Житомирський державний університет ім. Івана Франка

Сарана О.А., Семенець С.П.

Нестандартні геометричні задачі

Навчально-методичний посібник

Вид-во ЖДУ ім.. І.Франка
Житомир
2007

ББК 22.1я73
С20
УДК 510(023)

Затверджено на засіданні вченої Ради Житомирського державного університету, протокол №3 від 27 жовтня 2006 р.

Рецензенти: Заслужений діяч науки і техніки України, доктор технічних наук, Академік інженерної академії України, професор кафедри загально-технічних дисциплін Державного агроекологічного університету Лось Л.В.,
кандидат технічних наук, професор Житомирського державного університету ім. Івана Франка Ленчук І.Г.,
доцент кафедри вищої математики Житомирського державного технологічного університету, кандидат фіз.-мат. наук Охріменко С.А.

Сарана О.А., Семенець С.П.
С20 Нестандартні геометричні задачі: Навчально-методичний посібник. – Житомир: Вид-во ЖДУ ім.. І.Франка, 2007.- 150 с., іл.

В посібнику описано основні методи та ідеї розв'язування геометричних олімпіадних задач, які недостатньо вивчаються в шкільному курсі математики. Кожен метод супроводжується теоретичним обґрунтуванням, прикладами розв'язаних задач та задачами для самостійного розв'язування. Всього запропоновано понад 360 задач, до понад 100 із них подано повні розв'яання, до інших наведено відповіді чи вказівки.

Посібник адресовано учням старших класів, вчителям, керівникам гуртків, студентам математичних спеціальностей вищих навчальних закладів. Рекомендується для підготовки до вступних екзаменів з математики та математичних олімпіад.

Посібник призначений для використання при проведенні факультативної роботи з математики та для підготовки до участі в математичних олімпіадах.

22.1я73

Від авторів

За кілька тисячоліть свого розвитку геометрія розвинулася настільки, що повним оволодінням її методів та знанням усіх її секретів похвалитись не може ніхто. Деякі математики навіть вважають цю науку великою грою за певними аксіоматичними правилами, виробленими Евклідом та його попередниками. Процес розв’язування геометричних задач є чудовим полігоном для вироблення логічного і продуктивного мислення. Тому жодна математична олімпіада не обходиться без геометричних задач.

Посібник в основному орієнтується на задачі міських, обласних та національних олімпіад. При підборі задач автори виходили з досвіду проведення факультативних занять з розв’язування олімпіадних завдань у Житомирському державному університеті імені Івана Франка та школах м. Житомира. При цьому з метою забезпечення достатньої для факультативної роботи кількості задач використано багато задач, які пропонувались на Київських, Всеукраїнських, обласних та Соросівських учнівських олімпіадах. Також включено деякі задачі, складені авторами.

Після номеру кожної задачі даного посібника (в дужках) вказано класи, для яких вона може бути запропонована. Після номерів деяких задач додатково вказано, на якій олімпіаді пропонувалась ця задача і в якому році (при цьому номер класу вказано на час проведення олімпіади). Прийнято такі скорочення: ММО – Міжнародна математична олімпіада, УМО – Всеукраїнська математична олімпіада, ОМО – обласна математична олімпіада, КМО – Київська математична олімпіада, СМО – Соросівська математична олімпіада, РМО – Всеросійська математична олімпіада, ВТЮМ – Всеукраїнський турнір юних математиків. До значної кількості задач наведено повне розв’язання, до інших вказівки.

Бажаємо оригінальних ідей, красивих розв’язків задач та насолоди від власних успіхів та досягнень!

§ 1. ПЛАНІМЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ

Для розв'язування планіметричних задач можуть додатково використовуватися наступні теореми.

Теорема 1.1. Якщо *OA* – відрізок дотичної (*A* – точка дотику), а *B* і *C* – точки перетину кола і січної *OB*, то

$$OA^2 = OB \cdot OC .$$

Теорема 1.2. Кут між січною та дотичною до кола дорівнює піврізниці величин дуг, розташованих між сторонами кута.

Теорема 1.3. Навколо чотирикутника *ABCD* можна описати коло тоді і тільки тоді, коли в ньому суми протилежних кутів рівні між собою:

$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D \ \ (=180^\circ) .$$

Теорема 1.4. У чотирикутник *ABCD* можна вписати коло тоді і тільки тоді, коли в ньому суми довжин протилежних сторін рівні між собою:

$$AB + CD = BC + AD .$$

Теорема 1.5. Точки, симетричні ортоцентру трикутника відносно його сторін, належать колу, описаному навколо трикутника.

Теорема 1.6. Бісектриси внутрішнього та зовнішнього кута трикутника при одній вершині перпендикулярні і ділять сторону трикутника внутрішнім та зовнішнім чином у відношенні прилеглих сторін.

