4) якщо $m = 2$, $n = 0$, то задача не визначена; якщо $m \neq 2$, $n \neq 0$, $m \neq 3n + 2$, $m \neq 6n$, то $x = \frac{3n-2}{m-3n-2}$; якщо $m = 4$ і $n = \frac{2}{3}$, то $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$; якщо $m = 3n + 2$, $n \neq \frac{2}{3}$, $m = 6n \left(n \neq \frac{2}{3}\right)$, то $x \in \varnothing$;

5) якщо $a = \pm b$, то задача не визначена; якщо $a^2 \neq b^2$ і $b \neq 0$, то $x = a^2 - b^2$; якщо $b = 0$, $a \neq 0$, то $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;

6) якщо $a \neq b$, то $x = \frac{a+b}{2}$; якщо $a = b$, то $x \in \varnothing$.

Група В

10. Розв'яжіть рівняння з параметрами a, b:

1) $\frac{x^4-ab}{x^2} = a - b$, де $a > 0$, $b > 0$;

2) $\frac{x^3}{a-b} - \frac{4a^2b^2}{ax-bx} = 2(a+b)x$, де $a \neq b$.

Відповідь. 1) При заданих в умові обмеженнях параметрів $x_{1,2} = \pm\sqrt{a}$;

2) якщо $a \neq b$ і $a \neq 0$, то $x_{1,2} = \pm a\sqrt{2}$; якщо $a \neq b$ і $a = 0$, то $x \in \varnothing$; якщо $a = b$, то задача не визначена.

МЕТОД ГЕОМЕТРИЧНИХ МІСЦЬ ТОЧОК: ТИПІЗАЦІЯ ЗАДАЧ

Іван ЛЕНЧУК — професор кафедри методики навчання математики, фізики та інформатики Житомирського державного університету ім. І. Я. Франка, доктор педагогічних наук

Анотація. У класах, в яких математика вивчається поглиблено, недоцільно виключати з програм планіметричні задачі на побудову. Ми пропонуємо в кожному методі розв'язання здійснити структурну типізацію таких задач із метою їх алгоритмізації та комп'ютеризації, що сприятиме спрощенню як викладання, так і учіння цього специфічного розділу геометрії.

Ключові слова. Конструктивізм, задачі на побудову, геометричні місця точок, аналіз, доведення, дослідження.

Иван ЛЕНЧУК. Метод геометрических мест точек: типизация задач.

Аннотация. В классах с углублённым изучением математики нецелесообразно исключать из программ планиметрические задачи на построение. Мы предлагаем в каждом методе решения осуществить структурную типизацию таких задач с целью их алгоритмизации и компьютеризации, что позволит упростить как преподавание, так и изучения этого специфического раздела геометрии.

Ключевые слова. Конструктивизм, задачи на построение, геометрические места точек, анализ, доказательство, исследование.

Ivan LENCHUK. Method locus of points: classification problems.

Summary. In classes with in-depth study of mathematics it is advisable to exclude from the program plan metric problems on construction. We offer solutions in each method to implement structural typing these problems with a view to their algorithms and computerization, to simplify both the teaching and the teaching of this particular section geometry.

Keywords. Constructivism, the task of building, loci, analysis, evidence, research.

На освітянській ниві однією з дисциплін математичного циклу є, поки що, геометрія. Хоч у державній програмі на 2015 — 2016 роки й не наголошується окремо на оволодінні учнями основної школи методами розв'язування задач на побудову, все ж у зміст навчального матеріалу (в темі 4) включено питання «Геометричне місце точок» (чомусь в однині?), а в державних вимогах до рівня загальноосвітньої підготовки перед учнями поставлено завдання здобути вміння й навички застосовувати вивчені означення та властивості геометричних фігур до розв'язування задач.

