Є.О. Севостьянов, Н.С. Ількевич

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ТА ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ.

ЧАСТИНА І

Міністерство освіти і науки України
Житомирський державний університет імені Івана Франка

Є.О. Севостьянов, Н.С. Ількевич

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ТА ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ. ЧАСТИНА І

Навчально-методичний посібник

Житомир
Вид-во ЖДУ імені Івана Франка
2020

УДК 517.95
ББК 22.161.6
В22

Рекомендовано до друку вченою радою Житомирського державного університету імені Івана Франка (протокол № 14 від 30 жовтня 2020 р.)

Рецензенти:

С.А. Плакса – професор, доктор фіз.-мат. наук, завідувач відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України, м. Київ

С.В. Грищук – кандидат фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України, м. Київ

О.Ф. Герус – кандидат фіз.-мат. наук, доцент, завідувач кафедри математичного аналізу, бізнес-аналізу та статистики Житомирського державного університету імені Івана Франка

Севостьянов Є. О., Ількевич Н.С.

В 22 Диференціальні та інтегральні рівняння. Частина І: Навчально-методичний посібник. / Севостьянов Є.О., Ількевич Н.С. – Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2020.– 56 с.

Навчально-методичний посібник містить елементи теорії і прикладів щодо диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку. Розглянуто питання про класифікацію цих рівнянь, зведення до канонічного вигляду, спрощення та методів розв'язання. Також наведено теоретичні відомості стосовні формули Даламбера для розв'язку задачі Коші щодо рівняння коливань нескінченної струни. Посібник містить чимало прикладів розв'язань задач, теоретичні завдання для самоконтролю (окремо для кожного розділу) і задачі для самостійного розв'язання по 30 варіантів кожна.

Для студентів фізико-математичного факультету усіх форм навчання.

УДК 517.95
ББК 22.161.6

ЗМІСТ

1 Класифікація рівнянь. Рівняння зі сталими коефіцієнтами

1.1 Основні поняття

Як правило, знайомство з диференціальними рівняннями з частинними похідними починається в курсі звичайних диференцальних рівнянь і є достатньо поверхневим. Вказані рівняння з'являються в розділі «Системи диференціальних рівнянь», що є не випадковим: згідно відомих результатів, рівняння першого порядку зводяться до відповідної системи звичайних диференціальних рівнянь. В нашому посібнику ми докладно не будемо торкатися цієї теми, оскільки рівняння першого порядку є окремим розділом математики і, як ми вже зауважили, предметом вивчення іншого курсу. Основна наша мета - познайомитись з рівняннями *другого* порядку, дослідити їх класифікацію, властивості і навчитися їх розв'язувати. В двох словах можна зауважити, що між властивостями і розв'язанням рівнянь першого і другого порядку нема майже нічого спільного: принципи дослідження, розстановка акцентів, схема розв'язання і т.ін. є принципово різними. Ми побачимо це по мірі подальшого викладення матеріалу. Передусім розглянемо декілька означень.

Означення 1.1. Нетотожне співвідношення, яке пов'язує незалежні змінні $x_1, x_2, \dots x_n$, $n \geqslant 2$, невідому функцію $u = u(x_1, \dots x_n)$ і її частинні похідні називається *диференціальним рівнянням з частинними похідними.*

Означення 1.2. *Порядком рівняння* називається порядок найстаршої похідної, що входить до нього. Наприклад, для $n = 2$ (випадок двох змінних) загальний вигляд диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку наступний:

$$F\left(x_1, x_2, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) = 0\,. \qquad (1.1.1)$$

Зауваження 1.1. Для скорочення запису ми також будемо використовувати трохи інші позначення для частинних похідних, а саме, покладемо $u_x := \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_{xx} := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u_{xy} := \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ і т.д. Тоді, зокрема, співвідношення (1.1.1) можна записати в наступному вигляді:

$$F\left(x_1, x_2, u, u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_1 x_1}, u_{x_1 x_2}, u_{x_2 x_2}\right) = 0\,. \qquad (1.1.2)$$

Означення 1.3.Нагадаємо, що *областю* в $\mathbb{R}^n$ називається *відкрита* і *лінійно зв'язна* множина. Іншими словами, D – область, якщо, по-перше, кожна точка $x_0 \in D$ має кулю з центром в ній, яка цілком міститься в D, по-друге, кожні дві точки $x_1, x_2 \in D$ можна з'єднати кривою, котра цілком міститься в D.

В теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними одним з найважливіших понять і означення *розв'язку рівняння*. Наведемо його.

Означення 1.4. Функція $\varphi(x_,x_2)$, $x = (x_1, x_2)$, називається *розв'язком* рівняння (1.1.1) в області $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, якщо 1) $\varphi \in C^2(\Omega)$ (тобто, φ має всі частинні похідні порядку не менше другого в області Ω, причому ці похідні є неперервними в даній області); 2) точка з координатами $\left(x_1, x_2, \varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}\right)$ належить до області визначення функції F в (1.1.1); 3) підстановка $u \mapsto \varphi$ у рівняння (1.1.1) обертає його в тотожність в Ω.

Звичайно, тут найважливішою є властивість 3). З метою спрощення записів ми дали лише поняття розв'язку в випадку двох змінних, але звичайно можна навести аналогічне означення для будь-якої кількості змінних.

Як правило, ми будемо розглядати *лінійні диференціальні рівняння з частинними похідними.* Розглянемо наступне

Означення 1.5. *Лінійним диференціальним рівнянням 2-го порядку з частинними похідними* називається рівняння вигляду

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + b(x)u + c(x) = 0\,, \tag{1.1.3}$$

де $x = (x_1, \ldots, x_n) \subset \Omega$, Ω – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $a_{ij}(x)$, $a_i(x)$, $b(x)$ і $c(x)$ – задані функції.

Загальноприйняте скорочення:

Л.д.р. з ч.п. $\equiv$ лінійне диференціальне рівняння з частинними похідними

Приклади л.д.р. з ч.п. другого порядку:

1) *Хвильове рівняння:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f(x,y,z,t)\,, \tag{1.1.4}$$

$a > 0$ – фіксоване дійсне число, f – задана функція. Рівняння (1.1.4) розглядається в області $\Omega = \{(x, y, z, t) : x, y, z \in \mathbb{R}, t > 0\}$.

«Одновимірним» аналогом рівняння (1.1.4) є рівняння *коливань струни*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)\,. \tag{1.1.5}$$

Тут так само $a > 0$ – фіксоване дійсне число, f – задана функція. Рівняння (1.1.5) розглядається в області $\Omega = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}, t > 0\}$.

2) *Рівняння теплопровідності:*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z, t)\,, \tag{1.1.6}$$

$a > 0$ – фіксоване дійсне число, f – задана функція. Рівняння (1.1.6) розглядається в області $\Omega = \{(x, y, z, t) : x, y, z \in \mathbb{R}, t > 0\}$.

В рівняннях (1.1.4)–(1.1.6) параметр t грає роль часу. Зокрема, функція u в рівнянні (1.1.6) характеризує температуру в точці $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ і момент часу $t > 0$. Якщо ж ми маємо сталий тепловий процес, незалежний від t, то змінна t «зникає» з рівняння (1.1.6). Тоді маємо ще один важливий тип рівнянь:

3) *Рівняння Пуассона:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + f(x, y, z, t) = 0\,, \tag{1.1.7}$$

$a > 0$ – фіксоване дійсне число, f – задана функція. Рівняння (1.1.7) знову таки розглядається в області $\Omega = \{(x, y, z, t) : x, y, z \in \mathbb{R}, t > 0\}$. Коли $f(x, y, z, t) \equiv 0$, (1.1.7) перетворюється на *рівняння Лапласа:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0\,. \tag{1.1.8}$$

1.2 Класифікація л.д.р. з ч.п. другого порядку

В цьому розділі найважливішим з понять є означення *квадратичної форми*, яке ми вважаємо знайомим і, більше того, добре відомим з курсу лінійної алгебри. Радимо всім читачам нашого посібника спочатку вивчити або уважно повторити це поняття (для цього підійде, наприклад, підручник [6] з переліку бібліографічних джерел, див. § 4 глави I). Зауважимо, що класифікація лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку (згідно наших домовленостей, вони називаються тут більш скорочено л.д.р. з ч.п.) є справою значно більш важливішою, ніж їх безпосереднє розв'язання. З класифікації рівняння починається зведення його до так званого канонічного вигляду (про це буде говоритися пізніше), а лише потім стає можливим розв'язання. Слід також зауважити, що класифікація робиться виключно по *старших членах* рівняння, тобто, в класифікації приймає участь лише перша сума в (1.1.3). Інші члени рівняння (молодші похідні, сама функція, вільний член) ролі в класифікації не грають.

Отже нехай ми маємо рівняння (1.1.3). Для зручності читання, заново напишемо його:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + b(x)u(x) + c(x) = 0\,. \tag{1.2.1}$$

Зафіксуємо точку $x_0 \in \Omega$ і напишемо квадратичну форму $Q = Q(t)$, яка відповідає старшим членам рівняння (1.2.1) в цій точці, керуючись наступною відповідністю: $\frac{\partial}{\partial x_i} \to t_i$, $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \to t_i t_j$. Будемо мати:

$$Q(t) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_0) t_i t_j\,. \tag{1.2.2}$$

Згідно [6, теорема 1, § 6, гл. I], існує невироджена матриця

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.2.3}$$

така що заміна $t = Bs$, $t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$, $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$, перетворює форму Q до наступного вигляду:

$$Q(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i^2\,, \quad \alpha_i \in \{0, \pm 1\}\,. \tag{1.2.4}$$

З лінійної алгебри відомо, що кількість додатніх, нульових і від'ємних елементів в (1.2.4) не залежить від обрання матриці B і є сталою в цьому сенсі («закон інерції»; див. напр., [6, теорема 2, § 6, гл. I]). Отже, є справедливою наступна класифікація:

1) якщо в канонічному вигляді (1.2.4) форми Q в (1.2.2) всі елементи α_i відмінні від нуля і мають однаковий знак, то рівняння (1.2.1) називається рівнянням *еліптичного типу* в точці x_0;

2) якщо в канонічному вигляді (1.2.4) форми Q в (1.2.2) всі елементи α_i відмінні від нуля і мають однаковий знак, за виключенням одного і тільки одного елементу, котрий має протилежний знак, то рівняння (1.2.1) називається рівнянням *гіперболічного типу* в точці x_0;

3) якщо в канонічному вигляді (1.2.4) форми Q в (1.2.2) хоча б один елемент α_i дорівнює нулю, то рівняння (1.2.1) називається рівнянням *параболічного типу* в точці x_0.

Звичайно, можливі ситуації, коли два і більше елементів α_i в (1.2.4) мають знак, протилежний до знаку решти елементів. Такі рівняння називаються рівняннями *ультрагіперболічного типу.* Ми не будемо розглядати такі рівняння.

1.3 Зведення л.д.р. з ч.п. зі сталими коефіцієнтами до канонічного вигляду

Канонічний вигляд рівняння (1.1.3) – це рівняння, яке виходить з рівняння (1.1.3) шляхом невиродженої заміни незалежних змінних, відносно якого квадратична форма Q в (1.2.2) має канонічний вигляд, тобто, вигляд (1.2.4). Зауважимо, що далеко не кожне рівняння зводиться до канонічного вигляду. Зокрема, в міркуваннях попереднього параграфу ми фіксували точку x_0, і це істотний нюанс при наданні класифікації. Заміни, яка забезпечить канонічність форми рівняння *одночасно для всіх* x може і не існувати. Тим не менш, є два важливі випадки, коли зведення до канонічного вигляду можливе, а саме, коли коефіцієнти в рівнянні (1.1.3) є сталими (перший випадок), і коли рівняння (1.1.3) стосується двох незалежних змінних, $n = 2$ (другий випадок). В цьому розділі йдеться про випадок сталості коефіцієнтів рівняння.

Нехай маємо рівняння

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + bu(x) + c = 0\,, \qquad (1.3.1)$$

де коефіцієнтами a_{ij}, a_i, b і c є фіксовані дійсні числа.

Схема зведення л.д.р. з ч.п. (1.3.1) до канонічного вигляду

Для того, щоб звести л.д.р. з ч.п. (1.3.1) до канонічного вигляду, треба:

1) Поставити у відповідність $\frac{\partial}{\partial x_i} \to t_i$, $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \to t_i t_j$ і записати по старших членах рівняння (1.3.1) квадратичну форму

$$Q(t) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} t_i t_j \, . \tag{1.3.2}$$

Зверніть увагу, що приймаються до уваги лише «старші» члени рівняння (1.3.1), тобто, лише доданки в першій сумі (1.3.1). Інші елементи (молодші похідні і коефіцієнти при них) ігноруються.

2) Звести квадратичну форму (1.3.2) до канонічного вигляду. Нехай

$$Q(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i^2 \, , \quad \alpha_i \in \{0, \pm 1\} \tag{1.3.3}$$

– канонічний вигляд форми (1.3.2). Нехай також матриця

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.3.4}$$

– це (одна з можливих) матриць, за допомогою якої зводиться до канонічного вигляду форма (1.3.2), тобто, B – матриця, для якої заміна $t = Bs$, $t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$, $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$, перетворює форму Q до вигляду (1.3.4).

Коментар. Ми ще не сказали, як саме знайти матрицю B і торкнемося цього трохи пізніше. Поки просто зауважимо, що знаходження матриці B, як правило, пов'язано з методом Лагранжа (методом виділення повних квадратів) у квадратичній формі. У повному обсязі схему знаходження матриці B наводити не варто, оскільки її відшукування є інтуїтивно зрозумілим (див. приклад 1, що буде розглядатися нижче). Зауважимо також, що крім методу Лагранжа існують різні способи зведення форм до суми повних квадратів, на приклад, метод Якобі, або трикутний метод; для більш докладного знайомства з квадратичними формами відсилаємо читача до підручника [6].

3) Після того, як знайдено матрицю B, слід зробити в рівнянні (1.3.1) заміну

$$y = B^{tr} x, \tag{1.3.5}$$

де $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Тут і надалі B^{tr} позначає матрицю, транспоновану до B. Зверніть увагу, що в (1.3.5) записано дію матриці B^{tr} до вектор-стовпця x, а результатом y є також вектор-стовпець. При заміні (1.3.5) функція $u(x)$ переходить в деяку іншу функцію $\widetilde{u}(y)$. Можна показати, що після вказаної заміни і переобчислення похідних в (1.3.1) рівняння (1.3.1) матиме вигляд:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial y_i^2}(y) + F\left(y, \widetilde{u}, \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial y_n}\right) = 0\,, \tag{1.3.6}$$

де у «хвіст» $F(y, \widetilde{u}, \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial y_n})$ ми сховали елементи рівняння (1.3.6), що містять саму функцію і її молодші похідні. При розв'язанні рівняння (1.3.1) слід знаходити конкретний вигляд функції F, при зведенні до канонічного вигляду – зовсім не обов'язково.

Рівняння (1.3.6) називається рівнянням, записаним у *канонічному вигляді* відповідно до рівняння (1.3.1).

На що слід звернути увагу ?

1) При зведенні до канонічного вигляду рівняння (1.3.1) його молодші члени ігноруються. На жаль, це доволі часта помилка при розв'язані задач студентами.

2) Похідні в рівнянні при замінах типу (1.3.5) *не інваріантні,* а змінюються за спеціальним правилом. Ось воно:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial y_k}(y(x)) \cdot \frac{\partial y_k}{\partial x_i}(x)\,, \tag{1.3.7}$$

або більш скорочено

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial x_i}\,,$$

чи навіть

$$u_{x_i} = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{u}_{y_k} \cdot (y_k)_{x_i}\,, \tag{1.3.8}$$

див., напр., [12, співвідношення (8) і (9), пункт 181, гл. V]. Формула (1.3.7) нагадує шкільну формулу для похідної складної функції:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)\,. \tag{1.3.9}$$

3) У рівнянні (1.3.6) коефіцієнти α_i *чітко відповідають* коефіцієнтам форми (1.3.3), зокрема, ці коефіцієнти мають набувати одне з трьох можливих значень: 0, 1 або -1. Якщо Ви розв'язували задачу і отримали інші коефіцієнти, або в канонічному вигляді (1.3.6) Ви маєте коефіцієнти, відмінні від значень α_i у формі (1.3.3), це означає, що задачу розв'язано неправильно.

4) Для функцій $u = u(x, y)$ або $\widetilde{u} = \widetilde{u}(\xi, \eta)$ з класу C^2, *відносно яких ми завжди розглядаємо наші рівняння,* їх мішані похідні співпадають ([12, теорема, п. 190, § 4, гл. V]). Наприклад, $u_{xy} = u_{yx}$, $\widetilde{u}_{\xi\eta} = \widetilde{u}_{\eta\xi}$ і т.п. Сказане розповсюджується також на випадок функцій n змінних:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n\,. \tag{1.3.10}$$

5) Якщо Вас просять звести рівняння до канонічного вигляду, або визначити його тип, то само рівняння **розв'язувати** (шукати функцію u, яка обертає його в тотожність) **не треба**. Якщо ж просять розв'язати рівняння, то, як правило, слід спочатку звести його до канонічного вигляду, а вже потім шукати відповідну функцію u. Розв'язання рівнянь – це окреме питання, яке буде розглядатися в наступних секціях посібнику. Розв'язування рівнянь, як правило, є справою значно більш складною, ніж визначення класифікації або зведення до канонічного вигляду даного рівняння.