Теорема 1.7. Якщо a і b – довжини катетів прямокутного трикутника, c – довжина його гіпотенузи, то радіус вписаного кола дорівнює $(a+b-c/2)$, а радіус кола, яке дотикається гіпотенузи, і продовження катетів, дорівнює $(a+b+c/2)$.

Теорема 1.8. Нехай O – центр кола радіуса R, описаного навколо трикутника ABC, I – центр вписаного в нього кола радіуса r, I_a –центр кола радіуса r_a, яке дотикається сторони BC і продовження сторін AB і AC. Позначимо $d=OI$, $d_a = OI_a$. Тоді виконуються формули Ейлера:

$$d^2=R^2-2Rr, \quad d_a{}^2=R^2-2Rr_a.$$

Теорема 1.9. Пряма, яка проведена через точку перетину діагоналей трапеції і точку перетину продовжень її бічних сторін, ділить основи трапеції навпіл.

Також додатково використовуються теореми, які традиційно розглядаються на факультативних заняттях з математики.

Теорема 1.10 (Чеви). Якщо точки A_1, B_1, C_1 лежать відповідно на сторонах BC, CA, AB трикутника ABC, то прямі AA_1, BB_1, CC_1 перетинаються в одній точці тоді і тільки тоді, коли

$$\frac{BA_1}{CA_1}\cdot\frac{CB_1}{AB_1}\cdot\frac{AC_1}{BC_1}=1\,.$$

Теорема 1.11 (Менелая). Точки A_1, B_1, C_1, які лежать відповідно на сторонах BC, CA, AB (чи їх продовженнях) трикутника ABC, лежать на одній прямій тоді і тільки тоді, коли

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{CA_1}}\cdot\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{AB_1}}\cdot\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{BC_1}}=1\,.$$

(Тут, якщо $\vec{a}=k\cdot\vec{b}\quad(\vec{b}\neq\vec{0})$, то прийнято $\dfrac{\vec{a}}{\vec{b}}=k$).

Розв’язання багатьох задач спрощується за допомогою розгляду деяких допоміжних елементів.

Задача 1.1 (10). У трикутнику ABC медіана BE та бісектриса CD перпендикулярні. Відомо, що площа трикутника ABC дорівнює 54 см^2, а довжина CD дорівнює 9 см. Знайти довжину медіани BE.

Розв’язання. Нехай O – точка перетину BE та CD. З рівності трикутників EOC та BOC маємо $EC=BC$. Позначимо $EC=BC=x$, $\angle ACD=\angle BCD=\beta$.

За теоремою косинусів для трикутників ADC та BCD маємо

$$AD^2=4x^2+81-36x\cdot\cos\beta\,,\ BD^2=x^2+81-18x\cdot\cos\beta\,.$$

За властивістю бісектриси маємо $AD:DB=AC:BC=2$. Тоді $AD^2=4BD^2$, або

$$4x^2+81-36x\cdot\cos\beta=4\left(x^2+81-18x\cdot\cos\beta\right).$$

Після спрощень одержуємо

$$4x\cos\beta = 27.$$

Площа трикутника $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AC \cdot CB \sin 2\beta$, звідки

$$54 = x^2 \sin 2\beta.$$

Послідовно знаходимо:

$$x = \frac{27}{4\cos\beta},\ \ tg\beta = \frac{16}{27},\ \ BE = 2x\sin\beta = \frac{27}{2} tg\beta = 8 \text{ (см).}$$

Відповідь: BE = 8 см. ■

Задача 1.2 (9). Навколо трикутника ABC описано коло. Через точку B проведено дотичну до кола, яка перетинає продовження сторони CA в точці D за точкою A (рис. 1.1). Знайти периметр трикутника ABC, якщо $AB + AD = AC$, $CD = 3$, $\angle BAC = 60^\circ$.

Розв'язання. Позначимо $AC = x$. Тоді $AD = 3 - x$, $AB = AC - AD = 2x - 3$.

За теоремою косинусів з трикутника ABD знаходимо

$$BD^2 = (3-x)^2 + (2x-3)^2 - 2(3-x)(2x-3)\cos 120^0 = 3x^2 - 9x + 9.$$

За властивістю дотичної і січної, проведених з однієї точки, маємо $DB^2 = DA \cdot DC$. З рівняння

$$3x^2 - 9x + 9 = (3-x)\cdot 3$$

знаходимо $3x^2 - 6x = 0,\ \ x = 2$. Тоді $AB = 1$.

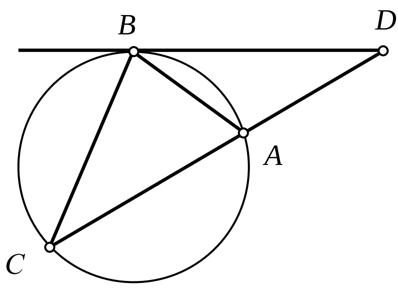


Рис. 1.1

За теоремою косинусів з трикутника ABC знаходимо $BC = \sqrt{3}$. Тоді периметр трикутника ABC $P = 2 + 1 + \sqrt{3} = 3 + \sqrt{3}$.