Ще півстоліття тому незаперечний авторитет в області геометрії проф. Четверухін М.Ф. стверджував: «*Геометричні задачі на побудову є настільки* ***істотним фактором математичної освіти****, що на викладання цього розділу в середній школі має бути звернена серйозна увага*» [5, *3*]. Категорично і більш предметно висловлюється з цього приводу відомий в Україні вчений-методист М. І. Бурда: « ... ***важливість задач на побудову*** *обумовлюється особливостями наукової структури курсу геометрії 7 — 9 класів, провідним компонентом якої є* ***конструктивізм***: майже всі геометричні поняття означуються конструктивно; доведення всіх теорем спирається на використання фігур, реальне існування яких можна відтворити побудовою. Отже, *задачі на побудову мають розвивати в учнів* ***конструктивний*** *підхід до осмислення всього комплексу геометричних знань*, а не лише формувати конструктивні навички розв'язування задач» [2, *3*]. Стисло аргументована, переконлива позиція академіка Бурди М. І. відкидає консервативну думку про малу вартість та недоречність у ЗОНЗ планіметричних побудов!

Моделюючи покроковий алгоритм розв'язання задачі на побудову геометричної фігури, учень щоразу зводить власну рисункову діяльність до відшукання за вихідними даними скінченого числа кардинальних точок, які визначать цю фігуру. Залежно від конкретних умов вибір таких точок для однієї і тієї самої фігури може змінюватися. Так, побудова трикутника (або багатокутника) зводиться до відшукання його вершин; коло можна вважати побудованим, якщо побудовано центр і радіус або центр та будь-яку з його точок тощо. У класичному випадку креслярськими засобами побудови є лінійка і циркуль, пристосовані для викреслювання *прямих* і *кіл* або їхніх частин. Тому **в конструктивній геометрії** визначальні точки (крім безпосередньо заданих в умові) належним чином вибираються або **встановлюються як перетин указаних двох ліній.** Наприклад, будуючи трикутник ABC за трьома його сторонами a, b і c, визначаємо вершину C як точку перетину двох кіл: кола з центром A та радіусом $AC = b$ і кола з центром B та радіусом $BC = a$; при відшуканні описаного навколо заданого трикутника кола знаходимо його центр як точку перетину серединних перпендикулярів двох довільних сторін трикутника, а радіус — як відстань від центра до однієї з вершин тощо.

Отже, в кожній задачі на побудову спираються фактично на знання найпростіших геометричних місць точок (ГМТ). Однак є задачі, при розв'язуванні яких *ці знання використовуються*, як кажуть, «*у чистому вигляді*», тобто є **ключем** до розв'язання. Тоді говорять про **розв'язування задачі на побудову методом ГМТ.**

Мету статті ми вбачаємо в констатації факту, що задачі на побудову є *творчо геометричними*, у з'ясуванні прикладами *місця і ролі* в них *аналізу* та, що не менш важливо, в демонстрації можливої *вибіркової типізації задач*, а отже їх ефективної комп'ютеризації у перспективі.

Якщо побудова шуканої фігури зводиться до визначення деякої сукупності точок (M), то вимоги, що накладаються умовою задачі на кожну точку M цієї сукупності, розчленовують[1] на кілька незалежних вимог, як правило на дві вимоги: γ і γ'. Ні перша, ні друга з цих вимог, взяті окремо, ще не визначають шуканої точка M. Далі розв'язуємо задачу за ***евристичною*** *схемою*:

1. «Забудемо» на деякий час про одну з цих вимог (наприклад, γ'). Тоді задача стане невизначеною, і точка M зможе мати нескінченну кількість послідовних розташувань, які утворять ціле геометричне місце $\mathbf{\Gamma}$, що задовольняє всі вимоги умови задачі, крім γ'. Фігура цього ГМТ здебільшого заздалегідь відома; інакше з нею потрібно визначитися допоміжними побудовами.

2. Повернемо раніше відкинуту вимогу γ' і «забудемо» про іншу — γ. Тоді матимемо інше геометричне місце $\mathbf{\Gamma}'$, до якого теж належить шукана точка M. Установлюємо фігуру цього нового ГМТ та будуємо його.

