УДК 514.115:744.43:378.147
Ленчук Іван Григорович
Доктор педагогічних наук, професор, професор кафедри алгебри та геометрії
Житомирський державний університет імені Івана Франка, м. Житомир
lench456@gmail.com
Працьовитий Микола Вікторович
Доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики,
декан фізико-математичного факультету
Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, м. Київ
prats4444@gmail.com

ПОВОРОТ НАВКОЛО ПРЯМОЇ В МЕТРИЧНІЙ СТЕРЕОМЕТРІЇ

Анотація. У статті обґрунтовано нагальну потребу вивчення просторового перетворення «Поворот навколо прямої», що має увійти в курс евклідової стереометрії обов’язковою темою. Розкрито природу, уявлювану операційну сутність перетворення. Конкретними прикладами продемонстровано значимість перетворення у справі геометризації й унаочнення традиційних задач на обчислення в конструктивній стереометрії. Вирізнено графічний та графоаналітичний методи їх розв’язання. Порівнюються традиційні прийоми дій у пошуку розв’язку і прийом, в якому використовується перетворення повороту навколо прямої нульового рівня. У ланцюжку обчислень на шляху до результату прослідковується чіткий системний підхід – аналітичний метод міркувань. Даються корисні методичні поради.
Ключові слова: перетворення повороту; геометризація; наочність; конструктивізм.

Ленчук И.Г., Працевитый Н.В. Поворот вокруг прямой в метрической стереометрии.
Аннотация. В статье обосновано насущную необходимость изучения пространственного преобразования «Поворот вокруг прямой», что должно войти в курс евклидовой стереометрии обязательной темой. Раскрыто природу, воображаемую операционную сущность преобразования. Конкретными примерами продемонстрировано значимость преобразования в деле геометризации и наглядного иллюстрирования традиционных задач на вычисление в конструктивной стереометрии. Выделено графический и графоаналитический методы их решения. Сравниваются традиционные приёмы действий в поиске решения и приём, в котором используется преобразование поворота вокруг прямой нулевого уровня. В цепочке вычислений на пути к результату прослеживается чёткий системный подход – аналитический метод мышления. Даются полезные методические советы.
Ключевые слова: преобразование поворота, геометризация, наглядность, конструктивизм.

Lenchuk I.G., Pratsiovytyi N.V.. Rotate around a straight line in metric stereometry.
Annotation. The article substantiates the urgent need to study the spatial transformation "Turn around a straight line", which should be included in the course of Euclidean stereometry as a mandatory topic. The nature, the imaginary operational essence of transformation is revealed. Specific examples have demonstrated the significance of the transformation in the matter of geometrization and visual illustration of traditional computational problems in constructive stereometry. Selected graphical and graphical analytical methods for solving them. The traditional methods of actions in the search for solutions and methods are compared, in which the transformation of rotation around the straight line of the zero level is used. In the chain of calculations on the way to the result, there is a clear systematic approach - the analytical method of thinking. Provides useful tips.
Keywords: transformation of rotation, geometrization, visualization, constructivism.

Постановка проблеми. Геометрія, як наука, вміщує **дві *великі загальні ідеї***. Мова йде, по-перше, про її розбудову *дедуктивним методом* і на *аксіоматичній основі* та, по-друге, про ***геометричні перетворення*** *і теоретико-групове* обґрунтування геометрії.

За Ф. Клейном, «*Геометрія є наука, яка вивчає властивості фігур, що не змінюються при перетвореннях деякої групи перетворень*».

Перетворення фігур в евклідовій геометрії не лише розділ дисципліни, поцінований у творчому особистісному розвитку учня, це – ***інструмент***, ***засіб*** розбудови науки, ефективний педагогічний і методичний ***апарат*** виваженого виконання уявлюваних і зображувальних операцій з її фігурами.

Аналіз основних досліджень. У планіметрії перетворення повороту задають центром, градусною мірою кута і напрямом (кутовим вектором). Проте у просторі через будь-яку точку фігури можна провести безліч (в’язку) площин, через що зникає визначеність перетворення – кожна із площин даватиме лише їй притаманний результат дії. Однак, відкриваючи дверці шафи чи перегортаючи сторінки зошита, ми всі точки площини водночас переміщуємо в одному й тому напрямі на один і той самий кут. Важливо, що тут замість центра повороту (точки) з'являється вісь повороту (пряма). Тому таке перетворення у просторі кваліфікують як *поворот навколо прямої*.

Сьогодні навчальні заклади перетворенням геометричних фігур приділяють незначну увагу. Учні та майбутні вчителі математики не завжди чітко уявляють природу і походження, сутність та призначення перетворень, не володіють їх властивостями, нехтують застосуванням у вирішенні різнохарактерних пропозицій, зокрема, конструктивними методами, через що не набувають життєво важливих, тісно пов'язаних між собою особистісних якостей: *просторового уявлення, застосування в реальних речах і логічного мислення*.