Відповідь: $3 + \sqrt{3}$. ■

Звичайно, вміння розв'язувати задачі передбачає правильний вибір способу та засобів розв'язування. Тут найкраще допоможе досвід та здібність до аналізу задачі. Висунути гіпотезу, яка приведе до правильного розв’язання геометричної задачі, в багатьох випадках допомагає якісний рисунок. Необхідність якісного виконання рисунків у процесі розв’язування геометричних задач показує така відома задача-парадокс.

Задача 1.3. (8-9). Нехай *M* – точка перетину бісектриси кута *C* і серединного перпендикуляра до сторони *AB* прямокутного трикутника *ABC* (рис. 1.2); *K, L, N* – основи перпендикулярів, опущених із *M* на сторони трикутника. Тоді трикутники *AMK* і *BMK* рівні між собою за двома катетами, і тому *AM* = *BM*. Трикутники *CLM* і *CNM* рівні між собою за гіпотенузою і двома кутами, тому *LM* = *MN*, *CL* = *CN*. Тоді трикутники *ALM* і *MNB* рівні між собою за гіпотенузою і катетом, тому *AL* = *BN*. Тоді *AC* = *AL* + *LC* = = *BN* + *NC* = *BC*, тобто у прямокутному трикутнику катет і гіпотенуза рівні між собою?

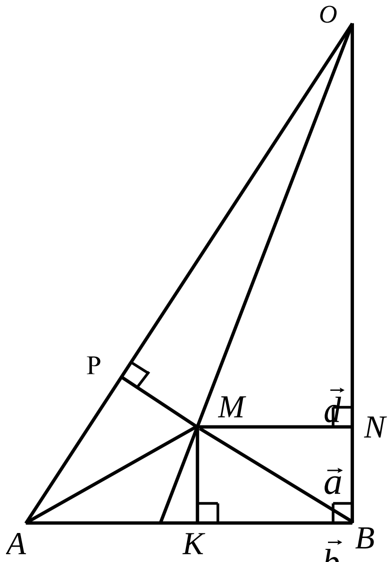


Рис. 1.2

Розв’язання. У цьому парадоксі немає жодної логічної помилки, є неправильно виконаний рисунок.

Справді, продовжимо бісектрису *CM* до перетину зі стороною *AB* у точці C_1. За властивостями бісектриси $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AC}{CB}$. Оскільки $AC > CB$, то $\frac{AC_1}{C_1B} > 1$, тобто $AC_1 > C_1B$ і точка C_1 лежить між точками *K* і *B*, тобто серединний перпендикуляр до сторони *AB* і бісектриса кута *C* перетинаються зовні трикутника *ABC*. ■

Задача 1.4 (УМО-2002, 8). Нехай *ABCD* – рівнобедрена трапеція з меншою основою *BC* (рис. 1.3). Точки *M* і *N* – середини сторін *AB* і *AD* відповідно, а відрізок *BP* – висота трапеції *ABCD*. Позначимо через *Q* точку перетину відрізків *DM* і *BN*. Довести, що точки *P*, *Q* і *C* належать одній прямій.

Розв'язання. Точка Q є точкою перетину медіан DM і BN трикутника ABD, тому $DQ = \frac{2}{3}DM$.

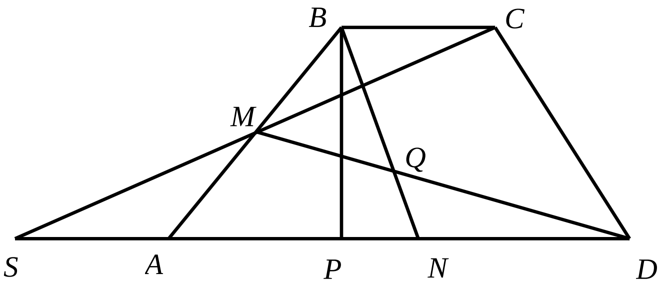


Рис. 1.3

Нехай точка $S = MC \bigcap AD$. Тоді $AS = BC$, $SM = MC$, $SP = PD$ (покажіть це самостійно), тобто DM і CP є медіанами трикутника SCD. З умови $DQ = \frac{2}{3}DM$ випливає, що точка Q також є точкою перетину медіан трикутника SCD, звідки випливає, що точка Q належить прямій CP. ■

Часто планіметричні задачі розв'язуються за допомогою методу введення допоміжної невідомої величини.

Задача 1.5 (9-10). У трикутнику ABC (рис. 1.4) проведено медіану AM_1, висоту AH та бісектрису AN. Відомо, що $AM = l$, $AH = h$ та $HN = NM$. Знайти відстань AO, де O – точка перетину висот трикутника ABC.