Приклад 1. Визначити тип і звести до канонічного вигляду рівняння

$$u_{xx} - 4u_{xy} - 6u_{xz} + 3u_{yy} + u_{zz} + 6u_{yz} + u_x - 2u = 5x\,. \tag{1.3.11}$$

Розв'язок. **1 крок.** Очевидно, рівняння (1.3.11) є лінійним диференціальним рівнянням з частинними похідними (л.д.р. з ч.п.) другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Поставимо у відповідність

$$\frac{\partial}{\partial x} \to t_1, \quad \frac{\partial}{\partial y} \to t_2, \quad \frac{\partial}{\partial z} \to t_3\,.$$

По старших членах рівняння (1.3.11) запишемо квадратичну форму:

$$Q(t) = t_1^2 - 4t_1t_2 - 6t_1t_3 + 3t_2^2 + t_3^2 + 6t_2t_3\,. \tag{1.3.12}$$

2 крок. Зведемо форму $Q(t)$ в (1.3.12) до канонічного вигляду методом виділення повного квадрату. Передусім згрупуємо всі доданки в (1.3.12), які містять t_1 (це перший, другий і третій доданок), причому на цю групу членів ми дивимось як на повний квадрат, в якому «не вистачає» елементів і які нам треба додати і потім відняти. Крім того, на член вигляду $-4t_1t_2 - 6t_1t_3$ ми дивимось як на подвійний добуток $2ab = 2 \cdot t_1 \cdot (2t_2 + 3t_3)$ в формулі $(a-b)^2$, тобто, $a = t_1$, $b = 2t_2 + 3t_3$. Отже, $t_1^2 - 4t_1t_2 - 6t_1t_3$ – це повний квадрат $(t_1 - 2t_2 - 3t_3)^2 = (a-b)^2$ з відніманням від нього $b^2 = 4t_2^2 + 12t_2t_3 + 9t_3^2$. В підсумку маємо:

$$Q(t) = t_1^2 - 4t_1t_2 - 6t_1t_3 + 3t_2^2 + t_3^2 + 6t_2t_3 =$$

$$= (t_1 - 2t_2 - 3t_3)^2 - 4t_2^2 - 12t_2t_3 - 9t_3^2 + 3t_2^2 + t_3^2 + 6t_2t_3 =$$

$$= (t_1 - 2t_2 - 3t_3)^2 - t_2^2 - 6t_2t_3 - 8t_3^2\,.$$

Вираз після дужок вже не містить t_1. Аналогічну процедуру влаштуємо з t_2. У виразі $-t_2^2 - 6t_2t_3$ «майже» повний квадрат $-(t_2 + 3t_3)^2$, в якому не вистачає $-9t_3^2$. Тому треба додати до $-t_2^2 - 6t_2t_3$ вираз $-9t_3^2$ і відняти його. Будемо мати:

$$Q(t) = (t_1 - 2t_2 - 3t_3)^2 - t_2^2 - 6t_2t_3 - 8t_3^2 - 6t_1t_3 =$$

$$= (t_1 - 2t_2 - 3t_3)^2 - (t_2 + 3t_3)^2 + 9t_3^2 - 8t_3^2 =$$

$$= (t_1 - 2t_2 - 3t_3)^2 - (t_2 + 3t_3)^2 + t_3^2\,. \tag{1.3.13}$$

Позначимо у (1.3.13) $s_1 = t_1 - 2t_2 - 3t_3$, $s_2 = t_2 + 3t_3$, $s_3 = t_3$. Тоді форма $Q(t)$ запишеться у вигляді:

$$Q(t) = s_1^2 - s_2^2 + s_3^2\,. \tag{1.3.14}$$

Співвідношення (1.3.14) є канонічним виглядом канонічної форми Q у (1.3.12) (див. також (1.3.3)). Коефіцієнти форми (1.3.14): $+1$; -1; $+1$ відмінні від нуля, причому два з них мають знак «плюс», і один – «мінус». Отже, рівняння (1.3.11) гіперболічного типу в $\mathbb{R}^3$.

3 крок. Знайдемо матрицю B у відповідності до (1.3.5). Для цього запишемо заміну t_i через s_i у вигляді системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} s_1 = t_1 - 2t_2 - 3t_3, \\ s_2 = t_2 + 3t_3, \\ s_3 = t_3\,. \end{cases} \tag{1.3.15}$$

Розв'яжемо систему (1.3.15) відносно t_i. З третього рівняння тривіально $t_3 = s_3$, тоді з другого рівняння $t_2 = s_2 - 3t_3 = s_2 - 3s_3$. Підставляємо в перше рівняння явні значення t_2 і t_3 через s_2 і s_3, будемо мати: $t_1 =$

$s_1 + 2t_2 + 3t_3 = s_1 + 2s_2 - 6s_3 + 3s_3 = s_1 + 2s_2 - 3s_3$. Знайдені значення t_i через s_i можна записати в вигляді системи

$$\begin{cases} t_1 = s_1 + 2s_2 - 3s_3, \\ t_2 = s_2 - 3s_3, \\ t_3 = s_3\,, \end{cases}$$

або в матричному вигляді

$$t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = Bs\,. \tag{1.3.16}$$

З (1.3.16) випливає, що матриця B дорівнює $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Таке зауваження є правомірним, бо $\det B = 1 \neq 0$.

4 крок. Тепер згідно (1.3.5) зробимо заміну $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = B^{tr} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, де ξ, η і ζ – нові змінні, а B^{tr} – матриця, транспонована до B. Більш докладно, покладемо

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \tag{1.3.17}$$

або, що те саме, у вигляді системи

$$\begin{cases} \xi = x, \\ \eta = 2x + y, \\ \zeta = -3x - 3y + z\,. \end{cases} \tag{1.3.18}$$

При заміні (1.3.18) функція $u(x, y, z)$ переходить в якусь (невідому) функцію $\widetilde{u}(\xi, \eta, \zeta)$.

5 крок. Залишилося підставити частинні похідні u_{xx}, u_{xy}, u_{xz}, u_{yy}, u_{zz}, u_{yz} і u_x в рівняння (1.3.11) згідно заміни (1.3.18). Нагадаємо, що похідні треба переобчислювати за правилом (1.3.7). Найважче буде обчислювати u_{xx} і u_{xy}, найлегше – u_{yz} і u_{zz} (**чому ?**). Будемо мати:

$$u_x = \widetilde{u}_\xi \xi_x + \widetilde{u}_\eta \eta_x + \widetilde{u}_\zeta \zeta_x = \widetilde{u}_\xi + 2\widetilde{u}_\eta - 3\widetilde{u}_\zeta\,. \tag{1.3.19}$$

Тут ми врахували, що $\xi_x = 1$, $\eta_x = 2$, $\zeta_x = -3$ (це видно безпосередньо з (1.3.18)). Далі, беручи похідну по x від лівої і правої частини в (1.3.19), будемо мати:

$$u_{xx} = \widetilde{u}_{\xi\xi}\xi_x + \widetilde{u}_{\xi\eta}\eta_x + \widetilde{u}_{\xi\zeta}\zeta_x + 2\widetilde{u}_{\eta\xi}\xi_x + 2\widetilde{u}_{\eta\eta}\eta_x + 2\widetilde{u}_{\eta\zeta}\zeta_x -$$

$$-3\widetilde{u}_{\zeta\xi}\xi_x - 3\widetilde{u}_{\zeta\eta}\eta_x - 3\widetilde{u}_{\zeta\zeta}\zeta_x =$$

$$= \widetilde{u}_{\xi\xi} + 2\widetilde{u}_{\xi\eta} - 3\widetilde{u}_{\xi\zeta} + 2\widetilde{u}_{\eta\xi} + 4\widetilde{u}_{\eta\eta} - 6\widetilde{u}_{\eta\zeta} - 3\widetilde{u}_{\zeta\xi} - 6\widetilde{u}_{\zeta\eta} + 9\widetilde{u}_{\zeta\zeta} =$$

$$= \widetilde{u}_{\xi\xi} + 4\widetilde{u}_{\xi\eta} - 6\widetilde{u}_{\xi\zeta} + 4\widetilde{u}_{\eta\eta} - 12\widetilde{u}_{\eta\zeta} + 9\widetilde{u}_{\zeta\zeta}\,. \qquad (1.3.20)$$

Звичайно, тут при обчисленнях ми врахували рівності $\widetilde{u}_{\xi\eta} = \widetilde{u}_{\eta\xi}$, $\widetilde{u}_{\xi\zeta} = \widetilde{u}_{\zeta\xi}$ і $\widetilde{u}_{\eta\zeta} = \widetilde{u}_{\zeta\eta}$ (див. (1.3.10)). Аналогічно обчислимо u_{xy} і u_{xz}. Зокрема, беручи похідну по y від лівої і правої частини в (1.3.19), будемо мати:

$$u_{xy} = \widetilde{u}_{\xi\xi}\xi_y + \widetilde{u}_{\xi\eta}\eta_y + \widetilde{u}_{\xi\zeta}\zeta_y + 2\widetilde{u}_{\eta\xi}\xi_y + 2\widetilde{u}_{\eta\eta}\eta_y + 2\widetilde{u}_{\eta\zeta}\zeta_y -$$

$$-3\widetilde{u}_{\zeta\xi}\xi_y - 3\widetilde{u}_{\zeta\eta}\eta_y - 3\widetilde{u}_{\zeta\zeta}\zeta_y =$$

$$= \widetilde{u}_{\xi\eta} - 3\widetilde{u}_{\xi\zeta} + 2\widetilde{u}_{\eta\eta} - 6\widetilde{u}_{\eta\zeta} - 3\widetilde{u}_{\zeta\eta} + 9\widetilde{u}_{\zeta\zeta} = \widetilde{u}_{\xi\eta} - 3\widetilde{u}_{\xi\zeta} + 2\widetilde{u}_{\eta\eta} - 9\widetilde{u}_{\eta\zeta} + 9\widetilde{u}_{\zeta\zeta}\,.$$

Аналогічно, обчислюємо u_{xz} :

$$u_{xz} = \widetilde{u}_{\xi\xi}\xi_z + \widetilde{u}_{\xi\eta}\eta_z + \widetilde{u}_{\xi\zeta}\zeta_z + 2\widetilde{u}_{\eta\xi}\xi_z + 2\widetilde{u}_{\eta\eta}\eta_z + 2\widetilde{u}_{\eta\zeta}\zeta_z -$$

$$-3\widetilde{u}_{\zeta\xi}\xi_z - 3\widetilde{u}_{\zeta\eta}\eta_z - 3\widetilde{u}_{\zeta\zeta}\zeta_z = \widetilde{u}_{\xi\zeta} + 2\widetilde{u}_{\eta\zeta} - 3\widetilde{u}_{\zeta\zeta}\,.$$

Аналогічно до (1.3.19),

$$u_y = \widetilde{u}_{\xi}\xi_y + \widetilde{u}_{\eta}\eta_y + \widetilde{u}_{\zeta}\zeta_y = \widetilde{u}_{\eta} - 3\widetilde{u}_{\zeta}\,. \qquad (1.3.21)$$

Диференціюючи (1.3.21) почергово по y і z, ми будемо мати:

$$u_{yy} = \widetilde{u}_{\eta\xi}\xi_y + \widetilde{u}_{\eta\eta}\eta_y + \widetilde{u}_{\eta\zeta}\zeta_y - 3\widetilde{u}_{\zeta\xi}\xi_y - 3\widetilde{u}_{\zeta\eta}\eta_y - 3\widetilde{u}_{\zeta\zeta}\zeta_y =$$

$$= \widetilde{u}_{\eta\eta} - 3\widetilde{u}_{\eta\zeta} - 3\widetilde{u}_{\zeta\eta} + 9\widetilde{u}_{\zeta\zeta} = \widetilde{u}_{\eta\eta} - 6\widetilde{u}_{\eta\zeta} + 9\widetilde{u}_{\zeta\zeta}\,;$$

$$u_{yz} = \widetilde{u}_{\eta\xi}\xi_z + \widetilde{u}_{\eta\eta}\eta_z + \widetilde{u}_{\eta\zeta}\zeta_z - 3\widetilde{u}_{\zeta\xi}\xi_z - 3\widetilde{u}_{\zeta\eta}\eta_z - 3\widetilde{u}_{\zeta\zeta}\zeta_z = \widetilde{u}_{\eta\zeta} - 3\widetilde{u}_{\zeta\zeta}\,.$$

Нарешті,

$$u_z = \widetilde{u}_{\xi}\xi_z + \widetilde{u}_{\eta}\eta_z + \widetilde{u}_{\zeta}\zeta_z = \widetilde{u}_{\zeta}\,,$$

$$u_{zz} = \widetilde{u}_{\zeta\xi}\xi_z + \widetilde{u}_{\zeta\eta}\eta_z + \widetilde{u}_{\zeta\zeta}\zeta_z = \widetilde{u}_{\zeta\zeta}\,. \qquad (1.3.22)$$

Ми обчислили всі частинні похідні функції u в термінах нових змінних ξ, η і ζ і можемо підставити їх в (1.3.11). Будемо мати:

$$\widetilde{u}_{\xi\xi} + 4\widetilde{u}_{\xi\eta} - 6\widetilde{u}_{\xi\zeta} + 4\widetilde{u}_{\eta\eta} - 12\widetilde{u}_{\eta\zeta} + 9\widetilde{u}_{\zeta\zeta} - 4\widetilde{u}_{\xi\eta} + 12\widetilde{u}_{\xi\zeta} - 8\widetilde{u}_{\eta\eta} + 36\widetilde{u}_{\eta\zeta} - 36\widetilde{u}_{\zeta\zeta} -$$

$$-6\widetilde{u}_{\xi\zeta} - 12\widetilde{u}_{\eta\zeta} + 18\widetilde{u}_{\zeta\zeta} + 3\widetilde{u}_{\eta\eta} - 18\widetilde{u}_{\eta\zeta} + 27\widetilde{u}_{\zeta\zeta} + \widetilde{u}_{\zeta\zeta} + 6\widetilde{u}_{\eta\zeta} - 18\widetilde{u}_{\zeta\zeta} +$$
$$+\widetilde{u}_{\xi} + 2\widetilde{u}_{\eta} - 3\widetilde{u}_{\zeta} - 2\widetilde{u} = 5\xi\,,$$

або, зводячи подібні члени,

$$\widetilde{u}_{\xi\xi} - \widetilde{u}_{\eta\eta} + \widetilde{u}_{\zeta\zeta} + \widetilde{u}_{\xi} + 2\widetilde{u}_{\eta} - 3\widetilde{u}_{\zeta} - 2\widetilde{u} - 5\xi = 0\,. \tag{1.3.23}$$

Рівняння (1.3.23) є канонічним виглядом рівняння (1.3.11). Можна також записати (1.3.23) більш скорочено, а саме,

$$\widetilde{u}_{\xi\xi} - \widetilde{u}_{\eta\eta} + \widetilde{u}_{\zeta\zeta} + F(\xi, \eta, \zeta, \widetilde{u}, \widetilde{u}_{\xi}, \widetilde{u}_{\eta}, \widetilde{u}_{\zeta}) = 0\,,$$

де ми сховали в «хвіст» F вираз $\widetilde{u}_{\xi} + 2\widetilde{u}_{\eta} - 3\widetilde{u}_{\zeta} - 2\widetilde{u} - 5\xi$. Зауважимо, що вигляд F при зведенні рівняння до канонічного вигляду не принциповий; можна не обчислювати його явно без особливої на то потреби. Підкреслимо, що коефіцієнти при старших членах рівняння (1.3.23) $+1$, -1, 1 співпадають з відповідними коефіцієнтами квадратичної форми Q в (1.3.14), більш того, їх порядок слідування один і той самий. □

Більшість задач для самостійного розгляду, наведених далі по тексту, стосуються рівнянь з двома змінними. З огляду на це, наведемо декілька розв'язків аналогічних задач.

