7. При яких значеннях a нерівність
$2x - a^2 + 5 < 0$
правильна при всіх x, які задовольняють умову $|x| \le 2$?
Відповідь. $a \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$.

8. При яких значеннях a нерівність
$(m - 2)x + 2m - 16 < 0$
правильна при всіх x, які задовольняють умову $|x| \ge 5$?
Відповідь. $m = 2$.

9. При яких значеннях m нерівність
$(m^2 - 4)x + m - 2 < 0$
справедлива при всіх x, які задовольняють умову $|x| > 3$?
Відповідь. $m = -2$.

10. При яких значеннях k нерівність
$(k - 4)x + k - 5 < 0$
справедлива при всіх x, які задовольняють умову $|x| \le 3$?
Відповідь. $k \in (3{,}5;\ 4{,}25)$.

ПЕРЕТВОРЕННЯ ФІГУР: ПОВОРОТ

Іван ЛЕНЧУК — професор кафедри методики навчання математики, фізики та інформатики Житомирського державного університету ім. І. Я. Франка, доктор педагогічних наук

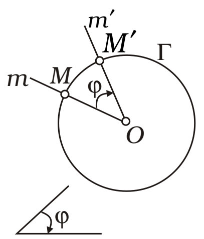
Анотація. Анонсовано методику застосування повороту навколо точки на даний кут як засіб розв'язування планіметричних задач на побудову. З'ясовано шляхи структурної типізації задач із метою їх алгоритмізації та комп'ютеризації, що сприятиме спрощенню як викладання, так і учіння цього специфічного розділу геометрії.
Ключові слова: метод перетворень, конструктивізм, задачі на побудову, поворот, аналіз, доведення, дослідження.

Иван ЛЕНЧУК. Метод преобразований: поворот.
Аннотация. Анонсирована методика использования поворота около точки на данный угол в качестве средства решения планиметрических задач на построение. Установлены пути структурной типизации задач с целью их алгоритмизации и компьютеризации, что поможет упростить как преподавание, так и изучение этого специфического раздела геометрии.
Ключевые слова: метод преобразований, конструктивизм, задачи на построение, поворот, анализ, доказательство, исследование.

Ivan LENCHUK. Converaion Method: Turn.
Summary. Announced the technique of using the turnaround point at the corner as a means of solving plan metric construction problems. It was established way of typing the structural problems with a view to their algorithms and computerization, to simplify both the teaching and study of this particular section geometry.
Keywords: the method of transformation, constructivism, mathematics, rotation, analysis, proof, research.

Розглянемо метод розв'язування задач на побудову, пов'язаний з іншим елементарним перетворенням, яке виражає результат обертального руху і називається *поворотом.* У підручнику [3] дається дескриптивне означення повороту — через рух (на відміну від інших перетворень, означених конструктивно). Наведемо **конструктивне означення повороту** [1].

Нехай дано (мал. 1) орієнтований кут φ, яким указано напрям повороту, і нерухому точку O — центр повороту ($0° \le \varphi \le 180°$).

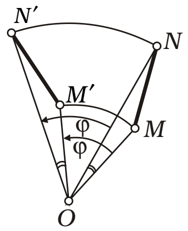


Мал. 1

З'ясуємо, як довільній точці $M \ne 0$ площини ставиться у відповідність при повороті R_O^φ (позначення повороту) точка M'. Розглянемо коло $\Gamma(O, OM)$ і промінь m', що утворює з променем $m(OM)$ орієнтований кут φ (існування та єдність такого променя випливають з аксіоми відкладання кута). Перетин Г із m' й буде точкою-образом у такому перетворенні: $M' = m' \cap \Gamma$.

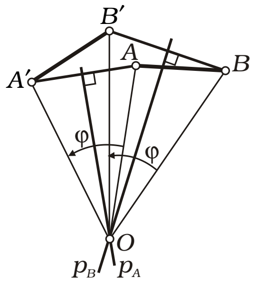
Очевидно, що при повороті на кут 180° матимемо центральну симетрію (Z_O). Поворот на 0° буде тотожним перетворенням площини (кожна її точка переходить сама в себе, тобто є нерухомою).

Легко довести, що *поворот є рухом* (перетворення, яке зберігає відстані між точками, називається рухом). Нехай $M' = R_O^\varphi(M)$, $N' = R_O^\varphi(N)$ (мал. 2). Помічаємо, що $\angle M'ON' = \angle MON$. Справді, при вказаному розташуванні променів $\angle M'ON' = \angle NON' - \angle NOM' = \angle MOM' - \angle NOM' = \angle MON$. Крім того, $OM' = OM$, а $ON' = ON$; отже, $\Delta OM'N' = \Delta OMN \Rightarrow M'N' = MN$.