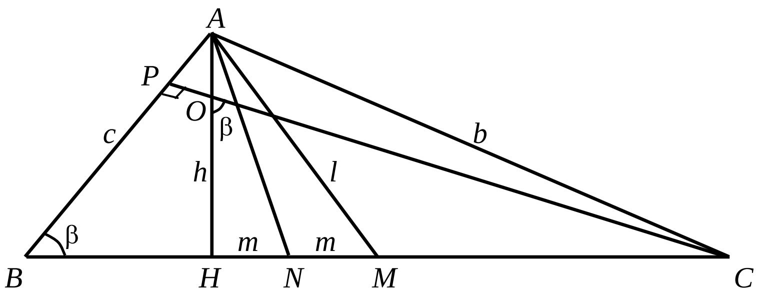


Рис.1.4

Розв'язання. Проведемо $CP \perp AB$. Позначимо $\angle ABC = \beta$. Тоді з ΔPBC маємо $\angle PCB = 90^\circ - \beta$, звідки з ΔHOC маємо $\angle HOC = \beta$.

Трикутники ABH і OCH подібні, тому $\frac{AH}{HC} = \frac{BH}{OH}$, звідки $OH = \frac{BH \cdot HC}{AH}$, $AO = AH - OH = h - \frac{BH \cdot HC}{h}$. Позначимо $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, $HN = NM = m$ (з ΔAHM маємо $m = \frac{1}{2}\sqrt{l^2 - h^2}$).

Оскільки $BH = \frac{a}{2} - 2m$, $HC = \frac{a}{2} + 2m$, то маємо

$$AO = \frac{h^2 - \left(\frac{a}{2} - 2m\right)\left(\frac{a}{2} + 2m\right)}{h} = \frac{h^2 - \frac{a^2}{4} + 4m^2}{h} = \frac{h^2 - \frac{a^2}{4} + l^2 - h^2}{h} =$$

$$= \frac{l^2 - \frac{a^2}{4}}{h} = \frac{4l^2 - a^2}{4h}.$$

Із співвідношень у прямокутних трикутниках ABH, ACH та властивості бісектриси AN трикутника ABC отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} c^2 = \left(\frac{a}{2} - 2m\right)^2 + h^2; \\ b^2 = \left(\frac{a}{2} + 2m\right)^2 + h^2; \\ \dfrac{\frac{a}{2} - m}{\frac{a}{2} + m} = \dfrac{c}{b}. \end{cases}$$

Виключивши b і c, маємо рівняння

$$\frac{\left(\frac{a}{2}-2m\right)^2+h^2}{\left(\frac{a}{2}+2m\right)^2+h^2}=\frac{\left(\frac{a}{2}-m\right)^2}{\left(\frac{a}{2}+m\right)^2}.$$

Після перетворень отримуємо: $a^2 = 4h^2 + 8m^2$, звідки

$$AO=\frac{4l^2-4h^2-8m^2}{4h}=\frac{l^2-h^2}{2h}. \blacksquare$$

У багатьох задачах отримати ідею розв'язання допомагає підрахунок кутів.

Задача 1.6 (9-10). У гострокутному трикутнику *ABC* (рис. 1.5) сторона *AB* більша, ніж сторона *BC*, відрізки *AM* і *CN* є висотами, точка *O* – центр описаного кола. Кут *ABC* дорівнює β, а площа чотирикутника *NOMB* дорівнює *S*. Знайти сторону *AC*.

Розв'язання. Позначимо $OA = OB = OC = R$, $\angle ABO = \angle BAO = \beta_1$, $\angle CBO = \angle BCO = \beta_2$. За властивістю вписаних кутів маємо $\angle ABO = 2\angle ACB = 2\angle C$, звідки $2\angle C + 2\beta_1 = 180^\circ$, $\beta_1 = 90^\circ - \angle C$. Аналогічно $\beta_2 = 90^\circ - \angle A$.

Очевидно, що виразити *AC* безпосередньо через *S* та β складно, тому спробуємо виразити площу *S* чотирикутника *NOMB* через *AC* та β. Маємо $S = S_{\Delta NOB} + S_{\Delta MOB} = \frac{1}{2}R\left(BN \cdot sin\beta_1 + BM \cdot sin\beta_2\right)$. Із трикутників *BNC, BAM* маємо $BN = BC \cdot cos\,\beta$, $BM = AB \cdot cos\,\beta$, тому, враховуючи, що $sin\beta_1 = cos\angle C$, $sin\beta_2 = cos\angle A$, отримуємо

$$S = \frac{1}{2} R\left(BC \cos\beta \cdot \cos\angle C + AB \cos\angle A\right) =$$

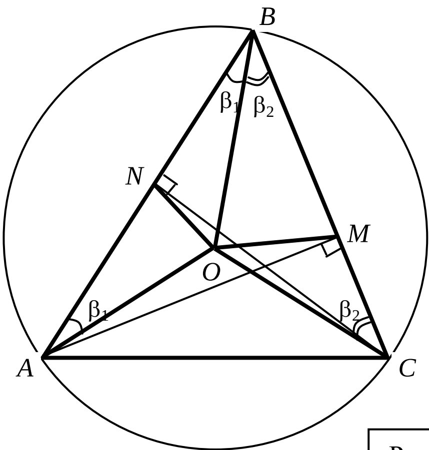


Рис. 1.5

$$= \frac{1}{2} R \cos\beta\left(BC \cdot \cos\angle C + AB \cos\angle A\right).$$