Приклад 2. Визначити тип і звести до канонічного вигляду рівняння

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 5u_{yy} - 3u_x + u_y + u = 0\,. \tag{1.3.24}$$

Розв'язок. Поставимо у відповідність $\frac{\partial}{\partial x} \to t_1$, $\frac{\partial}{\partial y} \to t_2$, і напишемо по вигляду старших членів у (1.3.24) квадратичну форму

$$Q(t) = t_1^2 - 4t_1t_2 + 5t_2^2 = (t_1 - 2t_2)^2 - 4t_2^2 + 5t_2^2 = (t_1 - 2t_2)^2 + t_2^2\,.$$

Заміна $s_1 = t_1 - 2t_2$, $s_2 = t_2$ зводить нашу квадратичну форму Q до вигляду

$$Q(t) = s_1^2 + s_2^2\,. \tag{1.3.25}$$

В канонічному вигляді (1.3.25) для Q обидва коефіцієнти дорівнюють $+1$, нулів нема. Отже, вихідне рівняння (1.3.24) еліптичного типу в $\mathbb{R}^2$. Тепер, систему рівнянь

$$\begin{cases} s_1 = t_1 - 2t_2 \\ s_2 = t_2 \end{cases}$$

розв'язуємо відносно t_1 і t_2. З другого рівняння елементарно маємо $t_2 = s_2$, тоді з першого рівняння $t_1 = s_1 + 2s_2$. Маємо систему

$$\begin{cases} t_1 = s_1 + 2s_2 \\ t_2 = s_2 \end{cases}$$

Звідси матриця B має вигляд:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det B = 1 \neq 0 \,,$$

звідси

$$B^{tr} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Робимо заміну $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = B^{tr} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, або у вигляді системи:

$$\begin{cases} \xi = x \\ \eta = 2x + y \end{cases} . \tag{1.3.26}$$

Згідно (1.3.26) $u(x, y) = \widetilde{u}(\xi, \eta)$. Переобчислюємо частинні похідні за правилом (1.3.7). Маємо:

$$u_x = \widetilde{u}_\xi \xi_x + \widetilde{u}_\eta \eta_x = \widetilde{u}_\xi + 2\widetilde{u}_\eta \,,$$

$$u_{xx} = \widetilde{u}_{\xi\xi}\xi_x + \widetilde{u}_{\xi\eta}\eta_x + 2\widetilde{u}_{\eta\xi}\xi_x + 2\widetilde{u}_{\eta\eta}\eta_x = \widetilde{u}_{\xi\xi} + 4\widetilde{u}_{\xi\eta} + 4\widetilde{u}_{\eta\eta} \,,$$
$$u_{xy} = \widetilde{u}_{\xi\xi}\xi_y + \widetilde{u}_{\xi\eta}\eta_y + 2\widetilde{u}_{\eta\xi}\xi_y + 2\widetilde{u}_{\eta\eta}\eta_y = \widetilde{u}_{\xi\eta} + 2\widetilde{u}_{\eta\eta} \,,$$
$$u_y = \widetilde{u}_\xi \xi_y + \widetilde{u}_\eta \eta_y = \widetilde{u}_\eta \,,$$
$$u_{yy} = \widetilde{u}_{\eta\xi}\xi_y + \widetilde{u}_{\eta\eta}\eta_y = \widetilde{u}_{\eta\eta} \,.$$

Отримані результати для u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy} і u_{yy} підставимо в рівняння (1.3.24). Будемо мати:

$$\widetilde{u}_{\xi\xi} + 4\widetilde{u}_{\xi\eta} + 4\widetilde{u}_{\eta\eta} - 4\widetilde{u}_{\xi\eta} - 8\widetilde{u}_{\eta\eta} + 5\widetilde{u}_{\eta\eta} - 3\widetilde{u}_\xi - 6\widetilde{u}_\eta + \widetilde{u}_\eta + \widetilde{u} = 0 \,,$$

або, зводячи подібні,

$$\widetilde{u}_{\xi\xi} + \widetilde{u}_{\eta\eta} - 3\widetilde{u}_\xi - 5\widetilde{u}_\eta + \widetilde{u} = 0 \,. \tag{1.3.27}$$

Рівняння (1.3.27) є рівнянням, відповідним до (1.3.24), записаним у канонічному вигляді. $\square$

Приклад 3. Визначити тип і звести до канонічного вигляду рівняння

$$u_{xx} - 12u_{xy} + 36u_{yy} + 2u_x - 12u_y = 0\,. \tag{1.3.28}$$

Розв'язок. Поставимо у відповідність $\frac{\partial}{\partial x} \to t_1$, $\frac{\partial}{\partial y} \to t_2$, і напишемо по вигляду старших членів у (1.3.28) квадратичну форму

$$Q(t) = t_1^2 - 12t_1t_2 + 36t_2^2 = (t_1 - 6t_2)^2 = (t_1 - 6t_2)^2 + 0 \cdot t_2^2\,.$$

Заміна

$$\begin{cases} s_1 = t_1 - 6t_2, \\ s_2 = t_2 \end{cases} \tag{1.3.29}$$

Зводить цю форму до вигляду

$$Q(t) = s_1^2 + 0 \cdot s_2^2 = s_1^2\,. \tag{1.3.30}$$

В канонічному вигляді (1.3.30) квадратичної форми Q один з коефіцієнтів дорівнює нулю, тобто, дане рівняння (1.3.28) є рівнянням параболічного типу в $\mathbb{R}^2$. Систему (1.3.29) розв'яжемо відносно t_i, $i = 1, 2$. Маємо: $t_2 = s_2$, крім того, з першого рівняння $t_1 = s_1 + 6s_2$. Маємо:

$$\begin{cases} t_1 = s_1 + 6s_2, \\ t_2 = s_2 \end{cases},$$

або

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}.$$

Звідси матриця B має вигляд $B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, причому $\det B = 1 \neq 0$. Робимо заміну $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = B^{tr} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, або

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

У вигляді системи останню заміну можна записати в вигляді

$$\begin{cases} \xi = x \\ \eta = 6x + y \end{cases}.$$

Маємо: $u(x,y) = \widetilde{u}(\xi,\eta)$, крім того, згідно правил (1.3.7),

$$u_x = \widetilde{u}_\xi \xi_x + \widetilde{u}_\eta \eta_x = \widetilde{u}_\xi + 6\widetilde{u}_\eta\,,$$

$$u_{xx} = \widetilde{u}_{\xi\xi}\xi_x + \widetilde{u}_{\xi\eta}\eta_x + 6\widetilde{u}_{\eta\xi}\xi_x + 6\widetilde{u}_{\eta\eta}\eta_x = \widetilde{u}_{\xi\xi} + 12\widetilde{u}_{\xi\eta} + 36\widetilde{u}_{\eta\eta}\,,$$

$$u_{xy} = \widetilde{u}_{\xi\xi}\xi_y + \widetilde{u}_{\xi\eta}\eta_y + 6\widetilde{u}_{\eta\xi}\xi_y + 6\widetilde{u}_{\eta\eta}\eta_y = \widetilde{u}_{\xi\eta} + 6\widetilde{u}_{\eta\eta}\,,$$

$$u_y = \widetilde{u}_\xi \xi_y + \widetilde{u}_\eta \eta_y = \widetilde{u}_\eta\,,$$

$$u_{yy} = \widetilde{u}_{\eta\xi}\xi_y + \widetilde{u}_{\eta\eta}\eta_y = \widetilde{u}_{\eta\eta}\,.$$

Залишилося підставити обчислені вище явні вирази для u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy} і u_{yy} у рівняння (1.3.28). Будемо мати:

$$\widetilde{u}_{\xi\xi} + 12\widetilde{u}_{\xi\eta} + 36\widetilde{u}_{\eta\eta} - 12\widetilde{u}_{\xi\eta} - 72\widetilde{u}_{\eta\eta} + 36\;\widetilde{u}_{\eta\eta} + 2\widetilde{u}_\xi + 12\widetilde{u}_\eta - 12\widetilde{u}_\eta = 0\,.$$

Зводячи подібні члени в лівій частині останнього виразу, будемо мати:

$$\widetilde{u}_{\xi\xi} + 2\widetilde{u}_\xi = 0\,. \qquad (1.3.31)$$

Рівняння (1.3.31) є рівнянням, відповідним до вихідного рівняння (1.3.28), записаним у канонічному вигляді. □

1.4 Завдання для самоконтролю

1. Чи буде сума лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку (л.д.р. з ч.п. 2-го порядку) також диференціальним рівнянням того ж вигляду ?

2. Розглянемо формулу (1.3.9): $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$. До якої змінної відноситься штрих при f у правій частині ?

3. У прикладі 1 найважчим є обчислення u_{xx} (достатньо велика кількість доданків), а u_{zz} складається всього з одного доданку і обчислюється в один рядок, див. співвідношення (1.3.20) і (1.3.22). Поясніть, чому так виходить: як з точки зору заміни (1.3.17) окреслити цей факт ?

4. Питання, близьке до попереднього: чому в заміні (1.3.18) вираз відносно першої змінної є найпростішим, але, в той самий час, обчислення похідних u_x і u_{xx} по ній (як видно з розв'язання прикладу 1) є найважчим ? Чи нема тут парадоксу ?

5. Розглянемо рівняння $u_{xx} - 12u_{xy} + 36u_{yy} + 2u_x - 12u_y = 0$ з прикладу 3. Згідно класифікації, це з одного боку має бути рівняння гіперболічного типу: при старших коефіцієнтах знаки «+»; «−»; «+» – «два

додатніх і один від'ємний». Проте, протягом розв'язку ми з'ясували, що це є рівняння параболічного типу. Як пояснити вказану «суперечність» ?

6. Визначити тип і звести до канонічного вигляду рівняння $u_{xy} - u_{xz} + u_x + u_y - u_z = 0$. **Вказівка.** У квадратичній формі $Q(t) = t_1t_2 - t_1t_3$ зробити заміну Лагранжа $t_1 = k_1 + k_2$, $t_2 = k_1 - k_2$, $t_3 = k_3$.

7. Чи є коректними наступні міркування: «У квадратичній формі $Q(t) = t_1t_2 - t_1t_3$ нема коефіцієнтів, відмінних від нуля при повних квадратах змінних t_1, t_2 і t_3, отже, ця форма і відповідне їй рівняння має параболічний тип.» ?

1.5 Завдання для самостійної роботи № 1

Задача 1. *Визначити тип і звести до канонічного вигляду рівняння для кожного з варіантів.*

Варіант	**Рівняння**
1	$4u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} - 2u_y = 5x$
2	$u_{xx} - u_{yy} - u_{zz} + 2u_x - u = 3$
3	$3u_{yy} - 2u_{xy} - 2u_{yz} + 4u_x = 1 - y$
4	$-4u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} - 2u_y = 8x$
5	$4u_{xx} - 4u_{xy} - u_{yy} - 2u_y = 5x + \sin x$
6	$u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} - 3u_x - 15u_y + 27x = 0$
7	$u_{xx} - 4u_{xy} + 5u_{yy} - 3u_x + u_y + u = 0$
8	$9u_{xx} + 6u_{xy} + u_{yy} - u_y = x$
9	$9u_{xx} + 6u_{xy} + u_{yy} - u_y = y$
10	$u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y + 2u - x^2y = 0$
11	$u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 4u_{yz} + 5u_{zz} = 0$
12	$u_{xx} - 4u_{xy} + 2u_{xz} + 4u_{yy} + u_{zz} + 3u_x = 0$
13	$3u_{xy} - 2u_{xz} - u_{yz} - u = 0$
14	$u_{xy} + u_{xx} - u_y - 10u + 4x = 0$
15	$u_{xx} + 4u_{xy} - u_{yy} + u_x + u_y + 2u = 0$
16	$3u_{yy} - 2u_{xy} - 2u_{yz} + 4u = 0$
17	$5u_{xx} + 16u_{xy} + 16u_{yy} + 24u_x + 32u_y + 64u = 0$
18	$4u_{zz} + 4u_{yz} + u_{yy} - 2u_y = 5z$
19	$u_{xx} + 2u_{xy} + 3u_{yy} = 0$
20	$u_{xx} - 2u_{xy} + 3u_{yy} = 0$
21	$u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0$
22	$4u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} - 2u_y = 5z$
23	$4u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} - 2u_y = 5u_z$
24	$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} - 3u_x + 12u_y + 27u = 0$
25	$u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} - 32u = 0$
26	$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 9u_x + 9u_y - 9u = 0$
27	$3u_{xx} + u_{xy} + 3u_x + u_y - u + y = 0$
28	$u_{xx} - u_{yy} + u_x + u_y - 4u = 0$
29	$u_{xx} + 4u_{xy} + 10u_{yy} - 24u_x + 42u_y + 2(x + y) = 0$
30	$4u_{xx} + u_{yy} - 2u_y = 5$

2 Метод характеристик. Рівняння зі змінними коефіцієнтами

2.1 Зведення до канонічного вигляду

Міркування щодо зведення до канонічного вигляду л.д.р. з ч.п. другого порядку, викладені в попередньому розділі, справедливі лише по відношенню до рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Сталість коефіцієнтів істотна: звести довільне рівняння до канонічного вигляду «матричним способом», взагалі кажучи, не можна. Наша найближча задача – розібратися з рівняннями, які мають довільні двічі гладкі коефіцієнти у випадку двох змінних. Для довільної кількості змінних загальної методики зведення рівнянь до канонічного вигляду не існує; випадок двох змінних є окремим і дуже важливим з цієї точки зору.

Розглянемо рівняння вигляду

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + F(x,y,u,u_x,u_y) = 0\,. \qquad (2.1.1)$$

Рівняння (2.1.1) називається *характеристичним рівнянням* (див., наприклад, [7, стор. 170–171]). Це рівняння ми будемо розглядати в деякій області $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, де його коефіцієнти одночасно не обертаються в нуль, тобто $|a| + |b| + |c| \neq 0$. (Якщо $|a| + |b| + |c| = 0$, то рівняння (2.1.1) вироджується, отже, такий випадок ми розглядати не будемо). **Загальна схема** зведення рівняння (2.1.1) полягає в наступному:

1) Визначити коефіцієнти a, b і c і рівнянні (2.1.1) і знаки виразу $b^2 - ac$. Якщо:
а) $b^2 - ac > 0$ – гіперболічний тип,
б) $b^2 - ac = 0$ – параболічний тип,
в) $b^2 - ac < 0$ – еліптичний тип.

Зверніть увагу, що в рівнянні (2.1.1) коефіцієнт при u_{xy} дорівнює не b, а $2b$. На жаль, це дуже часта помилка студентів при розв'язанні задач.

2) Скласти наступне *рівняння характеристик:*

$$a(dy)^2 - 2b \cdot dxdy + c(dx)^2 = 0 \qquad (2.1.2)$$

і розв'язати його. В окремих випадках ($a = 0$, $b = 0$ або $c = 0$) в (2.1.2) працює винесення множника dx (або dy) за дужки, або формула $m^2 - n^2 = (m+n)(m-n)$. Нехай для визначеності далі $a \neq 0$. Розв'язувати (2.1.2) в загальному випадку (за умови $a \neq 0$) можна діленням обох його частин на $(dx)^2$ і заміною $\frac{dy}{dx} = t$. Тоді рівняння (2.1.2) перетвориться на квадратне рівняння

$$at^2 - 2bt + c = 0\,,$$

звідки $D = 4b^2 - 4ac = 4(b^2 - ac)$, $t_{1,2} = \frac{2b \pm 2\sqrt{b^2-ac}}{2a} = \frac{b \pm \sqrt{b^2-ac}}{a}$. Звідси маємо сукупність

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a} \\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a}\,. \end{array}\right. \tag{2.1.3}$$

3) Розв'язками (2.1.3) є дві залежності, як пов'язують між собою змінні x і y,

$$\begin{cases} \varphi_1(x,y) = c_1 \\ \varphi_2(x,y) = c_2\,. \end{cases} \tag{2.1.4}$$

Неважко бачити, що в випадку гіперболічного типу ($b^2 - ac > 0$, $D = 4(b^2 - ac) > 0$) маємо в (2.1.4) два різних і незалежних перших інтеграли φ_1 і φ_2; в випадку параболічного типу ($b^2 - ac = 0$, $D = 4(b^2 - ac) = 0$) вони співпадають: $\varphi_1 = \varphi_2$; в випадку еліптичного типу ($b^2 - ac < 0$, $D = 4(b^2 - ac) < 0$) вони комплексно спряжені: $\varphi_1 = u(x,y) + iv(x,y)$, $\varphi_2 = u(x,y) - iv(x,y)$, де $i^2 = -1$ – уявна комплексна одиниця. Подальший крок – заміна незалежних змінних

$$\begin{cases} \xi = \xi(x,y) \\ \eta = \eta(x,y)\,. \end{cases} \tag{2.1.5}$$

Отже:

а) У випадку $b^2 - ac > 0$ робимо в (2.1.1) заміну незалежних змінних $\xi = \varphi_1(x,y)$, $\eta = \varphi_2(x,y)$;

б) У випадку $b^2 - ac = 0$ робимо в (2.1.1) заміну незалежних змінних $\xi = \varphi_1(x,y)$, η – довільна функція, для якої якобіан

$$J := \begin{vmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2.1.6}$$

Як правило, покладають $\eta = x$, якщо при цьому не порушено умову (2.1.6).

в) У випадку $b^2 - ac < 0$ робимо в (2.1.1) заміну незалежних змінних $\xi = u(x,y)$, $\eta = v(x,y)$.

При таких замінах в кожному з можливих пунктів а), б) або в) маємо:

$$u(x,y) = \widetilde{u}(\xi,\eta)\,, \tag{2.1.7}$$

де $\widetilde{u}$ – нова невідома функція. Тепер треба переобчислити всі частинні похідні u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy} і u_{yy} так, як ми робили це в попередній секції (тобто, користуючись правилом (1.3.7) на сторінці 10).

