Міністерство освіти і науки України
Житомирський державний університет імені Івана Франка

**Є.О. Севостьянов, С.О. Скворцов,
А.Л. Таргонський**

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ФУНКЦІЙ ДІЙСНОЇ ЗМІННОЇ

Навчально-методичний посібник

Житомир
Вид-во ЖДУ імені Івана Франка
2018

УДК 515.12
ББК 22.162
В22

Рекомендовано до друку вченою радою Житомирського державного університету імені Івана Франка (протокол № 4 від 30 листопада 2018 р.)

Рецензенти:

С.А. Плакса – професор, доктор фіз.-мат. наук, професор, завідувач відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України

В.І. Рязанов – доктор фіз.-мат. наук, професор, завідувач відділу теорії функцій Інституту прикладної математики і механіки НАН України

В22 Елементи теорії функцій дійсної змінної. / Севостьянов Є.О., Скворцов С.О., Таргонський А.Л. – Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2018. - 52 с.

Навчально-методичний посібник містить елементи впровадження до загальної теорії множин, топології та теорії відображень. Розглянуто питання про взаємно однозначну відповідність між множинами, зчисленні множини та множини потужності континнум. Крім теоретичного матеріалу, наведено велику кількість ілюстрацій і прикладів розв'язання практичних задач. Посібник містить теоретичні завдання для самоконтролю і задачі для самостійного розв'язання з 30 варіантів кожна.

Для студентів фізико-математичного факультету усіх форм навчання.

УДК 515.12
ББК 22.161.5
В22

2018

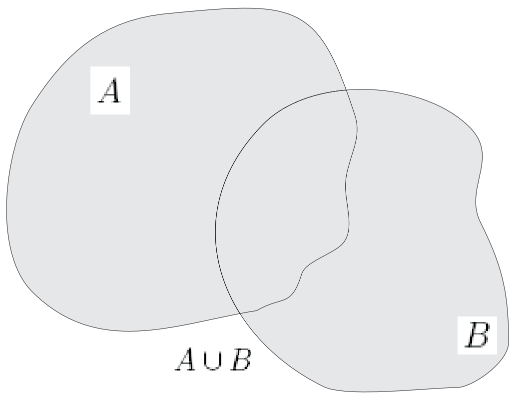
ЗМІСТ

1 Множини і операції над ними

1.1 Загальна теорія і приклади

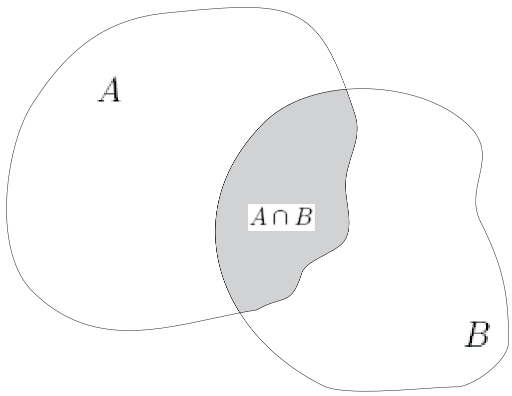
Множина – це сукупність елементів довільної природи. При вивченні теорії множин слід знати наступні означення.

Означення 1.1. *Об'єднанням* двох множин A і B називається множина C, яка складається з тих і тільки тих елементів, котрі належать принаймні одній з множин A або B. Об'єднання двох множин позначається символом $A \cup B$, див. малюнок 1.



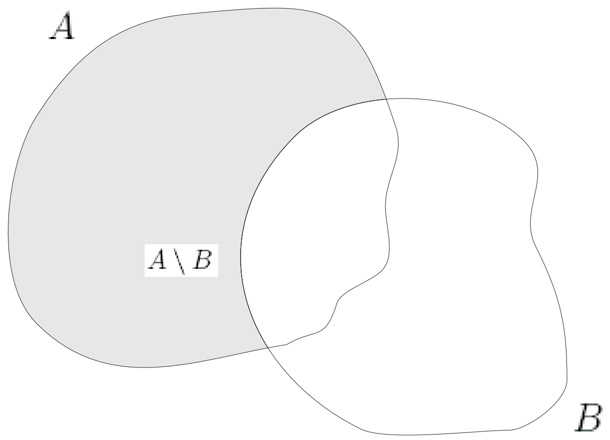
Малюнок 1: Об'єднання множин A і B

Означення 1.2. *Перетином* двох множин A і B називається множина C, яка складається з тих і тільки тих елементів, котрі одночасно належать як до множини A, так і до множини B. Перетин двох множин позначається символом $A \cap B$, див. малюнок 2.



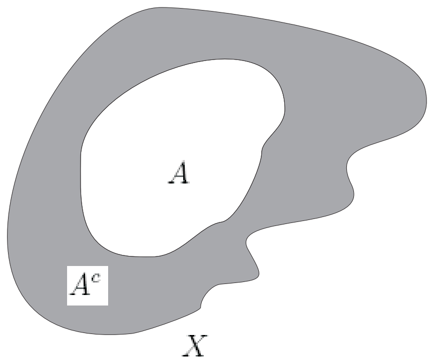
Малюнок 2: Перетин множин A і B

Означення 1.3. *Різницею* двох множин A і B називається множина C, яка складається з тих і тільки тих елементів, котрі належать до множини A, але не належать до множини B. Різниця двох множин позначається символом $A \setminus B$, див. малюнок 3.



Малюнок 3: Різниця множин A і B

Означення 1.4. Нехай X – «універсальна» множина і $A \subset X$. *Доповненням* множини A називається множина C, яка складається з тих і тільки тих елементів, котрі належать до X, але не належать до A. Доповнення множини A позначається A^c, див. малюнок 4.



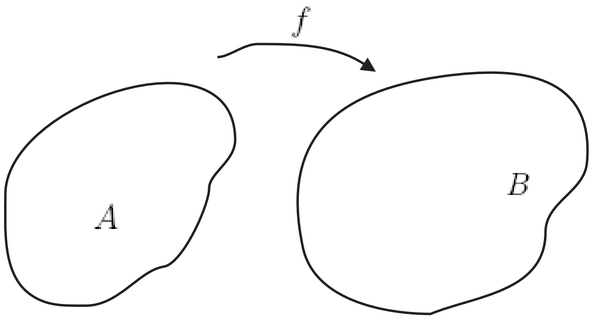
Малюнок 4: Доповнення множини A

Не дивлячись на елементарний характер означення множин і операцій над ними, визначити деякі з них достатньо важко, крім того, означення окремих множин можуть виявитись некоректними. Розглянемо, наприклад, наступне питання.

Брадобрій голить бороду всім, хто не голиться сам. Що він робить із собою ?

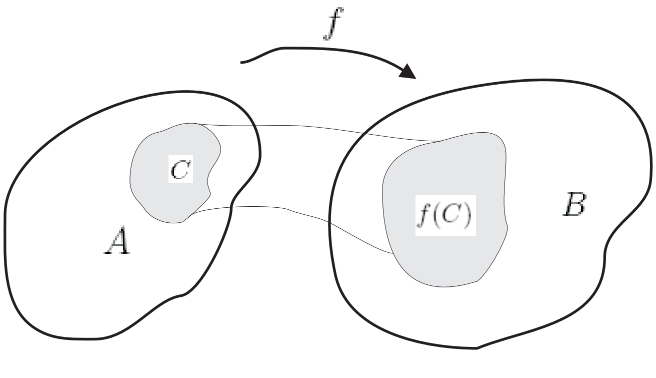
Останнє твердження, відоме як парадокс Рассела, вперше пролунало у 1901 р. Неважко зрозуміти, що відповіді на останнє питання не існує: 1) якщо брадобрій не голиться сам, то в цьому випадку його має голити брадобрій, тобто, він сам себе і голить – суперечність; 2) якщо брадобрій голиться сам, тоді його не має голити брадобрій, тобто, його не має голити він сам – знову суперечність. Отже, такого брадобрія не існує. З іншого боку, множина «тих, хто не голиться сам,» визначена некоректно.

Означення 1.5. *Відображенням* $f : A \to B$ називається перетворення, яке кожному елементу $a \in A$ ставить у відповідність єдиний елемент $b \in B$, див. малюнок 5.



Малюнок 5: Відображення A у B

Означення 1.6. *Образом множини* $C \subset A$ *при відображенні* $f : A \to B$ називається множина $f(C) := \{y \in B : \exists x \in C : f(x) = y\}$, див. малюнок 6.



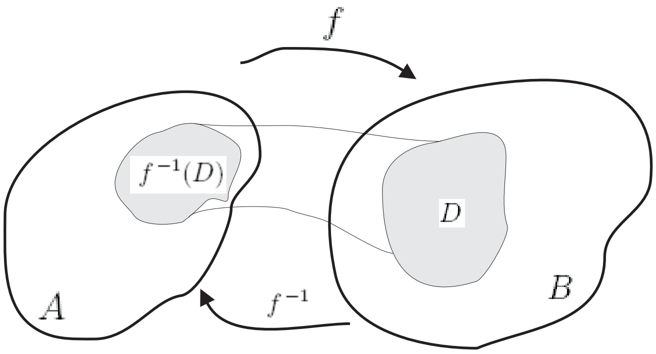
Малюнок 6: Образ множини C при відображенні f

Означення 1.7. *Прообразом* множини $D \subset B$ при відображенні f :

$A \to B$ називають множину

$$f^{-1}(D) := \{x \in A : \exists y \in D : f(x) = y\},$$

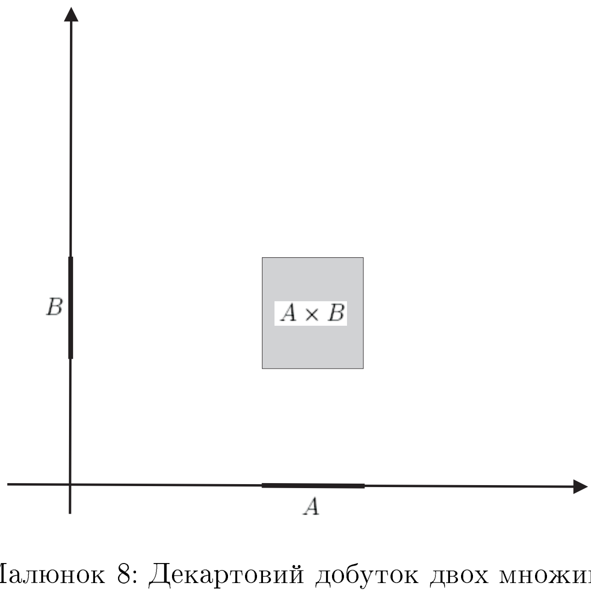
див. малюнок 7.



Малюнок 7: Прообраз множини D при відображенні f

Означення 1.8. Говорять, що A *є підмножиною множини* B, пишуть $A \subset B$, якщо кожен елемент $x \in A$ є таким, що $x \in B$. Дві множини A і B є *рівними,* якщо одночасно $A \subset B$ і $B \subset A$.

Означення 1.9. *Декартовим добутком множин* A *і* B називається множина $C = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$. Декартовий добуток A і B позначається символом $A \times B$, див. малюнок 8.



Малюнок 8: Декартовий добуток двох множин

Приклад 1.1. *Довести, що для будь-яких множин* A, B, C *виконується належність*

$$A \dot{-} B \subset (A \dot{-} C) \cup (C \dot{-} B)\,, \tag{1.1}$$

де $X \dot{-} Y := (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$.

Розв'язок. Нехай $x \in A \dot{-} B$. Треба довести, що $x \in (A \dot{-} C) \cup (C \dot{-} B)$.

Якщо $x \in A \dot{-} B$, то за означенням операції $\dot{-}$ маємо:

$$\left[\begin{array}{l} x \in A \setminus B \\ x \in B \setminus A \end{array} \right. . \tag{1.2}$$

В першому випадку в (1.2) маємо: $x \in A$, але $x \notin B$. Оскільки $x \in A$, то маємо два підвипадки: або $x \in A \setminus C$, або $x \in A \cap C$. Якщо $x \in A \setminus C$, то тим більше $x \in (A \setminus C) \cup (C \setminus A) \subset (A \dot{-} C) \cup (C \dot{-} B)$, отже, (1.1) виконується. Якщо ж (другий підвипадок) $x \in A \cap C$, то, зокрема, $x \in C$. Оскільки за припущенням $x \notin B$, то $x \in C \setminus B$. В такому випадку, виконано ланцюжок належностей: $x \in C \setminus B \subset C \dot{-} B \subset (A \dot{-} C) \cup (C \dot{-} B)$. Розгляд другого підвипадку завершено, причому в обох цих підвипадках x належить до правої частини в (1.1).

Аналогічно розглянемо другий випадок в (1.2), а саме, нехай $x \in B \setminus A$, тобто, $x \in B$, але $x \notin A$. Оскільки $x \in B$, то маємо два підвипадки: або $x \in B \setminus C$, або $x \in B \cap C$. Якщо $x \in B \setminus C$, то тим більше $x \in (B \setminus C) \cup (C \setminus B) \subset (A \dot{-} C) \cup (C \dot{-} B)$, отже, (1.1) виконується. Якщо ж (другий підвипадок) $x \in B \cap C$, то, зокрема, $x \in C$. Оскільки за припущенням $x \notin A$, маємо: $x \in C \setminus A$. Тоді маємо ланцюжок належностей: $x \in C \setminus A \subset C \dot{-} A \subset (A \dot{-} C) \cup (C \dot{-} B)$. Розгляд другого підвипадку завершено; в обох підвипадках x належить до правої частини в (1.1). Належність (1.1) доведено. $\square$

Приклад 1.2. *Довести, що для будь-яких множин* A *і* B

$$(A \setminus (A \cap B)) \cup B = A \cup B\,. \tag{1.3}$$

Розв'язок. Нам треба довести, що

$$\left\{ \begin{array}{l} (A \setminus (A \cap B)) \cup B \subset A \cup B \\ A \cup B \subset (A \setminus (A \cap B)) \cup B \end{array} \right. . \tag{1.4}$$

Покажемо спочатку верхню належність в (1.4). Нехай $x \in (A \setminus (A \cap B)) \cup B$, треба показати, що $x \in A \cup B$. Дійсно, якщо $x \in (A \setminus (A \cap B)) \cup B$, то або $x \in A \setminus (A \cap B)$, або $x \in B$. Оскільки $A \setminus (A \cap B) \subset A \subset A \cup B$ і $B \subset A \cup B$, ми тривіально отримаємо в обох випадках, що $x \in A \cup B$. Отже, верхню належність в (1.4) доведемо.

Доведемо нижню належність в (1.4). Нехай $x \in A \cup B$, треба показати, що $x \in (A \setminus (A \cap B)) \cup B$. Якщо $x \in A \cup B$, то або $x \in A \cap B$, або $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Нехай $x \in A \cap B$, тоді $x \in A \cap B \subset B \subset (A \setminus (A \cap B)) \cup B$. Нехай тепер $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, тоді або

$$x \in A \setminus (A \cap B) \subset (A \setminus (A \cap B)) \cup B \subset A \cup B\,,$$

або

$$x \in B \setminus (A \cap B) = B \setminus A \subset (A \setminus (A \cap B)) \cup B\,.$$

В будь-якому випадку маємо: $x \in (A \setminus (A \cap B)) \cup B$. Належність (1.4) доведено. □

Приклад 1.3. *Нехай $A, B \subset X$, $f : X \to Y$. Довести, що:*

$$\text{а)} \quad A \cap B = A \setminus (A \setminus B); \qquad \text{б)} \quad f(A) \setminus f(A \setminus B) \subset f(A \cap B)\,. \tag{1.5}$$

Розв'язок. Розглянемо пункт а). Для цього нам треба довести, що

$$\begin{cases} A \cap B \subset A \setminus (A \setminus B) \\ A \setminus (A \setminus B) \subset A \cap B \end{cases}. \tag{1.6}$$

Доведемо верхню належність в (1.6). Нехай $x \in A \cap B$, тоді $x \notin A \setminus B$, бо в протилежному випадку, якщо $x \in A \setminus B$, то $x \notin B$, що суперечить припущенню $x \in A \cap B$. Отже, $x \in A \setminus (A \setminus B)$, що доводить верхню належність в (1.6).

Доведемо нижню належність. Нехай тепер $x \in A \setminus (A \setminus B) \subset A \cap B$, тоді, по-перше, $x \in A$. По-друге, $x \in B$, бо в протилежному випадку маємо $x \in A \setminus B$, що суперечить припущенню $x \in A \setminus (A \setminus B)$. Отже, нижню належність в (1.6) доведено, і на цьому розгляд пункту а) завершено.