Використавши теорему синусів: $\dfrac{AC}{\sin\beta} = \dfrac{BC}{\sin\angle A} = \dfrac{AB}{\sin\angle C} = 2R$, отримуємо

$$S = \frac{1}{2} R\left(2R \sin\angle A \cdot \cos\angle C + 2R \sin\angle C \cdot \cos\angle A\right) =$$

$$= R^2 \cos\beta \cdot \sin\left(\angle A + \angle C\right) = R^2 \cos\beta \cdot \sin\beta = \frac{AC^2}{4 tg\,\beta}.$$

Звідси отримуємо $AC = 2\sqrt{S \cdot tg\,\beta}$. ■

Задача 1.7 (УМО-2002, 9). Нехай точка *K* (рис. 1.6) належить стороні *AB* трикутника *ABC*, причому відрізок *CK* перетинає його бісектрису *BF* в такій точці *Q*, що $\angle BQC = 2\angle BFA$ і $\angle BAF = 2\angle CQF$. Довести, що $KF = FC$.

Розв'язання. Позначимо $\angle BAF = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BFA = \varphi$. Тоді $\angle BQC = 2\varphi$, $\angle CQF = \dfrac{\alpha}{2}$.

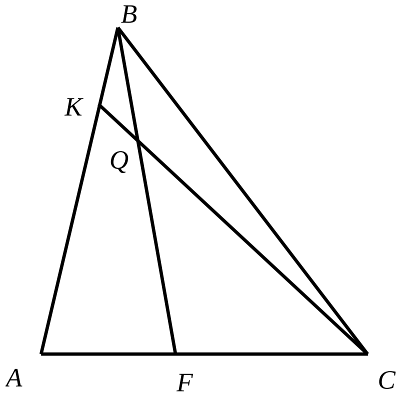


Рис. 1.6

Із трикутника ABF маємо $\varphi = 180^\circ - \alpha - \dfrac{\beta}{2}$. Також маємо

$$\angle BQC + \angle FQC = 2\varphi + \frac{\alpha}{2} = 180^\circ.$$

Звідси отримуємо $\varphi = \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta}{2}$.

Із трикутника BKQ маємо $\angle BKQ = 180^\circ - \dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\beta}{2}$. Також маємо

$\angle BFC = 180^\circ - \varphi = 180^\circ - \dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\beta}{2}$. Оскільки з точок K і F відрізок BC видно під одним кутом, то навколо чотирикутника $BCFK$ можна описати коло.

Оскільки BF – бісектриса $\angle KBC$, то $KF = FC$ як хорди дуг, що відповідають рівним вписаним у це коло кутам. ■

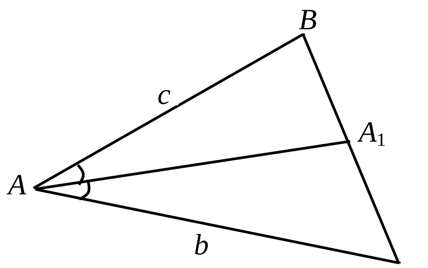


Рис. 1.7

У процесі розв'язування планіметричних задач часто застосовується метод площ.

Задача 1.8 (9). Довести, що в трикутнику ABC (рис. 1.7) бісектрису AA_1 можна знайти за формулою

$$AA_1 = \frac{2bc\cos\dfrac{A}{2}}{b+c},$$

де $b = AC$, $c = AB$.

Розв'язання. Площа трикутника ABC дорівнює $S = \frac{1}{2}bc\sin\angle A$. З іншого боку, його площу можна знайти також як суму площ трикутників ABA_1 та ACA_1:

$$S = \frac{1}{2}c \cdot AA_1 \sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}b \cdot AA_1 \sin\frac{A}{2} = \frac{1}{2}AA_1 \cdot (b+c)\sin\frac{A}{2}.$$

Прирівнявши площі, отримуємо

$$AA_1 = \frac{\frac{1}{2}bc\sin A}{\frac{1}{2}(b+c)\sin\frac{A}{2}} = \frac{bc \cdot 2\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}}{(b+c)\sin\frac{A}{2}} = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}. \blacksquare$$

Задача 1.9. Всередині трикутника ABC вибрано точку O; прямі AO, BO і CO перетинають його сторони в точках A_1, B_1, C_1 відповідно. Довести, що

а) $\frac{OA_1}{AA_1} + \frac{OB_1}{BB_1} + \frac{OC_1}{CC_1} = 1$; $\quad \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$

Розв'язання.