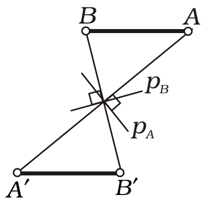
Мал. 2

Поворот, як і паралельне перенесення, є істинно переміщенням фігур на площині. Всі точки фігури одночасно зміщуються вздовж концентричних (паралельних) кіл із центром у точці O на одну і ту саму кутову (градусну) міру дуг. Унаслідок цього поворот зберігає орієнтацію, тобто напрям обходу фігур за контуром залишається незмінним.

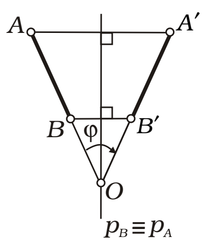


Мал. 3

Поворот можна задавати не тільки способом, указаним в означенні. Він цілком визначається також центром O і парою відповідних точок M та M', рівновіддалених від точки O (що очевидно), а ще, до того ж, парою рівних і відповідних відрізків AB й $A'B'$. Розглянемо останній випадок. Оскільки для шуканої точки O має бути $OA = OA'$ та $OB = OB'$ (*), то ця точка належить серединним перпендикулярам p_A і p_B відрізків AA' та BB' одночасно. На малюнку 3 ці перпендикуляри перетинаються: $p_A \cap p_B = O$. Тоді, крім рівностей (*), за умовою маємо $AB = A'B'$. Таким чином, $\Delta AOB = \Delta A'OB' \Rightarrow \angle AOB = \angle A'OB'$, а тому $\angle AOA' = \angle AOB' + \angle B'OA' = \angle AOB' + \angle BOA = \angle BOB'$. Отже за умови, що $AB = A'B'$, маємо поворот навколо центра O на кут $\varphi = \angle AOA'$.

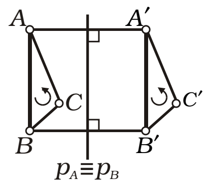


Мал. 4

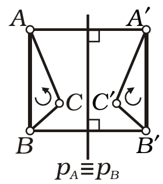


Мал. 5

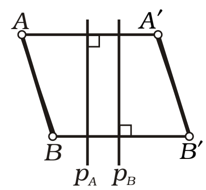
Окремим частинним випадком дістанемо центральну симетрію Z_O (мал. 4); тут $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{A'B'}$. Якщо $p_A \equiv p_B$ і $AB \nparallel A'B'$, то теж матимемо поворот площини (мал. 5). Якщо ж $p_A \equiv p_B$ і $AB \parallel A'B'$, то повороту немає. Справді, нехай спочатку рух, який належить розглянути, не змінює орієнтацію. Тоді матимемо паралельне перенесення на вектор $\vec{p} = \overrightarrow{AA'}$ (мал. 6). Припустимо тепер, що рух змінює орієнтацію. Тоді дістанемо симетрію відносно осі $p_A \equiv p_B$ (мал. 7). Зауважимо, що на малюнку 5 теж буде осьова симетрія, коли припустити, що перетворення змінює орієнтацію. Нехай, нарешті, $p_A \parallel p_B$ (мал. 8). Помічаємо, що й за таких умов також матимемо паралельне перенесення на вектор $\overrightarrow{AA'}$.



Мал. 6



Мал. 7



Мал. 8

Ми докладніше зупинилися на питанні задавання повороту, оскільки його розуміння вартісне під час розв'язування конструктивних задач.

У побудовах потрібно вміти повертати прямі й кола. Поворот прямої доцільно здійснювати одним із двох способів (другий пріоритетний).

Спосіб 1. Побудувати образи двох точок заданої прямої і через них провести шукану пряму.

Спосіб 2. Опустити з центра повороту O перпендикуляр OM на дану пряму u і повернути точку M на орієнтований кут φ. Через кінець M' образу OM' відрізка OM перпендикулярно до OM' провести пряму u' — образ даної прямої u.

Для повороту кола досить повернути його центр і з нового центра тим самим радіусом описати шукане коло.

