11). Із прямокутних трикутників O_1O_2M і $O_1O_2'M$ (O_1M — їх спільний катет) вочевидь матимемо:

$(c^2 = (a + b)^2 + n^2;\ d^2 = (b - a)^2 + n^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow\ d = \sqrt{c^2 - 4ab}$.

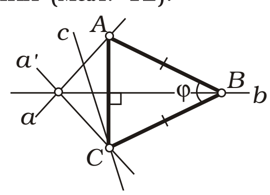
Отже, задача має *один* або *два* розв'язки, якщо істинними є залежності:

$r_1 - r_2 \le \sqrt{c^2 - 4ab} \le r_1 + r_2$.

У зворотному випадку розв'язків *немає*. Задачу розв'язано.

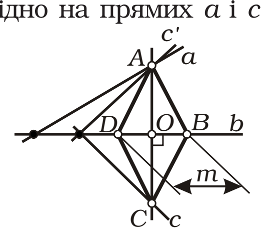
А зараз, маючи якісні малюнки, спробуйте за повною схемою відтворити розв'язання ще чотирьох задач, що є типовими до вже розв'язаних.

Задача 4. Побудувати рівнобедрений трикутник за заданим його кутом при вершині так, щоб висота трикутника лежала на одній із заданих прямих, а кінці основи — на двох інших заданих прямих (мал. 12).



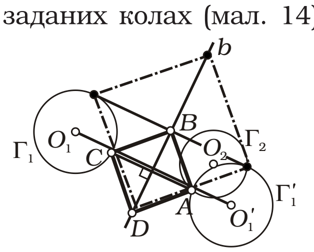
Мал. 12

Задача 5. Побудувати ромб так, щоб одна з його діагоналей була рівна заданому відрізку m і лежала на заданій прямій b, а дві інші вершини ромба лежали відповідно на прямих a і c (мал. 13).



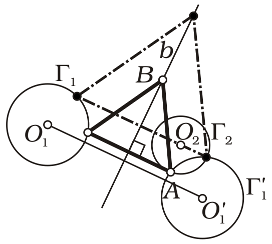
Мал. 13

Задача 6. Побудувати квадрат, одна діагональ якого лежить на заданій прямій, а кінці іншої — на заданих колах (мал. 14).



Мал. 14

Задача 7. Побудувати рівносторонній трикутник так, щоб дві його вершини (по одній) лежали на заданих колах, а висота, проведена із третьої вершини, належала б заданій прямій (мал. 15).



Мал. 15

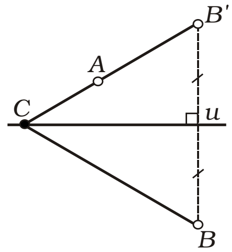
Суть прийому, що простежується в задачах такого **типу**, полягає в такому: їх розв'язання зводиться до побудови однієї точки, причому ця точка є спільною для деякої заданої фігури і фігури, симетричної іншій заданій фігурі відносно чітко визначеної умовою осі.

Іноді перед розв'язуванням сформульованої задачі доцільно розглянути **допоміжні** задачі, що проілюструємо наведеними нижче прикладами.

Задача 8 (допоміжна). Точки A та B лежать з одного боку прямої u. Побудувати на u таку точку C, щоб відрізок $|CA - CB|$ був найбільшим.

Розв'язання. Уявимо спочатку, що точки A, B і $C \in u$ утворюють трикутник, причому $CA \geq CB$. Тоді матимемо, що $CA < CB + AB$ ([3], п. 66). Звідси $CA - CB < AB$. Аналогічно, якщо $CA < CB$, то $CB - CA < AB$. У кожному з цих двох випадків $|CA - CB| < AB$. Якщо точка C лежить на відрізку AB, то нерівність $|CA - CB| < AB$ очевидна. Якщо A лежить між точками C та B, то $CB - CA = AB$; якщо точка B лежить між C й A, то $CA - CB = AB$. Бачимо, що останні два випадки дають $|CA - CB| = AB$. Отже, завжди істинна нерівність $|CA - CB| \leq AB$, причому максимум модуля досягається, коли точка C лежить на прямій AB поза відрізком AB. Висновок: *умову задачі задовольняє точка C, що є перетином прямих AB та u.*

Задача 9. Точки A і B лежать із різних боків від прямої u. Побудувати на u таку точку C, щоб відрізок $|CA - CB|$ був найбільшим.