а) Очевидно, що $S_{\Delta OBC}:S_{\Delta ABC}=h_a:h=OA_1:AA_1$, де h_a і h – відстані від точок O і A до прямої BC відповідно. Аналогічно $S_{\Delta OAC}:S_{\Delta ABC}=OB_1:BB_1$ і $S_{\Delta OAB}:S_{\Delta ABC}=OC_1:CC_1$. додавши ці рівності та врахувавши, що $S_{\Delta OBC}+S_{\Delta OAC}+S_{\Delta OAB}=S_{\Delta ABC}$, отримуємо рівність а).

б) Нехай відстань від точок B і C до прямої AA_1 дорівнює l_B і l_C. Тоді $S_{\Delta ABO}:S_{\Delta ACO}=l_B:l_C=BA_1:A_1C$. Аналогічно $S_{\Delta ACO}:S_{\Delta BCO}=AC_1:C_1B$ і $S_{\Delta BCO}:S_{\Delta ABO}=CB_1:B_1A$. Перемноживши праві частини одержаних рівностей, отримуємо рівність б). ■

На математичних олімпіадах часто пропонуються задачі на доведення або спростування тверджень, які на перший погляд є правильними. Для спростування таких тверджень потрібно навести ***контрприклад***.

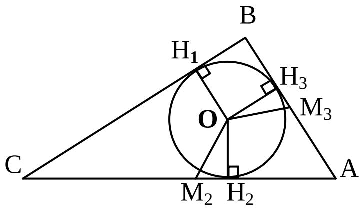
Задача 1.10 (9-10). Чи обов'язково трикутник є рівнобедреним, якщо центр його вписаного кола однаково віддалений від середин двох його сторін?

Розв'язання. Не обов'язково. Доведемо, що центр вписаного кола трикутника ABC із сторонами AB=2, BC=3, AC=4 однаково віддалений від середини сторін AC і AB. (рис.1.8). Оскільки

$$BH_1 = BH_3\ ,\ AH_3 = AH_2\ ,\ BH_3 + AH_3 = AB = 2\,,$$

$$CB - BH_1 = CB - BH_3 = CA - AH_2 = CA - AH_3\,,$$

то одержуємо



O
A

$$\begin{cases} BH_3 + AH_3 = AB \\ BH_3 - AH_3 = CB - CA. \end{cases}$$

Звідси отримуємо

$$BH_3 = \frac{AB + CB - CA}{2} = \frac{1}{2}.$$

Тоді $AH_2 = AH_3 = 1{,}5$,

$$H_3M_3 = \frac{1}{2} = H_2M_2\,,$$ тому

$$OM_3 = OM_2\,.\ \blacksquare$$

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 1.11 (7-8). У трикутнику *ABC* висота *AH* дорівнює медіані *BM*. Знайти кут *MBC*.

Задача 1.12 (7-8). У трикутнику *ABC* сторона *AC* вдвічі більша за сторону *BC*, а $\angle C = 2\angle A$. Знайти кути трикутника.

Задача 1.13 (7-8). У квадраті *ABCD* точка *O* є точкою перетину кола з центром *A* та радіусом *AB* і серединного перпендикуляра до *BC*, вона ближча до *C*. Знайти величину кута *AOC*.

Задача 1.14 (9). Довести, що коли два опуклих чотирикутники розміщені так, що середини сторін у них збігаються, то їх площі рівні між собою.

Задача 1.15 (8-9). У рівнобедреному трикутнику *ABC* із середини *H* основи *BC* опущено перпендикуляр *HE* на бічну сторону *AC*; *O* – середина *HE*. Довести, що прямі *AO* і *BE* перпендикулярні.

Задача 1.16 (8-9). Із точки *A* проведено дотичні *AB* і *AC* до кола з центром *O*. Через точку *X* відрізка *BC* проведено пряму *KL*, яка перпендикулярна до *XO* (точки *K* і *L* лежать на прямих *AB* і *AC*). Довести, що *KX* = *XL*.

Задача 1.17 (7-8). Три кола однакового радіуса проходять через одну точку. Довести, що інші три точки їх перетину лежать на колі такого ж само радіуса.

Задача 1.18 (8-9). Із точки *A* проведено прямі, які дотикаються до кола *S* в точках *B* і *C*. Довести, що центр вписаного в трикутник *ABC* кола і центр кола, яке дотикається до *BC* і є зовнішньовписаним у трикутник *ABC*, лежать на колі *S*.

Задача 1.19 (8-9). Знайти кути трикутника, у якому центри вписаного і описаного кіл симетричні відносно однієї зі сторін.

Задача 1.20 (9-10). На сторонах *CD* і *AD* опуклого чотирикутника *ABCD* вибрано відповідно точки *K* та *M* так, що відрізки *AK* і *CM* ділять площу чотирикутника *ABCD* пополам. Нехай *P* – точка перетину відрізків *MK* та *BD*. Знайти відношення площі чотирикутника *ABCD* до площі чотирикутника *ABCP*.