Доведемо пункт б). Покажемо, що

$$f(A \setminus (A \setminus B)) \subset f(A \cap B)\,. \tag{1.7}$$

Дійсно, нехай $y \in f(A \setminus (A \setminus B))$, тоді існує $x \in A \setminus (A \setminus B)$, але за пунктом а) $x \in A \cap B$ і тому $f(x) = y \in f(A \cap B)$. Отже, виконується (1.7). Доведемо, що

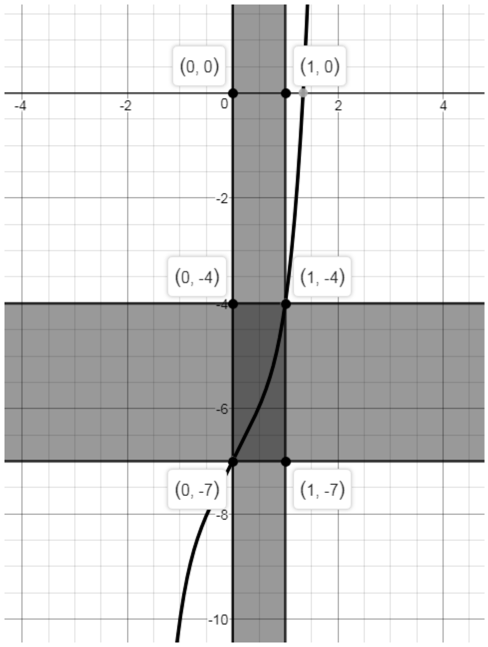
$$f(A) \setminus f(A \setminus B) \subset f(A \setminus (A \setminus B))\,. \tag{1.8}$$

Нехай $y \in f(A) \setminus f(A \setminus B)$, тоді $y = f(z)$, $z \in A$. Зауважимо, що $z \notin A \setminus B$, бо в протилежному випадку $y = f(z) \in f(A \setminus B)$, що суперечить припущенню, зробленому вище. Отже, $z \in A \setminus (A \setminus B)$ і $y = f(z) \in f(A \setminus (A \setminus B))$, що і доводить (1.8).

Бажане твердження пункту б) випливає з (1.7) і (1.8). $\square$

Приклад 1.4. Знайти образ множини A при відображенні f, якщо $A = [0, 1]$ і $f(x) = x^5 + 2x - 7$.

Розв'язок. Можна розв'язати цю задачу за допомогою похідної. Маємо: $f'(x) = 5x^4 + 2 \neq 0$ при $x \in [0, 1]$. Отже, f монотонно зростає на $[0, 1]$, $f_{\max} = f(1) = -4$, $f_{\min} = f(0) = -7$, див. малюнок 9. За теоремою

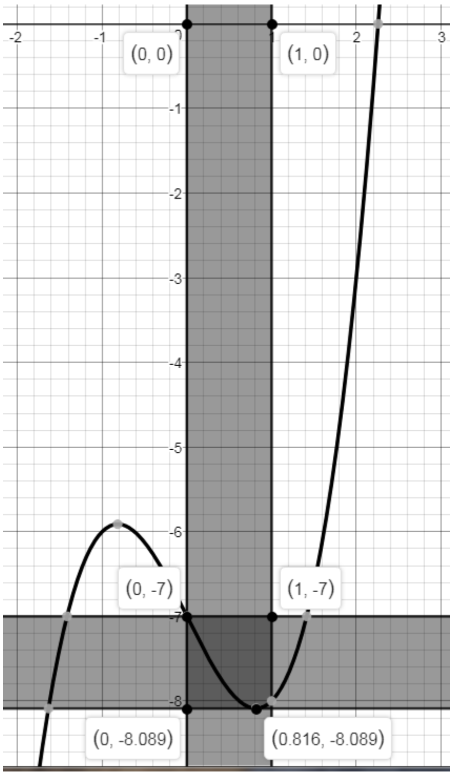


Малюнок 9: Графік функції $f(x) = x^5 + 2x - 7$

про проміжні значення f приймає всі значення з відрізку $[-4, -7]$, тобто, $f([0, 1]) = [-4, -7]$. $\square$

Приклад 1.5. Знайти образ множини A при відображенні f, якщо $A = [0, 1]$ і $f(x) = x^3 - 2x - 7$.

Розв'язок. Як і в ситуації з прикладом 1.4, можна також розв'язати цю задачу за допомогою похідної. Маємо: $f'(x) = 3x^2 - 2 = 0$, $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. Нас цікавить лише точка $x_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}$, бо точка $-\sqrt{\frac{2}{3}}$ не належить до відрізку $[0,1]$. Маємо $f'(0)=-2$, $f'(1)=1$. Отже, при переході через точку $x_0=\sqrt{\frac{2}{3}}$ похідна змінює знак з «-» на «+», тому це точка локального мінімуму. Маємо: $f(\sqrt{\frac{2}{3}})=\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2}-2\left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}-7$, $f(0)=-7$, $f(1)=-8$. Отже, $f_{\min}=\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2}-2\left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}-7$, $f_{\max}=-7$ і за теоремою про проміжні значення неперервної функції на відрізку $f([0,1])=\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2}-2\left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}-7,-7\right]$. $\square$



Малюнок 10: Графік функції $f(x)=x^3-2x-7$

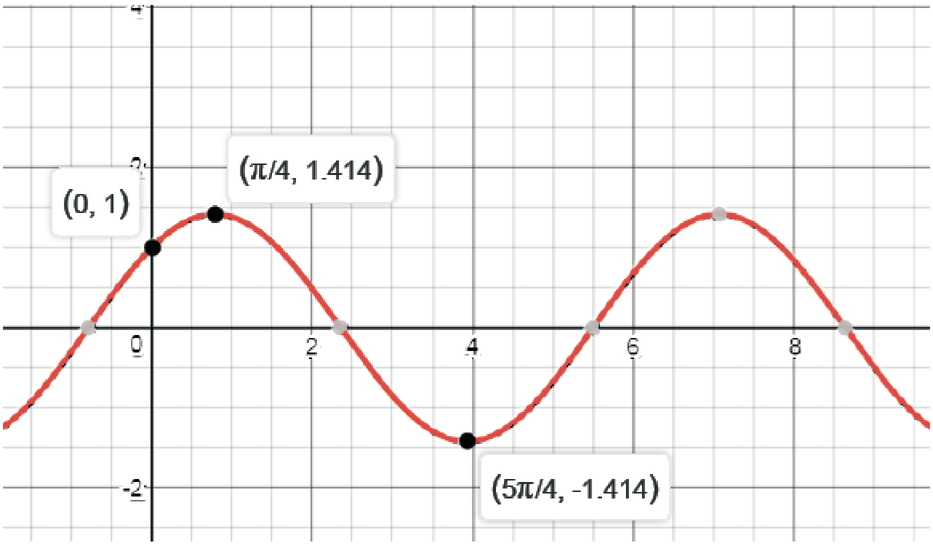
Приклад 1.6. Знайти образ множини A при відображенні f, якщо $A=[0,\pi/2]$ і $f(x)=\cos x+\sin x$.

Розв'язок. Візьмемо похідну, маємо: $f'(x)=-\sin x+\cos x$. Розв'язавши рівняння $-\sin x+\cos x=0$, отримаємо $x=\pi/4$, $f(\pi/4)=\sqrt{2}$. Крім того, $f'(0)=1$, $f'(\pi/2)=-1$, тому $x_0=\pi/4$ – точка локального максимуму функції f. Маємо: $f_{\min}=f(0)=f(\pi/2)=1$, $f_{\max}=f(\pi/4)=\sqrt{2}$. Оскільки функція f є неперервною на відрізку $[0,\pi/2]$, вона приймає всі значення між 1 і $\sqrt{2}$ хоча б по одному разу. В силу сказаного, $f([0,\pi/2])=[1,\sqrt{2}]$. $\square$

Приклад 1.7. Знайти образ множини A при відображенні f, якщо $A = \mathbb{R}$ і $f(x) = \cos x + \sin x$.

Розв'язок. Оскільки функції $\cos x$ і $\sin x$ є періодичними з періодом 2π, то такою ж є і функція f (обґрунтуйте !). Тому достатньо дослідити нашу функцію на відрізку $[0, 2\pi.]$

Візьмемо похідну, маємо: $f'(x) = -\sin x + \cos x$. Розв'язавши рівняння $-\sin x + \cos x = 0$, отримаємо $x = \pi/4; 5\pi/4$ $f(\pi/4) = \sqrt{2}$, $f(5\pi/4) = -\sqrt{2}$. Неважко перевірити, що при переході через точку $x_1 = \pi/4$ похідна змінює знак з «+» на «-», а при переході через точку $x_2 = 5\pi/4$ – з «-» на «+». Отже, $x_1 = \pi/4$ – точка локального максимуму, а $x_2 = 5\pi/4$ – локального мінімуму функції f, див. малюнок 11 для ілюстрації. На кінцях



Малюнок 11: Графік функції $f(x) = \sin x + \cos x$

відрізку $[0, 2\pi]$ маємо: $f(0) = f(2\pi) = 1$, звідси $f_{\min} = -\sqrt{2}$, $f_{\max} = \sqrt{2}$. Висновок: функція f на $[0, 2\pi]$ не виходить за межі відрізку $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, крім того, за теоремою про проміжні значення приймає всі значення з цього відрізку. Тому $f([0, 2\pi]) = f(\mathbb{R}) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. □

1.2 Завдання для самоконтролю

1. Чи можна замість знаку належності «$\subset$» в пункті б) прикладу 1.3 поставити знак «$=$» ? Доведіть це, або побудуйте контрприклад.

2. Чи вірно, що для будь-якого відображення $f : X \to Y$ і довільних множин $A_1, A_2 \subset X$:
а) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$;
б) $f(A_1 \setminus A_2) = f(A_1) \setminus f(A_2)$?
Обґрунтуйте відповіді в обох випадках а) і б).

3. Чи можна у співвідношенні (1.1) замість знаку «$\subset$» поставити «$=$» ?

4. Чи вірно, що $f(f^{-1}(A)) = A$ для будь-якого $A \subset Y$ і довільного відображення $f : X \to Y$?

5. Чи вірно, що $f^{-1}(f(B)) = B$ для будь-якого $B \subset X$ і будь-якого відображення $f : X \to Y$?

6. Чи залишиться вірним співвідношення (1.1), якщо в ньому по-іншому поставити дужки: $A \dot{-} B \subset A \dot{-} (C \cup (C \dot{-} B))$? Чому ?

7. Нехай $C, D \subset Y$, $f : X \to Y$ – довільне відображення і $C \cap D = \varnothing$. Чи вірно, що $f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) = \varnothing$?

8. Нехай, як і вище, $X \dot{-} Y := (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$. Що можна сказати про множини X і Y у випадку, коли $X \dot{-} Y = \varnothing$?

9. Чи вірно, що для будь-яких множин X, Y, Z виконано:
$(X \cup Y) \setminus Z \subset X \cup (Y \setminus Z)$?
Обґрунтуйте !

10. Чи вірно, що для будь-яких множин X, Y, Z виконано рівність: $(X \cup Y) \setminus Z = X \cup (Y \setminus Z)$? Або доведіть це співвідношення, або спростуйте його шляхом наведення контрприкладу.

1.3 Завдання для самостійної роботи № 1

Задача 1. *Довести формулу для кожного з варіантів. Тут і надалі* $f : X \to Y$; A, A_1, $A_2 \subset X$; B, B_1, $B_2 \subset Y$; $A_t \subset X$, $B_t \subset Y$.

Варіант	**Формула**
1	$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
2	$f\left(\bigcup\limits_t A_t\right) = \bigcup\limits_t f(A_t)$
3	$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$
4	$f\left(\bigcap\limits_t A_t\right) \subset \bigcap\limits_t f(A_t)$
5	$f(A_1) \setminus f(A_2) \subset f(A_1 \setminus A_2)$
6	$A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$
7	$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
8	$f^{-1}\left(\bigcup\limits_t B_t\right) = \bigcup\limits_t f^{-1}(B_t)$
9	$f^{-1}\left(\bigcap\limits_t B_t\right) = \bigcap\limits_t f^{-1}(B_t)$
10	$f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$
11	$B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$
12	$A \subset f^{-1}(f(A))$
13	$f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$
14	$f(A) \cap B = f\left(A \cap f^{-1}(B)\right)$
15	Якщо $g = f\|_A$, то $g^{-1}(B) = A \cap f^{-1}(B)$
16	$(X_1 \cup X_2) \times (Y_1 \cup Y_2) = (X_1 \times Y_1) \cup (X_1 \times Y_2) \cup (X_2 \times Y_1) \cup (X_2 \times Y_2)$
17	$(X_1 \cap X_2) \times (Y_1 \cap Y_2) = (X_1 \times Y_1) \cap (Y_1 \times Y_2)$
18	$(X_1 \setminus X_2) \times Y = (X_1 \times Y) \setminus (X_2 \times Y)$
19	$X_1 \subset X_2, \quad Y_1 \subset Y_2 \quad \Rightarrow \quad X_1 \times Y_1 \subset X_2 \times Y_2, \quad X_1 \neq \varnothing \neq Y_1$
20	$X_1 \times Y_1 \subset X_2 \times Y_2, \quad X_1 \neq \varnothing \neq Y_1 \Rightarrow X_1 \subset X_2, Y_1 \subset Y_2$
21	$A \subset X, B \subset Y \Rightarrow A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B)$
22	$(A \times B)^c = (A^c \times Y) \cup (X \times B^c)$, якщо $A \subset X, B \subset Y$
23	$X_i \neq \varnothing \neq Y_i, i = 1, 2$; $(X_1 \times Y_1) = (X_2 \times Y_2) \Rightarrow X_1 = X_2, Y_1 = Y_2$
24	$A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$
25	$(A \cup B^c) \cap B = A \cap B$
26	$A \dot{-} (B \dot{-} C) = (A \dot{-} B) \dot{-} C$, де $X \dot{-} Y := (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$
27	$A \cap (B \dot{-} C) = (A \cap B) \dot{-} (A \cap C)$, де $X \dot{-} Y := (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$
28	$A \subset C, B \subset C \Rightarrow A \cup B \subset C$
29	$C \subset A, C \subset B \Rightarrow C \subset A \cap B$
30	$A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$

1.4 Завдання для самостійної роботи № 2

Задача 2. *Знайти образ множини* $A = [0, 1]$ *при заданому відображенні* $f(x)$ *для кожного з варіантів.*

Варіант	**Послідовність множин**
1	$f(x) = 5x^2 + x$
2	$f(x) = 9x^3 + 6$
3	$f(x) = 4x^2 + 2x - 9$
4	$f(x) = \cos^2 x + \sin^2 x$
5	$f(x) = \cos x - \sin x$
6	$f(x) = x^7 + x$
7	$f(x) = x^7 - x$
8	$f(x) = \sin \frac{\pi x}{2} + x^2$
9	$f(x) = \sin \frac{\pi x}{2} + x^3$
10	$f(x) = \sin \frac{\pi x}{2} + x^4$
11	$f(x) = 6x^4 + x^2$
12	$f(x) = [x] + x$
13	$f(x) = [x + 1] + x$
14	$f(x) = x^2 + x - 5$
15	$f(x) = x^2 - x - 6$
16	$f(x) = (1 - x)^{-1}, \ x \neq 1, \ f(1) := 1$
17	$f(x) = xe^x$
18	$f(x) = e^x + x$
19	$f(x) = \sin(x^2)$
20	$f(x) = \sin(x^3)$
21	$f(x) = x^4 + x^3 + x^2$
22	$f(x) = 4x^4 - 3x^3 + 2x^2$
23	$f(x) = \arctan(\frac{\pi x}{4})$
24	$f(x) = \frac{x+1}{x+2}$
25	$f(x) = \frac{x+3}{x+4}$
26	$f(x) = \sqrt{x} + \sin x$
27	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}, \ x \neq 1, \ f(1) = 0$
28	$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2\sqrt{1-x}}\right), \ x \neq 1, \ f(1) = 1$
29	$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2\sqrt{1-x}}\right), \ x \neq 1, \ f(1) = 1$
30	$f(x) = \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2$

2 Збіжність послідовностей множин

2.1 Загальна теорія і приклади

Нехай A_n, $n = 1, 2, \dots,$ – послідовність множин.

Означення 2.1. Говорять, що A є *нижньою границею* послідовності A_n, пишуть $\varliminf\limits_{n\to\infty} A_n$, якщо A складається з тих і тільки тих елементів, які належать до всіх A_n, починаючи з деякого номера.

Означення 2.2. Говорять, що A є *верхньою границею* послідовності A_n, пишуть $\varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n$, якщо A складається з тих і тільки тих елементів, які належать до всіх A_n для нескінченної кількості номерів $n \in \mathbb{N}$.

З означень випливає, що верхня і нижня границі послідовності множин A_n, $n = 1, 2, \dots,$ завжди існують. З означення також випливає, що

$$\varliminf_{n\to\infty} A_n \subset \varlimsup_{n\to\infty} A_n\,. \tag{2.1}$$

Означення 2.3. Послідовність множин A_n, $n = 1, 2, \dots,$ називається *збіжною*, якщо $\varliminf\limits_{n\to\infty} A_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n$. У цьому випадку пишемо:

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n\,.$$

Розглянемо наступні приклади.

Приклад 2.1. *Дослідити послідовність множин на збіжність, знайти нижню і верхню границі послідовності множин, якщо:*

а) $A_n = (-n, \frac{4}{n^2})$, $n \in \mathbb{N}$;

б) $B_n = (-n, n)$, $n \in \mathbb{N}$;

в) $C_n = (0, \frac{1}{n})$.

