МІСЦЕ І РОЛЬ ДЕЛЬТОЇДА В НАВЧАННІ ЕВКЛІДОВОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Юлія КОРОБЧУК — учитель математики та інформатики ЗОШ І — ІІІ ступенів № 6, м. Новоград-Волинський, Житомирська область;
Іван ЛЕНЧУК — професор кафедри алгебри та геометрії Житомирського державного університету ім. І. Я. Франка, доктор педагогічних наук

Анотація. Наведеними прикладами обґрунтовується необхідність кваліфікованого вивчення учнями фігури «Дельтоїд», що шляхом якісної реалізації конструктивної компоненти вже на етапі аналізу умов багатьох планіметричних і стереометричних задач забезпечить щоразу вичерпне розуміння обчислювальної складової.
Ключові слова. Чотирикутник, дельтоїд, інформаційні технології навчання, планіметрія, стереометрія.

Юлия КОРОБЧУК. Иван ЛЕНЧУК. Место и роль дельтоида в евклидовой геометрии
Аннотация. Приведёнными примерами обосновывается необходимость квалифицированного изучения учениками фигуры «Дельтоид», что путем качественной реализации конструктивной компоненты уже на этапе анализа условий многих планиметрических и пространственных задач обеспечит каждый раз исчерпывающее понимание вычислительной составляющей.
Ключевые слова. Четырёхугольник, дельтоид, информационные технологии обучения, планиметрия, стереометрия.

Yuliya KOROBCHUK. The place and role of the deltoid in Euclidean geometry
Summary. The above examples justify the need for a skilled study by the pupils of the figure «Deltoid», what, through the qualitative realization of the constructive component, at the stage of analysis of the condition of many planimetric and stereometric tasks will provide a comprehensive understanding of computational component.
Keywords. Quadrilateral, deltoid, information learning technology, planimetry, stereometry.

У шкільному курсі геометрії, окрім основних її об'єктів, вивчають деякі похідні плоскі фігури, як-от: коло, різновиди трикутників, чотирикутників і правильних багатокутників. Теоретична частина кожної теми викладається науково обґрунтовано й методично виважено. Проте не секрет, що в теорії і практиці геометрії трапляються ще й такі фігури, з якими учні малознайомі або не знайомі зовсім. До них належить, зокрема, **дельтоїд** (ромбоїд). Крім того, за умов інтенсифікації навчання точних предметів прикладного характеру глибші знання про опуклий дельтоїд можуть бути корисні в конструюванні повітряних зміїв, планерів, інших літальних апаратів, плавальних суден, а також у сфері архітектури і дизайну – при створенні малюнків декоративної мозаїки. Тому дослідження властивостей і ознак, конструктивних особливостей цієї фігури є актуальними.

Про властивості паралелограма, прямокутника, трапеції, ромба і квадрата учні дізнаються у 8 класі в темі «Чотирикутники». Зазвичай у них виникає питання: чи всі види чотирикутників їм тепер відомі? Працюючи з додатковою методичною літературою, розв'язуючи задачі школярі мимоволі можуть зустрітися з дельтоїдом. Отже, саме цю планіметричну фігуру не зашкодить в урочний час розглянути докладніше.

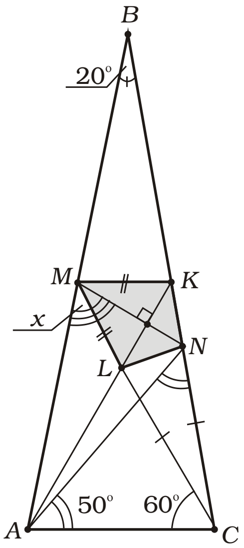
Означення: *Дельтоїд* — це опуклий чотирикутник, що складається з двох різних (у загальному випадку) рівнобедрених трикутників зі спільною основою, вершини яких лежать по різні боки від цієї основи [6].

Спочатку розглянемо дві задачі: планіметричну та стереометричну, в яких дельтоїд є результатом добудов і основоположною фігурою їх розв'язання.