Метою статті є демонстрація можливостей перетворення повороту в конструктивній планіметрії. Суть методу повороту полягає в тому, що *дану чи шукану фігуру* (або їх окремі елементи) *потрібно повернути навколо доцільно вибраного центра на відповідний кут так, щоб задачу звести безпосередньо до результату або полегшити його відшукання.*

Орієнтовно *метод повороту передбачає в аналізі конструктивних задач введення в розгляд* ***рівнобедреного трикутника***, елементи якого встановлюються, виходячи з означення і властивостей цього перетворення площини.

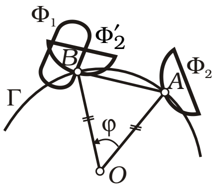
Отже, *з умови задачі на побудову має бути відомий кут при вершині такого трикутника. При цьому його вершину — центр повороту — або явно задано в умові, або ж її може знайти розв'язуючий у процесі аналізу.* Часто метод повороту використовують для побудови правильних чи рівнобедрених трикутників, квадратів, правильних багатокутників.

Здебільшого *метод центральної симетрії ефективний тоді*, коли *вибір середини одного із заданих або шуканих відрізків як центра перетворення приводить до центральносиметричного розташування елементів малюнка*, на якому проводиться аналіз. Це, у свою чергу, спрощує пошук розв'язку.

Зауважимо, що доцільно потренуватися у виконанні зазначених у методі повороту побудов лінійкою та циркулем, що стимулює мислення під час розв'язання відповідних задач.

Розгляд методу повороту розпочнемо з досить типової (опорної) задачі.

Задача 1. Побудувати рівнобедрений трикутник за заданим кутом при його вершині так, щоб ця вершина лежала у заданій точці O, а кінці основи — на двох заданих лініях Φ_1 і Φ_2.



Мал. 9

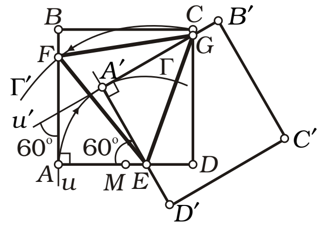
Аналіз. Нехай трикутник AOB — шуканий (мал. 9). Маємо ситуацію 2 (див. [2]). Повернемо фігуру Φ_2 навколо точки O у відповідному напрямі на кут φ (1). Оскільки $OA = OB$, точка A при цьому перейде в точку B; отже, фігура Φ_2' пройде через точку B, звідки $B \in \Phi_1 \cap \Phi_2'$. Тоді точка A належить колу Г з радіусом OB і центром у точці O. Тому $A \in \Gamma \cap \Phi_2$ (2). Аналіз закінчено.

Доведення. Нехай таку побудову виконано. Оскільки $\Phi_2' = R_O^{\varphi}(\Phi_2)$, на Φ_2 має існувати прообраз A точки B. Якщо з можливих точок перетину Г і Φ_2 взяти таку точку A, що $\angle AOB = \varphi$, то трикутник AOB, за означенням повороту, задовольняє умову задачі. Зрозуміло, що задача має стільки розв'язків, скільки спільних точок мають фігури Φ_1 та Φ_2'.

До того ж, оскільки задача має загальний характер, то з конкретно вказаними фігурами Φ_1 і Φ_2та кутом φ етап доведення можна не проводити (аналіз проводять обов'язково, адже потрібно визначити тип задачі, вказати центр і кут повороту).

Наступні три задачі «на трикутники» розв'яжемо за повною схемою.

Задача 2. У квадраті $ABCD$ точка E належить стороні AD. Побудувати на сторонах квадрата такі точки F та G, щоб трикутник EFG був рівностороннім (по іншому: у квадрат уписати рівносторонній трикутник, одна з вершин якого є будь-якою точкою на стороні квадрата).



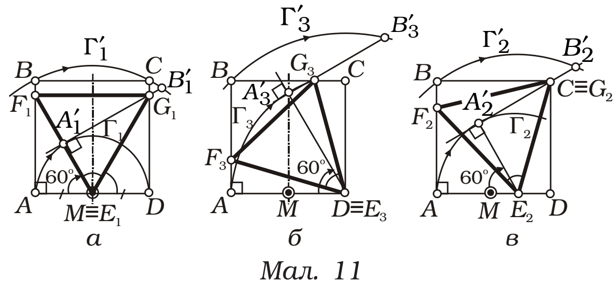
Мал. 10

Аналіз. Нехай трикутник EFG (мал. 10) — рівносторонній. Очевидно, крім вершини E досить знайти ще одну вершину шуканого трикутника. Повернемо відрізок EF разом із прямою $AB \equiv u$ на кут 60° за годинниковою стрілкою (1). Тоді точка F перейде в точку G, а пряма u — у пряму u' (побудову прямої u' показано на малюнку). Оскільки $F \in u$, маємо $F' \equiv G \in u'$. Отже, $G = u' \cap CD$. Вершина $F = AB \cap \Gamma'$, де Г′ — коло з центром у точці E і радіусом EG (2). Аналіз закінчено.