4) У випадку гіперболічного типу, після заміни (2.1.7) і можливого ділення на (ненульовий) коефіцієнт при $\widetilde{u}_{\xi\eta}$ рівняння (2.1.1) матиме вигляд

$$\widetilde{u}_{\xi\eta} + F_1(\xi, \eta, \widetilde{u}, \widetilde{u}_\xi, \widetilde{u}_\eta) = 0\,, \tag{2.1.8}$$

де F_1 – деяка функція. Може здатися, що співвідношення (2.1.8) не узгоджено з «іншим» канонічним виглядом рівняння (2.1.1) у випадку сталих коефіцієнтів, див. співвідношення (1.3.6) на сторінці 10. Ця «неузгодженість» компенсується за рахунок додаткової заміни змінних в (2.1.8): $\xi = s+t$, $\eta = s-t$, $\widetilde{u}(\xi, \eta) = v(s,t)$, де v – нова невідома функція. Радимо читачу самостійно провести відповідні обчислення.

У випадку параболічного типу, після заміни (2.1.7) і можливого ділення на (ненульовий) коефіцієнт при $\widetilde{u}_{\eta\eta}$ рівняння (2.1.1) матиме вигляд

$$\widetilde{u}_{\eta\eta} + F_2(\xi, \eta, \widetilde{u}, \widetilde{u}_\xi, \widetilde{u}_\eta) = 0\,, \tag{2.1.9}$$

де F_2 – деяка функція.

У випадку еліптичного типу, після заміни (2.1.7) і можливого ділення на (ненульовий) коефіцієнт при $\widetilde{u}_{\xi\xi} + \widetilde{u}_{\eta\eta}$ рівняння (2.1.1) матиме вигляд

$$\widetilde{u}_{\xi\xi} + \widetilde{u}_{\eta\eta} + F_3(\xi, \eta, \widetilde{u}, \widetilde{u}_\xi, \widetilde{u}_\eta) = 0\,, \tag{2.1.10}$$

де F_3 – деяка функція.

На що слід звернути увагу ?

1) Ми вже робили зауваження, що слід враховувати двійку при коефіцієнті b в рівнянні (2.1.1). Якщо використовувати b замість $2b$, правильний розв'язок не відбудеться !

2) Рівняння характеристик (2.1.2) дещо схоже на вихідне рівняння (2.1.1), але є відмінності: при $2b$ змінюється знак, крім того, ролі x і y «змінюються місцями» (якщо при x і y в вихідному рівнянні стоять відповідно a і b, то в рівнянні характеристик – навпаки, a відноситься до y, а коефіцієнт c – до змінної x). Без врахування цих двох нюансів на правильний розв'язок задач сподіватися не варто.

3) Якщо Ви розв'язали задачу, але у Вас вийшов остаточний вигляд рівняння, відмінний від співвідношень (2.1.8), (2.1.9) або (2.1.10), то на жаль, Ви розв'язали її неправильно. Найчастіше помилка робиться в

переобчисленні похідних на передостанньому кроці, але можливі і інші помилки, наприклад, неправильно з'ясовано тип рівняння, неправильно визначені коефіцієнти, помилка в заміні і т.п. Також неправильним є розв'язок, коли в випадку гіперболічного типу Ви остаточно отримали вигляд (2.1.9) або (2.1.10). Аналогічно до інших типів рівнянь: *кожному типу рівнянь має відповідати один і тільки один з трьох можливих виглядів (2.1.8), (2.1.9) або (2.1.10).*

Приклад 4. Визначити тип і звести до канонічного вигляду рівняння

$$u_{xx} - 2\sin x\, u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} - \cos x u_y = 0\,. \tag{2.1.11}$$

Розв'язок. У відомих позначеннях $a = 1$, $b = -\sin x$, $c = -\cos^2 x$. Співвідношення $b^2 - ac = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$ є додатнім всюди в своїй області визначення, отже, рівняння (2.1.11) гіперболічного типу в $\mathbb{R}^2$. Згідно (2.1.2), рівняння характеристик має вигляд

$$(dy)^2 + 2\sin x\, dxdy - \cos^2 x(dx)^2 = 0\,.$$

Поділивши останнє рівняння на $(dx)^2$ і зробивши заміну $\frac{dy}{dx} = t$, будемо мати квадратне рівняння

$$t^2 + 2\sin xt - \cos^2 x = 0\,. \tag{2.1.12}$$

Рівняння (2.1.12) є звичайним квадратним рівнянням відносно t, розв'яжемо його. Маємо: $D = 4\sin^2 x + 4\cos^2 x = 4$, $t_1 = \frac{-2\sin x+2}{2} = -\sin x + 1$, $t_2 = \frac{-2\sin x-2}{2} = -\sin x - 1$. Отже, маємо сукупність:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{dy}{dx} = -\sin x + 1\,, \\ \dfrac{dy}{dx} = -\sin x - 1\,. \end{array}\right. \tag{2.1.13}$$

З першого рівняння сукупності (2.1.13) шляхом його інтегрування будемо мати

$$y = \cos x + x + c_1\,,$$

або

$$y - \cos x - x = c_1\,.$$

Аналогічно, друге рівняння (2.1.13) дасть нам

$$y - \cos x + x = c_2\,,$$

де c_1 і c_2 – довільні сталі. Отже, в відомих позначеннях, $\varphi_1(x,y) = y - \cos x - x$, $\varphi_2(x,y) = y - \cos x + x$ – перші інтеграли сукупності (2.1.13). Робимо заміну

$$\begin{cases} \xi = y - \cos x - x\,, \\ \eta = y - \cos x + x\,. \end{cases} \tag{2.1.14}$$

Зауважимо, що заміна (2.1.14) невироджена, тобто, її якобіан J не дорівнює нулю. Дійсно,

$$J := \begin{vmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin x - 1 & \sin x + 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \sin x - 1 - \sin x - 1 = -2 \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^2\,.$$

Далі, $u(x,y) \to \widetilde{u}(\xi,\eta)$. В вихідному рівнянні (2.1.11) треба переобчислити всі частинні похідні в термінах змінних ξ і η. Будемо мати:

$$u_x = \widetilde{u}_\xi \xi_x + \widetilde{u}_\eta \eta_x = \widetilde{u}_\xi (\sin x - 1) + \widetilde{u}_\eta (\sin x + 1)\,, \tag{2.1.15}$$

$$\begin{gathered} u_{xx} = (\widetilde{u}_{\xi\xi}\xi_x + \widetilde{u}_{\xi\eta}\eta_x)(\sin x - 1) + \widetilde{u}_\xi \cos x + (\widetilde{u}_{\eta\xi}\xi_x + \widetilde{u}_{\eta\eta}\eta_x)(\sin x + 1) + \widetilde{u}_\eta \cos x = \\ = \widetilde{u}_{\xi\xi}(\sin x - 1)^2 + \widetilde{u}_{\xi\eta}(\sin^2 x - 1) + \widetilde{u}_\xi \cos x + \widetilde{u}_{\xi\eta}(\sin^2 x - 1) + \widetilde{u}_{\eta\eta}(\sin x + 1)^2 + \\ + \widetilde{u}_\eta \cos x = \widetilde{u}_{\xi\xi}(\sin x - 1)^2 + 2\widetilde{u}_{\xi\eta}(\sin^2 x - 1) + \widetilde{u}_{\eta\eta}(\sin x + 1)^2 + \\ + \widetilde{u}_\xi \cos x + \widetilde{u}_\eta \cos x\,. \end{gathered} \tag{2.1.16}$$

Звичайно, при обчисленні (2.1.16) ми враховували, що в (2.1.15) – похідна добутку функцій відносно змінної x. Далі, з (2.1.15),

$$u_{xy} = \widetilde{u}_{\xi\xi}\xi_y(\sin x - 1) + \widetilde{u}_{\xi\eta}\eta_y(\sin x - 1) + \widetilde{u}_{\eta\xi}\xi_y(\sin x + 1) + \widetilde{u}_{\eta\eta}\eta_y(\sin x + 1) =$$

$$= \widetilde{u}_{\xi\xi}(\sin x - 1) + 2\widetilde{u}_{\xi\eta}\sin x + \widetilde{u}_{\eta\eta}(\sin x + 1)\,,$$

$$u_y = \widetilde{u}_\xi \xi_y + \widetilde{u}_\eta \eta_y = \widetilde{u}_\xi + \widetilde{u}_\eta\,,$$

$$u_{yy} = \widetilde{u}_{\xi\xi}\xi_y + \widetilde{u}_{\xi\eta}\eta_y + \widetilde{u}_{\eta\xi}\xi_y + \widetilde{u}_{\eta\eta}\eta_y = \widetilde{u}_{\xi\xi} + 2\widetilde{u}_{\xi\eta} + \widetilde{u}_{\eta\eta}\,.$$

Залишилось підставити обчисленні вище частинні похідні в рівняння (2.1.11). Будемо мати:

$$\widetilde{u}_{\xi\xi}(\sin x - 1)^2 + 2\widetilde{u}_{\xi\eta}(\sin^2 x - 1) + \widetilde{u}_{\eta\eta}(\sin x + 1)^2 + \widetilde{u}_\xi \cos x + \widetilde{u}_\eta \cos x -$$

$$-2\widetilde{u}_{\xi\xi}\sin x(\sin x - 1) - 4\widetilde{u}_{\xi\eta}\sin^2 x - 2\widetilde{u}_{\eta\eta}\sin x(\sin x + 1) - \cos^2 x\widetilde{u}_{\xi\xi} -$$

$$-2\cos^2 x\widetilde{u}_{\xi\eta} - \cos^2 x\widetilde{u}_{\eta\eta} - \cos x(\widetilde{u}_\xi + \widetilde{u}_\eta) =$$

$$= \widetilde{u}_{\xi\xi}\sin^2 x - 2\widetilde{u}_{\xi\xi}\sin x + \widetilde{u}_{\xi\xi} + 2\widetilde{u}_{\xi\eta}\sin^2 x - 2\widetilde{u}_{\xi\eta} + \widetilde{u}_{\eta\eta}\sin^2 x + 2\widetilde{u}_{\eta\eta}\sin x + \widetilde{u}_{\eta\eta} -$$

$$-2\widetilde{u}_{\xi\xi}\sin^2 x + 2\widetilde{u}_{\xi\xi}\sin x - 4\widetilde{u}_{\xi\eta}\sin^2 x - 2\widetilde{u}_{\eta\eta}\sin^2 x - 2\widetilde{u}_{\eta\eta}\sin x - \cos^2 x\widetilde{u}_{\xi\xi} -$$

$$-2\cos^2 x\widetilde{u}_{\xi\eta} - \cos^2 x\widetilde{u}_{\eta\eta} = -4\widetilde{u}_{\xi\eta} = 0\,,$$

або

$$\widetilde{u}_{\xi\eta} = 0\,. \tag{2.1.17}$$

Співвідношення (2.1.17) є канонічним виглядом вихідного рівняння (2.1.11). $\square$

Приклад 5. Визначити тип і звести до канонічного вигляду рівняння

$$u_{xx} - 2\sin x\, u_{xy} + (2-\cos^2 x)u_{yy} = 0\,. \tag{2.1.18}$$

Розв'язок. У відомих позначеннях $a = 1$, $b = -\sin x$, $c = 2 - \cos^2 x$. Знак виразу $b^2 - ac = \sin^2 x - 2 + \cos^2 x = -1 < 0$. Згідно класифікації, рівняння (2.1.18) є рівнянням еліптичного типу в $\mathbb{R}^2$. Складаємо характеристичне рівняння:

$$(dy)^2 + 2\sin x dxdy + (2-\cos^2 x)(dx)^2 = 0\,. \tag{2.1.19}$$

Поділивши останнє рівняння на $(dx)^2$ і позначивши $\frac{dy}{dx} = t$, ми будемо мати рівняння

$$t^2 + 2\sin x t + (2-\cos^2 x) = 0\,.$$

Розв'яжемо це рівняння відносно t. Маємо: $D = b^2 - 4ac = 4\sin^2 x - 4(2 - \cos^2 x) = 4 - 4\cos^2 x - 8 + 4\cos^2 x = -4$, $t_{1,2} = \frac{-2\sin x \pm 2i}{2} = -\sin x \pm i$, де i – уявна одиниця; $i^2 = -1$. Звідси, оскільки $\frac{dy}{dx} = t$, маємо

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x \pm i\,.$$

Звідси

$$y(x) = \cos x \pm ix + c\,.$$

Комплексно спряжені перші інтеграли характеристичного рівняння (2.1.19) мають вигляд $\varphi(x) = y - \cos x \pm ix = \varphi_1(x) \pm i\varphi_2(x)$, $\varphi_1(x) := y - \cos x$, $\varphi_2(x) := x$.

Тепер у вихідному рівнянні (2.1.18) зробимо заміну незалежних змінних

$$\begin{cases} \xi = y - \cos x \\ \eta = x\,. \end{cases} \tag{2.1.20}$$

При такій заміні

$$u(x,y) = \widetilde{u}(\xi,\eta)\,.$$

Маємо:

$$u_x = \widetilde{u}_\xi \xi_x + \widetilde{u}_\eta \eta_x = \sin x \widetilde{u}_\xi + \widetilde{u}_\eta \,,$$

$$u_{xx} = (\sin x \widetilde{u}_\xi + \widetilde{u}_\eta)|_x = \cos x \widetilde{u}_\xi + \sin x(\widetilde{u}_{\xi\xi}\xi_x + \widetilde{u}_{\xi\eta}\eta_x) + \widetilde{u}_{\eta\xi}\xi_x + \widetilde{u}_{\eta\eta}\eta_x =$$

$$= \cos x \widetilde{u}_\xi + \sin^2 x \widetilde{u}_{\xi\xi} + 2\sin x \widetilde{u}_{\xi\eta} + \widetilde{u}_{\eta\eta} \,,$$

$$u_{xy} = (\sin x \widetilde{u}_\xi + \widetilde{u}_\eta)|_y = \sin x \widetilde{u}_{\xi\xi}\xi_y + \sin x \widetilde{u}_{\xi\eta}\eta_y + \widetilde{u}_{\eta\xi}\xi_y + \widetilde{u}_{\eta\eta}\eta_y =$$

$$= \sin x \widetilde{u}_{\xi\xi} + \widetilde{u}_{\xi\eta} \,,$$

$$u_y = \widetilde{u}_\xi \xi_y + \widetilde{u}_\eta \eta_y = \widetilde{u}_\xi \,,$$

$$u_{yy} = \widetilde{u}_{\xi\xi}\xi_y + \widetilde{u}_{\xi\eta}\eta_y = \widetilde{u}_{\xi\xi} \,.$$

Залишилося підставити знайдені значення для u_{xx}, u_{xy} і u_{yy} у вихідне рівняння (2.1.18). Будемо мати:

$$\cos x \widetilde{u}_\xi + \sin^2 x \widetilde{u}_{\xi\xi} + 2\sin x \widetilde{u}_{\xi\eta} + \widetilde{u}_{\eta\eta} - 2\sin^2 x \widetilde{u}_{\xi\xi} - 2\sin x \widetilde{u}_{\xi\eta} + (2 - \cos^2 x)\widetilde{u}_{\xi\xi} = 0 \,.$$

Останнє співвідношення перепишемо у вигляді:

$$\widetilde{u}_{\xi\xi} + \widetilde{u}_{\eta\eta} + \cos x \widetilde{u}_\xi = 0 \,. \tag{2.1.21}$$

Рівняння (2.1.21) є рівнянням, відповідним до рівняння (2.1.19), записаним у канонічному вигляді. □

Приклад 6. Визначити тип і звести до канонічного вигляду рівняння

$$u_{xx} - 2x\, u_{xy} + x^2 u_{yy} - 2u_y = 0 \,. \tag{2.1.22}$$

Розв'язок. У відомих позначеннях $a = 1$, $b = -x$, $c = x^2$. Будемо мати що $b^2 - ac = x^2 - x^2 = 0$. З огляду на це, вихідне рівняння (2.1.22) параболічного типу в $\mathbb{R}^2$. Складемо характеристичне рівняння:

$$(dy)^2 + 2x\, dxdy + x^2(dx)^2 = 0 \,. \tag{2.1.23}$$

Розділимо ліву і праву частини рівняння (2.1.23) на $(dx)^2$ і покладемо $\frac{dy}{dx} = t$. Тоді з (2.1.23) випливає, що

$$t^2 + 2xt + x^2 = 0 \,.$$

Останнє рівняння розглядаємо як квадратне рівняння відносно змінної t. Його можна переписати у вигляді $(t + x)^2 = 0$, звідки $t + x = 0$, $t = -x$. Звідси $\frac{dy}{dx} = -x$, або $y(x) = \int(-x)\, dx = -x^2/2 + c$, $2y + x^2 = 2c$, $c \in \mathbb{R}$. Стала c є будь-якою, отже, і стала $2C$ є будь-якою. З огляду на це, можна покласти $C := 2c$, тоді $2y + x^2 = C$, $C \in \mathbb{R}$. Нагадаємо, що у випадку рівняння параболічного типу маємо лише один перший інтеграл. Заміна змінних, яка відповідає цьому випадку, полягає в покладенні одної зі змінних (скажемо, $\xi = \xi(x, y)$) цьому першому інтегралу, в той час як друга незалежна змінна $\eta = \eta(x, y)$ може бути обрана *будь-якою,* аби тільки якобіан $J := \begin{vmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{vmatrix}$ не дорівнював нулю. З огляду на сказане вище, зробимо заміну незалежних змінних:

$$\begin{cases} \xi = 2y + x^2 \\ \eta = x\,. \end{cases} \tag{2.1.24}$$

Якобіан перетворення в (2.1.24):

$$J := \begin{vmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^2\,.$$

При заміні (2.1.24) маємо відповідність: $u(x, y) \mapsto \widetilde{u}(\xi, \eta)$. Переобчислимо тепер всі частинні похідні що входять до рівняння (2.1.22), в термінах похідних ξ і η. Будемо мати:

$$u_x = \widetilde{u}_\xi \xi_x + \widetilde{u}_\eta \eta_x = 2x\widetilde{u}_\xi + \widetilde{u}_\eta\,,$$

$$\begin{aligned} u_{xx} &= (2x\widetilde{u}_\xi + \widetilde{u}_\eta)_x = (2x\widetilde{u}_\xi)_x + (\widetilde{u}_\eta)_x = \\ &= (2x)_x\widetilde{u}_\xi + 2x(\widetilde{u}_\xi)_x + (\widetilde{u}_\eta)_x = \\ &= 2\widetilde{u}_\xi + 2x\widetilde{u}_{\xi\xi}\xi_x + 2x\widetilde{u}_{\xi\eta}\eta_x + \widetilde{u}_{\eta\xi}\xi_x + \widetilde{u}_{\eta\eta}\eta_x = \\ &= 2\widetilde{u}_\xi + 4x^2\widetilde{u}_{\xi\xi} + 4x\widetilde{u}_{\xi\eta} + \widetilde{u}_{\eta\eta}\,. \end{aligned}$$

Обчислюючи похідну u_{xx}, ми врахували правило похідної добутку функцій: $(2x\widetilde{u}_\xi)_x = (2x)_x\widetilde{u}_\xi + 2x(\widetilde{u}_\xi)_x$, а також теорему про рівність мішаних похідних у просторі двічі гладких функцій: $\widetilde{u}_{\xi\eta} = \widetilde{u}_{\eta\xi}$. При розв'язанні задач не слід нехтувати цими правилами !