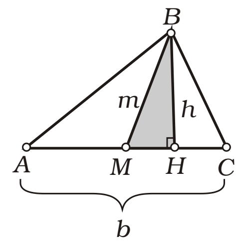
3. Звісно, при виконанні обох цих вимог точка M належить геометричним місцям $\mathbf{\Gamma}$ і $\mathbf{\Gamma}'$ одночасно, тобто входить в їх перетин так, що кожна точка фігури $\mathbf{\Gamma} \cap \mathbf{\Gamma}'$ дає можливість знайти деякий розв'язок задачі.

Іноді для визначення точки M досить побудувати одне ГМТ, оскільки інше задається умовою задачі. Якщо ж шукана точка узгоджується з такими умовами, які в сукупності визначають лише одне ГМТ, то задача стає невизначеною.

Таким чином, у методі ГМТ треба навчитися вміло групувати деякі з умов задачі так, щоб одержувати потрібні та якомога простіші геометричні місця, а це пов'язано з досвідом розв'язування задач на встановлення і побудову різних ГМТ. Розглянемо на початку порівняно простий приклад.

Задача 1. Побудувати трикутник за стороною та проведеними до цієї сторони медіаною і висотою ([3], §5, задача 39).

Аналіз. Нехай трикутник ABC задовольняє умову (мал. 1). Із малюнка вочевидь випливає, що трикутник BHM — прямокутний ($\angle H = 90°$). Він і має бути найпершим у побудові на шляху до розв'язку (1). Далі міркуємо просто: вершина B трикутника BHM є водночас вершиною шуканого трикутника, а дві інші його вершини A і C належать прямій MH (2) і рівновіддалені від точки M на відстань $\mathrm{MA} = MC = \frac{b}{2}$ (3, 4). Точки A, B і C визначають сторони трикутника AB і CB (5).



Мал. 1

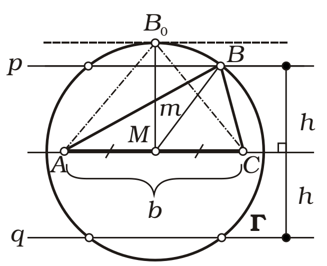
Побудова. Наголошуємо: Кроки цього дійства лінійкою і циркулем чітко означені аналізом. Стверджуємо, що трикутник ABC шуканий.

Доведення. $BH \perp AC$ і $BH = h$, точка M — середина AC, а $BM = m$. Тому BH і BM — суть задані висота і медіана трикутника ABC відповідно (за побудовою). $MA = MC = \frac{b}{2}$. Отже, $AM + MC = \frac{b}{2} + \frac{b}{2} = b$. Трикутник ABC задовольняє всі умови задачі.

[1] Через це метод ГМТ іноді називають *методом розчленування* умов задачі.

Дослідження зручно провести за кроками побудови: прямокутний трикутник BHM однозначно визначається за умови $m > h$; дії проведення прямої MH, поділу відрізка b навпіл, відкладання відрізків $MA = MC = \frac{b}{2}$ і проведення сторін трикутника AB і CB у будь-якому випадку виконуються однозначно. Отже, в цьому варіанті розв'язок (різносторонній трикутник ABC) *єдиний*. Якщо $m = h$ — трикутник BHM вироджується у відрізок медіани, що зливається з висотою ($BM \equiv BH$): розв'язок — рівнобедрений трикутник ABC. Нарешті, якщо $m < h$, задача розв'язків *немає* (гіпотенуза прямокутного трикутника завжди більша катета).