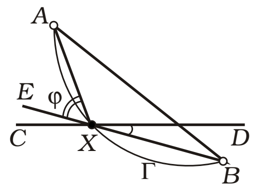


Мал. 16

Аналіз. Нехай для точки C на прямій u (мал. 16) відрізок $|CA - CB|$ є максимальним. Побудуємо точку $B' = S_u(B)$ (1). Оскільки $CB' = CB$, відрізок $|CA - CB'|$ для цього положення точки C досягає максимуму. Проте, згідно з попередньою задачею, це можливо тоді й тільки тоді, коли $C = u \cap AB'$ (2). Аналіз закінчено.

Доведення безпосередньо випливає з аналізу і властивостей симетрії.

Задача 10 (допоміжна). Точки A та B лежать у різних півплощинах відносно прямої CD. Побудувати на CD таку точку X, щоб різниця кутів AXC і BXD дорівнювала заданому куту φ.

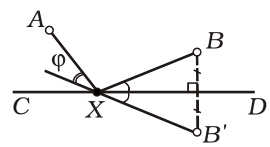


Мал. 17

Аналіз. Нехай $\angle CXA - \angle DXB = \varphi$. Продовжимо відрізок BX (мал. 17). Маємо: $\angle EXA = \angle CXA - \angle CXE = \angle CXA - \angle DXB = \varphi$. Тоді $\angle AXB = 180° - \varphi$. Останній кут відомий, а тому точка X є перетином прямої CD із дугою Γ сегмента, що спирається на відрізок AB і вміщує кут $180° - \varphi$. Аналіз закінчено.

Доведення. Побудувавши точку X і виконавши допоміжні побудови, матимемо $\angle CXA - \angle DXB = \angle CXE + \angle EXA - \angle DXB = \angle EXA = 180° - \angle AXB = 180° - (180° - \varphi) = \varphi$. Задачу розв'язано.

Задача 11. Точки A та B лежать в одній півплощині відносно прямої CD. Побудувати на CD таку точку X, щоб різниця кутів AXC і BXD дорівнювала φ.

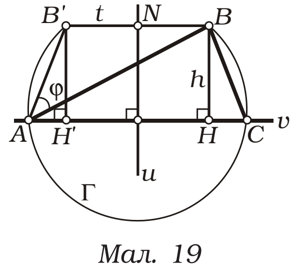


Мал. 18

Розв'язання. Нехай $\angle CXA - \angle DXB = \varphi$ (мал. 18). Розглянемо точку $B' = S_{CD}(B)$. За властивістю симетрії матимемо, що: $\angle CXA - \angle DXB' = \angle CXA - \angle DXB = \varphi$; отже, задачу зведено до попередньої.

Зараз продемонструємо (за скороченою схемою) можливості методу осьової симетрії в побудові різносторонніх трикутників.

Задача 12. Побудувати трикутник за його висотою, різницею φ кутів при основі та різницею t відрізків, які визначаються на основі трикутника після проведення висоти.

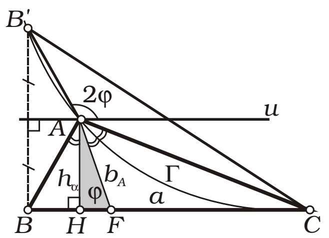


Мал. 19

Аналіз. Нехай на малюнку 19, згідно з умовою задачі, $AH - HC = t$. Виконаємо перетворення симетрії відносно серединного перпендикуляра u основи AC. Тоді трикутник HBC перейде у трикутник $H'B'A$. Оскільки $HC = H'A$, маємо: $B'B = AH - AH' = AH - HC = t$. Крім того, з малюнка бачимо, що $\angle B'AB = \angle B'AC - \angle BAC = \angle BCA - \angle BAC = \varphi$. Трикутники BAB' й ABC, очевидно, мають одну й ту саму висоту. Отже, трикутник BAB' можна побудувати за його основою t, кутом при вершині φ і висотою h (1) (див. [3], § 11, задача 64). Тоді $C = S_u(A)$ (2); в дійсності для побудови точки C не треба будувати вісь u: $A \cup C = v \cap \Gamma$, тобто точки A та C виникають уже при побудові трикутника BAB', де Γ — дуга, що спирається на відрізок BB' і вміщує кут φ. Аналіз закінчено.