Доведення. Трикутники EAF та $EA'G$ рівні як прямокутні з рівними катетами EA і EA' та гіпотенузами EF і EG. Отже, $\angle AEF = \angle A'EG$. Звідси за побудовою $\angle GEF = \angle GEA' + \angle A'EF = \angle FEA + \angle A'EF = 60°$. Оскільки трикутник GEF рівнобедрений із кутом 60° при вершині E, він також є рівностороннім.

Дослідження. Залежно від розташування заданої точки E на стороні AD буде змінюватися розташування вершин F і G трикутника. Досить дослідити результат побудови на проміжку MD: від середини сторони квадрата AB до його вершини D, оскільки для точки E, яка належала б іншій її половині MA, матимемо, що очевидно, симетричне розташування трикутника EFG. Тому уявимо, що точка E поступально рухається від точки M до точки D уздовж відрізка MD.

Перш за все можна встановити, що при будь-якому розташуванні точки E на цьому проміжку, відрізок $A'B'$ — образ сторони квадрата AB — перетинає заданий квадрат в єдиній точці. Це випливає з того, що точка A' має лежати всередині квадрата $ABCD$, тоді як точка B' — зовні.



Мал. 11

На малюнку 11, *а* відрізок $A_1'B_1'$ одержимо обертанням сторони AB навколо точки $M \equiv E_1$ на кут 60°. Зрозуміло, що півколо $\Gamma_1(M,\ r = MA)$

лежить всередині квадрата, як і точка A_1', що належить Γ_1. З іншого боку, точка B_1' має належати колу $\Gamma_1'(M, r = MB)$, яке, за винятком його точок B і C, лежить поза квадратом. Отже, точка A_1' — внутрішня, а B_1', в яку переходить точка B, зовнішня по відношенню до квадрата. Тому відрізок $A_1'B_1'$ перетинає квадрат в єдиній точці G_1.

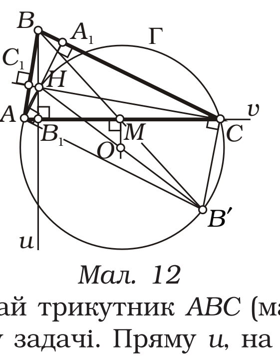
Аналогічно (мал. 11, *б*) можна переконатися, що точка A_3' кола $\Gamma_3(D \equiv E_3,\ r = DA)$ лежить усередині квадрата $ABCD$, а точка B_3' кола $\Gamma_3'(D \equiv E_3, r = DB)$ — зовні нього. Це розташування відрізка $A_3'B_3'$ відповідає повороту AB на кут 60° навколо точки D.

Загалом у будь-якому розташуванні центра повороту E на відрізку MD, точка A' виявиться всередині, а точка B' — зовні квадрата. Таким чином, ми завжди матимемо *єдиний розв'язок* задачі.

Далі неважко визначитися з інтервалами змінних розташувань точок F і G при русі точки E у напрямі від точки M до точки D. Поклавши в першому розташуванні $M \equiv E_1$, одержали розв'язком трикутник $E_1F_1G_1$, де $F_1 \in AB$ і $G_1 \in CD$, причому $BF_1 = CG_1$ і $F_1G_1 \parallel BC$. Наступному граничному розташуванню точки E, коли $D \equiv E_3$, відповідає трикутник $E_3F_3G_3$, де $G_3 \in BC$. Таким чином, під час руху точки E вздовж відрізка MD, точка F переміщується вздовж сторони квадрата AB, описуючи відрізок F_1F_3. Тоді само точка G рухається спочатку стороною DC, висікаючи відрізок G_1C (див. мал. 11, *а*, *б*, *в*), а потім — стороною CB від точки C до точки G_3.

Зі сказаного випливає, що для різних розташувань точки E на стороні AD завжди маємо розв'язком трикутник EFG і, до того ж, лише *один*. Задачу розв'язано повністю.

Задача 3. Побудувати трикутник за його вершиною B, серединою M протилежної сторони й ортоцентром H.