У пошуку розв'язку даної задачі, на етапі аналізу, припустимі ще й такі міркування. Вершини A і C (отже, й сторону AC) шуканого трикутника ABC можна вважати побудованими (мал. 2), оскільки за умовою відрізок $AC = b$ — заданий (1). Неважко знайти також точку M — середину відрізка AC (2). Тоді розв'язання зводиться до відшукання однієї-єдиної точки B, яка є третьою вершиною трикутника і *задовольняє двом незалежним умовам*. По-перше, ця точка належить ГМТ, віддалених на відстань m від точки M (3), та, по-друге, — ГМТ, рівновіддалених від прямої AC на відстань h (4). Першим ГМТ є коло $\mathbf{Г}(M, m)$, другим — дві прямі (p, q), паралельні прямій AC. Нарешті, згідно евристичному припису, точка B входить у перетин цих ГМТ (5) так, що кожна точка фігури $\mathbf{Г} \cap (p, q)$ дає деякий розв'язок задачі. Пари точок A і B, C і B, як відомо, визначають відрізки AC і CB, що є двома іншими сторонами трикутниками ABC (6).



Мал. 2

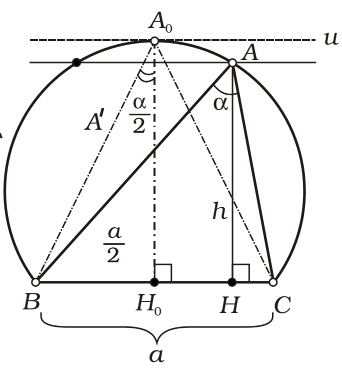
Доведення факту, що трикутник ABC задовольняє всі вимоги задачі очевидне, а дослідження умов існування розв'язків і їх кількості тривіальні. Справді, незалежно від довжини відрізка $AC = b$, виділимо випадки: 1) $h < m$, не розрізняючи чотирьох можливих однакових розв'язків (залежно від вибору точки $B = \mathbf{Г} \cap (p, q)$, приходимо до висновку, що задача має *єдиний* розв'язок; якщо $h = m$ (прямі p і q дотикаються кола $\mathbf{Г}$), розв'язком буде рівнобедрений трикутник AB_0C; 2) $h > m$ — задача розв'язків *немає*, адже прямі p, q і коло $\mathbf{Г}$ у цьому варіанті не перетинаються.

Уже на наведеному прикладі, взятому із підручника, помічаємо, що задачі на побудову можуть бути розв'язані кількома зовсім несхожими методами. Це тим більш важливо демонструвати у школі (щонайперше у класах, в яких математика вивчається поглиблено), що навички учнів у пошуках різних підходів до якісного вирішення нестандартних геометричних ситуацій, вміння зупинитися остаточно **«саме на тому» методі** є реальним проявом винахідливості,**творчості** в навчанні. Посутні інтерпретації, змістове дієве варіювання візуальним малюнковим супроводом задачі формує фаховий стиль образного мислення учня, збагачує його знаннями, сприяє мислительній класифікації і систематизації навчального матеріалу в цілому, розкриває практичний (прикладний) характер науки «Геометрія».

Якщо лише аналізом установлено, що побудову неявно заданої фігури можна віднести до відшукання певної точки, яка задовольняє двом незалежним вимогам, накладеним умовою задачі, стають зрозумілими і можливість, і шлях її розв'язання. Така чіткість евристичного припису є привілеєм методу ГМТ [5]. З іншого боку, почергово залишаючи одну з вимог γ і γ' незмінною та варіюючи іншою, можна одержати групу (**тип**) задач, об'єднаних спільною конструктивною ідеєю, визначитися, здебільше, із ключовою задачею. Цей процес й будемо називати «***типізацією***».

Задача 2. Побудувати трикутник за стороною, протилежним їй кутом і висотою, проведеною з вершини цього кута ([3], § 11, задача 60).

Аналіз. Нехай трикутник ABC задовольняє умову задачі (мал. 3): $BC = a$, $\angle A = \alpha$, $AH \perp BC$ і $AH = h$. Вершини B і C шуканого трикутника легко побудувати (1). Отже, залишається знайти на малюнку єдину точку A, яка задовольняє двом вимогам умови: 1) $A \in u$, де пряма $u \parallel BC$ і розташована на відстані h від BC (2); 2) вершина A належить сегменту кола $\mathbf{Г}$, який спирається на відрізок BC і вміщує кут α (3). Тому $A = u \cap \mathbf{Г}$ (4). Трикутник ABC можна вважати побудованим (5).