Задача 1. У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) кут ABC дорівнює 20°. На стороні AB узято точку M так, що $\angle MCA = 60°$; на стороні CB — точку N так, що $\angle NAC = 50°$. Знайти міру кута NMA.

Задача специфічна, адже в її умові задається градусна міра кількох кутів, а у висновку вимагається знайти градусну міру ще деякого кута. Для якісного аналізу ситуації шляхом її унаочнення, рекомендується модель-зображення конструкції зі всіма елементами виконувати не лише з використанням циркуля та лінійки, але також — транспортира.

Нехай кут B у рівнобедреному трикутнику ABC справді дорівнює 20°, а точки M і N розташовуються на його бічних сторонах AB і CB відповідно так, що $\angle MCA = 60°$ і $\angle NAC = 50°$ (мал. 1). З'єднавши точки M і N відрізком, легко помітити, що $\angle NMA = \angle NMC + \angle CMA$, де $\angle CMA = 40°$ (адже $\angle BAC = 80°$). Тож задачу зведено до відшукання міри кута NMC.



Мал. 1

Виконаємо додаткові побудови: візьмемо на стороні BC точку K так, щоб $\angle KAC = 60°$, а відрізок MK був паралельним AC; точку $L = AK \cap CM$ з'єднаємо з точкою N.

Тепер уважно поглянемо на чотирикутник $MKNL$. Він візуально надто схожий на дельтоїд. Доведемо цей факт.

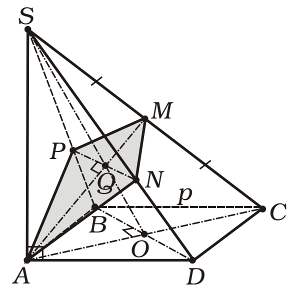
Трикутник ALC — рівносторонній, що очевидно, трикутник ANC – рівнобедрений, оскільки $\angle ANC = 180° - (80° + 50°) = 50°$. Отже, $AC = CL = CN$, а $\angle CLN = \angle CNL = (180° - 20°) : 2 = 80°$. Кут MLC — розгорнутий, тому $\angle MLN = 180° - 80° = 100°$. З іншого боку, прямі MK і AC паралельні, а KC — січна, отже й $\angle MKN = 100°$. До того ж, помічаємо, що $\angle KLN = \angle LKN = 100° - 60° = 40°$, оскільки трикутник MKL теж рівносторонній.

Таким чином, як з'ясувалося, в чотирикутнику $MLNK$ кути у протилежних вершинах K і L, а також прилеглі до них пари сторін MK і ML, NK і NL відповідно рівні, тому цей чотирикутник справді є дельтоїдом, що й було очевидячки зрозуміло з акуратно виконаного рисунка. Залишається лише кут при вершині M трикутника MKL розділити навпіл ($\angle NML = 60° : 2 = 30°$) і додати його градусну міру до градусної міри кута NML: $\angle NMA = \angle NMC + \angle CMA = 40° + 30° = 70°$. Задачу розв'язано.

Задача 2. Основою піраміди $SABCD$ є ромб $ABCD$ і $AC = a$, $BD = b$. Бічне ребро SA перпендикулярне площині основи й $SA : AC = 2\sqrt{2} : 1$. Через точку A і середину ребра SC проведено площину Σ, паралельну діагоналі BD.

1. Побудуйте переріз піраміди площиною Σ.
2. Обґрунтуйте форму фігури перерізу.
3. Знайдіть площу фігури перерізу.

Нехай $SABCD$ — задана піраміда (мал. 2). Площина перерізу Σ в умові задачі визначена двома точками (прямою AM) та її фіксованим розташуванням відносно прямої BD, а саме: $\Sigma \parallel BD$. Це означає, що для побудови перерізу (за ознакою паралельності прямої площині) найкраще площину Σ перезадати двома прямими, які перетинаються: однією з них буде пряма AM, а інша (p) повинна мати з AM спільну точку й бути паралельною прямій BD.