Ще в 40-х роках минулого століття проф. Четверухін М.Ф. наголошував: «Недоліком сучасного викладання є *надлишкова штамповка обчислювальних задач*, переважання у виборі таких задач, в яких розв'язання зводиться до підстановки у завчену формулу числових даних і до підрахунку результату. Схожі задачі мало дають учням у розумінні їх геометричного розвитку. Тож ці задачі, швидше за все, варто вважати арифметичними. *Отже, в області обчислювальної геометрії потрібно переглянути питання про підбір задач із тим, щоб підсилити їх геометричний зміст*» [4, с. 11].

Метою і **завданням** *статті* є донести до читача сутність просторового перетворення «Поворот навколо прямої», продемонструвати його місце та незамінне значення у методиці навчання стереометрії.

Виклад основного матеріалу. Поворот навколо прямої слід задавати *віссю*, *кутом* і тим чи іншим *напрямом* повороту (за годинниковою стрілкою чи проти неї). При цьому кожна окремо взята точка A заданої фігури F буде описувати дугу кола у своїй власній площині Σ, яка перпендикулярна до осі i (рис. 1). На вісь повороту накладається додаткова умова: вона має бути певним чином зорієнтована у просторі (наприклад так, щоб усякий сторонній спостерігач бачив вісь проекціювальною на задану площину Σ). Отже, усяка точка фігури має такі характеристичні елементи перетворення: 1) Σ – площина обертання; 2) $O = \Sigma \cap i$ – центр повороту; 3) $OA = OA' = R$ – радіус обертання.

Означення. *Поворотом навколо прямої* у просторі будемо називати таке перетворення фігури F у фігуру F′, при якому кожна точка фігури F описує у своїй власній площині, перпендикулярній до осі обертання, зорієнтовану дугу кола з однією і тією ж мірою центрального кута.

Таким чином, насправді точки фігури F переміщуються у просторі за правилами вже відомого із планіметрії повороту навколо центра на заданий кут.

Теорема. *Поворот навколо прямої у просторі **є рух**.*

Дано: Вісь повороту i; кут повороту φ; відрізок AB;

Σ – площина обертання точки A, а Σ_1 – точки B; $i \perp (\Sigma, \Sigma_1)$;

$O = \Sigma \cap i$; $O_1 = \Sigma_1 \cap i$ – центри обертання точок A і B відповідно.

$A'B'$ – результат повороту відрізка AB на кут φ навколо осі i.

Довести: $A'B' = AB$.

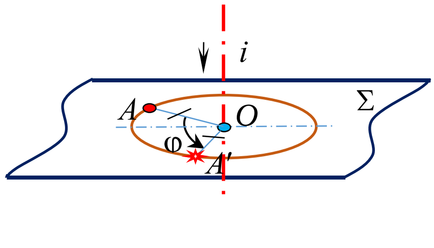

Рис. 1

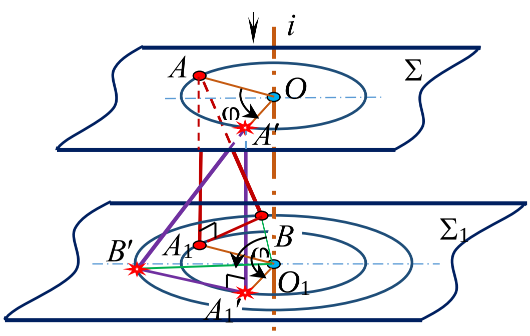

Рис. 2

Доведення. Нехай даний відрізок AB займає загальне розташування відносно площин обертання Σ і Σ_1 й мимобіжний із віссю обертання i (рис. 2).

Унаслідок повороту на кут φ точка A у площині Σ перейде в точку A', а точка B у площині Σ_1 – у точку B'. Щоб довести, що відрізки AB і $A'B'$ рівні, сумістимо площини Σ й Σ_1 паралельним перенесенням площини Σ на вектор $\overrightarrow{OO_1}$. Таке паралельне перенесення можна розглядати як ортогональне проекціювання однієї площини на іншу. При цьому точки A і A' займуть місце своїх ортогональних проекцій A_1 і A_1' відповідно. Отже, отримаємо два прямокутні трикутники AA_1B та $A'A_1'B'$. У першого із трикутників $\angle A_1 = 90°$ і AB є його гіпотенузою, а у другого $\angle A_1' = 90°$ й $A'B'$ – його гіпотенуза. До того ж, у цих трикутників катети AA_1 і $A'A_1'$ рівні, адже відомо, що паралельне перенесення зсовує точки уздовж паралельних прямих на одну й ту саму відстань (прямолінійний вектор). Тут: $A \to A_1$, $A' \to A_1'$. У свою чергу, поворот точок A_1 і B навколо спільного центра O_1 по концентричним колам на кут φ у площині Σ_1 засвідчує, що відрізки A_1B і $A_1'B'$ також рівні, оскільки відомо, що площинний поворот є рухом і він зберігає відстані між точками.

Отже, отримаємо, що $\Delta AA_1B = \Delta A'A_1'B'$. Звідси $AB = A'B'$. Теорему доведено.