Мал. 3

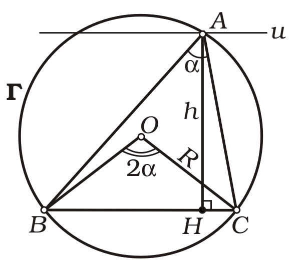
Доведення випливає із побудови.

Дослідження. Для існування точки перетину задіяних у побудові ГМТ (u, **Г**) необхідно і досить, щоб стрілка прогину сегмента (A_0H_0) була не меншою відрізка h ($A_0H_0 = h$ — випадок дотику u і **Г**), тобто, щоб виконувалося співвідношення: $h \le \frac{a}{2}\cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ (*) (трикутник A_0BC). Не розрізняючи 4 можливі однакові розв'язки (у двох півплощинах відносно BC), приходимо до висновку, що за умови (*) задача має *єдиний* розв'язок (зокрема, трикутник A_0BC — рівнобедрений), у противному випадку — розв'язків *немає*.

Групу задач, в якій стрижневою є задача 1 та до якої входить щойно розв'язана задача 2, варто наповнити ще деякими складовими.

У задачах 3 — 7, що подаються нижче, обмежимося лише етапом аналізу, яким у конструктивній планіметрії знехтувати практично неможливо, адже виключно у процесі аналізу з'ясовують шлях розв'язання задачі, що явно демонструють номери 1 і 2. Де-факто ***аналіз***, *це — перехід від дескриптивного до конструктивного означення фігури, яку потрібно побудувати.*

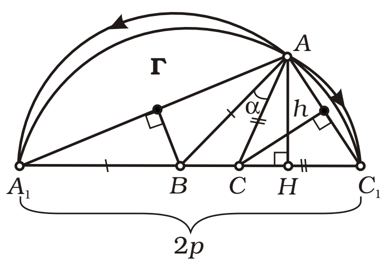
Задача 3. Побудувати трикутник за кутом при вершині, висотою, проведеною з цієї вершини, і радіусом описаного кола (мал. 4).



Мал. 4

Аналіз. Зрозуміло, що розв'язок залежить від відшукання довжини сторони BC. Але ж за умовою $\angle A = \alpha$, тому центральний кут, який спирається на дугу BC унизу, дорівнює 2α ([3], теорема 11.5). Коло **Г** задане, отже $\angle BOC = 2\alpha$ і відрізок BC легко будуються.

Задача 4. Побудувати трикутник за кутом при вершині, висотою, проведеною з цієї вершини, і периметром. (мал. 5).



Мал. 5

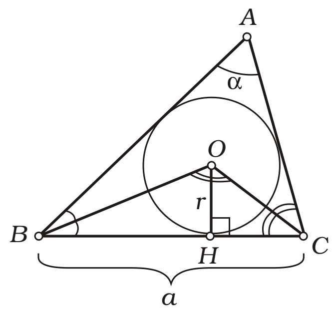
Аналіз. Якщо $A_1C_1 = A_1B + BC + CC_1 = AB + BC + CA = 2p$ — заданий відрізок, який є водночас розгорткою шуканого трикутника ABC, тоді з умови і рисунка випливає, що його побудова зводиться до відшукання кута A_1AC_1. Для рівнобедреного трикутника A_1BA кут ABC — зовнішній. Тому $\angle A_1AB = \frac{1}{2}ABC$. Аналогічно, у трикутнику C_1CA $\angle C_1AC = \frac{1}{2}\angle ACB$.

Отже, $\angle A_1AC_1 = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB) + \angle BAC =$
$= \frac{1}{2}(180° - \angle BAC) + \angle BAC = 90° + \frac{\angle BAC}{2} = 90° + \frac{\alpha}{2}$.