Далі,

$$u_y = \widetilde{u}_\xi \xi_y + \widetilde{u}_\eta \eta_y = 2\widetilde{u}_\xi\,,$$

$$u_{yy} = 2\widetilde{u}_{\xi\xi}\xi_y + 2\widetilde{u}_{\xi\eta}\eta_y = 4\widetilde{u}_{\xi\xi}\,,$$

$$\begin{aligned} u_{xy} &= (2x\widetilde{u}_\xi + \widetilde{u}_\eta)_y = 2x\widetilde{u}_{\xi\xi}\xi_y + 2x\widetilde{u}_{\xi\eta}\eta_y + \widetilde{u}_{\eta\xi}\xi_y + \widetilde{u}_{\eta\eta}\eta_y = \\ &= 4x\widetilde{u}_{\xi\xi} + 2\widetilde{u}_{\xi\eta}\,. \end{aligned}$$

Залишилося підставити всі частинні похідні u_{xx}, u_{xy}, u_y і u_{yy} у рівняння (2.1.22). Будемо мати:

$$
\begin{aligned}
&u_{xx} - 2x\, u_{xy} + x^2 u_{yy} - 2u_y = \\
&= 2\widetilde{u}_\xi + 4x^2\widetilde{u}_{\xi\xi} + 4x\widetilde{u}_{\xi\eta} + \widetilde{u}_{\eta\eta} - 8x^2\widetilde{u}_{\xi\xi} - 4x\widetilde{u}_{\xi\eta} + 4x^2\widetilde{u}_{\xi\xi} - 4\widetilde{u}_\xi = \\
&= \widetilde{u}_{\eta\eta} - 2\widetilde{u}_\xi = 0\,. \qquad (2.1.25)
\end{aligned}
$$

Рівняння (2.1.25) є рівнянням, відповідним до (2.1.22), записаним у канонічному вигляді. □

2.2 Розв'язання л.д.р. з ч.п. другого порядку

Наскільки нам відомо, нема загального алгоритму розв'язань л.д.р. з ч.п. 2-го порядку. В багатьох ситуаціях можна скористатися наступною схемою:

1. Рівняння

$$
a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + F(x,y,u,u_x,u_y) = 0 \qquad (2.2.1)
$$

звести до канонічного вигляду методом характеристик. Нехай

$$
\widetilde{a}(\xi,\eta)\widetilde{u}_{\xi\xi} + 2\widetilde{b}(\xi,\eta)\widetilde{u}_{\xi\eta} + \widetilde{c}(\xi,\eta)\widetilde{u}_{\eta\eta} + \widetilde{F}(\xi,\eta,\widetilde{u},\widetilde{u}_\xi,\widetilde{u}_\eta) = 0 \qquad (2.2.2)
$$

– канонічний вигляд рівняння (2.2.1).

2. Спробувати знизити порядок рівняння на одиницю заміною $\widetilde{u}_\xi = v$, або $\widetilde{u}_\eta = v$, де $v = v(\xi,\eta)$ – нова невідома функція. Якщо це вдалося зробити, слід розв'язати нове рівняння відносно v, дивлячись на нього як на звичайне диференціальне рівняння відносно одної змінної ξ (відповідно, η) з параметром η (відповідно, ξ). Якщо рівняння розв'язується відносно v, то слід потім повернутися до функції $\widetilde{u}$, використовуючи ту заміну, що була зроблена: $\widetilde{u}_\xi = v$, або $\widetilde{u}_\eta = v$. В обох випадках, $\widetilde{u}$ відновлюється простим інтегруванням функції v по відповідній змінній.

3. Останній крок – запис розв'язку через вихідні змінні x і y. Це робиться завдяки зв'язку $u(x,y) = \widetilde{u}(\xi,\eta)$, де ξ і η пов'язані з x і y через заміну (2.1.5) на сторінці 22. Конкретний вигляд заміни (2.1.5) відрізняється для кожного типу рівняння і вказаний на цій же сторінці.

Якщо безпосереднє виконання кроку **2** є неможливим, можна спочатку спростити рівняння (2.2.2) шляхом заміни

$$
\widetilde{u}(\xi,\eta) = e^{\lambda\xi+\mu\eta}\cdot v(\xi,\eta)\,, \qquad (2.2.3)
$$

де v – нова невідома функція від ξ і η, а коефіцієнти λ і μ підбираються «так, як треба» шляхом підстановки заміни (2.2.3) в рівняння (2.2.2) з метою зникнення в цьому рівнянні деяких його молодших членів.

Розглянемо декілька прикладів розв'язань рівнянь.

Приклад 7. Розв'язати диференціальне рівняння з частинними похідними і переконатися, що знайдена функція $u = u(x, y)$ дійсно є розв'язком вихідного рівняння шляхом підстановки цієї функції в нього.

$$e^y u_{xy} - u_{yy} + u_y = 0\,. \tag{2.2.4}$$

Розв'язок. У відомих позначеннях $a = 0$, $b = e^y/2$, $c = -1$. Знак виразу $b^2 - ac = e^{2y}/4$ додатній, рівняння (2.2.4) є рівнянням гіперболічного типу в $\mathbb{R}^2$. Складемо характеристичне рівняння:

$$-e^y dxdy - (dx)^2 = 0\,. \tag{2.2.5}$$

Можна винести dx за дужки, будемо мати:

$$dx(-e^y dy - dx) = 0\,.$$

Звідси маємо сукупність:

$$\begin{aligned} dx &= 0\,, \\ e^y dy + dx &= 0\,. \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

З першого співвідношення сукупності (2.2.6) маємо $dx = 0$, звідки $x = c_1$, $c_1 \in \mathbb{R}$. Аналогічно, з другого рівняння у (2.2.6) отримаємо, що $\int e^y dy = -\int dx$, $e^y + x = c_2$, $c_2 \in \mathbb{R}$. Першими інтегралами рівняння (2.2.5) є функції $\varphi_1(x, y) = x$ і $\varphi_2(x, y) = e^y + x$.

Далі у вихідному рівнянні робимо заміну незалежних змінних:

$$\begin{cases} \xi = x \\ \eta = e^y + x\,. \end{cases} \tag{2.2.7}$$

Якобіан відповідного перетворення:

$$J := \begin{vmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & e^y \end{vmatrix} = e^y \neq 0 \quad \forall\ x, y \in \mathbb{R}^2\,.$$

При заміні змінних функція $u(x,y)$ переходить у деяку (нову) функцію $\widetilde{u}(\xi,\eta)$. Далі згідно правила (1.3.8) маємо:

$$u_x = \widetilde{u}_\xi \xi_x + \widetilde{u}_\eta \eta_x = \widetilde{u}_\xi + \widetilde{u}_\eta \,.$$

Диференціюємо останнє співвідношення по y як похідну суми виразів, причому знову використовуємо правило (1.3.8), але не для самої функції u, а для похідних $\widetilde{u}_\xi$ і $\widetilde{u}_\eta$. Будемо мати:

$$\widetilde{u}_{xy} = \widetilde{u}_{\xi\xi}\xi_y + \widetilde{u}_{\xi\eta}\eta_y + \widetilde{u}_{\eta\xi}\xi_y + \widetilde{u}_{\eta\eta}\eta_y = \widetilde{u}_{\xi\eta}e^y + \widetilde{u}_{\eta\eta}e^y \,.$$

Аналогічно міркуємо для похідних по y :

$$u_y = \widetilde{u}_\xi \xi_y + \widetilde{u}_\eta \eta_y = \widetilde{u}_\eta e^y \,, \tag{2.2.8}$$

$$\begin{aligned} u_{yy} = \widetilde{u}_{\eta\xi}\xi_y e^y + \widetilde{u}_{\eta\eta}\eta_y e^y + \widetilde{u}_\eta e^y = \\ = \widetilde{u}_{\eta\eta}e^{2y} + \widetilde{u}_\eta e^y \,. \end{aligned}$$

Зверніть увагу: при обчисленні u_{yy} ми використали правило похідної добутку функцій у (2.2.8), бо вираз $\widetilde{u}_\eta e^y$ є добутком двох функцій $\widetilde{u}_\eta$ і e^y, залежних від y. Зокрема, ця залежність відносно функції $\widetilde{u}_\eta$ є «неявною», бо $\widetilde{u}_\eta$ залежить ніби-то від ξ і η, але ξ і η самі є функціями від x і y згідно заміни (2.2.7). Незалежно від цього, у (2.2.8) використано правило (1.3.8).

Отримані вирази для похідних $\widetilde{u}_{xy}$, u_{yy} і u_y підставимо у само рівняння (2.2.4). Будемо мати:

$$\begin{aligned} \widetilde{u}_{\xi\eta}e^{2y} + \widetilde{u}_{\eta\eta}e^{2y} - \widetilde{u}_{\eta\eta}e^{2y} - \widetilde{u}_\eta e^y + \widetilde{u}_\eta e^y = \\ = \widetilde{u}_{\xi\eta}e^{2y} = 0 \,. \end{aligned}$$

Скорочуючи в останньому виразі на $e^{2y} \neq 0$, будемо мати:

$$\widetilde{u}_{\xi\eta} = 0 \,.$$

Зробимо заміну $\widetilde{u}_\xi := v = v(\xi,\eta)$, де v – нова функція. Тоді останнє рівняння можна переписати в вигляді

$$v_\eta = 0 \,, \tag{2.2.9}$$

звідки

$$v = c = c(\xi) \,. \tag{2.2.10}$$

Зверніть увагу, що c – стала, що залежить від ξ. Останній факт легко обґрунтувати взяттям похідної по η у рівності (2.2.10) і переходячи до еквівалентної їй рівності (2.2.9). *Радимо читачу при виникненні сумнівів і питань: «від чого залежить стала c?» робити подібну перевірку. Якщо «стала» c у (2.2.10) залежала б від іншої змінної η, то взяття похідної по η у (2.2.10) взагалі говорячи, не дало б нам рівності (2.2.9).*

Тепер згадаємо, що $v = \widetilde{u}_\xi$. Звідси, враховуючи (2.2.10), маємо:

$$\widetilde{u}_\xi = c(\xi)\,,$$

звідки

$$\widetilde{u} = \int c(\xi)\,d\xi + g(\eta)\,,$$

або, позначаючи $\int c(\xi)\,d\xi = f(\xi)$, маємо:

$$\widetilde{u}(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta)\,,$$

де f і g – довільні двічі гладкі функції в $\mathbb{R}$. Треба ще повернутися до старих змінних x, y (див. заміну (2.2.7)). Отже,

$$u = u(x,y) = f(x) + g(e^y + x)\,, \quad f, g \in C^2(\mathbb{R}) \tag{2.2.11}$$

– загальний розв'язок рівняння (2.2.4). Переконаємося, що розв'язок вихідного рівняння, наведений у (2.2.11), знайдено правильно. Обчислимо похідні у функції u з (2.2.11). Будемо мати:

$$u_x = f'(x) + g'(e^y + x)\,. \tag{2.2.12}$$

Питання «на розуміння»: по яким змінним беруться штрихи у (2.2.12)?

Далі,

$$u_{xy} = g''(e^y + x)\cdot e^y\,,$$
$$u_y = g'(e^y + x)\cdot e^y\,, \quad u_{yy} = g''(e^y + x)\cdot e^{2y} + g'(e^y + x)\cdot e^y\,.$$

Слід підставити знайдені нами вирази для u_{xy}, u_y і u_{yy} у рівняння (2.2.4). Ми отримаємо, що

$$e^y u_{xy} - u_{yy} + u_y = 0\,,$$
$$g''(e^y + x)\cdot e^{2y} - g''(e^y + x)\cdot e^{2y} - g'(e^y + x)\cdot e^y + g'(e^y + x)\cdot e^y = 0\,,$$
$$0 = 0\,.$$

Маємо тотожність, і це доводить вірність розв'язку, наданого в (2.2.11). □

Приклад 8. Розв'язати диференціальне рівняння з частинними похідними другого порядку:

$$2u_{xx} - 5u_{xy} + 3u_{yy} = 0\,.$$

Розв'язок. В відомих позначеннях $a = 2, b = -5/2, c = 3$. Характеристичне рівняння (2.1.2) має вигляд:

$$2(dy)^2 + 5dxdy + 3(dx)^2 = 0\,. \tag{2.2.13}$$

Ділимо (2.2.13) на $(dx)^2$ і робимо заміну $\frac{dy}{dx} = t$, будемо мати:

$$2t^2 + 5t + 3 = 0\,.$$

Це квадратне рівняння відносно t, розв'язуємо його: $D = 25 - 24 = 1$, $t_1 = \frac{-5-1}{4} = -\frac{3}{2}$, $t_2 = \frac{-5+1}{4} = -1$. Отже:

а) або $\frac{dy}{dx} = -1$, тоді $y = -x + c_1$, $\varphi_1(x, y) = y + x$;

б) або $\frac{dy}{dx} = -3/2$, тоді $y = -(3x)/2 + c_2$, звідки $2y + 3x = c_2$, $\varphi_2(x, y) = 2y + 3x$.