Задача 1.21 (9-10). У рівносторонній трикутник зі стороною a вписано коло. До кола проведено дотичну так, що її відрізок всередині трикутника дорівнює b. Знайти площу трикутника, що відтинається цією дотичною від даного.

Задача 1.22 (9). У трикутнику медіана, бісектриса та висота, проведені з однієї вершини, ділять кут при даній вершині на чотири рівні частини. Довести, що даний трикутник – прямокутний, та знайти його кути.

Задача 1.23 (9). Основи трапеції мають довжини 3 см та 15 см. Чи може радіус кола, що вписане в трапецію, мати довжину 4 см?

Задача 1.24 (9-10). По нерухомому колу радіуса *R*, дотикаючись його зсередини, котиться без ковзання коло радіуса $r = \dfrac{R}{2}$. Знайти, яку лінію описує довільна точка внутрішнього кола.

Задача 1.25 (9). Знайти площу трапеції *ABCD*, якщо її висота дорів-нює h, а бічну сторону *AB* видно з центра описаного кола під кутом 60°.

Задача 1.26 (9-10). У трапецію, в якій менша основа дорівнює a, вписано коло. Одна з бічних сторін трапеції ділиться точкою дотику на відрізки, що дорівнюють m і n, починаючи від більшої основи. Визначити площу трапеції.

Задача 1.27 (9). Навколо кола радіуса 5 см описано рівнобічну трапецію. Відстань між точками дотику її бічних сторін дорівнює 8 см. Знайти площу трапеції.

Задача 1.28 (9-10). У гострокутному трикутнику *ABC* висоти AA_1, BB_1, CC_1 перетинаються в точці *H*. Довести, що радіус описаного кола

$$R = \frac{AH^2 \cdot A_1H}{2B_1H \cdot C_1H}.$$

Задача 1.29 (10). У трикутнику ABC $\angle BAC = \alpha$, $BC = a$. Знайти відстань від середини сторони BC до прямої PQ, де P та Q – основи висот трикутника, проведені до сторін BA і CA.

Задача 1.30 (9-10). В опуклому чотирикутнику $ABCD$ діагоналі перпендикулярні і перетинаються в точці M. Довести, що проекції точки M на сторони чотирикутника лежать на одному колі.

Задача 1.31 (9-10). Чотирикутник $ABCD$ вписано в коло і навколо нього описано коло радіуса R. Відомо, що $AB = 2BC$, а діагоналі перпендикулярні. Знайти площу чотирикутника $ABCD$.

Задача 1.32 (9-10). Довжини (послідовних) сторін a, b, c, d опуклого чотирикутника такі, що його площа $S = \dfrac{ab+cd}{2}$. Довести, що вершини чотирикутника лежать на одному колі.

Задача 1.33 (9). Усередині трикутника взяли m точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Їх з’єднали одна з одною і з вершинами трикутника відрізками, що попарно не перетинаються. При цьому даний трикутник розбився на маленькі трикутники. Яка кількість маленьких трикутників могла при цьому утворитися?

Задача 1.34 (“задача Наполеона”, 10-11). Довести, що центри правильних трикутників, побудованих на сторонах довільного трикутника зовні цього трикутника, є вершинами правильного трикутника.

Задача 1.35 (9-10). Знайти залежність між кутами трикутника, в якому одну з медіан з центра описаного кола видно під прямим кутом.

Задача 1.36 (5 СМО-1998, 8). В опуклому чотирикутнику ABCD відомо, що $\angle BAC = \angle DBC = 30°$, $\angle BCA = 20°$, $\angle BDC = 70°$. Довести, що $ABCD$ – трапеція.

Задача 1.37 (УМО-2000, 10). Паралелограм $ABCD$ і ромб $AB_1C_1D_1$ мають спільний кут A. Відомо, що $BD \parallel CC_1$. Нехай P – точка перетину прямих AC і B_1C_1, а Q – точка перетину прямих AC_1 і CD. Довести, що кут AQP є прямим.

Задача 1.38 (УМО-2001, 8). На бічних сторонах AB і BC рівнобедреного трикутника ABC, в якому $\angle B = 20°$, дібрали відповідно точки D та E так, що $AD = BE = AC$. Знайти величину кута $\angle BDE$.

Задача 1.39 (9). У трикутнику медіана та висота, проведені з однієї вершини, ділять кут при даній вершині на три рівні частини. Довести, що даний трикутник – прямокутний. Знайти його кути.

Задача 1.40 (10-11). На стороні AB трикутника ABC як на діаметрі побудовано коло, яке перетинає сторони AC і BC в точках D і E відповідно. Пряма DE ділить площу трикутника ABC на дві рівні частини і утворює з прямою AB кут 15°. Знайти кути трикутника ABC.