Наслідок. *Поворот навколо прямої на кут* 180° *є перетворенням осьової симетрії у просторі* (порівняйте із площинним поворотом на кут 180°).

Справді, у повороті навколо прямої *і біжуча* точка X відрізка AB описує дугу кола, градусна міра якої φ = 180°. При цьому площина обертання точки перетинає вісь i в центрі кола. Отже, точки X і X' – діаметрально протилежні відносно точки перетину осі із площиною обертання, а $X' \in A'B'$.

Зараз ми розглянули просторове перетворення, яке інколи ще називають *обертанням навколо проекціювальної прямої*, оскільки вісь обертання i перпендикулярна до площини зображень (проекцій) Σ.

У стереометрії, окрім цього, надто часто виникає потреба скористатися обертанням навколо *прямої рівня* або, навіть, *нульового рівня* – для ***суміщення*** плоскої фігури із картинною площиною. **В аксонометрії** чимало геометричних побудов, як-от: проведення взаємно перпендикулярних (чи під певним кутом) ліній, ділення кутів, побудова плоских фігур за заданими розмірами і т. ін., можна виконувати лише тоді, коли ці фігури проекціюються на площину зображень без спотворення. Одним із прийомів (способів), що використовуються в таких ситуаціях і які дають можливість розв'язувати схожі задачі, є суміщення плоскої фігури із картинною площиною, на якій виконано рисунок, з наступним приведенням суміщеної площини у вихідне розташування [1, с. 149].

Перш ніж перейти до задач метричного характеру, які розв'язують цим методом, слід пригадати одну з вагомих властивостей паралельних проекцій, а саме: *Паралельною проекцією* (*зображенням*) *трикутника загального розташування є будь-який трикутник* [2, с. 56-57].

До речі, у моделюванні фігур стереометрії важливо дотримуватися всіх без винятку властивостей паралельного проекціювання, а лінійні розміри проекції із тим чи іншим коефіцієнтом пропорційності збільшувати чи зменшувати, піддаючи зображення площинному перетворенню подібності.

Таким чином, *усякий трикутник ABC, накреслений на картинній площині, можна вважати рисунковою моделлю чи то правильного, чи рівнобедреного, чи прямокутного, чи якого-небудь іншого* (різностороннього) *трикутника.*

Цей безспірний *факт – вихідний, базовий* у методології зображень плоских фігур загального розташування. Він допускає та, поряд із цим, чітко обмежує свавілля в побудовах: лише *трійку неколінеарних точок* усякої плоскої фігури можна зображати на картинній площині *трійкою неколінеарних точок* за вибором виконавця проекційного рисунка.

Як н а с л і д о к , із елементарної, однак вельми вагомої властивості паралельних проекцій випливає, що *який-завгодно паралелограм на картинній площині можна приймати за зображення паралелограма будь-якої форми*, що легко обґрунтовується. Отож бо, *всякий паралелограм на площині можна вважати зображенням або прямокутника, або ромба, або квадрата, або будь-якого іншого паралелограма.*

Не вдаючись у деталі, до цього додамо таке (див. [2], ч. II, р. II, §1).

У метричній геометрії розрізняють два поняття: «метрично визначене» і «метрично розмірне» зображення. Щоб зображення плоскої фігури було **метрично визначеним**, на нього потрібно затратити *два* метричні параметри, а на **метрично розмірне** – *три*. Наприклад, якщо зображення ABC трикутника $A'B'C'$ доповнити відношенням сторін $A'B'$ і $B'C'$ й кутом між ними, то цієї інформації цілком достатньо для встановлення форми оригінального трикутника. Третім параметром може бути довжина однієї із сторін трикутника ($A'C' = p$ (см)). За останніх умов із зображення можна отримати повну інформацію про трикутник, у т. ч. лінійні розміри будь-якого з його елементів.

Задача 1. *На проекційному кресленні дано зображення трикутника ABC, причому точка P є зображенням центра вписаного у трикутник кола. Потрібно знайти істинну форму оригінального трикутника.*

1-*й* *спосіб розв'язання*. Нехай трикутник ABC (рис. 3) зображає деякий трикутник $A'B'C'$, а довільна точка P усередині області її існування ([4], с. 99-101) є зображенням центра кола, вписаного у трикутник $A'B'C'$. В оригіналі – точкою перетину бісектрис. Далі:

1) у площині трикутника $\Sigma'(A'B'C')$ виконаємо з деяким коефіцієнтом k (загалом нам невідомім) перетворення подібності так, щоб $A'B' = AB$;

2) рухом (добутком кількох рухів) трикутник $A'B'C'$ перемістимо у просторі так, що його сторона $A'B'$ «лягла» на сторону AB заданого трикутника-зображення ABC;

3) пряму $AB \equiv A'B'$ приймемо за вісь обертання.