Мал. 2

Неважко уявити, що шуканий багатокутник перерізу розташовується «вище» основи піраміди $ABCD$. Причому, точки A і M — дві вершини цього багатокутника, а дві інші вершини (нехай це будуть точки P і N) належать бічним ребрам SB і SD. Отже, точку Q перетину прямих AM і p краще всього шукати у площині Λ трикутника SBD, тоді (за другою ознакою належності прямої площині) пряма p, паралельна BD, лежатиме у площині трикутника SBD. У перетині з ребрами SB і SD вона й висіче точки P і N.

Тож задача звелася до відшукання точки Q перетину прямої AM із площиною трикутника SBD. Це — **перша основна позиційна задача**. Її розв'язання завжди, у будь-яких ситуаціях реалізується на малюнку строго у три кроки:

1) проведемо через пряму AM площину-посередник Ω (SAC);
2) побудуємо лінію перетину SO площин Ω (SAC) і Λ (SBD);
3) зафіксуємо точку Q перетину прямих SO і AM.

Кожна з операцій не потребує додаткових пояснень — вони очевидні.

Зауважимо лише, що площину-посередник слід вибирати **вдало**, **розумно** так, щоб два наступні кроки цього алгоритму дій виконувалися на рисунку без ускладнень, просто і зрозуміло.

З'єднуємо послідовно точки A-P-M-N-A.

Переріз піраміди APMN побудовано.

Щоб з'ясувати форму фігури перерізу, уявимо собі, що піраміда стоїть на столі й ми її проєкціюємо на площину столу зверху.

Що ми побачимо?

Ромб $ABCD$ у натуральні величину, ребро SA, що виродилося в точку, і площину Ω (SAC) як площину симетрії піраміди. Пари трикутників SAB і SAD, які виродилися у відрізки, та SBC і SDC, що симетричні відносно площини Ω, **рівні**: $\Delta SAB = \Delta SAD$, $\Delta SBC = \Delta SDC$. Звідси: $\angle ASB = \angle ASD$ і $\angle BSC = \angle DSC$. До того ж, $SB = SD$, тобто трикутник SBD – рівнобедрений. У цьому трикутнику пряма $p \,||\, BD$ відсікатиме рівні відрізки: $\boldsymbol{SP = SN}$.

Тепер розглянемо інші пари **рівних** трикутників (за двома сторонами і кутом між ними):

($\Delta SAP = \Delta SAN$, бо SA — спільна,
$SP = SN$ і $\angle ASB = \angle ASD$) $\Rightarrow AP = AN$;
($\Delta SMP = \Delta SMN$, бо SM — спільна,
$SP = SN$ і $\angle BSC = \angle DSC$) $\Rightarrow MP = MN$.

Таким чином, чотирикутник ($APMN$), в якого дві пари суміжних сторін із різних боків від його діагоналі PN рівні, є дельтоїдом.

Форму фігури перерізу встановлено.

Дельтоїд має суть важливу властивість (див. нижче): кут між його діагоналями AP і AN дорівнює $90°$, що легко довести посилаючись на властивості рівнобедреного трикутника.

Тому **площу** дельтоїда можна обчислити за формулою $S = \frac{1}{2} AM \cdot PN$.

Як знайти довжину діагоналей дельтоїда?

Знову звертаємося до рисунка. На ньому видно, що MO — середня лінія трикутника SAC, а $\Delta SPN \sim \Delta SBD$. Але $AO = \frac{a}{2}$ і $SA = 2\sqrt{2}\,a$. Тому, по-перше, $MO = \frac{1}{2} SA = \sqrt{2} a$, а $AM = \sqrt{AO^2 + \quad ^2} = \frac{3}{2}$ (цього ж результату дійдемо взявши до уваги, що у прямокутному трикутнику SAC $AM = \frac{1}{2} SC$). І, по-друге, з подібності трикутників SPN і SBD матимемо: $\frac{PN}{BD} = \frac{SQ}{SO}$, звідки $PN = \frac{BD \cdot SQ}{SO} = \frac{2}{3} b$. Остаточно отримаємо: $S = \frac{1}{2} AM \cdot PN = \frac{ab}{2}$.