Тепер кут $\angle A_1AC_1$ за відомим кутом α легко побудувати, а дані трикутника A_1AC_1 цілком задовольняють умову задачі 2.

За зображенням останнього трикутника не важко перейти до шуканого. Для цього досить провести серединні перпендикуляри відрізків A_1A і C_1A.

Задача 5. Побудувати трикутник за стороною, протилежним їй кутом і радіусом уписаного кола (мал. 6).



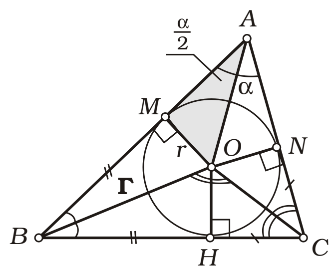
Мал. 6

Аналіз. Щоб цю задачу звести до номера 2, потрібно знайти вираз кута BOC. Оскільки BO і CO — бісектриси кутів B і C відповідно, то матимемо: $\angle BOC = 180° - \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) =$ $= 180° - \frac{1}{2}(180° + \angle A) = 90° + \frac{\angle A}{2}$. Але $\angle A = \alpha$ — заданий, тому $\angle BOC = 90° + \frac{\alpha}{2}$.

Інколи задачу 5, не змінюючи геометричної суті, формулюють в іншому словесному вираженні.

Задача 5*. Навколо заданого кола описати трикутник із заданими його стороною та протилежним кутом.

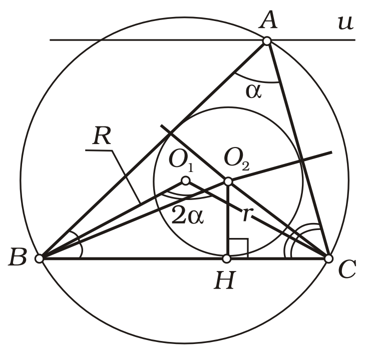
Задача 6. Побудувати трикутник за його периметром, кутом при вершині та радіусом уписаного кола.



Мал. 7

Аналіз. Нехай трикутник ABC (мал. 7) задовольняє умову задачі: $AB + BC + CA = 2p$, $\angle A = \alpha$ і **Г**(O, r) — уписане коло із заданим радіусом r. Оскільки AO — бісектриса кута A, $\angle OAM = \frac{\alpha}{2}$ й тому відрізок $AM = AN$ будується як катет прямокутного трикутника OAM — за відомими його іншим катетом $OM = r$ і гострим кутом $\frac{\alpha}{2}$ (1). Очевидно, що $BM = BH$, а $CN = CH$. Тому $NC + CH + HB + BM = 2BC \Rightarrow$ $\Rightarrow 2BC + 2AM = 2p$. Звідси знаходимо основу трикутника ABC : $BC = p - AM$ (2). Отже, тепер задачу зведено до попередньої.

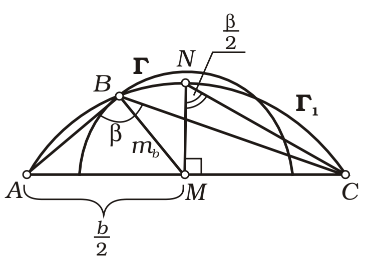
Задача 7. Побудувати трикутник за одним із його кутів та радіусами вписаного й описаного кіл (мал. 8).



Мал. 8

Аналіз. Очевидно, що в пошуку розв'язку такої задачі потрібно спочатку знайти сторону BC (задача 3), потім кут BO_2C (задача 5) і, нарешті, побудувати допоміжний трикутник BO_2C (задача 2). Завершення конструктивних дій тривіальне.

Задача 8. Побудувати трикутник за основою та відповідними їй медіаною і кутом при вершині (подаємо повну схему дій).