Мал. 12

Аналіз. Нехай трикутник ABC (мал. 12) задовольняє умову задачі. Пряму u, на якій лежить висота BB_1, уже можна провести (1). Оскільки основа AC перпендикулярна прямій u і проходить через відому точку M, пряма v, що містить AC, теж будується елементарно (2). Для відшукання вершин A та C, розглянемо точку $B' = Z_M(B)$ (3). Чотирикутник $ABCB'$ — паралелограм. Тому $AA_1 \perp BC$ і $CC_1 \perp AB$, що дає: $AA_1 \perp AB'$ та $CC_1 \perp CB'$; отже (див. [3], § 11, задачі 56, 57), точки A і C лежать на колі Γ діаметром HB' (4): $A \cup C = v \cap \Gamma$ ($\cup$ — знак об'єднання). Аналіз закінчено.

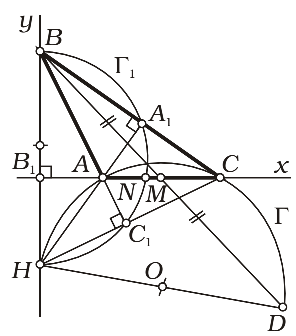
Доведення. Нехай побудову виконано. Оскільки за побудовою $v \perp u$, BB_1 — висота трикутника ABC. Середина O відрізка HB' є центром кола Γ. Розглянемо трикутник $BB'H$, в якому OM — одна з його середніх ліній; тому $OM \parallel BH$, звідки $OM \perp v$. За відповідною властивістю діаметра, точка M є серединою хорди AC. Оскільки за побудовою M — середина відрізка BB', чотирикутник $ABCB'$ — паралелограм; тому з $HA \perp AB'$ і $HC \perp CB'$ випливає: $AA_1 \perp BC$ і $CC_1 \perp AB$. Отже, H — ортоцентр трикутника ABC.

Дослідження. Очевидно, умова існування розв'язку має бути така: $OH > OM \Leftrightarrow OH^2 > OM^2$, чим тут якісне дослідження і вичерпується. Для кількісного дослідження введемо систему координат. Нехай AC — вісь абсцис, а HB — вісь ординат. Позначимо координати заданих точок: $B(0,\ h)$, $H(0,\ q)$, $M(m,\ 0)$. При цьому припустимо вважати, що $h > 0$, $m \geq 0$. Маємо

$$D(2m;\ -h) \Rightarrow O\left(m; \frac{q-h}{2}\right),$$

тому умову існування розв'язку можна переписати так:

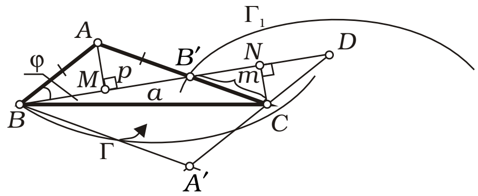
$$m^2 + \left(q - \frac{q-h}{2}\right)^2 > \left(\frac{q-h}{2}\right)^2 \Rightarrow m^2 > -qh.$$



Мал. 13

Розглянемо такі випадки: 1) $m = 0 \Rightarrow 0 > -qh$, тобто розв'язок існує тоді й тільки тоді, коли $q > 0$; 2) $m > 0$. В цьому випадку при $q \geq 0$ розв'язок завжди існує; отже, нехай $q < 0$. Тоді $q = -|q|$, $m^2 > |q|h$. Ця умова існування розв'язку має цікавий геометричний зміст (мал. 13). Маємо $BB_1 = h$, $B_1H = |q|$, $B_1N = \sqrt{|q|h}$. Розв'язок існуватиме (причому *єдиний*) тоді й тільки тоді, коли точка M лежить поза відрізком B_1N (отже, поза півколом Γ_1). Пропонуємо зацікавленому читачеві виконати малюнки до решти випадків, включаючи випадок відсутності розв'язку.

Задача 4. Побудувати трикутник за його основою, різницею кутів при основі та різницею двох інших сторін.