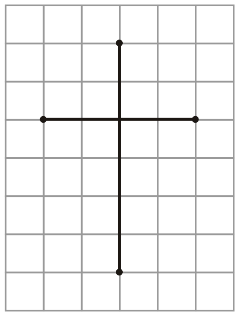
Площу фігури перерізу знайдено, а задачу розв'язано повністю.

Алгоритмічна схема аналітичного методу розв'язання

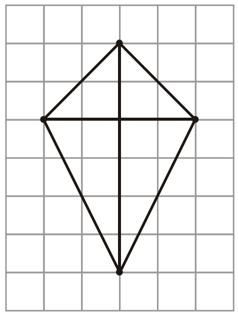
$$S = \frac{1}{2} AM \cdot PN \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} AM = \sqrt{AO^2 + MO^2} \leftrightarrow \begin{cases} AO = \dfrac{AC}{2} \leftrightarrow AC = a, \\ MO = \dfrac{SA}{2} \leftrightarrow SA = 2\sqrt{2} AC \leftrightarrow AC = a; \end{cases} \\ PN = \dfrac{BD \cdot SQ}{SO} \, (\Delta SPN \sim \Delta SBD) \leftrightarrow \begin{cases} BD = b, \\ SQ = \dfrac{2}{3} SO \; (Q = SO \cap AM). \end{cases} \end{cases}$$

Зображення дельтоїда рекомендується розпочинати з побудови двох перпендикулярних відрізків (**діагоналей**). На вертикальному відрізку, який приймемо більшим в n раз за горизонтальний, візьмемо деяку точку й відкладемо від неї вверх і вниз два **різні** за довжиною відрізки. Від цієї ж точки вліво і вправо відкладемо **рівні** відрізки (мал. 3). Далі сполучаємо кінці відрізків й отримуємо дельтоїд (мал. 4). Цей метод побудови є зручним для зображень у зошитах та для розв'язування задач.



Мал. 3



Мал. 4

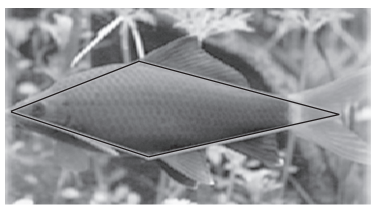
Усім зрозуміло, що можливості сучасних інформаційних технологій допомагають докорінно змінити освітній процес, в якому учень як «споживач знань» набуває статусу активного дослідника — «відкривача знань».

Програма GeoGebra є інтерактивним творчим середовищем, заснованим на принципах динамічної геометрії та комп'ютерної алгебри й призначена для створення інтерактивних креслень (моделей) з математики, що поєднують в собі конструювання, моделювання, динамічне варіювання та експеримент.

У побудові бінарних зображень комп'ютерна програма допомагає чітко уявляти і встановлювати окремі елементи фігури й конструкцію в цілому.

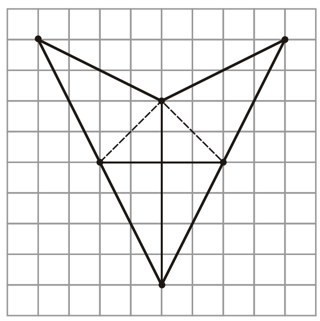
До того ж, учням не зашкодить проілюструвати картинками життєві ситуації, на яких зустрічаються уявні дельтоподібні форми (мал. 5 — 7).

Мал. 5



Мал. 6

Мал. 7



Мал. 8

Варто знати, що як виняток дельтоїд може бути неопуклим (мал. 8). У цій ситуації вершини двох рівнобедрених трикутників розташовуються з одного боку від їх спільної основи. Побудову неопуклого дельтоїда можна виконати аналогічно до опуклого, продовживши, приміром, дві суміжні сторони та з'єднавши їх із відповідною вершиною опуклого дельтоїда. Всі кути опуклого дельтоїда менші за розгорнутий кут, а один із кутів неопуклого дельтоїда — більший за розгорнутий [1].

Відрізок, який сполучає вершини двох кутів різної градусної міри називається *головною діагоналлю* дельтоїда. Відрізок, який з'єднує вершини двох рівних кутів — його *неголовна діагональ*.