Розв'язок. а) Доведемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = (-\infty, 0]$. В свою чергу, для цього спочатку встановимо, що $\varliminf\limits_{n\to\infty} A_n = (-\infty, 0]$. Зауважимо, що

$$\varliminf_{n\to\infty} A_n = (-\infty, 0] \Leftrightarrow \begin{cases} \varliminf\limits_{n\to\infty} A_n \subset (-\infty, 0] \\ (-\infty, 0] \subset \varliminf\limits_{n\to\infty} A_n \end{cases}. \tag{2.2}$$

Доведемо верхню належність у правій частині системи (2.2). Нехай $x \in \varliminf\limits_{n\to\infty} A_n$, тоді існує номер $n_0 = n_0(x) : x \in (-n, \frac{4}{n^2})$ при всіх $n \geqslant n_0$. Тоді тривіально $x > -\infty$, крім того, $x \leqslant 0$, тому що числова послідовність $\frac{4}{n^2}$ збігається до нуля і, отже, жодне додатнє x задовольняє умову $x < \frac{4}{n^2}$ лише для скінченної кількості номерів $n \in \mathbb{N}$. Зі сказаного випливає, що $x \in (-\infty, 0]$.

Доведемо тепер нижню належність в правій частині системи (2.2). Нехай $x \in (-\infty, 0]$. Розв'язуючи нерівність $x > -n$, маємо: $n > [-x]$, крім того, нерівність $x < \frac{4}{n^2}$ тривіально виконано для будь-якого натурального $n \in \mathbb{N}$. Висновок: належність $x \in (-\infty, 0]$ тягне, що $x \in A_n$ при всіх $n > [-x]$, отже, $x \in \varliminf\limits_{n\to\infty} A_n$. Рівність $\varliminf\limits_{n\to\infty} A_n = (-\infty, 0]$ доведено.

Встановимо, що $\varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n = (-\infty, 0]$. За доведеним вище, враховуючи співвідношення (2.1), маємо: $(-\infty, 0] \subset \varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n$. Залишилось довести, що $\varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n \subset (-\infty, 0]$. Дійсно, нехай $x \in \varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n$, тоді $x \in A_{n_k}$ для деякої зростаючої послідовності номерів n_k, $k = 1, 2, \ldots$. Очевидно, $x > -\infty$, крім того, $x \leqslant 0$, оскільки $\frac{4}{n^2} \overset{n\to\infty}{\to} 0$, отже, будь-яке число $x > 0$ задовольняє умову $x \in A_n$ лише для скінченної кількості номерів n.

Отже, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n = \varliminf\limits_{n\to\infty} A_n = (-\infty, 0]$, звідки $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = (-\infty, 0]$.

б) Доведемо, що послідовність $B_n = (-n, n)$, $n \in \mathbb{N}$, збігається до $\mathbb{R}$ при $n \to \infty$. З належності (2.1) випливає, що нам для цього достатньо довести рівність $\varliminf\limits_{n\to\infty} A_n = \mathbb{R}$ (чому ?).

Як і вище, треба довести, що одночасно $\varliminf\limits_{n\to\infty} A_n \subset \mathbb{R}$ і $\mathbb{R} \subset \varliminf\limits_{n\to\infty} A_n$. Перша належність є тривіальною, розглянемо другу належність. Нехай $x \in \mathbb{R}$, тоді розв'яжемо нерівність $-n < x < n$ відносно n. Маємо: $|x| < n$, звідки $n > [|x|] + 1$. Висновок: $x \in A_n$ при всіх $n > [|x|] + 1$, отже $x \in \varliminf\limits_{n\to\infty} A_n$. Зі сказаного вище випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = \mathbb{R}$.

в) Нехай $C_n = (0, \frac{1}{n})$, доведемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = \varnothing$. Згідно належності (2.1), достатньо довести, що $\varlimsup\limits_{n\to\infty} C_n = \varnothing$. Доведено це від супротивного. Нехай, навпаки, існує $x \in \varlimsup\limits_{n\to\infty} C_n$. Тоді знайдеться зростаюча послідовність номерів n_k, $k = 1, 2, \ldots$, така що $x \in C_{n_k}$ при всіх $k \in \mathbb{N}$. Тоді $0 < x < \frac{1}{n_k}$, що неможливо, бо послідовність $x_k := \frac{1}{n_k}$ збігається до 0 при $k \to \infty$, тому нерівності $0 < x < \frac{1}{n_k}$ можуть бути виконані лише для скінченної кількості номерів k. Отримано суперечність, яка вказує на те, що $\varlimsup\limits_{n\to\infty} C_n = \varnothing$. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = \varnothing$. □

Приклад 2.2. *Дослідити послідовність множин на збіжність,* *знайти нижню і верхню границі послідовності множин* A_n, $n = 1, 2, \ldots,$ *якщо*

$$A_n = \begin{cases} (-\frac{1}{n}, 0], & n = 2m, m \in \mathbb{N} \\ [5, 5 + \frac{1}{n}), & n = 2m-1, m \in \mathbb{N} \end{cases} . \tag{2.3}$$

Розв'язок. Зауважимо, що $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \varnothing$, а $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \{0, 5\}$.

Дійсно, не існує таких x, які б належали всім A_n, починаючи з деякого номера. Якщо $x \leqslant 0$, то x не належить ніяким A_n з непарними номерами, а якщо $x > 0$ – ніяким A_n з парними номерами. Отже, не існує такого x.

Рівність $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \{0, 5\}$ випливає з того, що числа 0 і 5, і тільки вони, належать всім A_n з парними (відповідно, непарними) номерами. Якщо б існував ще якийсь $0 \neq x \neq 5$ такий, що $x \in A_{n_k}$ для певної зростаючої послідовності n_k, $k = 1, 2, \ldots,$ то (очевидно) x належав би або до нескінченної кількості A_n з парними номерами, або до нескінченної кількості A_n з непарними номерами. Обидві ці можливості неможливі за означенням множин A_n.

Зі сказаного також випливає, що послідовність A_n є розбіжною. $\square$

2.2 Завдання для самоконтролю

1. Довести, що для довільної послідовності множин A_n, $n = 1, 2, \ldots$ виконано співвідношення

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset \varliminf_{n\to\infty} A_n \subset \varlimsup_{n\to\infty} A_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \, .$$

2. Довести, що для довільної послідовності множин A_n, $n = 1, 2, \ldots,$

$$\varliminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i \right), \qquad \varlimsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i \right) .$$

3. Нехай A_n, B_n, $n = 1, 2, \ldots$ – дві довільні послідовності множин. Чи вірно, що:

а) $\varliminf\limits_{n\to\infty} (A_n \cap B_n) = (\varliminf\limits_{n\to\infty} A_n) \cap (\varliminf\limits_{n\to\infty} B_n)$;

б) $\varliminf\limits_{n\to\infty} (A_n \cup B_n) = (\varliminf\limits_{n\to\infty} A_n) \cup (\varliminf\limits_{n\to\infty} B_n)$?

4. Нехай A_n, B_n, $n = 1, 2, \ldots$ – дві збіжні послідовності множин. Чи вірно, що:

а) існує $\lim\limits_{n\to\infty} (A_n \cap B_n)$ і $\lim\limits_{n\to\infty} (A_n \cap B_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} A_n) \cap (\lim\limits_{n\to\infty} B_n)$;

б) існує $\lim\limits_{n\to\infty} (A_n \cup B_n)$ і $\lim\limits_{n\to\infty} (A_n \cup B_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} A_n) \cup (\lim\limits_{n\to\infty} B_n)$?

5. Чи вірно, що:

а) $\varliminf\limits_{n\to\infty} (A_n \cap B_n) \subset \varliminf\limits_{n\to\infty} (A_n \cup B_n)$;

б)) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} (A_n \cap B_n) \subset \varlimsup\limits_{n\to\infty} (A_n \cup B_n)$?

2.3 Завдання для самостійної роботи № 3

Задача 3. *Дослідити послідовність множин на збіжність, знайти нижню і верхню границі послідовності множин* A_n, $n = 1, 2, \ldots$, *для кожного з варіантів.*

Варіант	Послідовність множин
1	$A_n = ((-1)^n, 5)$
2	$A_n = ((-1)^n, 5]$
3	$A_n = [(-1)^n, 5)$
4	$A_n = [(-1)^n, 5]$
5	$A_n = [(-1)^n, 5 + \frac{1}{n}]$
6	$A_n = [(-1)^n, 5 + \frac{1}{n^2}]$
7	$A_n = [2 - \frac{1}{n}, 5 + \frac{1}{n^2}]$
8	$A_n = [3 - \frac{1}{n}, 5 + \frac{1}{n^2}]$
9	$A_n = [3 - \frac{1}{n^2}, 5 + \frac{1}{n^2}]$
10	$A_n = [-5n, -4n]$
11	$A_n = [-2(-1)^n, 3]$
12	$A_n = [-1 + \frac{(-1)^n}{n}, 0]$
13	$A_n = [-1 + \frac{(-1)^n}{n}, 1]$
14	$A_n = [-1 + \frac{(-1)^n}{n}, 2]$
15	$A_n = [-1 + \frac{(-1)^n}{n}, 3]$
16	$A_n = (-n, \frac{n}{n+1})$
17	$A_n = [-n^2, -n)$
18	$A_n = [2n, 3n)$
19	$A_n = [0, n]$
20	$A_n = [-\frac{n}{n+1}, 1]$
21	$A_n = [0, 1 + \frac{n+1}{n}]$
22	$A_n = ((-2)^n, 3^n]$
23	$A_n = [-1(-1)^n, 1]$
24	$A_n = [2, \ln n]$
25	$A_n = [\ln n, n)$
26	$A_n = [-\frac{1}{2}, 9 - \frac{1}{n}]$
27	$A_n = (-3, -2] \cup [3, 3 + \frac{1}{n})$
28	$A_n = (0, 1] \cup \{2 + \frac{1}{n}\}$
29	$A_n = [0, 1) \cup \{3 - \frac{1}{n}\}$
30	$A_n = \{1\} \cup \{2 + \frac{1}{n}\}$

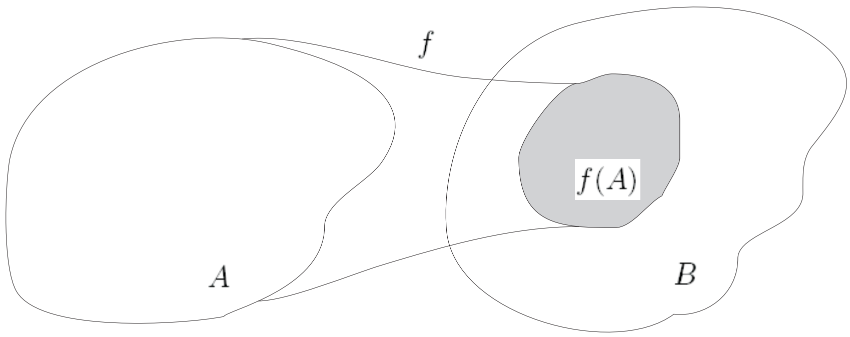
3 Сюр'єктивні, ін'єктивні та бієктивні відображення

3.1 Загальна теорія і приклади

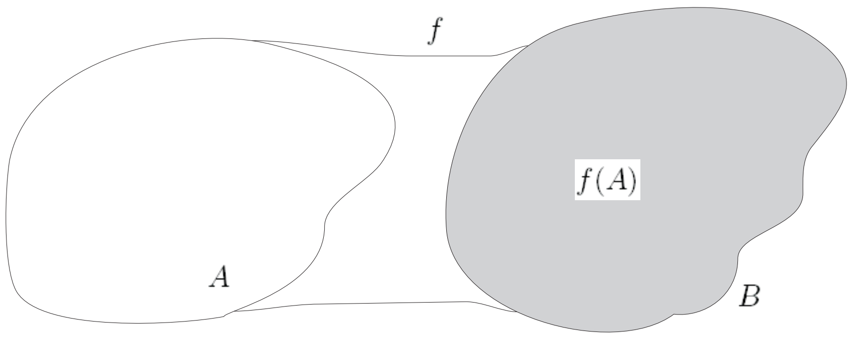
Нехай множини A та B непорожні.

Означення 3.1. Відображення $f : A \to B$ називається *сюр'єктивним* (сюр'єкцією), якщо для будь якого $b \in B$ існує $a \in A$ таке, що $f(a) = b$.

Сюр'єктивні відображення в математиці називають ще відображеннями «на», або «відображеннями A на B», тобто, під цими словами завжди припускається «...на всю множину B». Для відображень, які або не є, або можуть виявитись несюр'єктивними, використовується словосполучення «відображення A в B». Див. малюнки 12 і 13, на яких проілюстровані ситуації несюр'єктивних і сюр'єктивних відображень, відповідно.



Малюнок 12: Відображення між множинами A і B, що не є сюр'єктивним



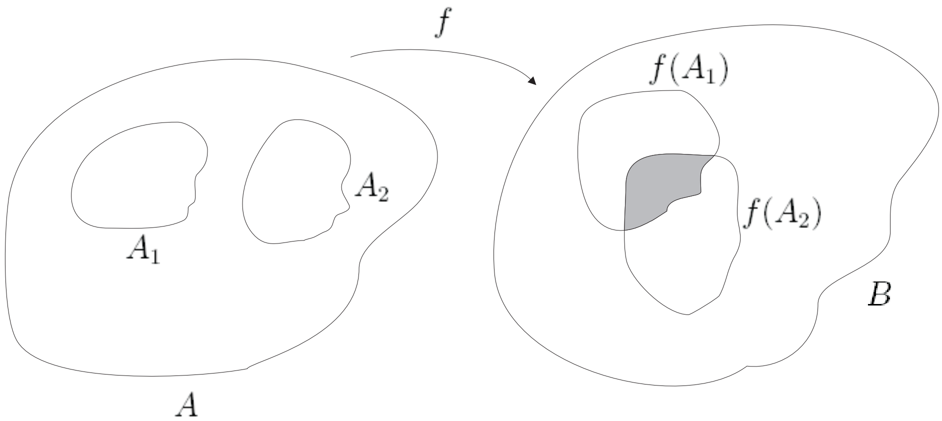
Малюнок 13: Сюр'єктивне відображення A на B

Зауваження 3.1. Відображення f є сюр'єктивним, якщо множина

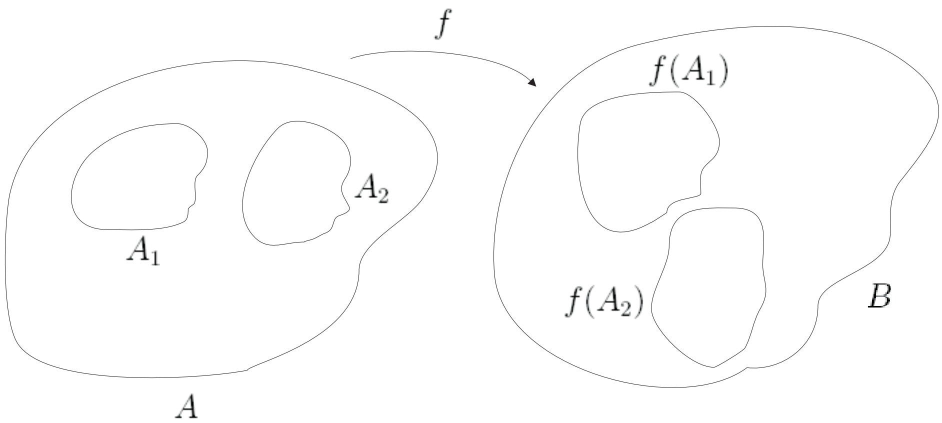
$f(A) := \{y \in B : \exists\, x \in A : f(x) = y\}$ співпадає з B.

Означення 3.2. Відображення $f : A \to B$ називається *ін'єктивним* (ін'єкцією), якщо з умови $a \neq b$, $a, b \in A$, випливає, що $f(a) \neq f(b)$.

Ін'єктивне відображення – це те відображення, котре приймає всі свої значення рівно «по одному разу». Див. з цього приводу малюнки 14 і 15.



Малюнок 14: Відображення A в B, що не є ін'єктивним



Малюнок 15: Ін'єктивне відображення A в B

Означення 3.3. Відображення $f : A \to B$ називається *взаємно-однозначним*, або *бієктивним* (бієкцією), якщо воно одночасно сюр'єктивне та ін'єктивне.

Єдиного способу з'ясувати, чи є відображення сюр'єктивним, ін'єктивним або бієктивним, напевно, не існує. Нижче ми пропонуємо одну з можливих схем розв'язання, див. приклад 3.1. Підкреслюємо, що ця схема є лише одним з багатьох можливих варіантів, проте, цей спосіб працює лише за наявності у відображення похідних.

Бієкцією може виявитись відораження, яке є розривним в усіх точках своєї області визначення (наведіть приклад !). Зокрема, бієктивним може виявитися відображення, що в окремих точках немає похідних. З іншого боку, **серед відображень, які мають похідні, є як сюр'єктивні/ін'єктивні, так і не сюр'єктивні/не ін'єктивні відображення**. Для спростування ін'єктивності, або сюр'єктивності достатньо «вгадати» відповідні значення елементів. Наприклад, для того, щоб довести відсутність ін'єктивності відображення, достатньо навести лише пару елементів $a, b \in A$, $a \neq b$, на яких $f(a) = f(b)$. Скажімо, $f(x) = x^2$, $A = [-1, 1]$, $B = \mathbb{R}$, маємо

$$a = -1 \in [-1, 1], \quad b = 1 \in [-1, 1], \quad f(a) = f(b) = 1\,.$$

Ін'єктивність «залежить» від множини A : якщо $A = [0, 1]$, то $f(x) = x^2$ ін'єктивне (доведіть це !). Розглянемо тепер наступний

Приклад 3.1. *З'ясувати, чи є відображення $f = 2x^4 + x - 3$ між множинами $A = [-1, 0]$ і $B = [-3\frac{1}{2}, -2]$ а) ін'єктивним; б) сюр'єктивним; в) бієктивним.*

Розв'язок. У даному випадку для розв'язання поставленої задачі знайдемо проміжки монотонності та дослідимо $f(x)$ на екстремуми.