Мал. 14

Аналіз. Припустимо, що трикутник ABC задовольняє умову задачі (мал. 14), тобто в нього: $BC = a$, $AC - AB = m$, а $\angle ABC - \angle ACB = \alpha$. Повернемо сторону AB навколо точки A на кут BAC до положення AB' і проведемо промінь BB'. Позначимо кут $B'BC$ через φ. Матимемо:

$$\varphi = \angle ABC - \angle ABB' =$$
$$\angle ABC - \angle AB'B = \angle ABC - (\varphi + \angle ACB) =$$
$$=(\angle ABC - \angle ACB) - \varphi \Rightarrow \varphi = \frac{\alpha}{2}.$$

Тож трикутник $B'BC$ можна побудувати за двома сторонами ($BC = a$, $B'C = m$) і кутом φ ($B'BC$), рівним $\frac{\alpha}{2}$ (1). Вершина A трикутника ABC будується в перетині променя CB' із серединним перпендикуляром p відрізка BB' (2).

Доведення. $BC = a$ і $AC - AB = AC - AB' = m$ за побудовою. Різниця кутів B і C така:

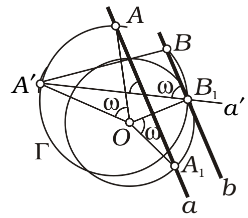
$$(\angle ABC - \angle ACB =$$
$$= (\angle ABB' + \angle B'BC) - \angle ACB =$$
$$= \left(\angle AB'B + \frac{\alpha}{2}\right) - \angle ACB =$$
$$= \left(\angle B'BC + \angle ACB + \frac{\alpha}{2}\right) - \angle ACB =$$
$$\angle B'BC + \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha.$$

Отож бо, трикутник ABC задовольняє всі вимоги задачі.

Дослідження. Перша необхідна умова існування розв'язку полягає в тому, щоб різниця $AC - AB = m$ була меншою сторони $AC = a$. Далі, для побудови допоміжного трикутника $B'BC$ потрібно, щоб коло $\Gamma_1(C, m)$ перетинало промінь BB', тобто відрізок m має бути не меншим відстані від точки C до променя BB'. Оскільки із прямокутного трикутника BNC катет $NC = BC\sin\varphi = a\sin\frac{\alpha}{2}$, то умова можливості побудови матиме такий вид: $a > m \geq a\sin\frac{\alpha}{2}$. При цьому, якщо $m > a\sin\frac{\alpha}{2}$, дуга Γ_1 перетне промінь BB' у двох точках; результатом побудови матимемо *два* рівні трикутники BCA і BCA'. Задачу розв'язано.

Далі за скороченою схемою розв'яжемо хоча б дві задачі «на коло».

Задача 5. Задано коло з центром O та точки A і B, які не лежать на ньому. Знайти на колі такі точки A_1 і B_1, щоб прямі AA_1 та BB_1 були паралельні, а кут A_1OB_1 дорівнював даному куту ω.

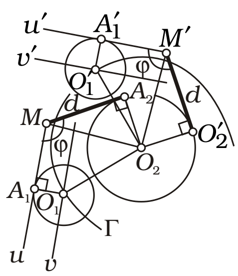


Мал. 15

Аналіз. Нехай малюнок 15 задовольняє умову задачі. Повернемо пряму a навколо точки O на заданий кут ω: $a \to a'$. Тоді точка A_1 перейде в точку B_1; отже, пряма a' пройде через точку B_1. Разом із прямою a повернеться навколо точки O на кут ω також задана точка A: $A' = R_O^{\omega}(A)$ (1). Одним із кутів, утворених прямими a' та b, є кут ω. Отже, з точки B_1 заданий відрізок $A'B$ видно під кутом ω або $(\pi - \omega)$. На малюнку 15 $\angle A'B_1B = \omega$. Якби точка B лежала на прямій b з іншого боку від точки B_1, то кут $A'B_1B$ дорівнював би $(\pi - \omega)$. Таким чином, шукана точка B_1 належить дузі Γ сегмента, що побудований на відрізку $A'B$ і вміщує заданий кут (2). Отже, $B_1 \in (O) \cap \Gamma$. Після цього стають відомими прямі b й $a \parallel b$ (3, 4). Аналіз закінчено.

Доведення. Нехай побудову виконано. Прямі AA_1 та BB_1 — паралельні за побудовою. Нехай також, згідно з малюнком, $\angle A'B_1B = \omega$ (випадок, коли $\angle A'B_1B = \pi - \omega$, пропонуємо читачеві розглянути самостійно). Оскільки $A' = R_O^{\omega}(A)$ і $\angle(a', b) = \omega$, маємо $a' = R_O^{\omega}(a)$. Через те, що коло з центром O при повороті навколо точки O переходить саме в себе й $A_1 = (O) \cap a$, $B_1 = (O) \cap a'$, дістаємо $B_1 = R_O^{\omega}(A_1)$. Це означає, що $\angle A_1OB_1 = \omega$. Задачу розв'язано.