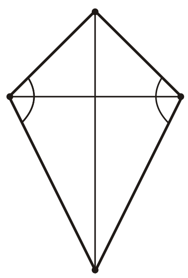
Властивості дельтоїда прямо випливають з його означення (мал. 9 — 15):

1. У дельтоїда дві пари сусідніх сторін рівні.

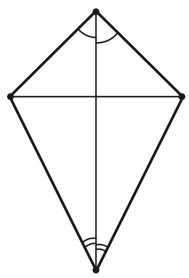
2. Дельтоїд симетричний відносно однієї зі своїх діагоналей.

3. Кути дельтоїда між сторонами, які мають різну довжину, рівні.

4. Головна діагональ дельтоїда є бісектрисою протилежних кутів.



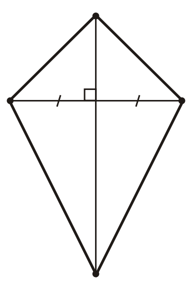
Мал. 9



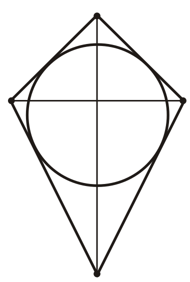
Мал. 10

5. Діагоналі дельтоїда перпендикулярні, причому одна діагональ ділить іншу на дві рівні частини.

6. У будь-який опуклий дельтоїд можна вписати коло і лише одне.



Мал. 11

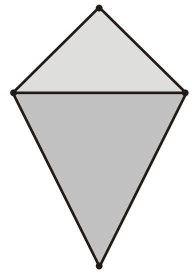


Мал. 12

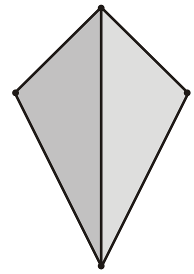
7. Неголовна діагональ ділить дельтоїд на два рівнобедрених трикутники.

8. Головна діагональ ділить дельтоїд на два рівні трикутника.

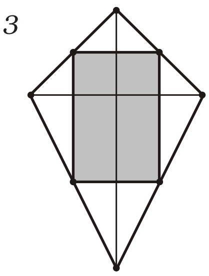
9. Середні лінії дельтоїда утворюють прямокутник, периметр якого дорівнює сумі діагоналей даного дельтоїда (випливає із властивості середньої лінії трикутника).



Мал. 13



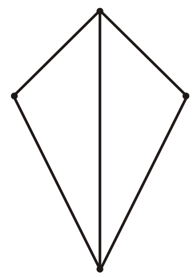
Мал. 14



Мал. 15

Зауважимо, що деякі із властивостей дельтоїда легко переформулювати в його ***ознаки***:

1. Якщо у чотирикутника є хоча б одна вісь симетрії, яка вміщує діагональ, то цей чотирикутник — дельтоїд (мал. 16).



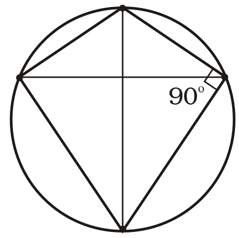
Мал. 16

2. Якщо чотирикутник складається з двох рівнобедрених трикутників зі спільною основою, то цей чотирикутник — дельтоїд.

3. Якщо у чотирикутника діагоналі взаємно перпендикулярні і хоча б одна з них ділить іншу навпіл, то такий чотирикутник — дельтоїд.

Частинні випадки дельтоїда:

1. Якщо кут між нерівними сторонами дельтоїда дорівнює 90°, то навколо нього можна описати коло (мал. 17).



Мал. 17

2. Дельтоїд, протилежні сторони якого рівні, є ромбом.

3. Дельтоїд, діагоналі якого рівні, є квадратом.

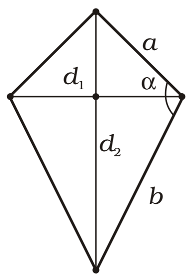
Формули для знаходження ***площі*** дельтоїда (мал. 18 — 20):

1. Площа дельтоїда рівна півдобутку його діагоналей: $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$.