Мал. 9

Аналіз. За умовою задачі відомими є такі елементи: b, m_b, β (мал. 9). Оскільки задано відрізок b, вершини A і C можна вважати відомими (1). Якщо не враховувати кут β, то геометричним місцем вершин B буде коло $\mathbf{Г}$ з центром у середині M основи AC (2) та радіусом, що дорівнює m_b. Отже, це коло можна описати (3). Якщо відмовитися від медіани m_b, геометричним місцем вершин B буде дуга $\mathbf{Г_1}$ сегмента, який спирається на основу AC і містить кут β (4). Тому $B \in \mathbf{Г} \cap \mathbf{Г_1}$. Трикутник ABC можна вважати побудованим (5).

Доведення очевидне.

Дослідження (обмежимося лише верхньою півплощиною). На малюнку кут $\beta > 90°$. Із цього випадку й розпочнемо.

Напевно, що тут умова існування розв'язку така: $MN \le MB < MA$ або $\frac{b}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} \le m_b < \frac{b}{2}$ (якщо кола мають 2-і спільні точки — 2 розв'язки; якщо ж дотикаються — 1 розв'язок). Нехай $\beta = 90°$. Тоді $\mathbf{Г}$ та $\mathbf{Г_1}$ — концентричні півкола з центром M. Умовою існування розв'язку є $MB = MA$, або $m_b = \frac{b}{2}$ (півкола зливаються, розв'язків безліч). Якщо $\beta < 90°$, то умовою існування розв'язку буде $MA < MB \le MN$; або ж, по іншому, $\frac{b}{2} < m_b \le \frac{b}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$ (тут варто виконати малюнок і визначитися з розв'язками).

Ми пропонуємо в основній школі обмежитися виключно геометричною частиною дослідження, а аналітичні вирази учням, зорієнтованим на математику, подати у старшій школі або в позакласній роботі.

Схожі вправи **фрагментарної типізації** задач на побудову вельми корисні в навчанні планіметрії – особливо, коли суб'єкт освітнього процесу здійснює їх самостійно. Із задумом, свідомо обмежуючи число геометричних фігур і визначальних елементів у комбінації (трикутник — уписане й описане кола та їх радіуси; основа, медіана, висота, кут і периметр), варіюючи ними, учень одержує нагоду просто, змістовно і вичерпно з'ясувати всі можливі закономірні залежності та графічні вираження між елементами фігури, яка будується, та в суто геометричній діяльності засвоїти їх.

Проф. Слєпкань З. І. наголошувала на навчаючій, виховній, розвивальній і контролюючій функціях задач у педагогічному процесі; місці, ролі та призначенні окремих типів задач і кожної конкретної задачі. Серед іншого науковець і педагог вирізняла роль **розвивальної** функції: «*Розвивальна функція задач направлена на розвиток мислення школярів* (зокрема, **науково-теоретичного мислення**), *на формування в них прийомів ефективної розумової діяльності*». І далі: «Не випадково видатні вчені Е. Резерфорд, Н. Бор, А. Ейнштейн, П. Л. Капіца, Б. М. Кедров та ін. підкреслювали, що задачі покликані не тільки і не стільки сприяти закріпленню знань, тренуванню в їх використанні, скільки *формувати дослідницький стиль розумової діяльності*, метод підходу до явищ, що вивчаються» [4, *124*].

Усталена чітка структурна схема у відшуканні розв'язків задач на побудову, їх можлива *типізація* і *алгоритмізація* засвідчують, що вчитель об'єктивно має у своєму розпорядженні досить вагоме й потужне знаряддя геометричної освіти, неабиякий важіль творчого розвитку учня як особистості. Однак із часом набудуть досвіду і фахових умінь у цій сфері лише ті школярі, які правильно організовані в навчанні, зорієнтовані на систематизацію процесу, ретельне, довготривале оволодіння мистецтвом умілого самостійного вирішення будь-якої конструктивної пропозиції. Вчителю в постановці якісного навчання *моделюванню фігур* за їх відомими елементами відводиться провідна роль. Йому ж варто пам'ятати, що задачами на побудову найбільш зручно закріпити й ефективно перевірити теоретичні та практичні надбання учнів у будь-якому розділі евклідової планіметрії. Виключно ці задачі слугують ефективним засобом контролю компетентностей — об'єктивної оцінки знань, умінь і навичок кожного, хто навчається диво-науці «Геометрія».