Оскільки AA_0, BB_0 і CC_0 зображають усі три бісектриси трикутника, то, з урахуванням відповідної властивості бісектриси ([3], §11, п. 106), можемо записати: $\frac{CA_0}{A_0B} = \frac{C'A'_0}{A'_0B'} = \frac{b'}{c'}$ і $\frac{AB_0}{B_0C} = \frac{A'B'_0}{B'_0C'} = \frac{c'}{a'}$ (∗). Проведемо через точку C пряму $CB_1 \parallel B_0B$ і пряму $CA_1 \parallel A_0A$. Тоді маємо: $\Delta AA_0B \backsim \Delta A_1CB$ і $\Delta BB_0A \backsim \Delta B_1CA$ (за двома кутами). Отже, $\frac{CA_0}{A_0B} = \frac{A_1A}{AB}$ і $\frac{AB_0}{B_0C} = \frac{AB}{BB_1}$ (**).

Порівнюючи рівності (∗) і (**), відповідно дістанемо: $\frac{CA_0}{A_0B} = \frac{A_1A}{AB} = \frac{b'}{c'}$ і $\frac{AB_0}{B_0C} = \frac{AB}{BB_1} = \frac{c'}{a'}$.

Беручи до уваги, що $AB = A'B' = c'$, з останніх відношень отримаємо: $AA_1 = b'$ і $BB_1 = a'$.

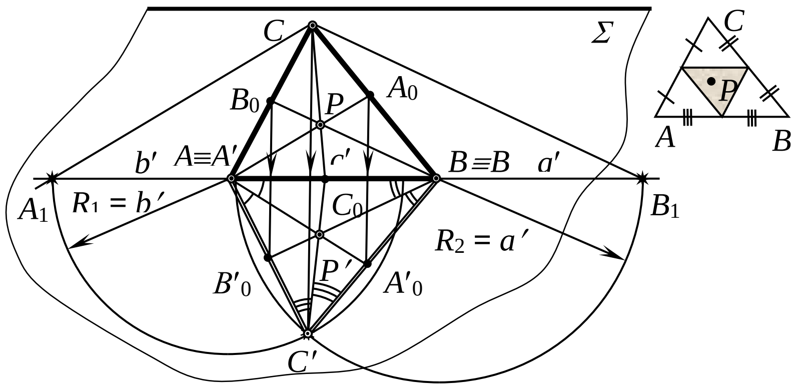

Рис. 3

Таким чином, усі три сторони оригінального трикутника c', b' і a' на кресленні вже побудовані, після чого й трикутник $A'B'C'$ легко будується (див. рис. 3).

2-*й* *спосіб розв'язання*. Легко бачити, що точка P, як зображення перетину бісектрис трикутника-оригіналу $A'B'C'$ (рис. 4), разом із трикутником-зображенням ABC цілком метрично визначають площину Σ **.** Це твердження істинне хоча б тому, що саме точка P в її геометричній суті встановлює на кресленні відношення справжніх довжин трьох визначальних (попарно непаралельних) відрізків a', b' і c'. При цьому відношення двох відрізків еквівалентне задаванню одного параметра, а відношення трьох відрізків – задаванню двох метричних параметрів.

Справді, за умови, що $AB \equiv A'B' = c'$ (див. рис. 4, *б*), $\dfrac{CA_0}{A_0B} = \dfrac{C'A'_0}{A'_0B'} = \dfrac{b'}{c'}$ і $\dfrac{AB_0}{B_0C} = \dfrac{A'B'_0}{B'_0C'} = \dfrac{c'}{a'}$. З цих пропорцій невідомі відрізки a' і b' (дві інші сторони трикутника-оригіналу) будуються як четверті пропорційні до трьох заданих відрізків, а саме: $a' = \dfrac{B_0C \cdot c'}{AB_0}$; $b' = \dfrac{CA_0 \cdot c'}{A_0B}$ (рис. 4, *а*). За трьома ж сторонами a', b' і c', як у попередньому випадку, трикутник побудувати нескладно. Отже, трикутник $A'B'C'$ справді встановлює форму оригінального трикутника з точністю до подібності (рис. 4, *б*).

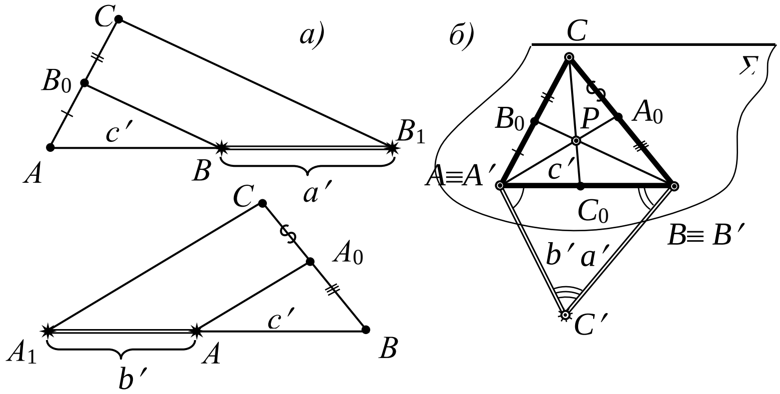

Рис. 4

3-*й* *спосіб розв'язання*. У шкільному курсі геометрії є строго доведеним факт, згідно з яким бісектриси внутрішнього і зовнішнього кутів трикутника, проведені з однієї і тієї ж вершини, утворюють між собою прямий кут. Крім цього, у підручнику обґрунтовується важливе твердження, яке узагальнено звучить так: «Бісектриса зовнішнього кута трикутника розділяє його протилежну сторону зовнішнім чином у відношенні, в якому бісектриса відповідного внутрішнього кута ділить цю ж саму сторону трикутника внутрішнім чином» ([2], §11, п. 106, задачі 46, 47).