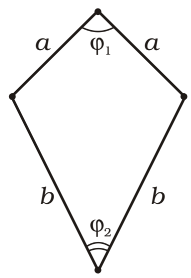
2. Якщо a і b довжини сторін дельтоїда, а кут між ними дорівнює α, то площу цієї фігури можна знайти за формулою: $S = a \cdot b \cdot \sin \alpha$.

3. $S = a^2 \cdot \sin \phi_1 + b^2 \cdot \sin \phi_2$, де a і b — нерівні сторони дельтоїда, ϕ_1 — кут між сторонами рівними a, ϕ_2 — кут між сторонами рівними b.

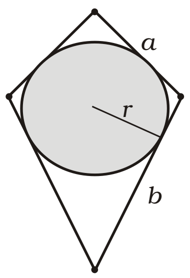
4. $S = (a + b) \cdot r$, де a і b — різні сторони дельтоїда, r — радіус уписаного кола.



Мал. 18

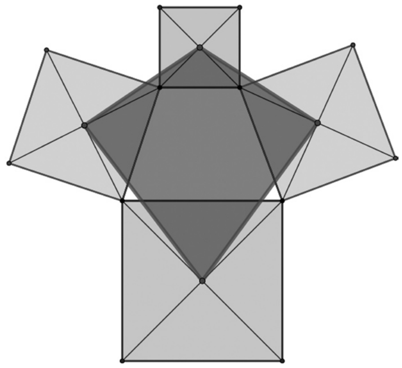


Мал. 19



Мал. 20

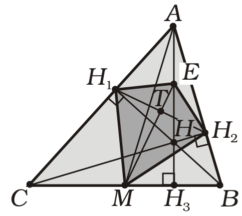
Учням можна запропонувати довести цікавий факт: якщо на сторонах рівнобічної трапеції побудувати квадрати, то їх центри утворюють чотирикутник, діагоналі якого взаємно перпендикулярні, а суміжні сторони попарно рівні. Утворений чотирикутник — опуклий дельтоїд (мал. 21).



Мал. 21

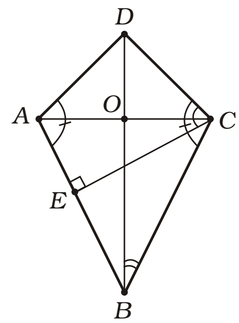
Для самостійного розв'язання ми пропонуємо учням такий перелік задач:

Задача 1. Довести, що в трикутнику ABC точки M і E (E — точка Ейлера: $AE = EH$) належать серединному перпендикуляру до відрізка H_1H_2 (мал. 22).



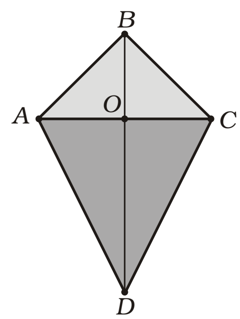
Мал. 22

Задача 2. Чотирикутник $ABCD$ — дельтоїд, $CE \perp AB$, $AD \perp DC$, $\angle BAD = 100°$, $\angle ECD = 80°$. Знайти $\angle DBC$ (мал. 23).



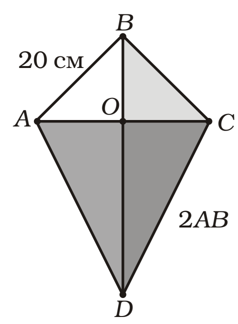
Мал. 23

Задача 3. Знайти периметр дельтоїда $ABCD$, якщо відомо, що периметр трикутника ABC дорівнює 30 см, а діагональ дельтоїда $AC = 18$ см. Відрізок $OD = 12$ см (мал. 24).



Мал. 24

Задача 4. Знайти площу дельтоїда $ABCD$, якщо сторона AB дорівнює 20 см, сторона $CD = 2\ AB$, $P_{\Delta ABC} = 70$ см, $P_{\Delta BCD} = 110$ см (мал. 25).



Мал. 25

Задача 5. Площа дельтоїда дорівнює 28 см². Знайти всі сторони, якщо одна сторона на 3 см менша за протилежну.