Доведення. В колі Γ чотирикутник $AB'BC$ є рівнобічною трапецією, в якій діаметр кола — вісь симетрії u. За побудовою висота трикутника ABC дорівнює h. Далі, $\angle BCA - \angle BAC = \angle B'AC - \angle BAC = \varphi$. А тепер проведемо перпендикуляри BH та $B'H'$ до v. Вони симетричні відносно u; отже, $AH - CH = AH - AH' = HH' = BB' = t$. Задачу розв'язано.

Задача 13. Побудувати трикутник за такими елементами: a, h_a, b_A.



Мал. 20

Аналіз. Оскільки задано основу a, вершини B і C можна вважати відомими (мал. 20). Висоту h_a задано, тому третя вершина A лежить на прямій $u \parallel BC$, що віддалена від BC на h_a (1). Знаючи h_a та b_A, можна побудувати прямокутний трикутник (у будь-якому місці), рівний трикутнику AHF (2). Тоді буде відомий кут φ. Розглянемо точку $B' = S_u(B)$ (3). Маємо таке:

$$\angle B'AC = \angle B'Au + \angle uAC = \angle BAu + \angle uAC =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\angle A + \varphi\right) + \left(\varphi - \frac{1}{2}\angle A\right) = 2\varphi.$$

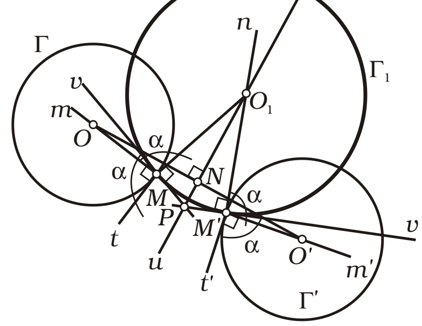
Отже, вершина A належить дузі Γ, що спирається на відрізок $B'C$ і вміщує кут 2φ (4); тому $A = u \cap \Gamma$. Аналіз закінчено.

Доведення. За побудовою основа та висота трикутника задовольняють умову задачі. Опустимо з точки A перпендикуляр AH і побудуємо точку F як перетин основи BC із відповідною дугою кола радіусом b_A з центром у точці A. За побудовою $\angle AFH = \varphi$ (див. побудову (2) в аналізі). Залишається довести, що AF — бісектриса кута BAC. Помічаємо таке: $\angle BAF = \angle BAu - \varphi = \angle B'Au - \varphi = \angle B'AC - \angle uAC - \varphi = 2\varphi - \angle uAC - \varphi = \varphi - \angle uAC = \angle CAF$. Отже, задачу розв'язано.

Тепер зупинимося на прикладі, який показує, що *вісь симетрії* в методі, що розглядається, може відігравати різну роль.

Задача 14. Побудувати коло, що дотикається до заданої прямої в даній на ній точці та перетинає задане коло під даним кутом.

Аналіз. Нагадаємо, що кут між двома колами — це кут між їхніми радіусами, проведеними в точку перетину (він дорівнює одному з суміжних кутів між відповідними дотичними).



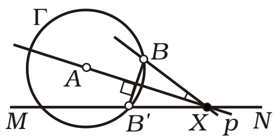
Мал. 21

Нехай на малюнку 21 шукане коло Γ_1 дотикається до заданої прямої v' у заданій точці M' і перетинає задане коло Γ в деякій точці M під заданим кутом α. На малюнку вказано також відповідні дотичні до кіл. Для побудови кола Γ_1 досить знайти його центр O_1. Останній лежить на прямій $n \perp v'$ у точці M' (1). Подальші міркування утруднюються тим, що на відміну від більшості попередніх задач не можна їх полегшити безпосереднім вибором осі симетрії. Уявимо собі навіть таке: нехай невідомо, що остаточно побудова зводиться до виконання симетрії (нерідко це й трапляється при розв'язуванні задач на побудову). Розглянемо чотирикутник O_1MPM'. У ньому $\angle O_1MP = \angle O_1M'P = 90°$ (v і v' — дотичні до кола Γ_1), $O_1M = O_1M'$. Тоді маємо $\Delta O_1MP = \Delta O_1M'P$, тобто діагональ O_1P є віссю симетрії чотирикутника O_1MPM' (ключовий момент). З іншого боку, на осі лежить центр O_1 шуканого кола. То чи не можна цю пряму знайти? Отже, для подальшого аналізу природно розглянути симетрію S_u. В ній $\Gamma_1 \to \Gamma_1$, $M \to M'$, $O \to O'$, $\Gamma \to \Gamma'$, $v \to v'$, $t \to t'$; $\angle O_1M'O' = \angle v'M't' = \alpha$. Звідси випливає, що пряму t' під кутом α до v' провести можна (2), а пряму m' можна побудувати як перпендикулярну до t' (3), на ній легко знайти точку O', виходячи з рівності $MO' = MO$ (4). Залишається побудувати пряму u як серединний перпендикуляр відрізка OO' (5): $O_1 = u \cap n$. Аналіз закінчено.