ЛІТЕРАТУРА

1. Боравльов А. П. Аналіз у розв'язуванні задач на побудову: Навч. посіб. / А. П. Боравльов, І. Г. Ленчук. — К.: Вища шк., 2002. — 191 с.
2. Бурда М. І. Розв'язування задач на побудову в 6 — 8 кл.: Методичний посібник / М. І. Бурда. — К.: Рад. шк., 1986. — 112 с.
3. Погорєлов О. В. Геометрія: Підручник для 7 — 9 класів середньої школи / О. В. Погорєлов. — К.: Освіта, 1998. — 224 с.
4. Слепкань З. И. Психолого-педагогические основы обучения математике: Метод. пособ. / З. И. Слепкань. — К.: Рад. шк., 1983. — 192 с.
5. Четверухин Н. Ф. Методы геометрических построений: Учебн. пособ. / Н. Ф. Четверухин. — М.: Учпедгиз, 1952. — 148 с.

НЕСПОДІВАНІ АСПЕКТИ МОТИВАЦІЇ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ

Наталія МОДЯГІНА

«Провідною нацією буде та, яка створить ефективну систему освіти, щоб максимально розвинути потенціал своїх молодих співвітчизників»

Даніел Белл,
американський соціолог і публіцист

Проблема мотивації навчання є надзвичайно актуальною і не одне покоління педагогів замислюється над нею. Ще Михайло Остроградський зазначав: «Зацікавити розум дитини – одне з основних положень нашої доктрини, і ми нічим не знехтуємо, щоб прищепити учневі смак, навіть, пристрасть до навчання». Адже навчання – складова свідомої діяльності особистості, що залежить як від її здібностей, так і від бажання та прагнення вчитися.

Працюючи зі студентами, що проходять педагогічну практику в ЗОШ № 52 м. Києва, наголошуємо, що мета мотивації – сфокусувати увагу учнів на проблемі й викликати інтерес до теми уроку. Мотивація є своєрідною психологічною паузою, яка дає можливість учням максимально налаштуватися на ефективний процес пізнання, оскільки тему можна вважати засвоєною, якщо вона стала основою для розвитку в особистості суб'єкта пізнання власних умовиводів. Цей елемент уроку має становити не більше 5% часу.

Григорій Петрович Бевз (без перебільшення видатний український математик-методист, і я пишаюся тим, що саме він був керівником нашої педагогічної практики) методи активізації уваги і серед них метод мотивації ставив на перше місце в системі методів навчання. Висуваючи чіткі і суворі вимоги до змісту уроку, він вимагав, щоб урок був яскравим і цікавим, вчив бачити особистість учня центром навчально-виховного процесу, а у своєчасно сформованих дієвих мотивах учіння – єдиний спосіб подолання відставання з математики (і це в 80-ті роки минулого століття, коли з високих трибун не говорили про особистість, а проголошували єдину спільність – радянський народ!)

За Г. П. Бевзом: ***мотив*** – внутрішній чинник діяльності людини, усвідомлена мета, а ***метод мотивації*** – це такий спосіб навчання, за допомогою якого вчитель формує або активізує в учнів дієві мотиви учіння, переконує їх у тому, що все, що вивчається, є корисним і навіть необхідним для учнів. Метод мотивації полягає в розкритті перед учнями глибинних реальних причин вивчення теми. Мотивації учіння мають бути зрозумілими, переконливими і порівняно стислими. Якщо розмова про користь матеріалу, який вивчається, потребує багато часу і відвертає від мети навчання, вона небажана.

Результативною є класифікація мотивації навчальної діяльності учнів за системою Ельконіна – Давидова: мотивація є або **внутрішньою**,