Робимо заміну у вихідному рівнянні

$$\xi = y + x, \quad \eta = 2y + 3x\,.$$

Наша функція $u(x, y)$ при такій заміні переходить у функцію $\widetilde{u}(\xi, \eta)$. Тепер треба переобчислити всі частинні похідні, які є у рівнянні. Маємо:

$$u(x, y) = \widetilde{u}(\xi, \eta) = \widetilde{u}(\xi(x, y), \eta(x, y))\,.$$

Тепер,

$$u_x = \widetilde{u}_\xi \cdot \xi_x + \widetilde{u}_\eta \cdot \eta_x = \widetilde{u}_\xi + 3\widetilde{u}_\eta\,, \tag{2.2.14}$$

$$u_y = \widetilde{u}_\xi \cdot \xi_y + \widetilde{u}_\eta \cdot \eta_y = \widetilde{u}_\xi + 2\widetilde{u}_\eta\,, \tag{2.2.15}$$

$$u_{xx} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot \xi_x + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot \eta_x + 3\widetilde{u}_{\xi\eta}\xi_x + 3\widetilde{u}_{\eta\eta}\eta_x =$$

$$= \widetilde{u}_{\xi\xi} + 3\widetilde{u}_{\xi\eta} + 3\widetilde{u}_{\xi\eta} + 9\widetilde{u}_{\eta\eta} = \widetilde{u}_{\xi\xi} + 6\widetilde{u}_{\xi\eta} + 9\widetilde{u}_{\eta\eta}\,; \tag{2.2.16}$$

$$u_{xy} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot \xi_y + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot \eta_y + 3\widetilde{u}_{\xi\eta}\xi_y + 3\widetilde{u}_{\eta\eta}\eta_y =$$

$$= \widetilde{u}_{\xi\xi} + 2\widetilde{u}_{\xi\eta} + 3\widetilde{u}_{\xi\eta} + 6\widetilde{u}_{\eta\eta} = \widetilde{u}_{\xi\xi} + 5\widetilde{u}_{\xi\eta} + 6\widetilde{u}_{\eta\eta}\,. \tag{2.2.17}$$

$$u_{yy} = \widetilde{u}_{\xi\xi}\xi_y + \widetilde{u}_{\xi\eta}\eta_y + 2\widetilde{u}_{\eta\xi}\xi_y + 2\widetilde{u}_{\eta\eta}\eta_y =$$

$$= \widetilde{u}_{\xi\xi} + 2\widetilde{u}_{\xi\eta} + 2\widetilde{u}_{\eta\xi} + 4\widetilde{u}_{\eta\eta} = \widetilde{u}_{\xi\xi} + 4\widetilde{u}_{\eta\xi} + 4\widetilde{u}_{\eta\eta}\,. \tag{2.2.18}$$

Після підстановки в вихідне рівняння виразів (2.2.14)–(2.2.18) будемо мати:

$$2\widetilde{u}_{\xi\xi} + 12\widetilde{u}_{\xi\eta} + 18\widetilde{u}_{\eta\eta} - 5\widetilde{u}_{\xi\xi} - 25\widetilde{u}_{\xi\eta} - 30\widetilde{u}_{\eta\eta} + 3\widetilde{u}_{\xi\xi} + 12\widetilde{u}_{\xi\eta} + 12u_{\eta\eta} = 0\,,$$

або
$$\widetilde{u}_{\xi\eta} = 0\,. \tag{2.2.19}$$
В останньому співвідношенні покладемо $\widetilde{u}_\xi := v(\xi, \eta)$, тоді з (2.2.19) отримаємо, що
$$v_\eta = 0 \Rightarrow v(\xi, \eta) = c(\xi) = \widetilde{u}_\xi\,, \tag{2.2.20}$$
де $c(\eta)$ – довільна функція з класу $C^1(\mathbb{R})$. З (2.2.20) інтегруванням отримаємо, що
$$\widetilde{u}(\xi, \eta) = \int c(\xi)\, d\xi + c_1(\eta) = f(\xi) + g(\eta)\,,$$
де ми позначили $f(\xi) = \int c(\xi)\, d\xi$ і $g(\eta) := c_1(\eta)$ – довільні двічі гладкі функції в $\mathbb{R}$. **Відповідь:** $\widetilde{u}(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$, або, повертаючись до змінних x, y,
$$u(x, y) = f(y + x) = g(2y + 3x), \qquad f, g \in C^2(\mathbb{R})\,. \ \square$$

Приклад 9. Розв'язати диференціальне рівняння з частинними похідними.
$$2u_{xx} + 6u_{xy} + 4u_{yy} + u_x + u_y = 0\,. \tag{2.2.21}$$

Розв'язок. У відомих позначеннях $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$. Складемо рівняння характеристик:
$$2(dy)^2 - 6 \cdot dxdy + 4(dx)^2 = 0\,.$$
Ділячи на $(dx)^2$ і покладаючи $\frac{dy}{dx} = t$, маємо:
$$2t^2 - 6t + 4 = 0.$$

Цк квадратне рівняння, $D = 36 - 32 = 4$, $t_1 = \frac{6+2}{4} = 2$, $t_2 = \frac{6-2}{4} = 1$, звідси
$$\left[\begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = 2\,, \\ \frac{dy}{dx} = 1\,. \end{array}\right.$$

Звідси або $y - 2x = c_1$, або $y - x = c_2$. Робимо заміну незалежних змінних:
$$\begin{cases} \xi = y - 2x \\ \eta = y - x\,. \end{cases}$$

Маємо: $u(x, y) = \widetilde{u}(\xi, \eta)$,
$$u_x = \widetilde{u}_\xi \cdot \xi_x + \widetilde{u}_\eta \cdot \eta_x = -2\widetilde{u}_\xi - \widetilde{u}_\eta;$$

$$u_{xx} = -2\widetilde{u}_{\xi\xi}\xi_x - 2\widetilde{u}_{\xi\eta}\eta_x - \widetilde{u}_{\eta\xi}\xi_x - \widetilde{u}_{\eta\eta}\eta_x =$$
$$= 4\widetilde{u}_{\xi\xi} + 4\widetilde{u}_{\xi\eta} + \widetilde{u}_{\eta\eta}\,;$$
$$u_y = \widetilde{u}_\xi \cdot \xi_y + \widetilde{u}_\eta \cdot \eta_y = \widetilde{u}_\xi + \widetilde{u}_\eta;$$
$$u_{yy} = \widetilde{u}_{\xi\xi}\xi_y + \widetilde{u}_{\xi\eta}\eta_y + \widetilde{u}_{\eta\xi}\xi_y + \widetilde{u}_{\eta\eta}\eta_y =$$
$$= \widetilde{u}_{\xi\xi} + 2\widetilde{u}_{\xi\eta} + \widetilde{u}_{\eta\eta};$$
$$u_{xy} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot \xi_x + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot \eta_x + \widetilde{u}_{\eta\xi}\xi_x + \widetilde{u}_{\eta\eta}\eta_x =$$
$$= -2\widetilde{u}_{\xi\xi} - 3\widetilde{u}_{\xi\eta} - \widetilde{u}_{\eta\eta}\,.$$

Тепер те, що ми отримали, підставляємо в вихідне рівняння. Маємо:

$$8\widetilde{u}_{\xi\xi}+8\widetilde{u}_{\xi\eta}+2\widetilde{u}_{\eta\eta}-12\widetilde{u}_{\xi\xi}-18\widetilde{u}_{\xi\eta}-6\widetilde{u}_{\eta\eta}+4\widetilde{u}_{\xi\xi}+8\widetilde{u}_{\xi\eta}+4\widetilde{u}_{\eta\eta}-2\widetilde{u}_\xi-\widetilde{u}_\eta+\widetilde{u}_\xi+\widetilde{u}_\eta =$$
$$= -2\widetilde{u}_{\xi\eta} - \widetilde{u}_\xi = 0\,. \tag{2.2.22}$$

Зробимо у (2.2.22) заміну $\widetilde{u}_\xi = v(\xi, \eta)$ і домножимо його на -1. Тоді (2.2.22) перепишеться так:

$$2v_\eta + v = 0\,. \tag{2.2.23}$$

Можна розв'язати (2.2.23) за методом Ейлера (дивлячись на нього як на лінійне звичайне рівняння зі сталими коефіцієнтами відносно змінної η). Заміна $v = e^{k\eta}$, тоді з (2.2.23) маємо:

$$2k + 1 = 0\,,$$

$$k = -1/2.$$

Тоді

$$v = c(\xi)e^{-\eta/2} = \widetilde{u}_\xi\,. \tag{2.2.24}$$

Інтегруємо (2.2.24) по змінній ξ, маємо:

$$\widetilde{u}(\xi, \eta) = \int c(\xi)e^{-\eta/2}\,d\xi + g(\eta) = e^{-\eta/2} \cdot \int c(\xi)\,d\xi + g(\eta)\,,$$

або, позначаючи $f(\xi) := \int c(\xi)\,d\xi$, маємо:

$$\widetilde{u}(\xi, \eta) = e^{-\eta/2} \cdot f(\xi) + g(\eta)\,,$$

де f і g – довільні двічі гладкі функції в $\mathbb{R}$. Повертаючись до змінних x, y маємо:

$$u(x, y) = e^{(x-y)/2} \cdot f(y - 2x) + g(y - x)\,,$$

де f і g – довільні двічі гладкі функції в $\mathbb{R}$. $\square$

Приклад 10. Розв'язати диференціальне рівняння з частинними похідними і переконатися, що знайдена функція $u = u(x, y)$ дійсно є розв'язком вихідного рівняння шляхом підстановки цієї функції в нього.

$$3u_{xx} - 10u_{xy} + 3u_{yy} - 2u_x + 4u_y + (5/16)u = 0\,. \tag{2.2.25}$$

Розв'язок. У відомих позначеннях $a = 3$, $b = -5$, $c = 3$. Складемо рівняння характеристик:

$$3(dy)^2 + 10 \cdot dxdy + 3(dx)^2 = 0\,. \tag{2.2.26}$$

Ділячи на $(dx)^2$ і покладаючи $\frac{dy}{dx} = t$, маємо:

$$3t^2 + 10t + 3 = 0.$$

Цк квадратне рівняння, $D = 100 - 36 = 64$, $t_1 = \frac{-10+8}{6} = -1/3$, $t_2 = \frac{-10-8}{6} = -3$, звідси

$$\left[\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} = -3\,,\\ &\frac{dy}{dx} = -1/3\,. \end{aligned}\right.$$

Звідси або $y - 3x = c_1$, або $3y - x = c_2$. Робимо заміну незалежних змінних:

$$\begin{cases} \xi = y + 3x \\ \eta = 3y + x\,. \end{cases} \tag{2.2.27}$$

Маємо: $u(x, y) = \widetilde{u}(\xi, \eta)$,

$$u_x = \widetilde{u}_\xi \cdot \xi_x + \widetilde{u}_\eta \cdot \eta_x = 3\widetilde{u}_\xi + \widetilde{u}_\eta;$$

$$u_{xx} = 3\widetilde{u}_{\xi\xi}\xi_x + 3\widetilde{u}_{\xi\eta}\eta_x + \widetilde{u}_{\eta\xi}\xi_x + \widetilde{u}_{\eta\eta}\eta_x =$$

$$= 9\widetilde{u}_{\xi\xi} + 6\widetilde{u}_{\xi\eta} + \widetilde{u}_{\eta\eta}\,;$$

$$u_y = \widetilde{u}_\xi \cdot \xi_y + \widetilde{u}_\eta \cdot \eta_y = \widetilde{u}_\xi + 3\widetilde{u}_\eta;$$

$$u_{yy} = \widetilde{u}_{\xi\xi}\xi_y + \widetilde{u}_{\xi\eta}\eta_y + 3\widetilde{u}_{\eta\xi}\xi_y + 3\widetilde{u}_{\eta\eta}\eta_y =$$

$$= \widetilde{u}_{\xi\xi} + 6\widetilde{u}_{\xi\eta} + 9\widetilde{u}_{\eta\eta};$$

$$u_{xy} = 3\widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot \xi_y + 3\widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot \eta_y + \widetilde{u}_{\eta\xi}\xi_y + \widetilde{u}_{\eta\eta}\eta_y =$$

$$= 3\widetilde{u}_{\xi\xi} + 10\widetilde{u}_{\xi\eta} + 3\widetilde{u}_{\eta\eta}\,.$$

Тепер те, що ми отримали, підставляємо в вихідне рівняння. Маємо:

$$27\widetilde{u}_{\xi\xi} + 18\widetilde{u}_{\xi\eta} + 3\widetilde{u}_{\eta\eta} - 30\widetilde{u}_{\xi\xi} - 100\widetilde{u}_{\xi\eta} - 30\widetilde{u}_{\eta\eta} + 3\widetilde{u}_{\xi\xi} +$$

$$+18\widetilde{u}_{\xi\eta} + 27\widetilde{u}_{\eta\eta} - 6\widetilde{u}_{\xi} - 2\widetilde{u}_{\eta} + 4\widetilde{u}_{\xi} + 12\widetilde{u}_{\eta} + (5/16)\widetilde{u} = 0$$

$$= -64\widetilde{u}_{\xi\eta} - 2\widetilde{u}_{\xi} + 10\widetilde{u}_{\eta} + \frac{5}{16}\widetilde{u} = 0\,. \qquad (2.2.28)$$

Зробимо в (2.2.28) заміну $\widetilde{u} = v(\xi,\eta)\cdot e^{\lambda\xi+\mu\eta}$. Підставимо цю заміну в рівняння (2.2.28), знайдемо μ і λ «так, як нам треба». Маємо: $\widetilde{u}_{\xi} = v_{\xi}e^{\lambda\xi+\mu\eta} + \lambda e^{\lambda\xi+\mu\eta}v$, $\widetilde{u}_{\eta} = v_{\eta}e^{\lambda\xi+\mu\eta} + \mu e^{\lambda\xi+\mu\eta}v$, $\widetilde{u}_{\xi\eta} = v_{\xi\eta}e^{\lambda\xi+\mu\eta} + \mu v_{\xi}e^{\lambda\xi+\mu\eta} + \lambda v_{\eta}e^{\lambda\xi+\mu\eta} + \lambda\mu e^{\lambda\xi+\mu\eta}v$. Підставляючи отримані величини в (2.2.28), отримаємо:

$$-64v_{\xi\eta}e^{\lambda\xi+\mu\eta} - 64\mu v_{\xi}e^{\lambda\xi+\mu\eta} - 64\lambda v_{\eta}e^{\lambda\xi+\mu\eta} - 64\lambda\mu v e^{\lambda\xi+\mu\eta} - 2v_{\xi} - 2\lambda v e^{\lambda\xi+\mu\eta} -$$

$$-10v_{\eta}e^{\lambda\xi+\mu\eta} + 10\mu v e^{\lambda\xi+\mu\eta} + \frac{5}{16}v e^{\lambda\xi+\mu\eta} = 0\,. \qquad (2.2.29)$$

Скорочуючи (2.2.29) на $e^{\lambda\xi+\mu\eta} \neq 0$ і групуючи члени при $v_{\xi\eta}$, v_{ξ}, v_{η} і v, отримаємо:

$$-64v_{\xi\eta} + (-64\mu - 2)v_{\xi} + (-64\lambda + 10)v_{\eta} + v\left(\frac{5}{16} - 64\lambda\right)\mu = 0\,. \quad (2.2.30)$$

Підберемо λ і μ так, щоб

$$\begin{cases} -64\mu - 2 = 0 \\ -64\lambda + 10 = 0\,. \end{cases} \qquad (2.2.31)$$

З (2.2.31) випиває, що $\lambda = \frac{5}{32}$, $\mu = -\frac{1}{32}$. Зауважимо, що для вказаних значень λ і μ виконується рівність $\frac{5}{16} - 64\lambda = 0$. Тоді з (2.2.30) випливає, що

$$v_{\xi\eta} = 0\,. \qquad (2.2.32)$$

Рівняння (2.2.32) вже розв'язувалось нами (див. (2.2.19) на стор. 34 і нижче). Нагадаємо, що його розв'язок має вигляд

$$v(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta)\,,$$

де f і g – довільні двічі гладкі функції в $\mathbb{R}$. Згадуючи про заміну $\widetilde{u}(\xi,\eta) = v(\xi,\eta)\cdot e^{\lambda\xi+\mu\eta}$, отримаємо

$$\widetilde{u}(\xi,\eta) = e^{\frac{5}{32}\xi - \frac{1}{32}\eta}v(\xi,\eta) = e^{\frac{5}{32}\xi - \frac{1}{32}\eta}(f(\xi) + g(\eta))\,,$$

або, повертаючись до змінних x і y і маючи на увазі, що $u(x,y) = \widetilde{u}(\xi,\eta)$, отримаємо остаточний розв'язок задачі:

$$u(x,y) = e^{(7x+y)/16}(f(y+3x) + g(x+3y))\,, \tag{2.2.33}$$

де f і g – довільні двічі гладкі функції в $\mathbb{R}$. $\square$

Перевіримо, що функція u, задана в (2.2.33), дійсно є розв'язком вихідного рівняння (2.2.25). Маємо:

$$u_x = \frac{7}{16}e^{(7x+y)/16}(f(y+3x)+g(x+3y))+e^{(7x+y)/16}(3f'(y+3x)+g'(x+3y))\,,$$

$$u_y = \frac{1}{16}e^{(7x+y)/16}(f(y+3x)+g(x+3y))+e^{(7x+y)/16}(f'(y+3x)+3g'(x+3y))\,,$$

$$u_{xx} = \frac{49}{256}e^{(7x+y)/16}(f(y+3x)+g(x+3y))+\frac{7}{16}e^{(7x+y)/16}(3f'(y+3x)+g'(x+3y))+$$
$$+\frac{7}{16}(3f'(y+3x)+g'(x+3y))+e^{(7x+y)/16}(9f''(y+3x)+g''(x+3y)) =$$
$$= \frac{49}{256}e^{(7x+y)/16}(f(y+3x)+g(x+3y))+\frac{7}{16}e^{(7x+y)/16}(6f'(y+3x)+2g'(x+3y))+$$
$$+e^{(7x+y)/16}(9f''(y+3x)+g''(x+3y))\,,$$

$$u_{yy} = \frac{1}{256}e^{(7x+y)/16}(f(y+3x)+g(x+3y))+\frac{1}{16}e^{(7x+y)/16}(f'(y+3x)+3g'(x+3y))+$$
$$+\frac{1}{16}(f'(y+3x)+3g'(x+3y))+e^{(7x+y)/16}(f''(y+3x)+9g''(x+3y)) =$$
$$= \frac{1}{256}e^{(7x+y)/16}(f(y+3x)+g(x+3y))+\frac{1}{16}e^{(7x+y)/16}(2f'(y+3x)+6g'(x+3y))+$$
$$+\frac{1}{16}e^{(7x+y)/16}(f''(y+3x)+3g''(x+3y))\,,$$

$$u_{xy} = \frac{7}{256}e^{(7x+y)/16}(f(y+3x)+g(x+3y))+\frac{7}{16}e^{(7x+y)/16}(f'(y+3x)+3g'(x+3y))+$$
$$+\frac{1}{16}e^{(7x+y)/16}(3f'(y+3x)+g'(x+3y))+e^{(7x+y)/16}(3f''(y+3x)+3g''(x+3y)) =$$
$$= \frac{7}{256}e^{(7x+y)/16}(f(y+3x)+g(x+3y))+\frac{10}{16}e^{(7x+y)/16}f'(y+3x)+\frac{22}{16}g'(x+3y)+$$
$$+e^{(7x+y)/16}(3f''(y+3x)+9g''(x+3y))\,.$$