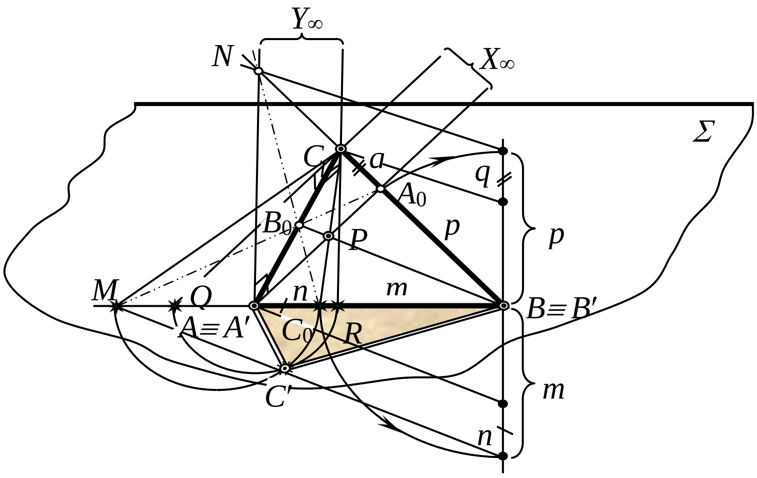

Рис. 5

Два сукупно взяті твердження у нашому випадку означають, що коли відрізок CC_0 на картинній площині (рис. 5) зображає бісектрису внутрішнього кута C' ($\angle ACB$) трикутника $A'B'C'$, а відрізок CM – бісектрису відповідного зовнішнього кута ($\angle ACN$), то кут MCC_0 в оригіналі є прямим. Аналогічно, якщо відрізок AA_0 зображає бісектрису внутрішнього кута A' ($\angle CAB$) трикутника $A'B'C'$, а відрізок AN – бісектрису зовнішнього кута трикутника з тією ж вершиною ($\angle CAM$), то кут NAA_0 в оригіналі теж прямий. Якщо на зображенні трикутника через точку C провести прямі $CQ \parallel A_0A$ і $CR \parallel NA$, то кут QCR в оригіналі також буде рівний 90°, що випливає з вище означених співвідношень та задачі 17 у тому ж підручнику ([3], §4).

Отже, із шуканої точки C' два відрізки MC_0 і QR на прямій $AB \equiv A'B'$ видно під прямим кутом. Тому залишається лише на відрізках MC_0 і QR, як на діаметрах, побудувати два півкола і зафіксувати їх точку перетину C'. Трикутник $A'B'C'$ відтворює на кресленні справжню форму трикутника ABC.

Зауважимо, що зараз побудову зображення бісектриси CM здійснено шляхом поділу відрізка AB зовнішнім чином у відношенні $\frac{BM}{MA} = \frac{BC_0}{C_0A}$. Так само, для відшукання зображення бісектриси AN, довелося відрізок BC поділити точкою N зовнішнім чином у відношенні $\frac{BN}{NC} = \frac{BA_0}{A_0C}$. Тут, для зручності, було введено позначення: $BC_0 = m$, $C_0A = n$ і $BA_0 = p$, $A_0C = q$, що можна спостерігати візуально на рисунку.

Пропонуємо більш досвідченому читачеві (студенту чи вчителю-математику, який має фахову підготовку із проективної геометрії) самостійно інтерпретувати в поясненнях цей останній спосіб, посилаючись до гармонійних властивостей повних чотирикутників CA_0PB_0 і AC_0PB_0 (див. штрих-пунктирні тонкі лінії із двома точками).

Такі, а також схожі до них вправи добре сприяють розвитку геометричної культури учня, його глибокій і всебічній фаховій підготовці із предмету.

Сьогодні в навчальній стереометрії побудови об'єктивно не є пріоритетними, а тільки допоміжними у процесі розв'язування переважної більшості задач на обчислення чи доведення, зокрема – на поверхні та об'єми багатогранників і круглих тіл. Креслення-картини лише супроводжують змістовно вартісні задачі на відшукання градусної міри кута, довжини відрізка та, деінде, істинної форми і площі плоскої фігури, в тому числі й там, де фігурують перерізи стереометричних тіл площинами, відносне розташування яких у просторі, в кожному окремому випадку, чітко регламентується умовою.

Звернемося до показової, повчальної в цьому сенсі задачі на обчислення.