1. Шукаємо область визначення $f(x)$. ОВ: $x \in \mathbb{R}$.

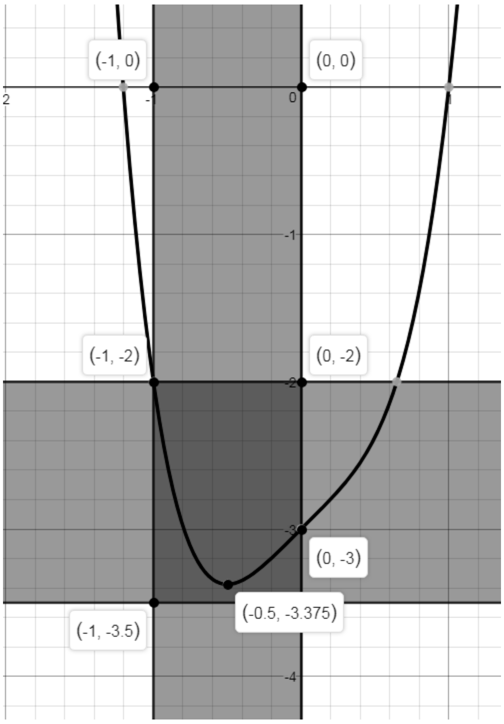
2. Знаходимо похідну $f'(x) = 8x^3 + 1$.

3. Шукаємо критичні точки. Прирівнюємо похідну до нуля та розв'язуємо отримане рівняння $8x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = -1/8 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$.

Отримали розв'язок: $x = -\frac{1}{2}$. Точка $x = -\frac{1}{2}$ розбиває A на два проміжки монотонності $A_1 = [-1, -\frac{1}{2}]$ та $A_2 = [-\frac{1}{2}, 0]$.

4. Перевіримо знак похідної на кожному з цих проміжків. Можна взяти, наприклад, $x_1 = -\frac{3}{4} \in A_1$ і $x_2 = -\frac{1}{4} \in A_2$. Маємо: $f'(x_1) = -2\frac{3}{8} < 0$, отже $f(x)$ на A_1 спадає. Аналогічно $f'(x_2) = \frac{7}{8} > 0$, отже, $f(x)$ зростає на A_2.

Для з'ясування того, чи є f сюр'єкцією, знайдемо $f(A)$, див. зауваження 3.1. Для цього знайдемо екстремуми на заданому проміжку A.



Малюнок 16: Функція $f(x) = 2x^4 + x - 3$

Підставляючи до $f(x)$ значення $x = -\frac{1}{2}$ і кінці проміжку $[-1, 0]$, маємо:

$$f(-1) = -2, \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = -3\frac{3}{8}, \quad f(0) = -3\,.$$

Тепер серед отриманих значень оберемо найбільше і найменше, вони і будуть максимумом і мінімумом $f(x)$ на A, див. малюнок 16. Маємо: $f_{\min} = -3\frac{3}{8}$, $f_{\max} = -2$. За теоремою про проміжні значення f приймає хоча б одному разу всі значення між $f_{\min}$ і $f_{\max}$, тому $f(A) = \left[-3\frac{3}{8}, -2\right]$. Оскільки $-3\frac{3}{8} > -3\frac{1}{2}$, $f(A) \neq B$, отже, відображення f не є сюр'єктивним.

Покажемо тепер, що $f(x)$ не є ін'єкцією.

1 спосіб. Враховуючи знайдене вище і застосовуючи теорему про проміжні значення неперервної функції, маємо: $f|_{A_1,\min} = -3\frac{3}{8}$, $f|_{A_1,\max} = -2$, отже, на A_1 відображення f приймає всі значення від $-3\frac{3}{8}$ до -2 хоча б по одному разу. Звідси $f(A_1) = \left[-3\frac{3}{8}, -2\right]$. Аналогічно, $f|_{A_2,\min} = -3\frac{3}{8}$, $f|_{A_2,\max} = -3$, отже, на A_2 відображення f приймає всі значення від

$-3\frac{3}{8}$ до -3 хоча б по одному разу. Маємо: $f(A_2) = \left[-3\frac{3}{8}, -3\right]$. Візьмемо, наприклад, точку

$$b = -3 \in \left[-3\frac{3}{8}, -3\right] = \left[-3\frac{3}{8}, -2\right] \cap \left[-3\frac{3}{8}, -3\right].$$

Тоді, згідно зазначеного вище, значення $b = -3$ відображення f має приймати хоча б один раз на деякому $a_1 \in A_1$ і хоча б один раз на деякому $a_2 \in A_2$, причому $a_1 \neq a_2$, $a_1 \neq -\frac{1}{2} \neq a_2$. Відсутність ін'єктивності f на A доведено.

2 спосіб. Візьмемо навмання точку $y = -3 \in f(A)$ та розв'яжемо наступне рівняння $-3 = 2x^4 + x - 3 \Rightarrow 2x^4 + x = 0$, розкладемо на множники:

$$2x^4 + x = x(2x^3 + 1) = 0\,.$$

Прирівнюємо кожен з множників до нуля і розв'язуємо відповідні рівняння. Маємо: $x_1 = 0 \in A$, $x_2 = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \in A$. Підставляючи точки x_1 і x_2 до f, маємо: $f(0) = f(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}) = -3$, отже, f не ін'єктивне.

Відповідь на те, чи є f бієкцією можна дати безпосередньо за означенням (у нашому випадку f не бієкція). $\square$

Приклад 3.2. *З'ясувати, чи є відображення*

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & x \in [1, 2], \\ x + 11, & x \in (2, 4] \end{cases}$$

між множинами $A = [1, 4]$ *і* $B = [2, 9] \cup (13, 15]$ *а) ін'єктивним; б) сюр'єктивним; в) бієктивним.*

Розв'язок. Покажемо, що f – бієкція. Для цього потрібно встановити ін'єктивність та сюр'єктивність f між множинами A та B.

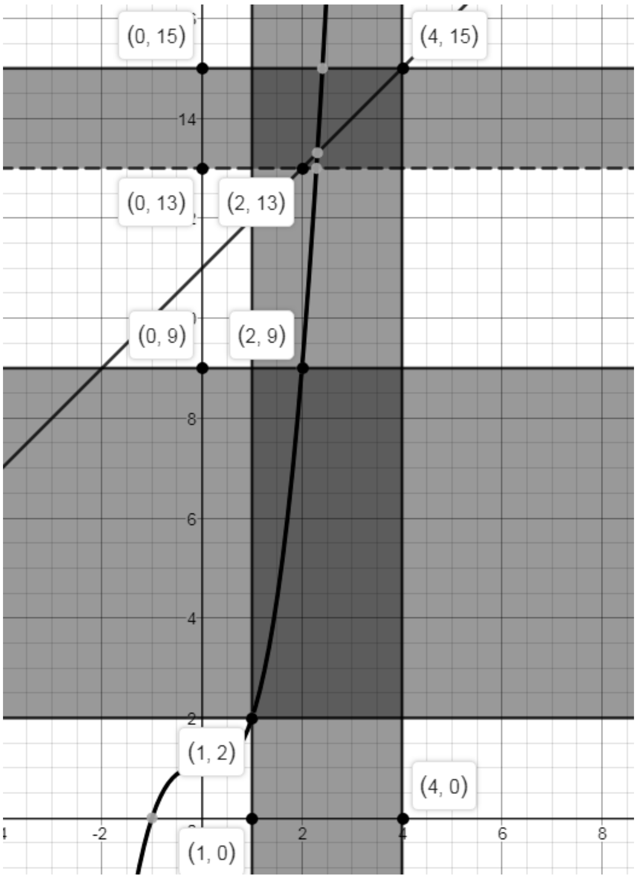
Зробимо наступні позначення: $A_1 = [1, 2], A_2 = (2, 4]$, тоді $A = A_1 \cup A_2$; $B_1 = [2, 9]$, $B_2 = (13, 15]$, тоді $B = B_1 \cup B_2$.

Спочатку перевіримо відображення f на ін'єктивність. Від супротивного, нехай f – не ін'єкція, тоді знайдуться $x_1, x_2 \in A : x_1 \neq x_2, f(x_1) = f(x_2)$. Можливі наступні випадки:

1) $x_1, x_2 \in A_1 \Rightarrow x_1^3 + 1 = x_2^3 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$,

2) $x_1, x_2 \in A_2 \Rightarrow x_1 + 11 = x_2 + 11 \Rightarrow x_1 = x_2$,

3) $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2 \Rightarrow x_1^3 + 1 = x_2 + 11$. Оскільки функції $x^3 + 1$ та $x + 11$ неперервні, монотонно зростаючі на $\mathbb{R}$, тому $1^3 + 1 \leqslant f(x_1) \leqslant 2^3 + 1$,



Малюнок 17: Графік функції $f(x)$

звідки маємо: $f(x_1) \in C_1 = [2, 9]$. Аналогічно, $2 + 11 < f(x_2) \leqslant 4 + 11$, отже, $f(x_2) \in C_2 = (13, 15]$. Оскільки $C_1 \cap C_2 = \varnothing$, то $f(x_1) \neq f(x_2)$, див. малюнок 17.

4) Нарешті, випадок $x_1 \in A_2$, $x_2 \in A_1$ зводиться до випадку 3), оскільки x_1 і x_2 – «рівноправні змінні», отже, ми можемо перепозначити $\widetilde{x_1} := x_2$, $\widetilde{x_2} := x_1$ і міркувати далі так, як в попередньому пункті.

В усіх чотирьох випадках маємо $f(x_1) \neq f(x_2)$. Суперечність, отримана вище, вказує на те, що f – ін'єкція між множинами A та B.

Тепер перевіримо відображення f на сюр'єктивність. Зафіксуємо $y^* \in B$ і покажемо, що для нього знайдеться принаймні одне значення $x^* \in A$ таке, що $f(x^*) = y^*$. Іншими словами, нам потрібно довести, що рівняння $f(x) = y^*$ має розв'язок відносно x при кожному $y^* \in B$, крім того, цей розв'язок належить A. Можливі кілька випадків:

1) $y^* \in B_1$, тоді розв'яжемо рівняння $x^3 + 1 = y^*$. Звідси $x^3 = y^* - 1$, $x = \sqrt[3]{y^* - 1}$. Покладемо $x^* := \sqrt[3]{y^* - 1}$. Оскільки $y^* \in B_1$, то $2 \leqslant y^* \leqslant 9$, звідси $1 \leqslant y^* - 1 \leqslant 8$ і, добудемо з обох частин корінь кубічний, отримаємо: $1 \leqslant x^* := \sqrt[3]{y^* - 1} \leqslant 2$. Отже, $x^* \in A_1 \subset A$, $f(x^*) = y^*$. Висновок: знайшовся елемент $x^* \in A$ такий, що $f(x^*) = y^*$.

2) $y^* \in B_2$, тоді розв'яжемо рівняння $x + 11 = y^*$. Звідси $x = y^* - 11$. Покладемо $x^* := y^* - 11$. Оскільки $y^* \in B_2 = (13, 15]$, то $2 < x^* := y^* - 11 < 4$, так що $x^* \in A_2 \subset A$ і $f(x^*) = y^*$.

В обох випадках 1) і 2) рівняння $f(x) = y^*$ має розв'язок відносно x, отже, f – сюр'єкція між A та B. Крім того, оскільки згідно доведеного вище f – ін'єкція між A та B, то також f – бієкція A на B, що і потрібно було довести. $\square$

Приклад 3.3. *З'ясувати, чи можна відобразити напіввідкритий інтервал* $[7, 8)$ *на відрізок* $[7, 8]$ *одночасно за допомогою бієктивного і неперервного відображення* $f : [7, 8) \to [7, 8]$.

Розв'язок. Можливість відобразити $[7, 8)$ на $[7, 8]$ бієктивно випливає з того, що обидві множини мають потужність континуум (побудуйте це відображення !). Покажемо, що одночасно бієктивним і неперервним відображення інтервалу $[7, 8)$ на відрізок $[7, 8]$ бути не може. Для цього доведемо невеличке додаткове

Твердження 3.1. *Нехай* $-\infty < a < b < \infty$, $-\infty < c < d < \infty$, $f : [a, b) \to [c, d]$ *– неперервна ін'єкція, тоді існує* $\lim\limits_{x \to b-0} f(x)$, *причому* $c \leqslant \lim\limits_{x \to b-0} f(x) \leqslant d$.

Доведення. Проведемо доведення від супротивного. Припустимо, що границя $\lim\limits_{x \to b-0} f(x)$ не існує. Тоді за компактністю відрізку $[c, d]$ знайдуться принаймні дві послідовності $x_k \overset{k\to\infty}{\to} b - 0$ і $y_k \overset{k\to\infty}{\to} b - 0$ такі, що $f(x_k) \overset{k\to\infty}{\to} A$, $f(y_k) \overset{k\to\infty}{\to} C$, $A \neq C$. Нехай $0 < \varepsilon < \frac{|A-C|}{2}$, тоді за нерівністю трикутника околи $B(A, \varepsilon) := \{x \in \mathbb{R} : |x - A| < \varepsilon\}$ і $B(C, \varepsilon) := \{x \in \mathbb{R} : |x - C| < \varepsilon\}$ не перетинаються. За означенням границі існує $k_0 \in \mathbb{N}$ такий, що $|f(x_k) - A| < \varepsilon$ і $|f(x_k) - C| < \varepsilon$ при всіх $k \geqslant k_0$. Без обмеження загальності можна вважати, що $A < C$. Розглянемо елемент $x_{k_0} \in [a, b)$. Оскільки $y_k \overset{k\to\infty}{\to} b - 0$, існує номер $k_1 > k_0$ такий, що $y_{k_1} > x_{k_0}$. Аналогічно, оскільки $x_k \overset{k\to\infty}{\to} b - 0$, існує номер $k_2 > k_1$ такий, що $x_{k_2} > y_{k_1}$.

Зауважимо, що $f(x_{k_0}), f(x_{k_2}) \in B(A, \varepsilon)$ і, водночас, $f(y_{k_1}) \in B(C, \varepsilon)$.

Більше того, оскільки $B(A,\varepsilon)\cap B(C,\varepsilon)=\varnothing$, $0<\varepsilon<\frac{|A-C|}{2}$ і за припущенням $A<C$, то

$$\max\{f(x_{k_0}),f(x_{k_2})\}<A+\varepsilon<C-\varepsilon<f(y_{k_1})\,,$$

або більш коротко

$$\max\{f(x_{k_0}),f(x_{k_2})\}<f(y_{k_1})\,,$$

де

$$a<x_{k_0}<y_{k_1}<x_{k_2}<b\,.$$

За теоремою про проміжні значення відображення f приймає всі значення між $f(x_{k_0})$ і $f(y_{k_1})$ на відрізку $[x_{k_0},y_{k_1}]$ хоча б по одному разу, так само f приймає всі значення між $f(y_{k_1})$ і $f(x_{k_2})$ на відрізку $[y_{k_1},x_{k_2}]$ хоча б по одному разу. Тоді f приймає принаймні один раз всі значення з відрізку $[\max\{f(x_{k_0}),f(x_{k_2})\},f(y_{k_1})]$ на $[x_{k_0},y_{k_1}]$ і всі значення з того ж відрізку $[\max\{f(x_{k_0}),f(x_{k_2})\},f(y_{k_1})]$ на $[y_{k_1},x_{k_2}]$. Останнє суперечить ін'єктивності f на $[a,b)$.

Нерівності $c\leqslant\lim\limits_{x\to b-0}f(x)\leqslant d$ випливають з теореми про граничний перехід у нерівностях з курсу математичного аналізу $\square$

Повернемося тепер до прикладу 3.3. Припустимо супротивне, а саме, що існує таке відображення $f:[7,8)\to[7,8]$, яке одночасно бієктивне і неперервне. За твердженням 3.1 існує границя $D:=\lim\limits_{x\to 8-0}f(x)$, причому $7\leqslant D\leqslant 8$. Позначимо через $\overline{f}:[7,8]\to[7,8]$ неперервне відображення, яке є продовженням f до замкненого відрізку $[7,8]$. Оскільки за припущенням $f([7,8))=[7,8]$, існує також $x_0\in[7,8)$ таке, що $\overline{f}(x_0)=f(x_0)=D$. Оскільки f – бієкція, то існує $x_1\in(x_0,8)$ таке, що $f(x_1)\neq D$. Нехай $f(x_1)>D$, тоді на проміжку $[x_0,x_1]$ відображення f приймає хоча б по одному разу всі значення між D і $f(x_1)$, крім того, відображення f приймає хоча б по одному разу всі значення між D і $f(x_1)$ на півпроміжку $[x_1,8)$, що суперечить ін'єктивності f. Випадок $f(x_1)<D$ розглядається аналогічно. Отже, припущення щодо наявності бієкції півінтервалу $[7,8)$ на відрізок $[7,8]$ було невірним. $\square$

3.2 Завдання для самоконтролю

1. Побудуйте приклад бієктивного відображення $f : [0,1] \to [0,1]$, яке є: а) розривним в кожній точці області визначення; 2) немає похідних в кожній точці області визначення (чи існують такі відображенння ? Відповідь обґрунтуйте).