Для скорочення всюди пишемо f замість $f(y+3x)$, g замість g замість $g(x+3y)$ і т.д. Підставляємо знайдені вирази в (2.2.25), маємо:

$$\begin{gathered}
e^{(7x+y)/16}\left(\frac{147}{256}f+\frac{147}{256}g+\frac{126}{16}f'+\frac{42}{16}g'+27f''+3g''-\frac{70}{256}f-\frac{70}{256}g-\right.\\
-\frac{100}{16}f'-\frac{220}{16}g'-30f''-30g''+\frac{3}{256}f+\frac{3}{256}g+\frac{6}{16}f'+\frac{18}{16}g'+3f''+\\
+27g''-\frac{14}{16}f-\frac{14}{16}g-6f'-2g'+\frac{4}{16}f+\frac{4}{16}g+4f'+12g'+ \qquad (2.2.34)\\
\left.+\frac{5}{16}f+\frac{5}{16}g\right)=0\,.
\end{gathered}$$

Легко бачити, що у (2.2.34) тотожність. Наприклад, коефіцієнт при f' дорівнює $\frac{126}{16}-\frac{100}{16}+\frac{6}{16}-6+4=0$, коефіцієнт при g' : $\frac{42}{16}-\frac{120}{16}+\frac{18}{16}-2+12=0$, і т.п. □

Приклад 11. Розв'язати л.д.р. з ч.п. другого порядку і зробити перевірку, що знайдена функція $u=u(x,y)$ дійсно є розв'язком цього рівняння.

$$u_{xx}-2\sin x\,u_{xy}-\cos^2 xu_{yy}-\cos xu_y=0\,. \qquad (2.2.35)$$

Розв'язок. Ми вже зводили дане рівняння до канонічного вигляду, див. приклад 4 на сторінці 24. Згідно (2.1.17), канонічним виглядом цього рівняння є співвідношення

$$\widetilde{u}_{\xi\eta}=0\,. \qquad (2.2.36)$$

Це рівняння розв'язувалося багато разів (див. співвідношення (2.2.19) на стор. 34 і далі по тексту). Його розв'язком є функція $\widetilde{u}(\xi,\eta)=f(\xi)+g(\eta)$, де f і g – дві довільні двічі гладкі функції в $\mathbb{R}$, або, повертаючись до змінних x і y (див. систему (2.1.14) на сторінці 25), будемо мати:

$$u(x,y)=f(y-\cos x-x)+g(y-\cos x+x)\,, \qquad (2.2.37)$$

де f і g – дві довільні двічі гладкі функції в $\mathbb{R}$. Перевіримо, що функція u зі співвідношення (2.2.37) – розв'язок вихідного рівняння (2.2.35). Для скорочення домовимось писати f замість $f(y-\cos x-x)$ і g замість $g(y-\cos x+x)$. Будемо мати:

$$u_x=(\sin x-1)f'+(\sin x+1)g'\,,$$

$$u_{xx}=\cos x\cdot f'+(\sin x-1)^2f''+\cos x\cdot g'+(\sin x+1)^2g''\,,$$

$$
\begin{aligned}
u_{xy} &= (\sin x - 1)f'' + (\sin x + 1)g''\,,\\
u_y &= f' + g'\,,\\
u_{yy} &= f'' + g''\,.
\end{aligned}
$$

Підставляючи тепер знайдені вище значення похідних до (2.2.35), будемо мати:

$$
\begin{gathered}
\cos x \cdot f' +\\
+(\sin x - 1)^2 f'' + \cos x \cdot g' + (\sin x + 1)^2 g'' - 2\sin x(\sin x - 1)f'' - \\
-2\sin x(\sin x + 1)g'' - \cos^2 x \cdot f'' - \cos^2 x \cdot g'' - \cos x \cdot f' - \cos x \cdot g' = 0\,.
\end{gathered} \tag{2.2.38}
$$

Розкриваючи дужки у (2.2.38), будемо мати:

$$
\begin{gathered}
\cos x \cdot f' + \sin^2 x f'' + 2\sin x \cdot f'' + f'' + \cos x \cdot g' + \sin^2 x \cdot g'' + 2\sin x \cdot g'' + g'' - \\
-2\sin^2 x \cdot f'' - 2\sin x \cdot f'' - 2\sin^2 x \cdot g'' - 2\sin x \cdot g'' - \cos^2 x \cdot f'' - \cos^2 x \cdot g'' - \\
- \cos x \cdot f' - \cos x \cdot g' = 0\,.
\end{gathered} \tag{2.2.39}
$$

Легко бачити, що у (2.2.39) має місце тотожність. Справді, коефіцієнт при f'' дорівнює $\sin^2 x + 2\sin x + 1 - 2\sin^2 x - 2\sin x - \cos^2 x = 0$. Аналогічно, коефіцієнт при g'' дорівнює $\sin^2 x + 2\sin x + 1 - 2\sin^2 x - 2\sin x - \cos^2 x = 0$; коефіцієнт при f' дорівнює $\cos x - \cos x = 0$ і коефіцієнтом при g' так само є $\cos x - \cos x = 0$. Розв'язок повністю завершено. □

Приклад 12. Розв'язати задачу Коші

$$
e^y u_{xy} - u_{yy} + u_y = 0\,, \tag{2.2.40}
$$

$$
u|_{y=0} = -x^2/2\,, \quad u_y|_{y=0} = -\sin x\,. \tag{2.2.41}
$$

Розв'язок. Само рівняння вже було розв'язано нами, див. співвідношення (2.2.4) на сторінці 30. Його розв'язок надається формулою (2.2.11):

$$
u = u(x,y) = f(x) + g(e^y + x)\,, \quad f, g \in C^2(\mathbb{R})\,. \tag{2.2.42}
$$

Залишилось знайти лише функції f і g у (2.2.42) так, щоб відповідний розв'язок $u = u(x,y)$ задовольняв умови (2.2.41). Отже, зі співвідношення (2.2.42) знаходимо:

$$
\begin{cases}
f(x) + g(1+x) = -x^2/2\,,\\
g'(1+x) = -\sin x\,.
\end{cases} \tag{2.2.43}
$$

З другого співвідношення у (2.2.43) будемо мати $g(1+x) = \cos x$, тоді $g(x) = \cos(x-1)$. З першого рівняння маємо $f(x) = -x^2/2 - \cos x$. Тоді

$$
u = u(x,y) = -x^2/2 - \cos x + \cos(e^y + x - 1)\,.\square
$$

2.3 Завдання для самоконтролю

1. Який тип має рівняння (2.1.1), якщо в ньому $a = 0$ (за умови, що $b \neq 0$) ?

2. Нехай коефіцієнти a, b і c рівняння (2.1.1) є функціями, принаймні одна з котрих є розривною в деякій точці. Чи може в цьому випадку деяка неперервна (гладка) функція $u = u(x, y)$ бути розв'язком цього рівняння ?

3. Нехай ξ, η і J визначаються за допомогою формул (2.1.5) і (2.1.6), відповідно. Нехай, крім того,

$$\widetilde{a}(\xi,\eta)\widetilde{u}_{\xi\xi} + 2\widetilde{b}(\xi,\eta)\widetilde{u}_{\xi\eta} + \widetilde{c}(\xi,\eta)\widetilde{u}_{\eta\eta} + \widetilde{F}(\xi,\eta,\widetilde{u},\widetilde{u}_{\xi},\widetilde{u}_{\eta}) = 0 \tag{2.3.1}$$

– нове рівняння, що виходить з рівняння (2.1.1) в результаті заміни (2.1.5). Доведіть, що $\widetilde{b}^2 - \widetilde{a}\widetilde{c} = J^2(b^2 - ac)$.

4. Нехай у рівнянні (2.1.1) коефіцієнт залежить тільки від x. Чи справедливо твердження, що $\widetilde{a}$ у відповідному канонічному вигляді (2.1.1) теж залежить тільки від одної зі змінних ξ або η ?

5. Чи можуть рівняння вигляду (2.1.1) мати різний тип в різних областях ? Якщо так, наведіть приклад такого рівняння.

6. Чи може рівняння $a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + d(x,y)u_x + e(x,y)u_y + f(x,y)u = 0$: а) мати рівно один розв'язок $u = u(x,y)$; б) мати рівно два розв'язки $u = u_1(x,y)$, $u = u_2(x,y)$; в) не мати жодного розв'язку.

7. Нехай у вихідному диференціальному рівнянні маємо заміну

$$\begin{cases} \xi = \xi(x,y) \\ \eta = \eta(x,y)\,. \end{cases}$$

Нехай також при цьому маємо відповідність $u(x,y) = \widetilde{u}(\xi,\eta)$, де $\widetilde{u}$ – деяка нова функція. Чи вірно, що похідна $\widetilde{u}_{\xi}$ завжди залежить тільки від змінної ξ, але не залежить від η?

8. Питання аналогічне до пункту 7: чи вірно, що похідна $\widetilde{u}_{\eta}$ завжди залежить тільки від змінної η, але не залежить від ξ?

9. Нехай $f(3t) = \cos t$. Чому дорівнює $f(x)$?

10. Доведіть, що функція

$$u = u(x,y) = -x^2/2 - \cos x + \cos(e^y + x - 1)$$

є розв'язком диференціального рівняння $e^y u_{xy} - u_{yy} + u_y = 0$, який задовольняє початкові умови $u|_{y=0} = -x^2/2$ і $u_y|_{y=0} = -\sin x$.

11. Нехай $f'(3x) = x^2 + x$. Знайти $f(x-y)$.

12. Чи може статися, що одне і те саме рівняння при зведенні його за допомогою методу характеристик шляхом різних замін незалежних змінних до канонічного вигляду має два різних канонічних вигляди ? Відповідь обґрунтуйте.

2.4 Завдання для самостійної роботи № 2

Задача 2. *Звести до канонічного вигляду методом характеристик і розв'язати л.д.р. з ч.п. другого порядку параболічного типу*

Варіант	**Рівняння**
1	$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y = 0$
2	$u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} - u_x - 2u_y = 0$
3	$u_{xx} + 6u_{xy} + 9u_{yy} + u_x + 3u_y = 0$
4	$u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} - 2u_x + 6u_y = 0$
5	$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} - 3u_x - 3u_y = 0$
6	$u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} + 3u_x - 6u_y = 0$
7	$9u_{xx} + 6u_{xy} + u_{yy} - 9u_x - 3u_y = 0$
8	$u_{xx} + 8u_{xy} + 16u_{yy} - u_x - 4u_y = 0$
9	$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 4u_x - 4u_y = 0$
10	$16u_{xx} + 8u_{xy} + u_{yy} - 8u_x - 2u_y = 0$
11	$4u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} + 8u_x + 4u_y = 0$
12	$u_{xx} - 8u_{xy} + 16u_{yy} + 3u_x - 12u_y = 0$
13	$9u_{xx} + 6u_{xy} + u_{yy} - 12u_x - 4u_y = 0$
14	$16u_{xx} + 8u_{xy} + u_{yy} - 16u_x + 4u_y = 0$
15	$u_{xx} + 10u_{xy} + 25u_{yy} + u_x + 5u_y = 0$
16	$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 5u_x + 5u_y = 0$
17	$u_{xx} - 10u_{xy} + 25u_{yy} + 2u_x - 10u_y = 0$
18	$4u_{xx} - 4u_{xy} + u_{yy} - 10u_x + 5u_y = 0$
19	$25u_{xx} - 10u_{xy} + u_{yy} - 15u_x + 3u_y = 0$
20	$u_{xx} + 6u_{xy} + 9u_{yy} + 5u_x + 15u_y = 0$
21	$25u_{xx} + 10u_{xy} + u_{yy} + 20u_x + 4u_y = 0$
22	$u_{xx} + 8u_{xy} + 16u_{yy} + 5u_x + 20u_y = 0$
23	$u_{xx} - 10u_{xy} + 25u_{yy} + 5u_x - 25u_y = 0$
24	$u_{xx} + 12u_{xy} + 36u_{yy} + u_x + 6u_y = 0$
25	$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 6u_x - 6u_y = 0$
26	$u_{xx} - 12u_{xy} + 36u_{yy} + 2u_x - 12u_y = 0$
27	$36u_{xx} + 12u_{xy} + u_{yy} + 18u_x + 3u_y = 0$
28	$u_{xx} + 14u_{xy} + 49u_{yy} + 2u_x + 14u_y = 0$
29	$36u_{xx} - 12u_{xy} + u_{yy} + 18u_x - 3u_y = 0$
30	$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 2u_x - 2u_y = 0$

2.5 Завдання для самостійної роботи № 3

Задача 3. *Звести до канонічного вигляду методом характеристик і розв'язати л.д.р. з ч.п. другого порядку гіперболічного типу*

Варіант	**Рівняння**
1	$4u_{xx} + 8u_{xy} + 3u_{yy} = 0$
2	$3u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} = 0$
3	$16u_{xx} + 16u_{xy} + 3u_{yy} = 0$
4	$25u_{xx} + 20u_{xy} + 3u_{yy} = 0$
5	$12u_{xx} + 8u_{xy} + u_{yy} = 0$
6	$64u_{xx} + 32u_{xy} + 3u_{yy} = 0$
7	$u_{xx} + 3u_{xy} + 2u_{yy} = 0$
8	$u_{xx} + 12u_{xy} + 27u_{yy} = 0$
9	$u_{xx} + 20u_{xy} + 75u_{yy} = 0$
10	$u_{xx} + 28u_{xy} + 147u_{yy} = 0$
11	$u_{xx} + 36u_{xy} + 243u_{yy} = 0$
12	$3u_{xx} + 32u_{xy} + 64u_{yy} = 0$
13	$48u_{xx} + 16u_{xy} + u_{yy} = 0$
14	$108u_{xx} + 24u_{xy} + u_{yy} = 0$
15	$192u_{xx} + 32u_{xy} + u_{yy} = 0$
16	$3u_{xx} + 8u_{xy} + 4u_{yy} = 0$
17	$u_{xx} + 4u_{xy} + 3u_{yy} = 0$
18	$3u_{xx} + 16u_{xy} + 16u_{yy} = 0$
19	$u_{xx} + 8u_{xy} + 12u_{yy} = 0$
20	$49u_{xx} + 28u_{xy} + 3u_{yy} = 0$
21	$3u_{xx} + 20u_{xy} + 25u_{yy} = 0$
22	$2u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} = 0$
23	$u_{xx} + 16u_{xy} + 48u_{yy} = 0$
24	$u_{xx} + 24u_{xy} + 108u_{yy} = 0$
25	$u_{xx} + 32u_{xy} + 192u_{yy} = 0$
26	$3u_{xx} + 28u_{xy} + 49u_{yy} = 0$
27	$27u_{xx} + 12u_{xy} + u_{yy} = 0$
28	$75u_{xx} + 20u_{xy} + u_{yy} = 0$
29	$147u_{xx} + 28u_{xy} + u_{yy} = 0$
30	$4u_{xx} + 3u_{xy} - u_{yy} = 0$

2.6 Завдання для самостійної роботи № 4

Задача 4. *Розв'язати л.д.р. з ч.п. другого порядку та знайти функцію $u = u(x, y)$, яка задовольняє початкові умови (за наявності умов)*

Варіант	**Рівняння**
1	$u_{xx} = x + y$
2	$u_{xy} + 5u_x = 0$
3	$u_{xy} + 3u_x = e^y$
4	$u_{xy} - 2u_x - 3u_y + 6u = 2e^{x+y}$
5	$u_{xy} + \sin x \cdot u_x = 5 + y^2$
6	$\frac{\partial}{\partial y}(u_x + u) + x(u_x + u) + 3x^2 y = 0$
7	$u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0\,,\ u_{y=0} = 3x^2,\ u_y\vert_{y=0} = 0$
8	$u_{xx} - 2u_{xy} + 4e^y = 0,\ u\vert_{y=2x} = 4xe^{2x},\ u_y\vert_{y=2x} = e^{2x} + 4xe^{2x} + 2$
9	$x^2 u_{xx} - 2xyu_{xy} - 3y^2 u_{yy} = 0,\ u\vert_{y=x^2} = x^2,\ u_y\vert_{y=x^2} = 2$
10	$e^y u_{xy} - u_{yy} + u_y = \cos x,\ u_{y=0} = \cos x,\ u_y\vert_{y=0} = 0$
11	$u_{xy} + yu_x + xu_y + xyu = 0,\ u\vert_{y=3x} = 0,\ u_y\vert_{y=3x} = e^{-5x^2}$
12	$u_{yy} - 2u_{xy} + 2u_x - u_y = 4e^x$
13	$u_{xx} - 6u_{xy} + 8u_{yy} + u_x - 2u_y + 4e^{5x+\frac{3}{2}y} = 0$
14	$3u_{xx} + 10u_{xy} + 3u_{yy} + u_x + u_y + \frac{1}{16}u - 16xe^{-\frac{x+y}{16}} = 0$
15	$u_{xx} - 2\cos x u_{xy} - (3 + \sin^2 x)u_{yy} + u_x + (\sin x - \cos x - 2)u_y = 0$
16	$u_{xy} + yu_y - u = 0$
17	$u_{xy} + xu_x - u + \cos y = 0$
18	$\frac{\partial}{\partial y}(u_x + u) + 2x^2 y(u_x + u) = 0$
19	$\frac{\partial}{\partial y}(u_x + u) + x(u_x + u) + x^2 y = 0$
20	$u_{xx} + 2\cos x u_{xy} - \sin^2 x u_{yy} - \sin x u_y = 0,\ u\vert_{y=\sin x} = x + \cos x,$ $u_y\vert_{y=\sin x} = \sin x$
21	$u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - (3 + \cos^2 x)u_{yy} - \cos x u_y = 0,\ u\vert_{y=\cos x} = \sin x,$ $u_y\vert_{y=\cos x} = e^x/2$
22	$u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - (3 + \cos^2 x)u_{yy} + u_x + (2 - \sin x - \cos x)u_y = 0$
23	$4u_{xx} + 8u_{xy} + 3u_{yy} = 0$
24	$3u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} = 0$
25	$16u_{xx} + 16u_{xy} + 3u_{yy} = 0$
26	$25u_{xx} + 20u_{xy} + 3u_{yy} = 0$
27	$12u_{xx} + 8u_{xy} + u_{yy} = 0$
28	$64u_{xx} + 32u_{xy} + 3u_{yy} = 0$
29	$u_{xx} + 3u_{xy} + 2u_{yy} = 0$
30	$u_{xx} + 12u_{xy} + 27u_{yy} = 0$