Задача 6. Побудувати точку, дотичні з якої до двох заданих кіл утворюють заданий кут, причому одна з дотичних дорівнює заданому відрізку.



Мал. 16

Аналіз. Нехай на малюнку 16 справді $MA_1 = MA_2 = d$ — дотичні до заданих кіл із центрами O_1 й O_2, причому кут A_1MA_2 дорівнює заданому куту φ. Помічаємо, що центр O_1 кола належить двом ГМТ: колу Γ радіусом O_1O_2 з центром O_2 і прямій v, що паралельна до дотичної u та лежить від останньої на відстані r_1 (із відповідного боку). Це дає можливість міркувати далі так. Повернемо всю конфігурацію навколо точки O_2 на довільний кут: $M \to M'$ і т. ін. У цьому будь-якому положенні дотичну, очевидно, легко побудувати, оскільки радіус O_2A_2' можна вибрати в розташуванні довільно (1); тоді дотична $M'A_2' = d$ в точці A_2' буде перпендикулярна до радіуса O_2A_2' (2); дотична u' до кола з центром O_1' має проходити через точку M' під заданим кутом φ до дотичної $M'A_2'$ (3). За попереднім, точка O_1' має належати колу Γ (4) і прямій v' || u', що розташована на відстані r_1 від u' (із відповідного боку) (5). Оскільки за властивостями повороту $O_1MO_2 = O_1'M'O_2$, перший із цих трикутників на відрізку O_1O_2 можна побудувати (6), що й дає шукану точку M. Аналіз закінчено.

Доведення. З рівності трикутників $(\Delta O_1MO_2 = \Delta O_1'M'O)$ випливає, що $\angle O_1MO_2 = \angle O_1'M'O_2$.

У свою чергу, з рівності $MO_2 = M'O_2$, матимемо:

$MA_2 = M'A_2' = d$ і $\angle O_2MA_2 = \angle O_2M'A_2'$.

Аналогічно $\angle A_1MO_1 = \angle A_1'M'O_1'$. Тому

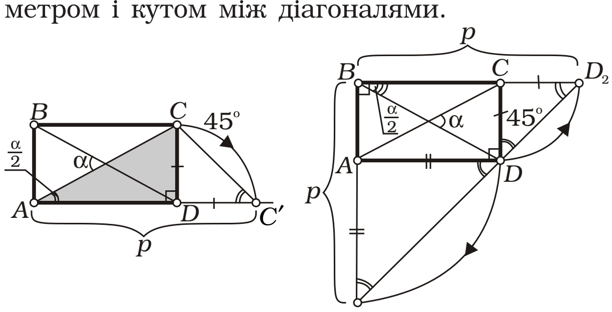
$\angle A_1MA_2 = \angle A_1MO_1 + \angle O_1MO_2 + \angle O_2MA_2 =$

$= \angle A_1'M'O_1' + \angle O_1'M'O_2 + \angle O_2M'A_2' =$

$= \angle A_1'M'A_2' = \varphi$. Задачу розв'язано.

Серед задач конструктивного характеру трапляється чимало таких, які в кілька кроків зводяться чи до найпростіших та основних побудов, чи до вже відомих — раніше розв'язаних елементарних задач. Як приклад, наведемо хоча б одну зі схожих до них. Привертаємо увагу до факту, що перетворення повороту припускає два різні способи розв'язання цієї задачі.

Задача 7. Побудувати прямокутник за периметром і кутом між діагоналями.



а б

Мал. 17

Аналіз. Оцінюючи візуально малюнок 17, *а*, помічаємо, що

$$\angle CAD = \frac{\alpha}{2} \text{ і } AD + DC = p.$$

Це й наштовхує на шлях розв'язання задачі.

Геометрично більш привабливим є варіант розгортання прямокутника $ABCD$ (мал. 17, *б*) у рівнобедрений прямокутний трикутник BD_1D_2 із катетами — півпериметрами: $BD_1 = BD_2 = p$. Легко обґрунтувати, що D_1, D і D_2 є суть точки однієї прямої — гіпотенузи трикутника D_1BD_2.

Не важко побачити, що в задачах 1, 2, 3, 5 і 7 центр і кут повороту не тільки легко визначаються з умови, а й використовуються в самій побудові. Проте в задачі 5 побудова потребує задіяти в повороті лише частину фігур, до яких перетворення застосовується в аналізі. В задачі 6 поворот використовується лише для аналізу, а в самій побудові участі не бере.