2. Відображення $f^{-1} : B \to A$ називається *оберненим* до відображення $f : A \to B$, якщо $f^{-1}(f(x)) = x$ для кожного $x \in A$ і $f(f^{-1}(y)) = y$ для кожного $y \in B$. Нехай $f : A \to B$ – ін'єкція. Чи існує в цьому випадку f^{-1}? Що можна сказати, якщо f – сюр'єкція, або f – бієкція ?

3. Чи існує відображення f множин A і B, яке є неперервним на A і яке має обернене відображення f^{-1}, але f^{-1} є розривним ?

4. Чи існує бієкція: а) $[0,1]$ на $(0,1]$; б) $[0,1]$ на $\mathbb{R}$?

5. Чи існує бієкція: а) $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}^2$; б) $[0,1]$ на $\mathbb{R}^2$?

6*. Чи існує у питаннях 4 та 5 неперервна бієкція відповідних множин в разі позитивної відповіді на них ?

7. Відображення $f : A \to f(A)$, $f(A) \subset B$, називається *гомеоморфізмом* A в B, якщо f взаємно однозначне, неперервне, має обернене $f^{-1} : f(A) \to A$ і, крім того, f^{-1} є неперервним на $f(A)$. Чи є в цьому випадку f бієкцією A на B ? В разі негативної відповіді, яку додаткову умову для відповіді «так» тут потрібно накласти ?

8. Чи є бієктивне відображення $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ обмеженим ?

9. Нехай $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ – два сюр'єктивних відображення. Чи є сюр'єктивним відображення: а) $f_1 \pm f_2$; б) $f_1 \cdot f_2$?

10. Нехай $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ – два ін'єктивних відображення. Чи є ін'єктивним відображення: а) $f_1 \pm f_2$; б) $f_1 \cdot f_2$?

11. Нехай $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ – два бієктивних відображення. Чи є бієктивним відображення: а) $f_1 \pm f_2$; б) $f_1 \cdot f_2$?

12. Нехай $f : A \to B$ і $g : B \to C$ – два довільні відображення. Покладемо $F(x) := g(f(x))$. Чи є: а) відображення $F : A \to C$ сюр'єктивним, якщо f і g – сюр'єктивні ?; б) відображення $F : A \to C$ ін'єктивним, якщо f і g – ін'єктивні ?; в) відображення $F : A \to C$ бієктивним, якщо f і g – бієктивні ?

3.3 Завдання для самостійної роботи № 4

Задача 4. *З'ясувати, чи є відображення $f =$ між множинами A і B для кожного з варіантів: а) ін'єктивним; б) сюр'єктивним; в) біективним.*

Варіант	**Множина A**	**Множина B**	**Відображення f**
1	$A = [0, 2]$	$B = [4, 33]$	$f(x) = 14x + 5$
2	$A = [-2, 1]$	$B = [-65, 0]$	$f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 3x - 5$
3	$A = [-\frac{3\pi}{4}, 0]$	$B = [4, 6]$	$f(x) = \cos(\frac{4}{3}x) + 5$
4	$A = [\frac{1}{2}, 3]$	$B = [2, 3\frac{1}{2}]$	$f(x) = x + \frac{1}{x}$
5	$A = [-1, 1]$	$B = [\frac{2}{3}, 4\frac{2}{3}]$	$f(x) = 2x^3 + \frac{8}{3}$
6	$A = [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$	$B = [0, 2]$	$f(x) = 2\tan(\frac{x}{2})$
7	$A = [\frac{2}{5}, \frac{4}{5}]$	$B = [-10\frac{9}{10}, -10\frac{3}{5}]$	$f(x) = \frac{5}{8}x^2 - 11$
8	$A = [2\frac{4}{5}, 3\frac{1}{4}]$	$B = [4\frac{2}{5}, 4\frac{19}{25}]$	$f(x) = -\frac{4}{5}x + 7$
9	$A = [\frac{\pi}{14}, \frac{3\pi}{14}]$	$B = [-1, 1]$	$f(x) = \frac{1}{14}\cos 7x$
10	$A = [-\frac{2}{5}, \frac{4}{3}]$	$B = [\frac{1}{2}, 2]$	$f(x) = \frac{2}{11}x^3 + 1$
11	$A = [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$	$B = [0, 1]$	$f(x) = \sin(3x - \frac{\pi}{2})$
12	$A = [\frac{1}{2}, 2]$	$B = [1\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}]$	$f(x) = \ln 5x + 1$
13	$A = [-2, -1]$	$B = [2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}]$	$f(x) = \frac{3}{8}x^3 - 3x$
14	$A = [0, 1]$	$B = [-\frac{69}{52}, 3]$	$f(x) = 13x^2 - 11x + 1$
15	$A = [4, 6]$	$B = [2, 3\frac{1}{2}]$	$f(x) = 3\ln\frac{x}{2}$
16	$A = [-\frac{1}{2}, 1]$	$B = [4, 4\frac{6}{7}]$	$f(x) = \frac{6}{7}x^2 + 4$
17	$A = [\frac{4\pi}{7}, \frac{6\pi}{7}]$	$B = [-1, 1]$	$f(x) = -\cos\frac{7}{2}x$
18	$A = [-2, 2]$	$B = [-2, -1]$	$f(x) = \frac{1}{16}x^4 - 2$
19	$A = [0, 6]$	$B = [-9, 3]$	$f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x$
20	$A = [-1, 0]$	$B = (-2\frac{1}{2}, 2)$	$f(x) = \frac{11}{3}x + \frac{14}{9}$
21	$A = [1, 2e]$	$B = [0, 1\frac{4}{5}]$	$f(x) = \ln x^3$
22	$A = [\frac{3\pi}{2}, 3\pi]$	$B = [-\frac{1}{4}, 0]$	$f(x) = \frac{1}{4}\cos\frac{x}{3}$
23	$A = [\pi, \frac{3\pi}{2}]$	$B = [-2, 0]$	$f(x) = 2\cos(-\frac{x}{2})$
24	$A = [2, 3]$	$B = [13, 21\frac{1}{4}]$	$f(x) = \frac{1}{8}x^2 + 7x - 2$
25	$A = [-1, 2]$	$B = [0, 4]$	$f(x) = -x^3 + 2x^2$
26	$A = [e^{-2}, 1]$	$B = [-\frac{1}{2}, 0]$	$f(x) = x\ln x$
27	$A = [\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$	$B = [-3, 0]$	$f(x) = \ln\sin\frac{x}{2}$
28	$A = [\frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{3}]$	$B = [0, 1]$	$f(x) = 2\cos^2\frac{x}{2}$
29	$A = [-1, \frac{1}{2}]$	$B = [-15\frac{5}{6}, 0]$	$f(x) = \frac{5}{6}x^3 - 15x^2$
30	$A = [-1, 1]$	$B = (0, 65)$	$f(x) = (5x + 3)^2 + 1$

4 Зчисленні множини

4.1 Загальна теорія і приклади

Означення 4.1. Множини A і B називаються *еквівалентними*, пишуть

$$A \sim B\,,$$

якщо існує бієкція (взаємно однозначна відповідність) $f : A \to B$ множини A *на* множину B. В цьому випадку також говорять, що A і B мають однакову *потужність*, або що множини A і B є *рівнопотужними*. Для скінченних множин еквівалентність двох множин означає однакову кількість їх елементів (обґрунтуйте !).

Означення 4.2. Множина A називається *зчисленною*, якщо $A \sim \mathbb{N}$, тобто, існує бієкція (взаємно однозначна відповідність) $f : A \to \mathbb{N}$, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Іншими словами, A – зчисленна тоді і тільки тоді, коли всі елементи множини A можуть бути пронумеровані.

Зауважимо, що A – зчисленна $\Leftrightarrow A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_i \neq a_j$, $i \neq j$.

Приклади зчисленних множин:

1) Множина натуральних чисел $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, \}$.

2) Множина цілих чисел $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$.

3) Множина раціональних чисел $\mathbb{Q} = \left\{x = \frac{a}{b}, \quad a \in \mathbb{Z}, \quad b \in \mathbb{N}\right\}$.

4) Множина *алгебраїчних чисел.* Дійсне число a називається *алгебраїчним*, якщо воно є коренем деякого многочлена $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, де $a_i \in \mathbb{Z}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1, n$.

Покажемо спосіб доведення алгебраїчності числа, шляхом знаходження многочлена, якому воно задовольняє. Розглянемо наступний

Приклад 4.1. *Довести, що дане число* $\alpha = \sqrt{\sqrt{6} - \sqrt{3}} \in \mathbb{R}$ *є алгебраїчним.*

Розв'язок. Щоб знайти многочлен, коренем якого є задане число α розглянемо рівняння $x = \sqrt{\sqrt{6} - \sqrt{3}}$. Число α є коренем цього рівняння.

Тепер перетворимо його, піднесемо до квадрату та позбавимось від ірраціональних коефіцієнтів. $x^2 = \sqrt{6} - \sqrt{3} \Rightarrow x^4 = 9 - 2\sqrt{18} \Rightarrow 72 = (9 - x^4)^2$. І, нарешті, отримали рівняння $x^8 - 18x^4 + 9 = 0$.

В результаті зроблених перетворень не відбулося втрати коренів. Отже, число $\alpha = \sqrt{\sqrt{6} - \sqrt{3}}$ є коренем одержаного рівняння або многочлена $f(x) = x^8 - 18x^4 + 9$, а це означає, що число α є алгебраїчним числом. $\square$

Видатний математик Георг Кантор довів, що множина $[0,1]$ не є зчисленною, тобто, при будь-якій перенумерації відрізку $[0,1]$ знайдеться принаймні одне число, яке «не отримає свій номер». Звідси нескладно отримати твердження про те, що числова пряма $\mathbb{R}$ та напівпряма $(0,\infty)$ незчисленні. Незчисленними є також множини всіх ірраціональних чисел і чисел, що не є алгебраїчними (їх називають *трансцендентними* числами).

Основні властивості зчисленних множин

i_1) Якщо A – зчисленна множина і $B \subset A$, то множина B є або порожньою, або скінченною, або зчисленною.

i_2) «Додавання нуля». Якщо A – нескінченна і B – зчисленна, то $A \sim A \cup B$. Якщо A – нескінченна, B – зчисленна і $A \setminus B$ також нескінченна, то $A \setminus B \sim A$.

i_3) Будь яка нескінченна множина C містить в собі принаймні одну зчисленну підмножину A.

i_4) Якщо A_i, $i = 1, 2, \ldots$ – послідовність зчисленних множин, то

$$A := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

– зчисленна множина.

i_5) Якщо $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – зчисленні множини, то декартів добуток $A := A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ – зчисленна множина.

Приклад 4.2. *Нехай*

$$A := \{x \in \mathbb{R} : \exists\, k \in \mathbb{N} : x = 6k - 7\}, B := \{y \in \mathbb{R} : \exists\, m \in \mathbb{N} : y = 5m - 6\}.$$

Довести, що множина $A \cup B$ є зчисленною і встановити бієкцію $f : A \cup B \to \mathbb{N}$.

Розв'язок. Передусім, множина $A \cup B$ є зчисленною за властивістю i_1) у наведеному вище переліку, бо $A \cup B \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ зчисленна, крім того, скінченною/порожньою множина $A \cup B$ бути не може.

Встановимо тепер бієкцію $f : A \cup B \to \mathbb{N}$. Все було б достатньо просто, якщо б множини A і B не перетиналися, але, на жаль, в даному випадку перетин A і B не є порожнім. Отже, для подальшого розв'язання

I. З'ясуємо, чому дорівнює $A \cap B$. Для цього розглянемо рівняння $6k - 7 = 5m - 6$, або еквівалентне до нього

$$6k - 5m - 1 = 0\,. \tag{4.1}$$

Це діофантове рівняння з двома змінними, яке має рішення за відповідною теоремою з теорії чисел, бо Н.С.Д. $(6,5) = 1$ і $1 \vdots$ Н.С.Д. $(6,5)$. Розв'яжемо це рівняння стандартним способом (наприклад, за допомогою алгоритму Евкліда). Маємо: $6 = 5 \cdot 1 + 1$, звідки $6 \cdot 1 - 5 \cdot 1 = 1$. Отже, при кожному $t \in \mathbb{Z}$ отримаємо очевидну систему рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{r} 6 \cdot 1 - 5 \cdot 1 = 1 \\ -6 \cdot 5 \cdot n + 6 \cdot 5 \cdot n = 0 \end{array} \right. . \tag{4.2}$$

Додаючи ці рівняння, маємо $6(1 - 5n) - 5(1 - 6n) = 1$, звідки випливає, що загальний розв'язок рівняння (4.1) має вигляд

$$\left\{ \begin{array}{r} k = 1 - 5n \\ m = 1 - 6n \end{array} \right. , n \in \mathbb{Z} . \tag{4.3}$$

Можна показати, що інших розв'язків, крім (4.3), немає. Зауважимо, шо $k \geqslant 1$ у (4.3) можливі лише при $n \leqslant 0$. Таким чином,

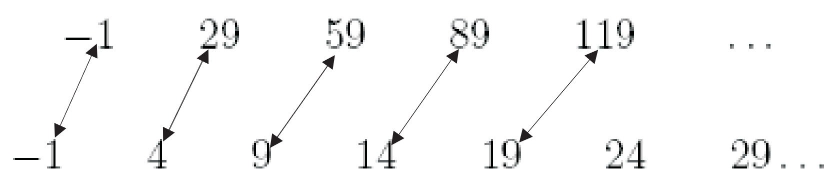
$$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \{0, -1, -2, \ldots\} : x = 6(1 - 5n) - 7\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \{0\} \cup \mathbb{N} : x = 30n - 1\} .$$

II. Встановимо тепер бієкцію $A \cap B$ **на** B за правилом:

$$f_1(x) = 5(m+1) - 6 , \quad x = 30m - 1 , \quad m = 0, 1, 2, \ldots .$$

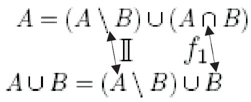
Легко бачити, що f_1 – бієктивне відображення (обґрунтуйте це !). Див. малюнок 18 для ілюстрації.



Малюнок 18: Бієкція $A \cap B$ на B

III. Встановимо тепер бієкцію A **на** $A \cup B$ наступним чином (див. малюнок 19), де $\mathbb{I}$ позначає тотожне відображення. Запишемо вказане відображення аналітично:

$$g(x) = \left\{ \begin{array}{rr} x, & x = 6k - 7, \quad k \neq 5m + 1, \\ 5(m+1) - 6, & x = 6k - 7, k = 5m + 1 \end{array} \right. , \tag{4.4}$$



Малюнок 19: Бієкція A на $A \cup B$

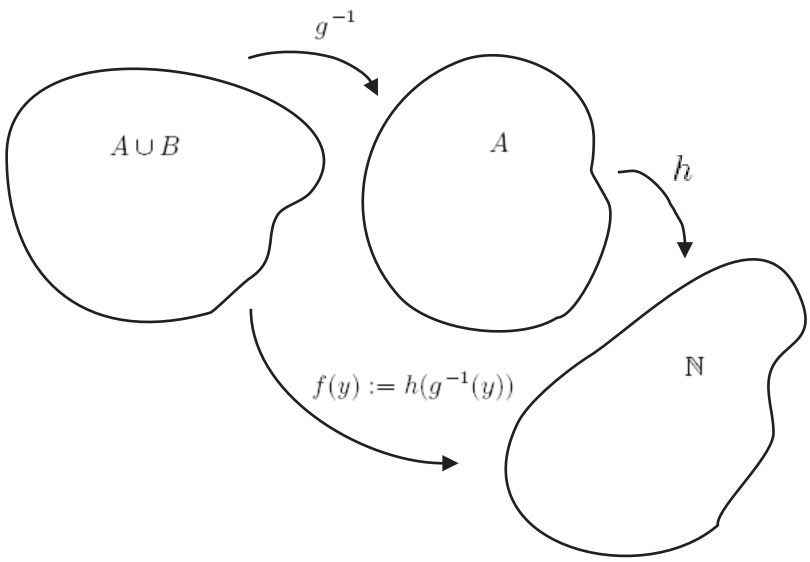
$k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. З означення випливає, що відображення g є бієкцією. Тепер, за співвідношенням (4.4) отримаємо, що

$$g^{-1}(y) = \begin{cases} y, & y = 6k - 7, \quad k \neq 5m + 1, \\ 6k - 7, & y = 5(m+1) - 6, k = 5m + 1 \end{cases}, \tag{4.5}$$

$k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Зрозуміло, що g^{-1} відображає $A \cup B$ бієктивно на A.

IV. Встановимо бієкцію A на $\mathbb{N}$. Якщо $x = 6k - 7$, знайдемо k : $k = (x + 7)/6$. Відображення $h : A \to \mathbb{N}$, визначене як $h(x) = (x + 7)/6$, відображає A на $\mathbb{N}$ бієктивно.

V. Бажане бієктивне відображення $A \cup B$ на $\mathbb{N}$ визначимо так: $f(y) := h(g^{-1}(y))$, див. малюнок 20 для ілюстрації.