Водночас бачимо, що в цьому прикладі вісь u **не є** наперед відомою. Проте вона потрібна для розв'язання задачі як засіб аналізу та як елемент, що визначає шукану точку O_1.

Доведення. Нехай вказану побудову точки O_1 виконано. Опишемо радіусами O_1M' й $O'M'$ кола Γ_1 та Γ' відповідно і розглянемо симетрію S_u. Очевидно, $S_u(\Gamma_1) = \Gamma_1$. Оскільки пряма u за побудовою є серединним перпендикуляром відрізка OO', а радіус кола Γ' дорівнює за побудовою радіусу кола Γ, маємо $S_u(\Gamma') = \Gamma$. За побудовою прямі v' і t' є дотичними до кіл Γ_1 і Γ' відповідно; отже, ці кола перетинаються під кутом α. За властивістю симетрії під тим самим кутом перетинаються також їхні образи, тобто кола Γ_1 та Γ. Задачу розв'язано.

Задача 15. В одній півплощині відносно прямої MN задано точки A і B. Побудувати на MN таку точку X, щоб $\angle MXA = \angle AXB$.



Мал. 22

Аналіз. Нехай на малюнку 22 $\angle MXA = \angle BXA$. Приймемо пряму AX за вісь симетрії. Тоді, якщо $B' = S_{AX}(B)$, то $B' \in MN$. Оскільки $AB = AB'$, точка B' одночасно належить також колу Γ радіусом AB із центром $A(S(\Gamma) = \Gamma)$; отже, $B' \in MN \cap \Gamma$ (1). Після цього можна побудувати вісь симетрії як серединний перпендикуляр p відрізка BB' (2), й тоді $X = p \cap MN$.

Доцільність використання осі симетрії тут більш очевидна, ніж у попередній задачі. Адже вісь симетрії в ній потрібна також для безпосередньої побудови шуканої точки X. Аналіз закінчено.

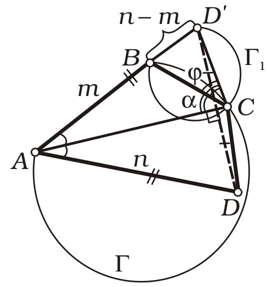
Доведення. Оскільки p — вісь симетрії відрізка BB', матимемо: $\angle B'XA = \angle BXA$. Задачу розв'язано.

А зараз сконцентруємо нашу увагу на одному із стрижневих об'єктів у конструктивній планіметрії — на бісектрисі кута.

На запитання вчителя до класу «що таке бісектриса кута і які її властивості?», учні, у відповідь, не задумуючись формулюють означення: «Бісектрисою кута називається промінь, який виходить із вершини кута, проходить між його сторонами і ділить кут навпіл» [3, *28*]. Кращі вміють будувати цю геометричну фігуру (наприклад, уписувати у трикутник коло); одиниці знають, що бісектриса кута уособлює ГМТ, рівновіддалених від його сторін. Проте мало кому спаде на думку пригадати ще один очевидний факт, майже невживаний в обчислювальній практиці, згідно якому *сторони кута мають взаємно симетричне розташування* відносно його бісектриси. Отож, саме в іпостасі **осі симетрії** бісектриса кута є визначальною фігурою для цілого **типу** конструктивних задач.

Продемонструємо це на прикладах.

Задача 16. Побудувати чотирикутник $ABCD$, якщо задані його сторони AB і AD, кут ACB, $\angle B - \angle D$, а діагональ AC — бісектриса кута A.