Задача 2. *Правильна трикутна піраміда, бічне ребро якої у півтора рази більше ребра основи, перетнута площиною. Фігурою перерізу є квадрат. Знайдіть відношення об'ємів багатогранників, на які розбиває піраміду переріз.*

Зараз схема шляху розв'язання задачі строго розчленовуються на два етапи – ***графічний*** і ***обчислювальний***. Від того, наскільки ефективно, вдало (правильно і наочно) впораємося з першим етапом, залежить виразність міркувань і певність успіху в кінцевих обчисленнях.

Отже, щоб досягти результату не зашкодить мати хороші уявлення та стабільні навички в реалізації графічними методами метричних задач на проекційних рисунках просторових фігур, оскільки, згідно з умовою, зображення піраміди $SABC$ (рис. 6) метрично визначене – на нього витрачено рівно п'ять метричних параметрів: 1) $A'B' = B'C'$; 2) $B'C' = A'C'$; 3) $S'A' = S'B'$; 4) $S'B' = S'C'$; 5) $S'A' = 1{,}5A'B'$ [4, §34].

На початку, за звичних шкільних обставин, обов'язково потрібно було б грамотно провести ***аналіз*** задачі через такі, приміром, розмірковування. Осмислюючи в думці умову, констатуємо, що правильна трикутна піраміда перетинається заданою площиною Σ і фігурою перерізу є квадрат. Оскільки піраміда має чотири грані, а квадрат – чотири сторони, то площина Σ гарантовано перетинає кожну грань і перерізом є замкнена плоска ламана, складена із чотирьох взаємно перпендикулярних відрізків однієї і тієї ж довжини. Розглянемо на допоміжному рисунку (чи в уявленнях), виконаному нашвидку «від руки», дві будь-які грані піраміди. Нехай, для визначеності, ними будуть грані SAB і ABC. Припустимо, що саме вони містять у собі одну пару (KL і MN) протилежних сторін квадрата $KLMN$. Зрозуміло, що в такій ситуації Σ паралельна ребру AB, яке є спільним ребром обраних граней. Отже, тут $KL \parallel AB$ і $MN \parallel AB$. Аналогічно, дві інші грані (SAC і SBC) площина перерізу перетинає паралельно їх спільному ребру SC і, як результат, матимемо, що: $LM \parallel SC$ і $KN \parallel SC$.

У послідовності рисункових дій учитель на дошці (учень у зошиті) мав би, по суті справи, доповнити *креслення-картину* піраміди *фігурою перерізу* орієнтовно за таким сценарієм: 1). Вибираємо на SA ***довільну*** точку K і проводимо через неї пряму, паралельну AB, до перетину з ребром SB у точці L. 2). Через точки K і L проводимо прямі, паралельні SC, і фіксуємо їх точки N і M перетину з ребрами AC і BC відповідно. 3). З'єднуємо точки M і N у грані ABC відрізком прямої. Уявляємо собі, що $KLMN$ – шуканий квадрат, зображений паралелограмом. Далі виконуємо зумовлені обчислення.

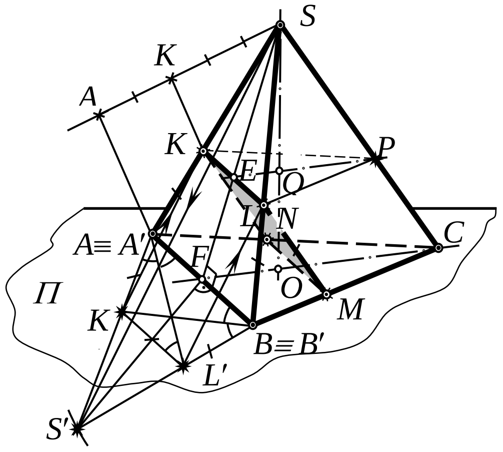

Рис. 6

Такою є загальноприйнята, звична послідовність кроків у роботі з моделлю піраміди на заняттях зі стереометрії. Все ж мислячий учень може висловити сумнів щодо побудов якраз у такому вигляді, оскільки *точка K вибиралася на ребрі SA будь-де*, що дезорієнтує його у вирішенні питання **однозначності** перерізу піраміди площиною Σ . Тому, враховуючи метричні властивості повного зображення, ми можемо вже відомим *методом суміщення* чітко зафіксувати кардинальну точку K, а отже, й квадрат $KLMN$. Такі проекційні рисунки гарантовано забезпечують безкомпромісність у пошуку побудовного та числового розв'язку задачі, підкреслюючи строгість і чіткість геометричних закономірностей.

Спочатку за кресленням-картиною осмислимо визначальні в зображувальній роботі співвідношення. А саме, помічаємо, що $L'M' \parallel S'C'$ (за побудовою), отже трикутник $B'L'M'$ – рівнобедрений ($\angle S'C'B' = \angle L'B'M' = \angle L'M'B'$), а тому $B'L' = L'K' = L'M'$; аналогічно, $A'K' = K'N' = K'L'$. Отже, чотирикутник $A'K'L'B'$ – це трапеція із трьома рівними сторонами: $A'K' = K'L' = L'B'$.