Малюнок 20: Бієкція $A \cup B$ на $\mathbb{N}$

Аналітично f запишеться так:

$$f(y) = (h \circ g^{-1})(y) = \begin{cases} (y + 7)/6, & y = 6k - 7, \quad k \neq 5m + 1, \\ k, & y = 5(m+1) - 6, k = 5m + 1 \end{cases},$$

$k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Трохи спрощуючи цей вираз, ми отримаємо, що

$$f(y) = (h \circ g^{-1})(y) = \left\{ \begin{array}{ll} k, & y = 6k - 7, \quad k \neq 5m + 1, \\ k, & y = 5(m + 1) - 6, k = 5m + 1 \end{array} \right. ,$$

$k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. $\square$

4.2 Завдання для самоконтролю

1. Чи є перетин двох зчисленних множин зчисленною множиною ?

2. Доведіть, що множина всіх дівчат на світі є зчисленною.

3. Чи є зчисленною множина:

а) всіх скінченних послідовностей натуральних чисел;

б) всіх послідовностей натуральних чисел;

в) всіх можливих послідовностей, складених з елементів 0 і 1 ?

4. Нехай множина A – зчисленна, B – деяка задана множина і $f : A \to B$ – відображення A в B. Чи буде B зчисленною множиною, якщо: а) f – ін'єкція; б) f – сюр'єкція; в) f – бієкція ?

5*. Нехай $\mathbb{Q}$ – множина всіх раціональних чисел відрізку $[a, b]$, $\mathbb{Q} = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, h_k – деяка послідовність позитивних чисел $h_i > 0$ таких, що $\sum\limits_{i=1}^{\infty} h_i < \infty$, $h(x) = \sum\limits_{x_i < x} h_i, \quad x \in (a, b], \quad h(a) = 0$ -відповідна функція стрибків. Яку потужність має множина значень функції h – зчисленна, або континуум ?

Вказівка. Тут множиною потужності континуум називається множина, кількість елементів котрої дорівнює кількості елементів в $\mathbb{R}$, або, що є те ж саме, кількості елементів відрізку $[a, b]$. Доведіть, що функція h буде строго зростаючою, а за цим скористайтеся тим, що множина ірраціональних чисел відрізку $[a, b]$ має ту ж саму потужність, що і множина всіх точок відрізку $[a, b.]$

4.3 Завдання для самостійної роботи № 5

Задача 5. *Довести, що дане число $\alpha \in \mathbb{R}$ є алгебраїчним для кожного з варіантів.*

Варіант	**Число**	**Варіант**	**Число**
1	$\alpha = \sqrt{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$	16	$\alpha = \sqrt{3 - \sqrt{6}}$
2	$\alpha = \sqrt{\sqrt{8} - \sqrt{5}}$	17	$\alpha = \sqrt{\sqrt{10} - \sqrt{5}}$
3	$\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{\sqrt{2} - 1}$	18	$\alpha = \sqrt{\sqrt{6} - 4}$
4	$\alpha = \sqrt{25 - \sqrt{5}}$	19	$\alpha = \sqrt{\sqrt{11} - \sqrt{10}}$
5	$\alpha = \sqrt{\sqrt{10} - \sqrt{5}}$	20	$\alpha = \sqrt{18} - \sqrt{5}$
6	$\alpha = \sqrt{\sqrt{12} - \sqrt{5}}$	21	$\alpha = \sqrt{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$
7	$\alpha = \sqrt{\sqrt{13} + \sqrt{5}}$	22	$\alpha = \sqrt{\sqrt{7} + \sqrt{5}}$
8	$\alpha = \sqrt{\sqrt{17} - \sqrt{5}}$	23	$\alpha = \sqrt{3 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$
9	$\alpha = \sqrt{4 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$	24	$\alpha = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{2}}}$
10	$\alpha = \sqrt{3 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$	25	$\alpha = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$
11	$\alpha = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{3}}}$	26	$\alpha = \sqrt{2 + \sqrt{1 + \sqrt{2}}}$
12	$\alpha = \sqrt{4 + \sqrt{1 + \sqrt{2}}}$	27	$\alpha = \sqrt{3 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$
13	$\alpha = \sqrt{3 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$	28	$\alpha = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{3}}}$
14	$\alpha = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$	29	$\alpha = \sqrt{3 + \sqrt{1 + \sqrt{2}}}$
15	$\alpha = \sqrt{4 + \sqrt{3 + \sqrt{3}}}$	30	$\alpha = \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3}}}$

4.4 Завдання для самостійної роботи № 6

Задача 6. *Довести, що множина* $A \cup B$ *є зчисленною і встановити бієкцію* $f: A \cup B \to \mathbb{N}$ *для кожного з варіантів.*

Варіант	Множина A	Множина B
1	$A := \{x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{N} : x = 3k - 7\}$	$B := \{y \in \mathbb{R} : \exists m \in \mathbb{N} : y = 2m - 6\}$
2	$A := \{x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{N} : x = 3k - 6\}$	$B := \{y \in \mathbb{R} : \exists m \in \mathbb{N} : y = 5m - 1\}$
3	$A := \{x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{N} : x = 3k + 1\}$	$B := \{y \in \mathbb{R} : \exists m \in \mathbb{N} : y = 2m - 8\}$
4	$A := \{x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{N} : x = 3k + 2\}$	$B := \{y \in \mathbb{R} : \exists m \in \mathbb{N} : y = 2m + 4\}$
5	$A := \{x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{N} : x = 4k + 3\}$	$B := \{y \in \mathbb{R} : \exists m \in \mathbb{N} : y = 2m - 8\}$
6	$A := \{x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{N} : x = 10k\}$	$B := \{y \in \mathbb{R} : \exists m \in \mathbb{N} : y = 2m - 1\}$
7	$A := \{x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{N} : x = 1/k\}$	$B := \{y \in \mathbb{R} : \exists m \in \mathbb{N} : y = 5m\}$
8	$A := \{x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{N} : x = 1/k^2\}$	$B := \{y \in \mathbb{R} : \exists m \in \mathbb{N} : y = 4m - 1\}$
9	$A := \{x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{N} : x = 2k - 3\}$	$B := \{y \in \mathbb{R} : \exists m \in \mathbb{N} : y = 7m\}$
10	$A := \{x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{N} : x = 7k + 1\}$	$B := \{y \in \mathbb{R} : \exists m \in \mathbb{N} : y = 7m - 3\}$
11	$A := \{x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{N} : x = 15k\}$	$B := \{y \in \mathbb{R} : \exists m \in \mathbb{N} : y = 4m - 2\}$
12	$A := \{x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{N} : x = 6k - 7\}$	$B := \{y \in \mathbb{R} : \exists m \in \mathbb{N} : y = 5m + 8\}$
13	$A := \{x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{N} : x = 6k - 1\}$	$B := \{y \in \mathbb{R} : \exists m \in \mathbb{N} : y = 5m - 4\}$
14	$A := \{x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{N} : x = 6k\}$	$B := \{y \in \mathbb{R} : \exists m \in \mathbb{N} : y = 7m\}$
15	$A := \{x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{N} : x = 7k + 9\}$	$B := \{y \in \mathbb{R} : \exists m \in \mathbb{N} : y = 8m\}$
16	$A := \{x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{N} : x = 8k + 1\}$	$B := \{y \in \mathbb{R} : \exists m \in \mathbb{N} : y = 3m + 2\}$
17	$A := \{x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{N} : x = 5k + 3\}$	$B := \{y \in \mathbb{R} : \exists m \in \mathbb{N} : y = 6m - 4\}$
18	$A := \{x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{N} : x = 7k - 1\}$	$B := \{y \in \mathbb{R} : \exists m \in \mathbb{N} : y = 8m + 2\}$
19	$A := \{x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{N} : x = 8k - 1\}$	$B := \{y \in \mathbb{R} : \exists m \in \mathbb{N} : y = 9m + 2\}$
20	$A := \{x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{N} : x = 8k - 2\}$	$B := \{y \in \mathbb{R} : \exists m \in \mathbb{N} : y = 9m + 3\}$
21	$A := \{x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{N} : x = 9k - 1\}$	$B := \{y \in \mathbb{R} : \exists m \in \mathbb{N} : y = 10m - 2\}$
22	$A := \{x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{N} : x = 10k + 2\}$	$B := \{y \in \mathbb{R} : \exists m \in \mathbb{N} : y = 9m - 3\}$
23	$A := \{x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{N} : x = 3k + 4\}$	$B := \{y \in \mathbb{R} : \exists m \in \mathbb{N} : y = 9m - 5\}$
24	$A := \{x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{N} : x = 9k - 6\}$	$B := \{y \in \mathbb{R} : \exists m \in \mathbb{N} : y = 7m - 7\}$
25	$A := \{x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{N} : x = 9k + 8\}$	$B := \{y \in \mathbb{R} : \exists m \in \mathbb{N} : y = 6m + 2\}$
26	$A := \{x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{N} : x = 5k + 2\}$	$B := \{y \in \mathbb{R} : \exists m \in \mathbb{N} : y = 9m + 4\}$
27	$A := \{x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{N} : x = 8k\}$	$B := \{y \in \mathbb{R} : \exists m \in \mathbb{N} : x = 9m\}$
28	$A := \{x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{N} : x = 9k + 2\}$	$B := \{y \in \mathbb{R} : \exists m \in \mathbb{N} : y = 8m + 3\}$
29	$A := \{x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{N} : x = 8k + 3\}$	$B := \{y \in \mathbb{R} : \exists m \in \mathbb{N} : y = 5m + 6\}$
30	$A := \{x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{N} : x = 5k + 8\}$	$B := \{y \in \mathbb{R} : \exists m \in \mathbb{N} : y = 4m + 1\}$

5 Множини потужності континуум

5.1 Загальна теорія і приклади

Означення 5.1. Говорять, що множина A має *потужність континуум*, якщо $A \sim [0,1]$. Еквівалентне означення: множина A має *потужність континуум*, якщо $A \sim \mathbb{R}$.

Деякі приклади множин потужності континуум

1) Множина дійсних чисел $\mathbb{R}$, площина $\mathbb{R}^2$ та тривимірний простір $\mathbb{R}^3$ мають потужність континуум.

2) Будь-який відрізок $[a,b]$ та будь-який відкритий/напіввідкритий інтервал (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$ мають потужність континуум.

3) Множина ірраціональних чисел на прямій має потужність континуум.

4) Множина всіх послідовностей дійсних чисел та множина всіх послідовностей натуральних чисел мають потужність континуум.

5) Множина всіх неперервних функцій має потужність континуум.

Позначення

$\aleph_0$ – потужність множини натуральних чисел (читається: «алєф-нуль»)
$\mathcal{C}$ – потужність континуум

Потужність скінченної множини – це кількість її елементів. Хоча для довільних множин їх потужності не є дійсним числом, потужності можна порівнювати між собою. Якщо мова йде про скінченні множини, порівняння їх потужностей зводиться до банального порівняння кількості елементів цих множин. По-іншому виглядає справа з множинами нескінченними, оскільки, як відомо, серед них можуть бути як рівнопотужні, так і не рівнопотужні множини. Наприклад, кількість елементів множин натуральних і цілих чисел є нескінченною; їх потужності співпадають і дорівнюють $\aleph_0$. З іншого боку, нееквівалентні між собою множини натуральних і дійсних чисел мають нескінченну кількість елементів. Для того, щоб формально визначити співвідношення між потужностями довільних множин A і B, розглянемо наступне

Означення 5.2. Говорять, що множина A має *потужність, меншу за потужність множини* B, пишемо $m(A) < m(B)$, якщо $A \sim A' \subset B$ і, одночасно, $A \not\sim B$.

За теоремою Кантора про незчисленність множини чисел відрізку $[0,1]$, маємо:

$$\aleph_0 < \mathcal{C}\,.$$

Може стати питання про те, чи існує якась множина, яка має «найбільшу» потужність. З цього приводу наведемо наступну теорему.

Теорема 5.1. Нехай A – довільна непорожня множина і 2^A – це множина всіх підмножин A. Тоді

$$m(2^A) > m(A)\,.$$

З теореми 5.1 випливає, що не існує множини, яка б мала «найбільшу» потужність.

Деякі властивості множин потужності континуум

i_1) Об'єднання скінченної або зчисленної кількості множин потужності континуум має потужність континуум

i_2) Декартовий добуток скінченної або зчисленної кількості множин потужності континуум має потужність континуум

i_3) **Теорема Кантора-Бернштейна**. Нехай $A \sim A' \subset B$ і $B \sim B' \subset A$, тоді $A \sim B$. Зокрема, якщо $A \sim A' \subset B$ і $B \sim B' \subset A$, причому A має потужність континуум, то і B має потужність континуум.

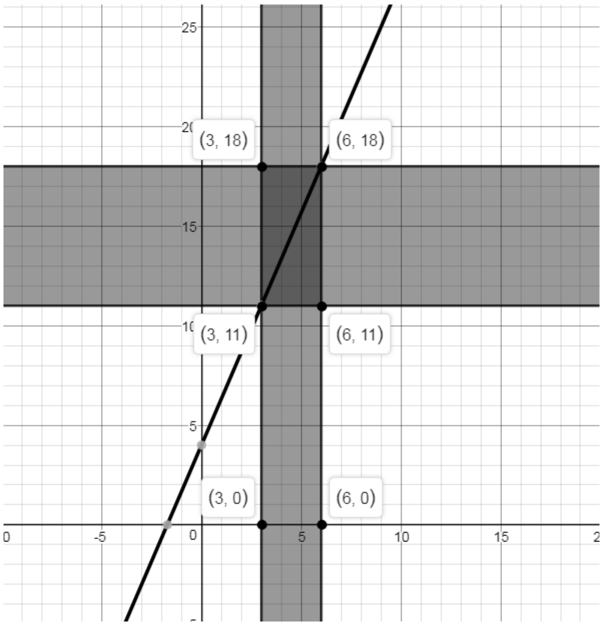
Приклад 5.1. *Побудувати бієкцію множини* $A = [3,6]$ *на множину* $B = [11,18]$.

Розв'язок. Випадок, коли межі у множин A та B мають «однаковий вигляд», досить простий. Майже очевидно, що одним з відображень, за допомогою якого можна розв'язати дану задачу, є лінійна функція $y = kx + b$. Тобто, в такому випадку достатньо розв'язати систему:

$$\begin{cases} 3k + b = 11, \\ 6k + b = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{7}{3}, \\ b = 4. \end{cases}$$

Отже, шукане відображення матиме вигляд: $f(x) = \frac{7}{3}x + 4$ (див. малюнок 21). $\square$

Приклад 5.2. *Побудувати бієкцію множини* $A = [1,2)$ *на множину* $B = [6,7]$.



Малюнок 21: Функція $f(x) = \frac{7}{3}x + 4$

Розв'язок. Виділимо зчисленні підмножини в $[1, 2)$ і $[6, 7]$. Нехай це будуть $y_n = 1 + \frac{1}{n}$ та $x_n = 6 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$.

Тепер встановимо між ними відповідність наступним чином: $x_n \to y_{n+1} : 7 \to \frac{3}{2}, \frac{13}{2} \to \frac{4}{3}, \frac{19}{3} \to \frac{5}{4} \dots$. Тобто, $f(6 + \frac{1}{n}) = 1 + \frac{1}{n+1}$.

І, нарешті, покладемо:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n+1}, & x = 6 + \frac{1}{n}, \\ x - 5, & x \neq 6 + \frac{1}{n} \end{cases}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Всі числа, які належать напівінтервалу $[1, 2)$, досягаються при певних значеннях x.

Отримали відображення $f : [6, 7] \to [1, 2)$, тоді щоб отримати шукане відображення, потрібно знайти обернене ($g = f^{-1}$). Маємо:

$$g(y) = \begin{cases} 6 + \frac{1}{n}, & y = 1 + \frac{1}{n+1}, \\ y + 5, & y \neq 1 + \frac{1}{n+1} \end{cases}, \qquad n \in \mathbb{N}. \ \square$$

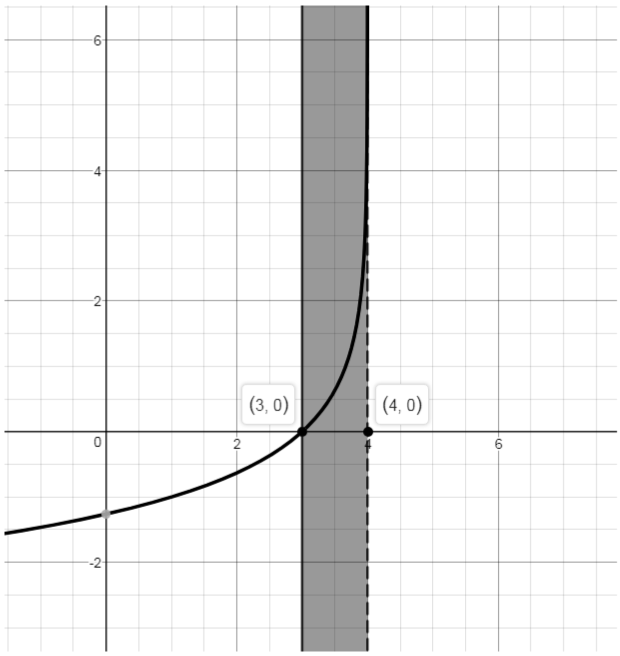
Приклад 5.3. *Побудувати бієкцію множини $A = [3, 4)$ на множину $B = [0, \infty)$.*

Розв'язок. Спробуємо підібрати шукане відображення f. Знайдемо таке монотонне відображення, щоб $f(3) = 0$, а $f(x) \overset{x \to 4-0}{\to} \infty$. Розглянемо $f(x) = \log_3 \frac{1}{4-x}$.