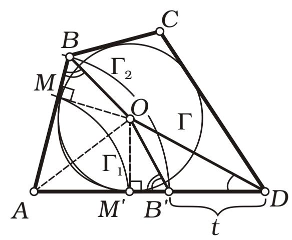


Мал. 23

Аналіз. Розглянемо точку $D' = S_{AC}(D)$ (мал. 23). Оскільки $AD' = AD$, положення точок A, B і D' можна вважати відомими (1). За умовою кут ACB є заданим; отже, вершина C належить дузі $\mathbf{\Gamma}$, яку можна побудувати (2). У трикутнику BCD' кут ABC — зовнішній: $\angle BCD' = \angle ABC - \angle AD'C = \angle B - \angle D$ є заданим за умовою, тому можна побудувати дугу $\mathbf{\Gamma_1}$ (3); отже, $C \in \mathbf{\Gamma} \cap \mathbf{\Gamma_1}$. Залишається побудувати вершину $D = S_{AC}(D')$ (4). Аналіз закінчено.

Доведення. За побудовою сторони AB й $AD = AD'$ рівні даним відрізкам, діагональ AC — бісектриса кута A, а кут ACB теж рівний даному. Далі, $\angle ABC - \angle ADC = \angle ABC - \angle AD'C = \angle BCD'$; за побудовою дуги $\mathbf{\Gamma_1}$, цей кут теж має дану градусну міру. Задачу розв'язано.

Задача 17. Побудувати чотирикутник, в який можна вписати коло, якщо задано сторони AB, AD та кути B і D чотирикутника.

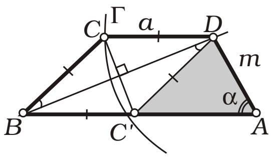


Мал. 24

Аналіз. Нехай малюнок 24 задовольняє умову задачі. Наразі дзеркально відіб'ємо трикутник AOB у трикутник AOB'. Тоді точки A, D, B' відомі (1), кути $AB'O$ і ADO теж відомі: $\angle AB'O = \frac{1}{2}\angle B$ і $\angle ADO = \frac{1}{2}\angle D$. Отже, трикутник $B'OD$ з основою $B'D = t$ й уже відомими прилеглими кутами можна побудувати (2). Тоді легко побудувати також точку M', а разом з нею й коло Γ (3; 4). Точка $M \in \Gamma \cap \Gamma_1$, де Γ_1 — коло з центром у точці A і радіусом AM' (5). Точка $B \in AM \cap \Gamma_2$, де Γ_2 — коло з центром у точці A та радіусом AB' (6). Вершина C буде перетином дотичних до кола Γ, проведених із точок B та D (7; 8). Аналіз закінчено.

Доведення. За побудовою чотирикутник $ABCD$ описаний навколо кола Г, а сторона AD і відрізок AB', рівний стороні AB, мають задані довжини. Оскільки трикутники ABO й $AB'O$ за побудовою симетричні відносно прямої AO, то $\angle ABO = \angle AB'O = \frac{1}{2}\angle B$; отже, $\angle ABC = 2\angle ABO = \angle B$. Нарешті, $\angle ADC = 2\angle ADO = \angle D$. Задачу розв'язано.

Задача 18. Побудувати трапецію за основою a, бічною стороною m і кутом A за умови, що BD є бісектрисою кута B.

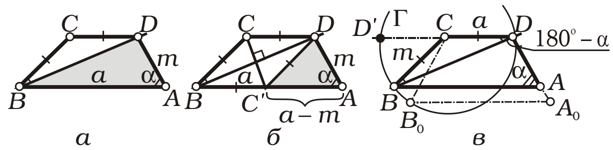


Мал. 25

Аналіз. Нехай трапеція $ABCD$ (мал. 25) задовольняє умову задачі: $CD = a$, $AD = m$, $\angle A = \alpha$ і $\angle CBD = \angle DBA$; нехай також $BA > CD$. Розглянемо точку $C' = S_{BD}(C)$. Із умови випливає, що $C' \in BA$ і $C'D = CD = a$. Отже, трикутник $AC'D$ за відомими двома сторонами і кутом можна побудувати (1): 1) $\angle A = \alpha$; 2) $AD = m$; 3) **Г** (D, a); 4) $C' =$ **Г** $\cap AC'$; 5) $C'D$. Оскільки $ABCD$ — трапеція, $DC \parallel AC'$; але ж $DC = a$, тому точка C теж легко будується (2). Чотирикутник $BC'DC$ — ромб, що очевидно, отже точка B є перетином променя AC' із бісектрисою кута $C'DC$ (3).