Очевидно, що суміщення точки S' просто шукаємо у перетині променя-перпендикуляра FS' до $A'B'$ та кола, з центром у точці B' і радіусом у півтора рази більшим відрізка $A'B' \equiv AB$. Точку K', що задовольняє щойно встановленому факту ($A'K'L'B'$ – особлива трапеція), будуємо в перетині бісектриси кута $A'B'S'$ із відрізком $A'S'$ ($\angle A'B'K' = \angle B'K'L'$; $\angle B'A'L' = \angle A'L'K'$ як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих $A'B'$ і $K'L'$). Далі проводимо $K'K \parallel S'S$, що й визначає на ребрі SA єдину шукану точку K (етапи *побудови* і *доведення* на зображенні не розмежовуються).

За наявності певних навичок, є також можливість дійти результату ***графоаналітичним*** методом. Розрахуємо розташування точки K на відрізку SA. Позначимо для зручності сторону квадрата через x, а сторону основи піраміди покладемо рівною 1. Тоді $S'A' = \frac{3}{2}$. Трикутники $S'A'B'$ і $S'K'L'$ подібні, що очевидно. Тому $\frac{A'B'}{K'L'} = \frac{S'A'}{S'K'}$. Але $S'K' = S'A' - K'A'$. Таким чином:

$\frac{1}{x} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2} - x} \Rightarrow A'K' = x = \frac{3}{5}$. У свою чергу, $S'K' = \frac{9}{10}$, а отже, $S'K' : K'A' = SK : KA = 3 : 2$.

Побудову точки K на ребрі SA неважко здійснити з посиланням на відому теорему про пропорційні відрізки ([3], §6, пп. 60, 61 і рис. 6).

Із цим **побудовний етап** завершено. Приступаємо до пошуку числового розв'язку задачі.

Для компактності введемо позначення: $V_{SABC} = V$; $V_{AKNBLM} = V_1$; $V_{SKLNMC} = V_2$. Щоб використати відомі формули об'ємів тіл, розіб'ємо багатогранник $SKLNMC$ площиною, паралельною площині основи піраміди (ABC), на два стандартні багатогранники – правильну трикутну піраміду $SKLP$ і похилу призму $KLPNMC$, які мають спільну основу KLP. Нехай також $V_{SKLP} = V_3$ і $V_{KLPNMC} = V_4$. Очевидно, що тут $V_1 = V - V_2$, а $V_2 = V_3 + V_4$ (*). Отже, визначальними є три об'єми: V, V_3 і V_4.

Далі, взявши до уваги умову задачі і пам'ятаючи, що $AB = 1$, $SA = \frac{3}{2}$ і $KL = \frac{3}{5}$, запишемо спочатку вирази саме для цих трьох об'ємів нами ж установлених стереометричних фігур: $V = \frac{1}{3} S_{ABB} \cdot SO$; $V_3 = \frac{1}{3} S_{KLP} \cdot SQ$; $V_4 = S_{KLP} \cdot QO$ (**), а потім обчислимо їх. При цьому до решти формальних перетворень і записів, що виконані нижче, коментарі зайві, оскільки їх зміст зрозумілий із рисунка:

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{4}$ і $S_{KLP} = \frac{1}{2} KL \cdot LP \cdot \sin 60° = \frac{9\sqrt{3}}{100}$, адже $KL = LP = \frac{2}{5} SA = \frac{3}{5}$. У продовження, із прямокутного трикутника SOC отримаємо: $SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \frac{\sqrt{23}}{2\sqrt{3}}$, де $OC = \frac{2}{3} FC = \frac{2}{3} \sqrt{BC^2 - (\frac{1}{2} AB)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Крім цього, $\Delta ASB \backsim \Delta KSL$ і $\Delta FSO \backsim \Delta ESQ$, тому маємо: $\frac{AB}{KL} = \frac{FS}{ES} = \frac{OS}{SQ}$ і $1 : \frac{3}{5} = \frac{\sqrt{23}}{2\sqrt{3}} : SQ \Rightarrow SQ = \frac{3\sqrt{23}}{10\sqrt{3}}$, а $QO = SO - SQ = \frac{\sqrt{23}}{5\sqrt{3}}$.

Нарешті, щоб завершити пошуки відповіді, оберненим ходом за формулами (**) і (*) підраховуємо: $V = \frac{\sqrt{23}}{24}$, $V_3 = \frac{9\sqrt{23}}{1000}$, $V_4 = \frac{9\sqrt{23}}{500}$, а тому: $V_2 = \frac{27\sqrt{23}}{1000}$, $V_1 = \frac{11\sqrt{23}}{750}$ і, отже, $V_1 : V_2 = 44 : 81$. Задачу розв'язано повністю.

Увага: В ланцюжку обчислень розв'язаної задачі прослідковується струнка системна лінія – *аналітичний метод міркувань* за принципом «від висновку до умови», що вчитель математики зобов'язаний уміти робити якісно, на належному науково-методичному рівні, й настирно навчати цьому мистецтву учнів.