Ця функція є монотонно зростаючою на $[3, 4)$, причому, також можна стверджувати, що всі числа проміжку $[0, \infty)$ досягаються при певному значенні x. Дійсно, яке б ми не взяли $a \in [0, \infty)$ таке, що $a = \log_3 \frac{1}{4-x}$, маємо: $x = 4 - \frac{1}{3^a}$, $3 \leqslant x < 4$ (сюр'єктивність).

Оскільки логарифм - функція монотонна, то ми можемо стверджувати, що ця функція є ін'єкцією.

Отже, $f(x) = \log_3 \frac{1}{4-x}$ – бієкція множини $A = [3, 4)$ на множину $B = [0, \infty)$, див. малюнок 22. $\square$



Малюнок 22: Функція $f(x) = \log_3 \frac{1}{4-x}$

Приклад 5.4. *Відобразити довільний відрізок* $[a, b]$ *на довільний інтервал* (c, d), $-\infty < a < b < \infty$, $-\infty < c < d < \infty$, *за допомогою бієкції.*

Розв'язок. Як ми зараз побачимо, розв'язання даної задачі є достатньо легким і робиться за допомогою двох «стандартних» кроків.

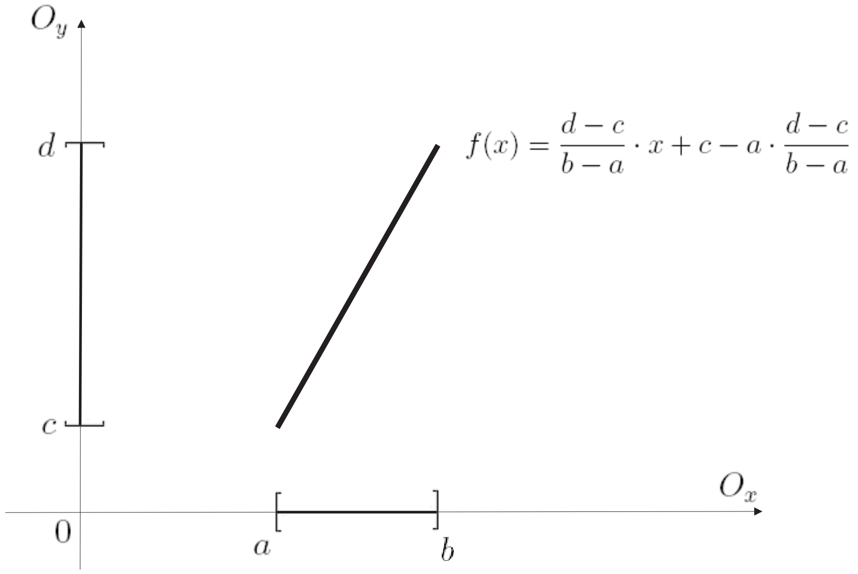
Перший крок – це відображення замкненого інтервалу $[a, b]$ на відрізок $[c, d]$. Можна зробити це за допомогою лінійної функції $f(x) = kx + l$, де коефіцієнти a і b ми підберемо так, щоб $f(a) = c$ і $f(b) = d$. Звідси маємо систему з двох лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} ak + l = c, \\ bk + l = d \end{cases}.$$

З першого рівняння $l = c - ak$, підставимо у друге рівняння: $bk + c - ak = d$, $k(b - a) = d - c$. Оскільки за умовою $a \neq b$, маємо: $k = \frac{d-c}{b-a}$, крім того, зі співвідношення $l = c - ak$ випливає, що $l = c - \frac{a(d-c)}{b-a}$. Отже, наше відображення $f(x)$ має вигляд

$$f(x) = \frac{d-c}{b-a} \cdot x + c - a \cdot \frac{d-c}{b-a},$$

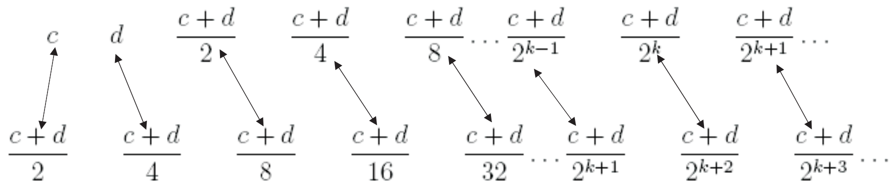
див. малюнок 23. Можна показати, що f – бієкція $[a, b]$ на $[c, d]$ (обґрунтуйте це!). Відобразимо тепер відрізок $[c, d]$ на інтервал (c, d) наступним



Малюнок 23: Одна з можливих бієкцій $[a, b]$ на $[c, d]$

чином. Розглянемо допоміжну послідовність $\alpha_k := \frac{c+d}{2^k}$, $k = 1, 2, \ldots$. Побудуємо тепер взаємно однозначну (бієктивну) відповідність між елементами множин $\{c\} \cup \{d\} \cup \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ і $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ так, як показано на малюнку 24. Аналітично відображення, яке відповідає малюнку 24, можна визначити так:

$$g(y) := \begin{cases} \frac{c+d}{2}, & y = c, \\ \frac{c+d}{4}, & y = d, \\ \frac{c+d}{2^{k+2}}, & y = \frac{c+d}{2^k}, k = 1, 2, \ldots. \end{cases}.$$



Малюнок 24: Одна з можливих бієкцій $\{c\} \cup \{d\} \cup \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ на $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$

Покладемо тепер $g(y) = y$ при $y \in [c,d] \setminus \{c, d, \frac{c+d}{2^k}\}$, $k = 1, 2, \ldots$. Тоді відображення

$$g(y) := \begin{cases} \frac{c+d}{2}, & y = c, \\ \frac{c+d}{4}, & y = d, \\ \frac{c+d}{2^{k+2}}, & y = \frac{c+d}{2^k}, k = 1, 2, \ldots, \\ y, & y \neq c, d, \frac{c+d}{2^k}, k = 1, 2, \ldots \end{cases}.$$

бієктивно (взаємно однозначно) переводить $[c,d]$ на (c,d) (перевірте цей факт !).

Нарешті, композиція $F(x) = g(f(x))$ переводить $[a,b]$ на (c,d) бієктивно. Зрозуміло, що при відображенні F ми маємо: $a \mapsto \frac{c+d}{2}$ і $b \mapsto \frac{c+d}{4}$. Для того, щоб дізнатись, яким елементам $x \in [a,b]$ відповідають точки $y = \frac{c+d}{2^k}, k = 1, 2, \ldots$, треба при кожному $k \in \mathbb{N}$ розв'язати рівняння

$$f(x) = \frac{c+d}{2^k},$$

або

$$\frac{d-c}{b-a} \cdot x + c - a \cdot \frac{d-c}{b-a} = \frac{c+d}{2^k}.$$

Звідси маємо:

$$\frac{d-c}{b-a} \cdot x = \frac{c+d}{2^k} - c + a \cdot \frac{d-c}{b-a},$$

$$x = \frac{b-a}{d-c} \cdot \left(\frac{c+d}{2^k} - c + a \cdot \frac{d-c}{b-a} \right) = \frac{b-a}{d-c} \cdot \left(\frac{c+d}{2^k} - c \right) + a.$$

Отже, аналітичний вигляд функції $F : [a,b] \to (c,d)$, що є бієкцією $[a,b]$ на (c,d), наступний:

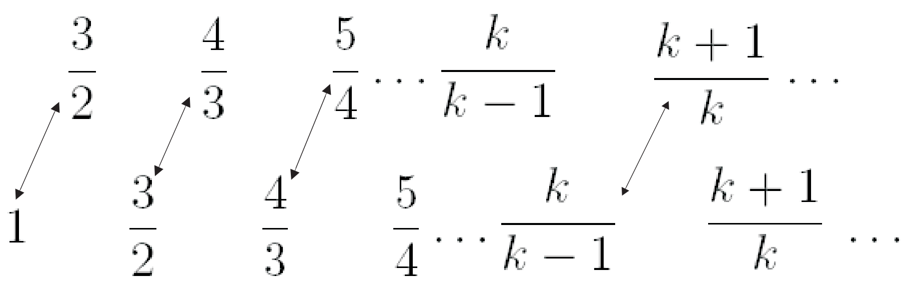
$$F(x) = \begin{cases} \frac{c+d}{2}, & x = a, \\ \frac{c+d}{4}, & x = b, \\ \frac{c+d}{2^{k+2}}, & x = \frac{b-a}{d-c} \cdot \left(\frac{c+d}{2^k} - c \right) + a, k = 1, 2, \ldots, \\ x, & x \neq a, b, \frac{b-a}{d-c} \cdot \left(\frac{c+d}{2^k} - c \right) + a, k = 1, 2, \ldots \end{cases}. \quad \square$$

Приклад 5.5. *Побудувати бієкцію множини* $A = (0, 1)$ *на множину* $B = (0, 1) \cup (1, 2)$.

Розв'язок. Зауважимо, що кожна з множин A і B має потужність континуум, бо, по-перше, $A = (0, 1)$ відображається бієктивно на $\mathbb{R}$ за допомогою відображення $f(x) = \operatorname{ctg}(\pi x)$. По-друге, кожна з множин $(0, 1)$ і $(1, 2)$ має потужність континуум; зокрема, для відрізку $(0, 1)$ цей факт встановлено вище, крім того, $(1, 2)$ – множина потужності континуум, бо $\varphi(x) = x + 1$ – бієкція $(0, 1)$ на $(1, 2)$. Отже, B має потужність континуум як множина, що є об'єднанням двох множин потужності континуум $(0, 1)$ і $(1, 2)$. Отже, постановка задачі є коректною – вказане бієктивне відображення A на B існує.

Побудуємо це відображення. Для цього, по перше,

I. Відобразимо $(1, 2)$ бієктивно на $[1, 2)$. Це можна зробити, наприклад, наступним шляхом. Виділимо з $(1, 2)$ яку-небудь зчисленну послідовність, скажімо, $x_k = 1 + \frac{1}{k}$, $k = 2, 3, \ldots$. Встановимо між множинами $\{x_k\}_{k=2}^{\infty}$ і $\{x_k\}_{k=2}^{\infty} \cup \{1\}$ взаємно однозначну відповідність так, як показано стрілочками на малюнку 25. Неважко виписати це відображення



Малюнок 25: Бієкція $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ на $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \cup \{1\}$

аналітично. Якщо f – це відображення, що відповідає стрілкам на малюнку 25, то $f(\frac{3}{2}) = 1$ і $f\left(\frac{k+1}{k}\right) = \frac{k}{k-1}$ при всіх $k = 3, 4, 5, \ldots$. Покладемо $f(x) = x$ при всіх $x \in (1, 2) \setminus \{1 + \frac{1}{k}\}_{k=2}^{\infty}$. Тоді відображення

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (1,2) \setminus \{1 + \frac{1}{k}\}_{k=2}^{\infty}, \\ 1, & x = \frac{3}{2}, \\ \frac{k}{k-1}, & x = \frac{k+1}{k}, k = 3, 4, 5, \ldots \end{cases} \tag{5.1}$$

переводить $(1, 2)$ на $[1, 2)$ бієктивно. Розглянемо обернене відображення

$g := f^{-1} : [1,2) \to (1,2)$. Легко бачити, що це відображення має вигляд

$$g^{-1}(y) = \begin{cases} y, & y \in (1,2) \setminus \{1+\frac{1}{k}\}_{k=2}^{\infty}, \\ \frac{3}{2}, & y = 1, \\ \frac{k+1}{k}, & y = \frac{k}{k-1}, k = 3,4,5,\ldots \end{cases}. \tag{5.2}$$

II. Побудуємо тепер відображення $(0,1)$ на $(0,2)$, що робиться елементарно: покладемо, наприклад, $h(x) = 2x$.

III. Тепер візьмемо $F(x) := 2x$ при $x \in (0, \frac{1}{2})$ і $F(x) := g(h(x))$. Переконаємось в тому, що це і є бажане відображення. Для цього, по перше, випишемо F аналітично:

$$F(x) = \begin{cases} 2x, & x \in (0,1) \setminus \{\frac{1}{2}+\frac{1}{2k}\}_{k=2}^{\infty}, \\ \frac{3}{2}, & x = \frac{1}{2}, \\ \frac{k+1}{k}, & x = \frac{k}{2(k-1)}, k = 3,4,5,\ldots \end{cases}. \tag{5.3}$$

Тут ми врахували, що прообразами точок $y = \frac{k}{k-1}$ при відображенні h будуть «вдвічі менші точки x», тобто точки вигляду $x = \frac{k}{2(k-1)}$. Зокрема, точці 1 в такому контексті відповідає точка $\frac{1}{2}$. Відображення F переводить $(0, \frac{1}{2})$ на інтервал $(0,1)$. Далі, F переводить $[\frac{1}{2}, 1)$ на відкритий інтервал $(1,2)$, бо F – це послідовна дія спочатку відображення h, що переводить $[\frac{1}{2}, 1)$ на $[1,2)$, а потім g, що переводить $[1,2)$ на $(1,2)$. Таким чином, F переводить $(0,1)$ на $(0,1) \cup (1,2)$. □

Приклад 5.6. *Довести існування бієкції відрізку* $[0,1]$ *на себе, яка є розривною в усіх точках своєї області визначення.*

Розв'язок. Нехай, як завжди, $\mathbb{Q}$ – множина раціональних чисел на $\mathbb{R}$. Покладемо $x_k = \frac{1}{k}$, $k = 1,2,\ldots$. Оскільки $(\mathbb{Q} \cap [0,1]) \setminus \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ – нескінченна множина, то вона також є зчисленною, тобто, $(\mathbb{Q} \cap [0,1]) \setminus \{\frac{1}{k}\}_{k=1}^{\infty} = \{y_k\}_{k=1}^{\infty}$. Покладемо тепер

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}, \\ y_k, & x = \frac{1}{k}, k = 1,2,\ldots, \\ \frac{1}{k}, & x = y_k \in (\mathbb{Q} \cap [0,1]) \setminus \{\frac{1}{k}\}_{k=1}^{\infty}, k = 1,2,\ldots \end{cases}. \tag{5.4}$$

Відображення f бієкцією $[0,1]$ на себе, бо різні елементи при ньому переходять в різні, крім того, за побудовою, кожен елемент $y \in [0,1]$ має свій прообраз x в $[0,1]$ при відображенні f, тобто, $f(y) = x$.

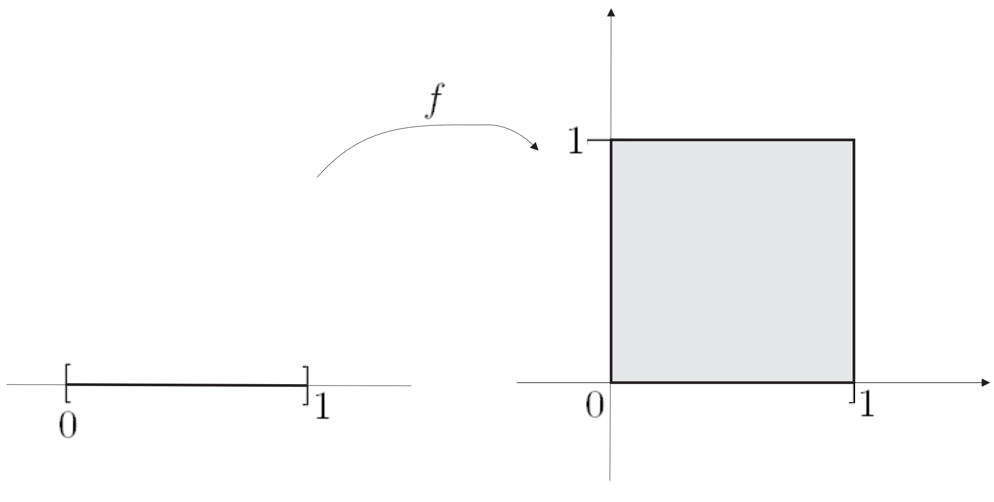
Доведемо, що f є розривним в кожній точці $x \in [0,1]$. Нехай $x \in [0,1]$, тоді зі щільності множини $\mathbb{Q}$ на $[0,1]$ випливає, що існує послідовність $\alpha_n \in \mathbb{Q}$, $n = 1,2,\ldots$, така що $\alpha_n \to x$ при $n \to \infty$.

Якщо $x \neq 0$, то послідовність α_n можна обрати так, що $\alpha_n \notin \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$. Тоді $f(\alpha_n) = \frac{1}{k_n}$, де k_n – це деяка послідовність, така що $\alpha_n = \frac{1}{k_n} = y_{k_n}$. Покладемо $n = 1$. Оскільки k_n – нескінченна послідовність натуральних чисел, знайдеться номер $n_1 > 1$ такий, що $k_{n_1} > k_1$. Оскільки послідовність k_n, $n > n_1$, є нескінченною, знову знайдеться номер $n_2 > n_1$ такий, що $k_{n_2} > k_{n_1}$. І так далі. В результаті нами отримано послідовності $n_1 < n_2 < n_2 < \dots$ і $k_{n_1} < k_{n_2} < k_{n_3} < \dots$.

Отже, $f(\alpha_{n_l}) = \frac{1}{k_{n_l}} \to 0$ при $l \to \infty$, хоча $\alpha_{n_l} \to x$ при $l \to \infty$. Таким чином, відображення f є розривним в точці x, оскільки $x \neq 0$.