Доведення. Із побудови прямо випливає: $ABCD$ — трапеція ($DC \parallel AC'$), $AD = m$, $CD = a$ і $\angle A = \alpha$; точки C і C' симетрично розташовані відносно BD ($DC = DC' = a$ і $\angle CDB = \angle BDC$), тому BD є бісектрисою не лише кута $C'DC$, а й кута CBA.

Дослідження. У побудові трикутника $AC'D$ сторона $C'D$ необхідно не менша відстані між основами трапеції. Отже, задача має розв'язок, якщо $a \ge m \sin \alpha$; при $a = m \sin \alpha$, розв'язком буде прямокутна трапеція. В іншому випадку ($a < m \sin \alpha$) задача не матиме розв'язків.

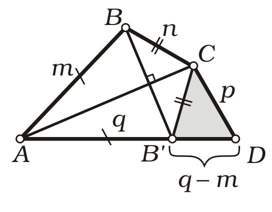


Мал. 26

Цікавими з позицій дослідження є можливі варіації у виборі заданих умовою лінійних елементів трапеції (мал. 26, *а* — *в*). Тут випадки *а*) і *б*) тривіальні й зрозумілі з малюнків. В останньому ж представленні (мал. 26, *в*) можна міркувати так: $\angle CDA = 180° - \alpha$ (1); $DC = a$ (2); із того, що $\angle CBD = \angle DBA = \angle BDC$ ($BA \parallel CD$) випливає $a = m$, а точка B належить колу **Г**(C, a) (3). При цьому будь-яка точка півдуги кола $D'BD$ (крім точок D' і D) може бути вибрана вершиною трапеції (4), адже пряма $BA \parallel CD$ (5) висіче на промені DA останню вершину трапеції $ABCD$ (6), яка задовольняє всі вимоги умови, в чому легко переконатися за малюнком. У цьому випадку задача, очевидно, матиме *безліч* розв'язків.

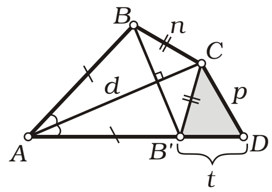
Хоч і простішими у розв'язанні, проте **однотипними** із номерами 16 — 18, є ще й такі задачі.

Задача 19. Побудувати чотирикутник $ABCD$ за його сторонами, якщо відомо, що діагональ AC є бісектрисою кута A.



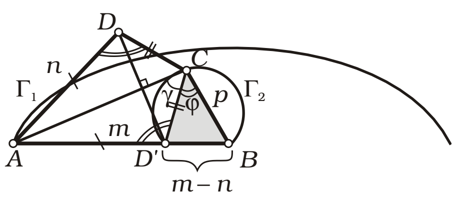
Мал. 27

Задача 20. Побудувати чотирикутник $ABCD$ за його сторонами BC і CD, різницею сторін AD й AB та діагоналлю AC, якщо відомо, що AC є бісектрисою кута A (мал. 27).



Мал. 28

Задача 21. Побудувати чотирикутник $ABCD$ за такими його елементами: $AB = m$, $AD = n$, $\angle BCA = \gamma$ і $\angle D - \angle B = \varphi$, якщо діагональ AC є бісектрисою кута A (мал. 28).



Мал. 29

Аналіз. Нехай чотирикутник $ABCD$ задовольняє умову задачі (мал. 29). Розглянемо точку $D' = S_{AC}(D)$. З умови випливає, що $D' \in AB$ та що точки A, D' і B можна вважати побудованими (1). Також за умовою задачі $\angle D > \angle B$, отже точка D' лежить між точками A і B. Тоді у трикутнику BCD' $D'B = m - n$ і $\angle AD'C$ — зовнішній: $\angle AD'C = \angle B + \angle D'CB \Rightarrow \angle D'CB = \angle AD'C - \angle B$. Але ж $\angle AD'C = \angle ADC$ (як кути симетричні відносно AC), тому $\angle D'CB = \angle D - \angle B = \varphi$. Таким чином, точка C є перетином (4) двох однотипних ГМТ: $Г_1$, з яких відрізок $AB = m$ видно під кутом γ (2), і $Г_2$, з яких відрізок $D'B = m - n$ видно під кутом φ (3). Добудови трикутника $D'CB$ до шуканої трапеції $ABCD$ тривіальні (5).