Висновки. Розв'язання метричних задач методом суміщення зводиться до відшукання на картинній площині місця розташування певної точки або ж напряму деякої прямої. Моделювання цих визначальних елементів здійснюється алгоритмізовано чи то **графічно,** чи **графоаналітично** із застосуванням відомих геометричних фактів. Краще, коли суб'єкт учіння, провівши якісно аналіз умови задачі, підмітить у конкретній ситуації лише їй притаманні внутрішні взаємозалежності між фігурами чи їх елементами, що, завдяки логіці міркувань, індукуватиме особистісний шлях до конструктивного результату.

У сьогоденні проблема оволодіння геометрією через уявлення та візуалізацію рисункових операцій злободенна як ніколи. Очікуваним результатом навчання є формування особистості, інтелектуальний зріст, здатність до умілого застосування вже набутих знань, умінь і навичок, спроможність до самоосвіти та самовдосконалення. **Геометризація** та естетично привабливе **унаочнення** задач в руслі творчо-розвивального й інноваційного навчання набувають неабиякого значення, помітно зростає варіативність і кількість способів вирішення позиційних та метричних пропозицій, вирізняється загальногеометричнй підхід у міркуваннях. Учень, працюючи розумом і руками з рисунком, отримує моральне задоволення, що є вельми дійовим чинником якісної геометричної освіти.

Інтенсивне розв'язування геометричних задач варто вважати **діяльнісним** компонентом математичної освіти в цілому. Найменше, що може зробити вчитель, це щоразу «перекладати на мову геометрії» тексти звичайних обчислювальних пропозицій, додаючи **конструктивізму** і збагачуючи їх висновки геометричним змістом.

Для самостійного розв'язання пропонуємо такі задачі:

Задача 1. Задано зображення *ABC* рівностороннього трикутника, а також прямої *p* і точки *P*, які лежать у площині цього трикутника. Опустіть перпендикуляр із точки *P* на пряму *p*.

Задача 2. На проекційному кресленні задано зображення трикутника *ABC* і точки *P,* яка зображає його ортоцентр (точку перетину висот). Знайдіть істинну форму оригінального трикутника.

Задача 3. На проекційному кресленні трикутника *ABC* точка *P* є зображенням центра описаного навколо нього кола. Знайдіть істинну форму оригінального трикутника.

З а д а ч а 4. Задано зображення ABC прямокутного трикутника $A'B'C'$, один із катетів якого у два рази більший іншого ($A'B' = 2{\cdot}A'C'$). Побудуйте у площині трикутника точки, рівновіддалені від катетів та розташовані від вершини прямого кута A' на відстані, що дорівнює відрізку висоти трикутника, проведеної із цієї вершини на гіпотенузу.

З а д а ч а 5. Площина загального розташування зображена (рівнобедреним в оригіналі) трикутником ABC ($A'C' = B'C'$) із кутом при вершині C', рівним 120°. Точку M' узято на перпендикулярі до площини трикутника, проведеному у вершині A'. Опустіть із точки M' перпендикуляр на бічну сторону $B'C'$ трикутника.

«Область існування» точки, яка зображує ортоцентр трикутника, вказано на рисунку 7, а на рисунку 8 – центр описаного кола [4, с. 97-99].

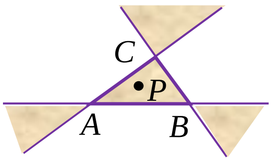

Рис. 7

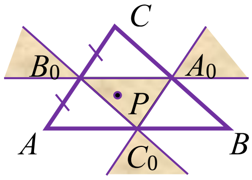

Рис. 8

Прийміть до уваги, шо задача під номером 5 має щонайменше три способи розв’язання (знайдіть найпростіший), проте кожну із задач розв’яжіть методом суміщення.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Глазунов Е.А. Аксонометрия: Учебное пособие для ВУЗов / Е.А. Глазунов, Н.Ф. Четверухин. – М: Гос. изд-во ТТЛ, 1953. – 292 с.
2. Ленчук І. Г. Конструктивна стереометрія в задачах: Навчальний посібник для студентів мат. спеціальностей ВПНЗ / І.Г. Ленчук. – Житомир: вид-во ЖДУ імені І. Франка, 2010. – 367 с.
3. Погорєлов О.В. Геометрія: Підручник для 7-9 кл. середньої школи / О.В. Погорєлов. К.: Освіта, 1998. – 224 с.
4. Четверухін М.Ф. Рисунки просторових фігур у курсі геометрії: Посібник для викладачів / М.Ф. Четверухін. – К.: Радянська школа, 1953. – 188 с.

Ленчук І. Г. Поворот навколо прямої в метричній стереометрії / І.Г. Ленчук, М.В. Працьовитий // Зб. статей: «Математика. Інформаційні технології. Освіта» / М-во освіти і науки України, СНУ ім. Л. Українки, – Луцьк: Вид-во: ПП Іванюк В.П., 2019. – №6. – С. 57-65.