Задача 6. Знайти всі кути дельтоїда, якщо один з них дорівнює 20°, а інший — більше сусіднього на 50°.

Задача 7. Суміжні сторони дельтоїда відносяться як 2 : 3. Знайти найменшу сторону, якщо периметр дельтоїда дорівнює 40 см.

Задача 8. Знайти площу дельтоїда, якщо сума двох його сусідніх сторін дорівнює 30 см, а радіус описаного кола — 8 см.

Змістовно задачі можна урізноманітнити як за складністю, так і додавши конструктивізму. Для старших класів, зокрема, — з розділу «Стереометрія».

Отже, розширення блоку «Чотирикутники» у процесі навчання геометрії, виокремленням окремим уроком теми «Дельтоїд», дозволить удосконалити з розумінням як побудовну, так і обчислювальну складові багатьох задач.

ЛІТЕРАТУРА

1. Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф., Кадомцев С. Б. и др. Геометрия 7 — 9 кл.: учебн. для общеобразоват. организаций. — М.: Просвещение, 2013. — 383 с.

2. Бутузов В. Ф., Дубровский В. Н., Кадомцев С. Б. Геометрия. 9 класс [Электронный ресурс]: программный продукт «1С» — учеб.электрон. изд. — ООО «1С-Паблишинг», 2009. — 1 электорн. опт. диск (CD-ROM).

3. Жалдак М. І. Комп'ютер на уроках геометрії. — К.: РННЦ «ДІНІТ», 2004. — 154 с.

4. Ленчук І. Г. Конструктивна стереометрія в задачах: Навчальний посібник для студентів математичних спеціальностей ВПНЗ / І. Г. Ленчук. — Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2010. — 368 с.

5. Математика для школы [Электронный ресурс] — Режим доступа: http://www.math4school.ru/chetyrehugolniki.html.

6. Четырехугольники [Электронный ресурс]: учебный центр «Резольвента» / Режим доступа: http://www.resolventa.ru/.

7. Шноль Д., Сгибнев А., Нетрусова Н. Система открытых задач по геометрии: 8 класс. — М.: Чистые пруды, 2009. — 32 с.: ил. — (Библиотека «Первого сентября», серия «Математика». Вып. 29).

РАЦІОНАЛЬНІ ТА ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА НЕРІВНОСТІ

(ЗАВДАННЯ З ДВОМА ПАРАМЕТРАМИ)

Роман СОБКОВИЧ — доцент ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника», кандидат фізико-математичних наук, м. Івано-Франківськ;

Наталія КУЛЬЧИЦЬКА — доцент ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника», кандидат педагогічних наук, м. Івано-Франківськ

Протягом усіх років навчання в загальноосвітній школі учні ознайомлюються з усе новими видами рівнянь та нерівностей і вчаться їх розв'язувати. Уже в початковій школі та в 5 — 6 класах учні розв'язують найпростіші лінійні рівняння і задачі на складання рівнянь. Основний спосіб розв'язування ґрунтується на використанні залежностей між компонентами і результатами арифметичних дій, а в 6 класі рівняння розв'язуються перенесенням членів з однієї частини в другу. У 7 класі в курсі алгебри основної школи вводять означення лінійного рівняння з одним невідомим і досліджують питання кількості його коренів, розв'язують текстові задачі за допомогою лінійних рівнянь. Далі такі рівняння розв'язують у зв'язку з вивченням тотожних перетворень цілих виразів і їх застосуванням. При множенні одночлена на многочлен і розкладанні многочленів на множники відбувається ознайомлення з першими неповними квадратними рівняннями. Учні розв'язують також рівняння, до складу яких входять дроби, знаменники яких — числа. Після перетворення їх зводять до лінійних рівнянь. Систематичне вивчення квадратних рівнянь передбачене у 8 класі. Далі розв'язують дробові раціональні рівняння, які зводяться до квадратних. У 9 класі вивчають біквадратні рівняння та рівняння, що зводяться до квадратних. Поглиблене вивчення математики передбачає вивчення