На завершення досить специфічного розділу конструктивної планіметрії зауважимо, що закономірні переміщення геометричних фігур на площині є найпростішими їх перетвореннями; ***рухи зберігають*** відстані між точками і, як наслідок, ***форма та розміри*** всякої фігури під дією такого перетворення **залишаються незмінними** — інваріантними. Цей фактор визначальний у практичному використанні *паралельного перенесення*, *повороту* і *осьової симетрії*. Найважливіша роль рухів полягає в їх *багаточисленних прикладаннях до розв'язування геометричних задач*, ***особливо — на побудову***.

Ретельне вивчення властивостей рухів в їх образному уявленні та візуальному вираженні розвиває, внутрішньо мотивує образне мислення учнів, мимоволі спонукає до створення деяких загальних прийомів, що виявляються пріоритетними в пошуку розв'язків багатьох геометричних задач, адже саме вони припускають типізацію певного переліку задач, кожна з яких у використанні інших методів вимагає окремого розгляду.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бевз Г. П. Геометрія: Підручник для 7 — 9 класів загальноосвітніх навчальних закладів / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. — К.: Вежа, 2001. — 272 с.

2. Ленчук І. Г. Перетворення фігур: паралельне перенесення / І. Г. Ленчук // Математика в рідній школі. — 2016. — №_. — С.__ — __.

3. Погорєлов О. В. Геометрія: Підручник для 7 — 9 класів середньої школи / О. В. Погорєлов. — К.: Освіта, 1998. — 224 с.

4. Яглом И. М. Геометрические преобразования: В 2-х тт., т. 2: Линейные и круговые преобразования / И. М. Яглом. — М.: ГИТТЛ, 1956. — 612 с.

СУЧАСНІ ТЕХНОЛОГІЇ

МАТЕМАТИКА У ЖИТТІ

(ДОВГОТРИВАЛИЙ ПРОЕКТ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ СТЕРЕОМЕТРІЇ)

Наталія ГРИГОРАШ —

Як зазначалося раніше, ***довготривалими*** є проекти, робота над якими триває протягом одного семестру чи навіть усього навчального року. У 10 — 11класах, з метою підвищення цікавості до вивчення математики, активізації творчого потенціалу та пізнавальної діяльності, розвитку творчих, аналітичних здібностей, а також підвищення ефективності процесу викладання математики, результативності навчання можна запропонувати довготривалий проект «Математика у житті. Збірник прикладних задач зі стереометрії».

Саме такий проект було запропоновано та реалізовано учнями 11 класу на уроках геометрії та в позаурочний час. Створення кінцевого продукту проекту — задачника, ініціювали учні-учасники.

У школярів часто виникають запитання «Для чого мені вивчати математику?»; «Чи знадобляться мені в реальному житті набуті у школі знання?». Відповіддю на ці запитання і стала збірка прикладних задач.

З метою підвищення мотивації учнів до вивчення математики, активізації їх творчих здібностей, розвитку пошуково-пізнавальних навичок, а також формування умінь працювати в команді, виховання самодисципліни і відповідальності учням ще на початку навчального року було запропоновано збирати цікаві задачі з життя, а наприкінці навчального року впорядкувати їх у задачник.

Робота над проектом тривала протягом навчального року. Її можна розподілити на 5 основних етапів:

- підготовчий;
- етап планування;
- дослідницький;
- презентативний (захист проекту);
- оцінно-рефлексивний (етап оцінювання).

Підготовчий етап включив важливий момент — визначення теми проекту, пошук і аналіз проблеми.

На першому уроці геометрії в 11 класі, як правило, проводиться повторення матеріалу, вивченого у попередньому навчальному році. Вчитель проводить узагальнення та систематизацію ключових питань з вивчених раніше тем. Саме тому на першому — другому уроці з геометрії варто запропонувати учням реалізувати задуманий проект.

Учитель та учні обговорюють спільну мету проекту, завдання, які потрібно буде реалізувати в ході проекту, проблеми, які можуть виникнути. Учитель ознайомлює з правилами роботи