Залишилося дослідити поведінку функції f в точці 0. Для цього розглянемо послідовність $z_k \in \mathbb{Q} \cap \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $z_i \neq z_j$ при $i \neq j$, таку що $z_k \to z_0$ при $k \to \infty$, $\frac{1}{2} < z_0 < 1$. Нехай також $z_k = y_{l_k} \in (\mathbb{Q} \cap [0,1]) \setminus \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$. Зафіксуємо $k = 1$. Оскільки l_k – нескінченна послідовність натуральних чисел, знайдеться $l_{k_1} > 1$. Так само, оскільки послідовність l_k, $k > k_1$, є нескінченною послідовністю натуральних чисел, знайдеться $k_2 > k_1$ такий, що $l_{k_2} > l_{k_1}$. І так далі. В результаті отримаємо зростаючі послідовності номерів $k_1 < k_2 < \dots$ і $l_{k_1} < l_{k_2} < \dots$, причому $f\left(\frac{1}{l_{k_m}}\right) = y_{l_{k_m}} = z_{k_m} \to z_0$, $m \to \infty$. Отже, $\frac{1}{l_{k_m}} \overset{m\to\infty}{\to} 0$, проте $f\left(\frac{1}{l_{k_m}}\right) \overset{m\to\infty}{\to} z_0$, де $z_0 \neq f(0)$, бо за побудовою $f(0) \subset \{\frac{1}{k}\}_{k=1}^{\infty}$ і $\frac{1}{2} < z_0 < 1$. Тому відображення f також э розривним в точці 0. $\square$

Приклад 5.7. *Відобразити відрізок* $[0,1]$ *на квадрат* $[0,1] \times [0,1]$ *бієктивно, див. малюнок 26.*



Малюнок 26: Бієкція $[0,1]$ на $[0,1] \times [0,1]$

Розв'язок. Скористаємося тим, що кожне число $x \in [0,1]$, крім числа 1, може бути зображено у вигляді нескінченного десяткого дробу $x = 0,x_1x_2x_2\ldots$. Без обмеження загальності, можна вважати, що зображення кожного числа x не закінчується нескінченною послідовністю дев'яток в кінці. Перед усім, покладемо $f(1) := (1,1)$. Припустимо тепер, що $x = 0,x_1x_2x_2\ldots$, $x \in [0,1)$, і виконано дві наступні умови:

а) x_i не є послідовністю вигляду $x = 0,x_1\ldots x_{2k-1}9x_{2k+1}9x_{2k+3}9\ldots$

і

б) x_i не є послідовністю вигляду $x = 0,x_1\ldots x_{2k}9x_{2k+2}9x_{2k+2}9\ldots$. В такому випадку покладемо:

$$f(0,x_1x_2x_3\ldots) = (0,x_1x_3x_5\ldots;0,x_2x_4x_6\ldots)\,. \tag{5.5}$$

Зауважимо, що f відображає сюр'єктивно і ін'єктивно деяку підмножину відрізку $[0,1]$ на $[0,1)\times[0,1)$. На жаль, ми не можемо визначити наше відображення **для всіх** $x \in [0,1]$ співвідношенням (5.5) з наступної причини: числа в випадках а) і б) мають «погані» образи і створюють неоднозначність. Наприклад, за правилом (5.5) ми б мали

$$f(0,00292929\ldots) = (0,02222\ldots;0,09999\ldots) = (0,02222\ldots;0,1)\,,$$

проте одночасно

$$f(0,0120202020202\ldots) = (0,02222\ldots;0,1)\,.$$

Отже, якщо відображення f визначати загальним правилом (5.5), то порушується його сюр'єктивність, бо

$$x_1 = 0,00292929\ldots \neq 0,0120202020202\ldots = x_2\,,$$

проте, $f(x_1) = f(x_2)$.

Для того, щоб подолати цю маленьку «неприємність», зробимо наступне:

1) у **парному випадку а)**, тобто, коли дев'ятки починаються з деякого парного номеру послідовності x_i. Якщо

$$x = 0,x_1x_2\ldots x_{2n-1}9x_{2n+1}9x_{2n+3}9x_{2n+5}\ldots\,,\; n \geqslant 2\,,$$

покладемо

$$f(x) = (1;0,\underbrace{9\ldots9}_{2n-2}x_{2n-2}x_1x_2x_3\ldots x_{2n-5}x_{2n-4}x_{2n-3}x_{2n-1}x_{2n+1}x_{2n+3}\ldots)\,.$$

Слід зауважити, що за означенням $x_{2n-2} \neq 9$. Далі, є ще точки вигляду

$$x = 0, x_1 9 x_3 9 x_5 9 \ldots .$$

Можливі два підвипадки:

1.1) $x_1 \neq 9$, тоді покладемо

$$f(x) = (1; 0, x_1 x_3 x_5 \ldots) .$$

1.2) 2) $x_1 = 9$, тоді покладемо:

$$f(x) = (1; 0, \underbrace{9 \ldots 9}_{2n-1} x_{2n+1} x_{2n+3} \ldots) ,$$

де n відповідає найменшому елементу x_{2n+1}, що не дорівнює числу 9.

2) розглянемо **непарний випадок б)**.

Нехай ми маємо послідовність вигляду $x = 0, x_1 x_2 \ldots x_{2n} 9 x_{2n+2} 9 \ldots$. Розглянемо випадок $n \geqslant 2$; зокрема, $x_{2n-1} \neq 9$ і при $n = 2$ маємо: $x_3 \neq 9$. В такому випадку, покладемо:

$$f(x) = (0, \underbrace{9 \ldots 9}_{2n-1} x_{2n-1} x_1 x_2 \ldots x_{2n-3} x_{2n-2} x_{2n} x_{2n+2} x_{2n+4} \ldots ; 1) .$$

Нехай тепер у нас $x = 0, 9 x_2 9 x_4 9 x_6 \ldots$. При $x_2 \neq 9$ покладемо

$$f(x) = (0, x_2 x_4 x_6 \ldots ; 1) .$$

Якщо ж $x_2 = 9$, то покладемо

$$f(x) = (0, \underbrace{9 \ldots 9}_{2n-2} x_{2n} x_{2n+2} \ldots ; 1) ,$$

де n – найменше натуральне число n, яке відповідає $x_{2n} \neq 9$. Можна перевірити, що відображення відображає $[0, 1]$ на $[0, 1] \times [0, 1]$ і є взаємно однозначним (тобто, бієкцією). $\square$

5.2 Завдання для самоконтролю

1. Чи є відображення f, побудоване в прикладі 5.7, неперервним ? Якщо «ні», то чи існує таке відображення ?

2. Чи може бути неперервним відображення, яке бієктивно відображає $(0,1)$ на $(0,1)\cup(1,2)$, див. приклад 5.5. Відповідь обґрунтувати.

3. Доведіть за допомогою теореми Кантора-Бернштейна, що зчисленне або скінченне об'єднання множин потужності континуум є множиною потужності континуум.

4. Доведіть, що множини всіх множин не існує.

5. Нехай $A\subset\mathbb{R}^m$, $B\subset\mathbb{R}^n$, $m,n\geqslant 2$, $f:A\to B$ – неперервна бієкція. Чи завжди існує обернене $g=f^{-1}$ відображення до f ?

6. Нехай $A\subset\mathbb{R}^m$, $B\subset\mathbb{R}^n$, $m,n\geqslant 2$, $f:A\to B$ – неперервна бієкція, і нехай $g=f^{-1}:B\to A$ – обернене відображення до f. Чи завжди g є також неперервним відображенням ? Доведіть це, або побудуйте контрприклад.

7. Чи можна відобразити $[0,1]$ на $[0,1]\cup 2$: а) бієктивно; 2) бієктивно і неперервно ?

8. Чи існує на дійсній прямій множина, яка має потужність більшу, ніж потужність континуум ? Чому ?

9. Чи вірно, що множина l_2, яка складається з нескінченних послідовностей $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots)$ таких, що $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^2<\infty$, має потужність континуум ? Доведіть, або спростуйте це.

10*. Доведіть, що не існує сюр'єкції $f:X\to 2^X$ і не існує ін'єкції $g:2^X\to X$.

11. Скориставшись прикладом 5.4, побудуйте бієкції $[a,b]$ на $(c,d]$ і $[a,b]$ на $[c,d)$.

12. Підберіть у прикладі 5.1 замість лінійної залежності $y=kx+b$ квадратичну функцію $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$, так, щоб f бієктивно відображала $A=[3,6]$ на $B=[11,18]$.

13. Підберіть у прикладі 5.1 замість лінійної залежності $y=kx+b$ кубічну функцію $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $a\neq 0$, так, щоб f бієктивно відображала $A=[3,6]$ на $B=[11,18]$.

14. Чи існує неперервне відображення $f:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$? Чи може це відображення бути: а) сюрьєктивним ? б) бієктивним ? в) сюрьєктивним і бієктивним одночасно ?

15. Чи існує неперервне відображення $f : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$? Чи може це відображення бути: а) сюрьєктивним ? б) бієктивним ? в) сюрьєктивним і бієктивним одночасно ?

5.3 Завдання для самостійної роботи № 7

Задача 7. *Побудувати бієкцію множини A на множину B для кожного з варіантів.*

Варіант	Множини
1	$A = (0, 1]$, $B = (2, 3] \cup [4, 5)$
2	$A = [0, 1)$, $B = [2, 3] \cup [4, 5)$
3	$A = [0, \frac{1}{2})$, $B = [2, 3] \cup [4, 5)$
4	$A = (-1, 1)$, $B = [-2, 2] \cup \{3\}$
5	$A = [-1, 1]$, $B = [-2, 2]$
6	$A = [0, 1]$, $B = [-2, 2] \cup \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$
7	$A = [-1, 1]$, $B = [-2, 2] \cup [3, 4]$
8	$A = [-1, 1]$, $B = [-3, 2]$
9	$A = [-4, -3]$, $B = [1, 2] \cup (3, 4)$
10	$A = [-5, -4]$, $B = [0, 2] \cup (3, 4)$
11	$A = [-2, 0]$, $B = [0, 2) \cup [3, 4]$
12	$A = [-1, 0] \setminus \{-\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$, $B = [0, 1] \cup (1, 2)$
13	$A = (-\frac{3}{2}, -1]$, $B = (\frac{1}{3}, 1] \cup [4, 5)$
14	$A = (-4, -1]$, $B = (2, 4] \cup [\frac{9}{2}, 5)$
15	$A = (-2, 0]$, $B = \{1\} \cup [4, 5)$
16	$A = (-1, 1]$, $B = (1, 3] \cup [4, 5)$
17	$A = [-1, 1)$, $B = [1, 3] \cup [4, 5)$
18	$A = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $B = [1, 2] \cup [3, 4)$
19	$A = [0, 1]$, $B = [2, 3] \cup [4, 5]$
20	$A = [-1, 1]$, $B = [-2, 2] \cup \{3\}$
21	$A = [0, 1]$, $B = [-1, 1]$
22	$A = (0, 1]$, $B = [-2, 2)$
23	$A = [-1, 1]$, $B = [-2, 2] \cup \{2 + \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$
24	$A = [-3, -2]$, $B = (1, 2] \cup (3, 4]$
25	$A = [-5, -4)$, $B = [0, 1] \cup (2, 3)$
26	$A = [-\frac{1}{2}, 0]$, $B = [1, 2] \cup (3, 4)$
27	$A = (-3, -2]$, $B = (1, 3] \cup [4, 5)$
28	$A = (-\frac{2}{3}, 0]$, $B = (0, 1] \cup [2, 3)$
29	$A = (-5, -4]$, $B = (1, 2] \cup [4, 5)$
30	$A = (-2, 0]$, $B = (1, 2] \cup [3, 4)$

5.4 Завдання для самостійної роботи № 8

Задача 8. *Побудувати бієкцію між вказаними множинами A і B для кожного з варіантів.*

Варіант	Множини
1	$A = \mathbb{R}^1, B = \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy, \lvert z\rvert = 1, x > 0\}$
2	$A = [0,1], B = \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy, \lvert z\rvert = 1, x > 0\}$
3	$A = [0,1] \times [0,1], B = \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy, \lvert z\rvert \leqslant 1\}$
4	$A = [0,1] \times [0,1], B = \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy, \lvert z\rvert \leqslant 1, x \geqslant 0\}$
5	$A = [0,2] \times [0,1], B = \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy, \lvert z\rvert \leqslant 1, x \leqslant 0\}$
6	$A = [-1,1] \times [-2,1], B = \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy, \lvert z\rvert \leqslant 1\}$
7	$A = \{z \in \mathbb{C} : 1 < \lvert z\rvert < 2\}$, $B = \{z \in \mathbb{C} : 3 < \lvert z\rvert < 5\}$
8	$A = \{z \in \mathbb{C} : 1 < \lvert z\rvert < 2\}$, $B = \{z \in \mathbb{C} : \lvert z\rvert < 1\}$
9	$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x_1 < 1, x_2 = x_1^2\}$, $B = \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy, \lvert z\rvert = 1\}$
10	$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x_1 < 1, x_2 = x_1^3\}$, $B = \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy, \lvert z\rvert = 1\}$
11	$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 < 1, x_2 = x_1^4\}$, $B = \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy, \lvert z\rvert = 1\}$
12	$A = [0,1] \times [2,3]$, $B = \{z \in \mathbb{C} : 3 < \lvert z\rvert < 5\}$
13	$A = [0,1] \times [0,1]$, $B = (0,1]$
14	$A = [0,1) \times [0,1]$, $B = [0,1]$
15	$A = (0,1) \times (0,1)$, $B = [0,1]$
16	$A = \mathbb{R}^1, B = \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy, \lvert z\rvert = \frac{1}{2}, x > 0\}$
17	$A = [0, \frac{1}{2}], B = \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy, \lvert z\rvert = 1, x > 0\}$
18	$A = [0,1] \times [0, \frac{1}{2}], B = \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy, \lvert z\rvert \leqslant 1\}$
19	$A = [0,1] \times [0,1], B = \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy, \lvert z\rvert \leqslant \frac{1}{3}, x \geqslant 0\}$
20	$A = [0,1] \times [0, \frac{1}{2}], B = \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy, \lvert z\rvert \leqslant \frac{1}{2}, x \leqslant 0\}$
21	$A = [-1, \frac{1}{2}] \times [-2,1], B = \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy, \lvert z\rvert \leqslant \frac{1}{4}\}$
22	$A = \{z \in \mathbb{C} : 1 < \lvert z\rvert < 3\}$, $B = \{z \in \mathbb{C} : 3 < \lvert z\rvert < \frac{7}{2}\}$
23	$A = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \lvert z\rvert < 2\}$, $B = \{z \in \mathbb{C} : \lvert z\rvert < 1\}$
24	$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x_1 < 1, x_2 = x_1^2\}$, $B = \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy, \lvert z\rvert = \frac{1}{2}\}$
25	$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x_1 < 1, x_2 = x_1^3\}$, $B = \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy, \lvert z\rvert = \frac{1}{2}\}$
26	$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 < 1, x_2 = x_1^4\}$, $B = \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy, \lvert z\rvert = \frac{1}{2}\}$
27	$A = [0, \frac{1}{2}] \times [2,3]$, $B = \{z \in \mathbb{C} : 3 < \lvert z\rvert < 5\}$
28	$A = [0, \frac{1}{2}] \times [0,1]$, $B = (0,1]$
29	$A = [0, \frac{1}{2}) \times [0,1]$, $B = [0,1]$
30	$A = (0,1) \times (0,1)$, $B = [0, \frac{1}{2}]$

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Келли Дж.Л. *Общая топология* / Дж.Л. Келли. – М.: Наука, 1968.

[2] Колмогоров А.Н. *Элементы теории функций и функционального анализа* / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – Москва: Наука, 1976. – 531 с.

[3] Куратовский К. *Топология* / К. Куратовский. – М.: Мир, 1966. – 594 с. (Т. 1).

[4] Синюков Н.С. *Топология* / Н.С. Синюков, Т.И. Матвеенко. – Киев: Вища школа, 1984.

[5] Соболев В.И. *Лекции по дополнительным главам математического анализа* / В.И. Соболев. – М.: Наука, 1968.

[6] Шилов Г.Е. *Математический анализ. Специальный курс* / Г.Е. Шилов. – М.: Физматгиз, 1961.

[7] Энгелькинг Р. *Общая топология* / Р. Энгелькинг. – М.: Мир, 1986.

Навчальне видання

СЕВОСТЬЯНОВ Євген Олександрович, СКВОРЦОВ Сергій Олександрович, ТАРГОНСЬКИЙ Андрій Леонідович

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ФУНКЦІЙ ДІЙСНОЇ ЗМІННОЇ

Навчально-методичний посібник

Дизайн обкладинки І. Клімової
Редактори: А.Черняк, Р. Ступницький
Комп'ютерне верстання С. Б. Іванова

Оформлення випускних відомостей здійснюється видавництвом:

Підп. до друку 11.02.2013. Формат 60x84/16. Папір офсетний Гарнітура Times New Roman Cyr. Друк різографічний. Ум. друк. арк. Обл.-вид. арк. Наклад 300 пр. Зам. №

Видавництво Житомирського державного університету імені Івана Франка 10008, м. Житомир, вул. Велика Бердичівська, 40 Свідоцтво суб'єкта видавничої справи: ЖТ № 10 від 07.12.2004 р. електронна пошта (E-mail): zu@zu.edu.ua