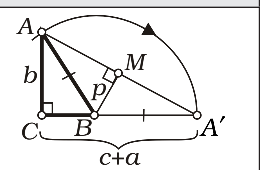
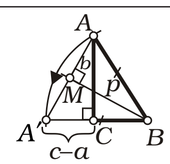
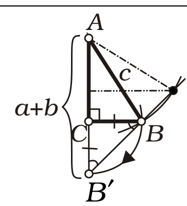
Однією з найцікавіших планіметричних фігур, як відомо, є прямокутний трикутник. Він — складова багатьох фігур планіметрії, широко вживаний в доведеннях стрижневих теорем, у виведеннях важливих довідникових формул метрики, має найширше застосування в задачах обчислювального та побудовного характеру. Дві з обов'язкових дванадцяти основних побудов лінійкою і циркулем, в їх переліку, стосуються цього трикутника. Більше того, окремі серйозні конструктивні задачі в пошуку розв'язків зводяться до побудови саме такої елементарної і, поряд із тим, оригінальної фігури.

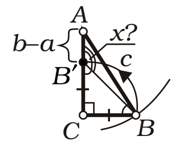
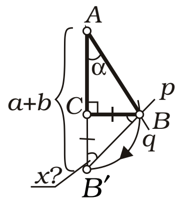
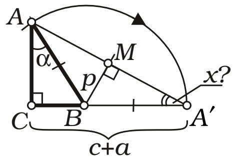
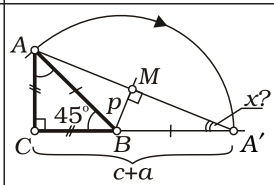
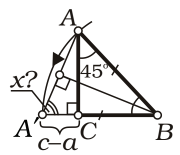
Інколи учням здається, що прямокутний трикутник вони знають досконало. Однак у більшості випадків це є лише ілюзією. Яка варіативність дескриптивних означень прямокутного трикутника? Скільки таких означень? Як у кожному випадку переозначити трикутник конструктивно? Відповіді на ці запитання тісно прилягають до розглядуваного методу повороту, яким чимало задач «на прямокутні трикутники» можна типізувати.

Отже, на підтвердження висловленого щодо прямокутного трикутника, подаємо завдання, які вже змодельовано на малюнках за двома параметрами, взятими з умов задач. Залишається лише описати етапи аналізу, доведення та дослідження у традиційній схемі розв'язання кожної з них.

Тут у прямокутному трикутнику ABC:

a, b — катети; c — гіпотенуза; α — гострий кут.

№ задачі (малюнка)	Елементи трикутника, задані умовою	Малюнок (розв'язок)
8 (18)	b, $c + a$	
9 (19)	b, $c - a$	
10 (20)	c, $a + b$	

№ задачі (малюнка)	Елементи трикутника, задані умовою	Малюнок (розв'язок)
11 (21)	c, $b - a$	
12 (22)	α, $a + b$	
13 (23)	α, $c + a$	
14 (24)	α = 45°, $c + a$	
15 (25)	α = 45°, $c - a$	

У класичному підручнику [3], на жаль не затребуваному сьогодні у школі, повороту як перетворенню геометричних фігур приділяється мало уваги: окрім неявного означення наведено лише кілька тренувальних вправ із кутом 60° і — **жодної задачі!** Проте, як уже з'ясовано, це — *конструктивно потужне дійство в геометрії циркуля і лінійки.* Методом повороту розв'язуються чимало оригінальних, доступних для розуміння учнями суто геометричних задач, зокрема, на різного роду трикутники та кола.

Окрім того, зараз з'явилася нагода зіставити і узагальнити природно схожі між собою методи паралельного перенесення та повороту як у питаннях технологій їх застосування до фігур геометрії, так і з огляду на задачний матеріал, що підпадає під будь-який із методів. У методичному плані корисно повніше, глибше проводити типізацію задач у кожному з методів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бевз Г. П. Геометрія: Підручник для 7 — 9 класів загальноосвітніх навчальних закладів / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. — К.: Вежа, 2001. — 272 с.

2. Ленчук І. Г. Перетворення фігур: паралельне перенесення / І. Г. Ленчук // Математика в рідній школі. — 2016. — №__. — С.__ — __.

3. Погорєлов О. В. Геометрія: Підручник для 7 — 9 класів середньої школи / О. В. Погорєлов. — К.: Освіта, 1998. — 224 с.