3 Задача Коші для рівняння коливань струни. Формула Даламбера

3.1 Формула Даламбера. Обґрунтування і приклади

Нехай $a > 0$ – фіксована стала. Розглянемо *рівняння коливань струни*

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}\,, \quad a > 0\,, \tag{3.1.1}$$

в області $\Omega = \{(x,t) : x \in \mathbb{R},\ t > 0\}$. Будемо розглядати рівняння (3.1.1) поруч з *умовами Коші*

$$u|_{t=0} = \varphi(x)\,, \quad u_t|_{t=0} = \psi(x)\,, \tag{3.1.2}$$

де φ і ψ – задані («достатньо гладкі») функції в $\mathbb{R}$. Рівняння (3.1.1) розв'яжемо методом характеристик (див. розділ 2.2 на стор. 29). У відомих позначеннях зі співвідношення (2.2.1) $a = 1$, $b = 0$, $c = a^2$ (a^2 відноситься до (3.1.1)). Рівняння характеристик матиме вигляд

$$(dx)^2 - a^2(dt)^2 = 0\,,$$

звідки

$$(dx + adt)(dx - adt) = 0\,,$$

звідки

$$\left[\begin{aligned} &dx + adt = 0\,,\\ &dx - adt = 0\,. \end{aligned}\right. \tag{3.1.3}$$

Зі співвідношень (3.1.3) ми отримаємо, що

$$\left[\begin{aligned} &x + at = c_1\,, c_1 \in \mathbb{R}\,,\\ &x - at = c_2\,, c_2 \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}\right. \tag{3.1.4}$$

Згідно (3.1.4) заміна незалежних змінних, яку потрібно зробити в вихідному рівнянні (3.1.1), матиме вигляд

$$\begin{cases} \xi = x + at\,,\\ \eta = x - at\,. \end{cases} \tag{3.1.5}$$

Згідно заміни (3.1.5) $u(x,t) = \widetilde{u}(\xi,\eta)$. Тоді

$$u_x = \widetilde{u}_\xi \xi_x + \widetilde{u}_\eta \eta_x = \widetilde{u}_\xi + \widetilde{u}_\eta\,,$$

$$u_{xx} = \widetilde{u}_{\xi\xi}\xi_x + \widetilde{u}_{\xi\eta}\eta_x + \widetilde{u}_{\eta\xi}\xi_x + \widetilde{u}_{\eta\eta}\eta_x = \widetilde{u}_{\xi\xi} + 2\widetilde{u}_{\xi\eta} + \widetilde{u}_{\eta\eta}\,,$$

$$u_t = \widetilde{u}_\xi \xi_t + \widetilde{u}_\eta \eta_t = a\widetilde{u}_\xi - a\widetilde{u}_\eta\,,$$
$$u_{tt} = a\widetilde{u}_{\xi\xi}\xi_t + a\widetilde{u}_{\xi\eta}\eta_t - a\widetilde{u}_{\eta\xi}\xi_t - a\widetilde{u}_{\eta\eta}\eta_t = a^2\widetilde{u}_{\xi\xi} - 2a^2\widetilde{u}_{\xi\eta} + a^2\widetilde{u}_{\eta\eta}\,.$$

Підставляючи знайдені значення для u_{xx} і u_{tt} у рівняння (3.1.1), знаходимо, що
$$-4a^2\widetilde{u}_{\xi\eta} = 0\,,$$
або
$$\widetilde{u}_{\xi\eta} = 0\,.$$

Розв'язуючи це рівняння, ми отримаємо
$$\widetilde{u}(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta)\,, \quad f, g \in C^2(\mathbb{R})\,,$$
або повертаючись до змінних x і y з огляду на заміну (3.1.5)
$$u(x,y) = f(x+at) + g(x-at)\,, \quad f, g \in C^2(\mathbb{R})\,. \tag{3.1.6}$$

У співвідношенні (3.1.6) треба знайти функції f і g так, щоб вони задовольняли співвідношення (3.1.2). З огляду на (3.1.6)
$$u_t = af'(x+at) - ag'(x-at)\,,$$
тоді
$$u_t|_{t=0} = af'(x) - ag'(x) = \psi(x)\,.$$

В такому випадку, з умов (3.1.2) маємо систему рівнянь для визначення f і g:
$$\begin{cases} f(x) + g(x) = \varphi(x)\,, \\ f'(x) - g'(x) = \frac{1}{a}\cdot\psi(x)\,. \end{cases} \tag{3.1.7}$$

Систему рівнянь (3.1.7) можна розв'язувати методом підстановки. З першого рівняння $f(x) = \varphi(x) - g(x)$, підставимо у друге рівняння:
$$\varphi'(x) - g'(x) - g'(x) = \frac{1}{2a}\cdot\psi(x)\,,$$
звідки
$$g'(x) = \frac{1}{2}\cdot\varphi'(x) - \frac{1}{2a}\cdot\psi(x)\,,$$
$$g(x) = \frac{1}{2}\cdot\varphi(x) - \frac{1}{a}\int\limits_0^x \psi(y)\,dy\,. \tag{3.1.8}$$

Оскільки $f(x) = \varphi(x) - g(x)$, зі співвідношення (3.1.8) ми отримаємо, що

$$f(x) = \varphi(x) - \frac{1}{2} \cdot \varphi(x) + \frac{1}{2a} \int\limits_0^x \psi(y)\, dy = \frac{1}{2} \cdot \varphi(x) + \frac{1}{2a} \int\limits_0^x \psi(y)\, dy\,. \quad (3.1.9)$$

Враховуючи співвідношення (3.1.8) і (3.1.9), з (3.1.6) отримаємо, що

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \cdot \varphi(x+at) + \frac{1}{2a} \int\limits_0^{x+at} \psi(y)\, dy + \frac{1}{2} \cdot \varphi(x-at) - \frac{1}{2a} \int\limits_0^{x-at} \psi(y)\, dy =$$

$$= \frac{1}{2}(\varphi(x+at) + \varphi(x-at)) + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(y)\, dy\,. \quad (3.1.10)$$

Співвідношення (3.1.10) називаєтъся формулою Даламбера. Розглянемо декілька прикладів.

Приклад 13. Розв'язати задачу Коші

$$u_{tt} = u_{xx}\,, \quad (3.1.11)$$

$$u|_{t=0} = x^2\,, \quad u_t|_{t=0} = 4x\,, \quad (3.1.12)$$

і перевірити, що знайдена функція $u = u(x,t)$ дійсно є її розв'язком.

Розв'язок. У позначеннях співвідношень (3.1.1) і (3.1.2) $a = 1$, $\varphi(x) = x^2$, $\psi(x) = 4x$. Отже, згідно співвідношення (3.1.10)

$$u(x,t) = \frac{1}{2}((x-t)^2 + (x+t)^2) + \frac{1}{2} \int\limits_{x-t}^{x+t} 4y\, dy =$$

$$= x^2 + t^2 + y^2|_{y=x-t}^{x+t} = x^2 + a^2t^2 + (x+t)^2 - (x-t)^2 =$$

$$= x^2 + t^2 + x^2 + 2xt + 2t^2 - x^2 + 2xt - t^2 =$$

$$= x^2 + t^2 + 4xt\,.$$

Перевірка. Маємо: $u = x^2 + t^2 + 4xt$, $u_x = 2x + 2t$, $u_{xx} = 2$, $u_t = 2t + 4x$, $u_{tt} = 2$. Отже, $u_{tt} = u_{xx}$ – співвідношення (3.1.11) виконується. Далі, $u|_{t=0} = (x^2 + t^2 + 4xt)|_{t=0} = x^2$, $u_t|_{t=0} = (2t + 4x)|_{t=0} = 4x$. Співвідношення (3.1.12) також виконуються. □

3.2 Завдання для самоконтролю

1. За допомогою міркувань, наведених на початку секції 3.1, обґрунтуйте, чому розв'язок задачі (3.1.1)–(3.1.2) є єдиним в просторі двічі гладких функцій і надається формулою Даламбера. Припускаємо $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ і $\psi \in C^1(\mathbb{R})$.

2. Доведіть, що задача (3.1.1)–(3.1.2) з нульовими значеннями $\varphi(x) \equiv 0 \equiv \psi(x)$ має тільки нульовий розв'язок $u = u(x,t) \equiv 0$.

3. Нехай у (3.1.2) $\psi(x) \equiv 0$. Доведіть, що в цьому випадку кожен розв'язок $u = u(x,t)$ задачі (3.1.1)–(3.1.2) тотожно дорівнює нулю при всіх $|x| > T$ і деякому достатньо великому $T > 0$ (принцип Гюйгенса).

4. Доведіть, що в умовах задачі 1 припущення $\psi(x) \equiv 0$ є істотним: за відсутності умови $\psi(x) \equiv 0$ принцип Гюйгенса не має місця.

5. За допомогою прямих обчислень перевірте, що функція

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\varphi(x+at) + \varphi(x-at)) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(y)\,dy$$

дійсно є розв'язком задачі (3.1.1)–(3.1.2).

Вказівка. Для інтегралу $J(x) = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$ скористайтеся формулою $J'(x) = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f_x(x,y)\,dy + f(x,\varphi_2(x)) \cdot \varphi_2'(x) - f(x,\varphi_1(x)) \cdot \varphi_1'(x)$.

6. Використовуючи прямі обчислення, доведіть, що *формула Дюамеля*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\varphi(x+at)+\varphi(x-at)) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(y)\,dy + \frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{t}\left(\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(y,\tau)\,dy\right)d\tau$$

дає один з можливих розв'язків неоднорідної задачі Коші

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t)\,, \quad a > 0\,, f \in C(\Omega)\,, \tag{3.2.1}$$

$$\Omega = \{(x,t) : x \in \mathbb{R}, \quad t > 0\}\,,$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x)\,, \quad u_t|_{t=0} = \psi(x)\,. \tag{3.2.2}$$

7. Користуючись результатами пунктів 1 і 6, як відомими, а також за допомогою формули Даламбера, доведіть, що задача (3.2.1)–(3.2.2) не може мати більше одного розв'язку в просторі двічі гладких функцій $u = u(x,t)$.

8. Користуючись результатами пункту 6, розв'яжіть задачу Коші

$$u_{tt} = 9u_{xx} + \sin x\,,$$

$$u|_{t=0} = 1\,, \quad u_t|_{t=0} = 1\,.$$

Перевірте, що знайдена функція $u = u(x,t)$ дійсно є розв'язком цієї задачі.

3.3 Завдання для самостійної роботи № 5

Задача 5. *Розв'язати задачу Коші (3.1.1)–(3.1.2) для заданих* a, φ *і* ψ *за допомогою формули Даламбера і перевірити правильність розв'язку шляхом підстановки знайденої функції у вихідну задачу*

Варіант	a, φ, ψ
1	$a=1$, $\varphi(x)=\frac{\sin x}{2}$, $\psi(x)=0$
2	$a=2$, $\varphi(x)=\sin\frac{x}{2}$, $\psi(x)=\frac{x}{1+x^2}$
3	$a=3$, $\varphi(x)=\cos x$, $\psi(x)=x^2$
4	$a=4$, $\varphi(x)=\frac{x}{1+x^2}$, $\psi(x)=\sin x$
5	$a=5$, $\varphi(x)=x^2$, $\psi(x)=\frac{1}{1+x^2}$
6	$a=1$, $\varphi(x)=\frac{1}{1+x^2}$, $\psi(x)=\cos x$
7	$a=\frac{1}{2}$, $\varphi(x)=e^{-x^2}$, $\psi(x)=(x-1)^2$
8	$a=\frac{1}{3}$, $\varphi(x)=\cos 2x$, $\psi(x)=\sin\frac{x}{2}$
9	$a=\frac{1}{2}$, $\varphi(x)=4\pi$, $\psi(x)=x$
10	$a=\frac{1}{2}$, $\varphi(x)=x(2-x)$, $\psi(x)=e^{-x}$
11	$a=1$, $\varphi(x)=x^2$, $\psi(x)=\sin 3x$
12	$a=1$, $\varphi(x)=e^x$, $\psi(x)=\omega x$
13	$a=3$, $\varphi(x)=\sin x$, $\psi(x)=v_0$
14	$a=4$, $\varphi(x)=\sin\frac{x}{3}$, $\psi(x)=\cos x$
15	$a=5$, $\varphi(x)=x^3$, $\psi(x)=\sin x\cos x$
16	$a=\frac{3}{2}$, $\varphi(x)=x(\frac{3}{2}-x)$, $\psi(x)=\frac{2}{3}x$
17	$a=\frac{2}{3}$, $\varphi(x)=e^{\frac{3}{2}x}$, $\psi(x)=\frac{2}{4+x^2}$
18	$a=\frac{3}{2}$, $\varphi(x)=x(x-\frac{5}{2})$, $\psi(x)=e^x$
19	$a=\frac{2}{5}$, $\varphi(x)=e^{-x}$, $\psi(x)=2\pi$
20	$a=\frac{3}{4}$, $\varphi(x)=x-\frac{\pi}{3}$, $\psi(x)=\frac{\pi}{3}$
21	$a=\frac{4}{3}$, $\varphi(x)=\frac{1}{4}\cos\frac{x}{4}$, $\psi(x)=\sin 3x$
22	$a=\frac{1}{4}$, $\varphi(x)=\frac{x^2}{2}$, $\psi(x)=2x-1$
23	$a=2$, $\varphi(x)=(x-2)^2$, $\psi(x)=2-4x$
24	$a=1$, $\varphi(x)=3x-1$, $\psi(x)=\cos\frac{x}{3}$
25	$a=1$, $\varphi(x)=3-2x$, $\psi(x)=e^{\frac{x}{3}}$
26	$a=\frac{5}{2}$, $\varphi(x)=e^{-2x}$, $\psi(x)=2x+3$
27	$a=4$, $\varphi(x)=\frac{1}{4+x^2}$, $\psi(x)=2\pi x$
28	$a=2$, $\varphi(x)=\pi\frac{x}{2}$, $\psi(x)=\frac{x-3}{2}$
29	$a=5$, $\varphi(x)=x-5$, $\psi(x)=\cos\frac{x}{5}$
30	$a=4$, $\varphi(x)=3x^2$, $\psi(x)=e^{-2x}$

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Бицадзе А.В. *Уравнения математической физики* / А.В. Бицадзе. – М.: Наука, 1976.

[2] Боярчук А.К. *Справочное пособие по высшей математике. Том 5: Дифференциальные уравнения в примерах и задачах.* / А.К. Боярчук, Г.П. Головач. – М.: Эдиториал УРСС, 2001.

[3] Бицадзе А.В. *Сборник задач по уравнениям математической физики* / А.В. Бицадзе, Д.Ф. Калиниченко. – М.: ФИЗМАТГИЗ, Наука, 1977.

[4] Владимиров В.С. *Уравнения математической физики* / В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1988.

[5] Ганиев В.С. *Уравнения математической физики, методические указания по спецкурсу* / В.С. Ганиев и др. – Самара: Самарская архитектурно-строительная академия, 1997.

[6] Гельфанд И.М. *Лекции по линейной алгебре.* / И.М. Гельфанд. – М.: ФИЗМАТГИЗ, Наука, 1971.

[7] Лопушанська Г.П. *Диференціальні рівняння та рівняння математичної фізики* / Г.П. Лопушанська, О.М. Бугрій, А.О. Лопушанський. – Львів: Видавець І.Е. Чижиков, 2012.

[8] Михайлов В.И. *Дифференциальные уравнения в частных производных* / В.И. Михайлов. – М.: Наука, 1976.

[9] Петровский И.Г. *Лекции об уравнениях с частными производными* / И.Г. Петровский. – М.: ФИЗМАТГИЗ, 1961.

[10] Смирнов М.М. *Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка.* / М.М. Смирнов. – М.: Наука, 1964.

[11] Тихонов А.Н. *Уравнения математической физики* / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977.

[12] Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 1.* / Г.М. Фихтеногольц. – М.: ФИЗМАТГИЗ, 1966.

Для нотаток

Для нотаток