Задача 1.41 (ОМО-1999, 11). Нехай точка P знаходиться в середині гострокутного ΔABC. На сторонах AC і BC позначили такі точки M і K відповідно, що $\angle PMC = \angle PKC = 90°$. Довести, що коли точки M та K рівновіддалені від середини AB, то $\angle PBC = \angle PAC$.

Задача 1.42 (8-9). Чотири прямі утворюють чотири трикутники. Довести, що: 1) описані навколо цих трикутників кола мають спільну точку (точка Мікеля); 2) центри описаних навколо цих трикутників кіл лежать на одному колі, яке проходить через точку Мікеля.

Задача 1.43 (9-10). З вершини C прямого кута трикутника ABC проведено висоту CK, а в трикутнику ACK проведено бісектрису CE. Пряма, яка паралельна CE і проходить через точку B, перетинає CK в точці F. Довести, що пряма EF ділить відрізок AC навпіл.

Задача 1.44 (9-10). Вписане (або зовнішньовписане) у трикутник ABC коло дотикається прямих BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 відповідно. Довести, що прямі AA_1, BB_1, CC_1 перетинаються в одній точці.

Задача 1.45 (9-10). На сторонах BC, CA, AB трикутника ABC взято точки A_1, B_1, C_1 відповідно так, що відрізки AA_1, BB_1, CC_1 перетинаються в одній точці. Прямі A_1B_1 та A_1C_1 перетинають пряму, яка паралельна BC і проходить через вершину A, в точках C_2 і B_2 відповідно. Довести, що $AB_2 = AC_2$.

Вказівки та відповіді до задач

1.11. *Вказівка:* проведіть $MD \perp BC$. *Відповідь:* 30°. **1.12.** *Відповідь:* $\angle A = 30°$, $\angle C = 60°$, $\angle B = 30°$. **1.13.** *Відповідь:* $\angle AOC = 135°$. **1.14.** *Вказівка:* порівняйте площі цих чотирикутників з площею чотирикутника, вершинами якого є середини їх сторін. **1.15.** *Вказівка:* нехай M – середина EC. Тоді HM і BE паралельні. З подібності трикутників AHE і HCE випливає подібність трикутників AOE і HME, звідки неважко довести перпендикулярність AO і HM. **1.16.** *Вказівка:* підрахуйте кути, скориставшись тим, що точки B, K, X, O лежать на одному колі, точки C, L, X, O лежать на одному колі. **1.17.** *Вказівка:* ці точки перетину утворюють трикутник, що дорівнює трикутнику з вершинами в центрах даних кіл. **1.18.** *Вказівка*: доведіть, що середини дуг кола S, які лежать всередині чи зовні трикутника ABC, є центрами відповідно вписаного і зовнішньовписаного кіл. **1.19.** *Відповідь*: $\frac{\pi}{5},\frac{\pi}{5},\frac{3\pi}{5}$. **1.20.** *Вказівка:* покажіть, що *AC* і *MK* паралельні. *Відповідь*: 2. **1.21.** *Вказівка:* використайте властивість описаного чотирикутника. *Відповідь:* $\frac{a(a-2b)\sqrt{3}}{12}$. **1.22.** *Вказівка:* опишіть навколо даного трикутника коло та продовжте бісектрису та висоту до перетину з цим колом. *Відповідь:* $\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{2}$. **1.23.** *Відповідь:* не може. **1.24.** *Відповідь:* кожна точка внутрішнього кола рухається по діаметру великого кола. **1.25.** *Вказівка:* $\angle ADB = \frac{1}{2}\angle AOB = 30°$. *Відповідь:* $S = h^2\sqrt{3}$. **1.26.** *Відповідь:* $a\frac{m+a-n}{a-n}\sqrt{mn}$. **1.27.** *Відповідь*: 125 кв. см. **1.28.** *Вказівка:* доведіть, що кола, описані навколо трикутників *ABC*, *ABH*, *ACH*, *BCH*, мають один і той самий радіус. Виразіть відрізки *AH*, A_1H, B_1H, C_1H через *R* та синуси кутів трикутника *ABC*. **1.29.** *Відповідь:* $\frac{a}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$. **1.30.** *Вказівка:* скористайтесь ознакою вписаного чотирикутника та властивістю вписаних кутів. **1.31.** *Вказівка:* позначимо $BC = x$, $CD = y$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \gamma$, *M* – точка перетину діагоналей. За теоремою синусів отримуємо $x = 2R\sin\alpha$, $y = 2R\cos\gamma$, $2x = 2R\sin\gamma$, звідки $\sin\gamma = 2\sin\alpha$. За властивістю описаного чотирикутника отримуємо $AD = x + y$. Записавши для трикутника *AMD* теорему Піфагора, після спрощень отримуємо $\cos\alpha = \sin\alpha + \cos\gamma$. Знаходимо $\sin\alpha = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\gamma = \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Тоді $AC = 2R$, $BD = \frac{8R}{5}$. *Відповідь:* $S = \frac{8R^2}{5}$. **1.33.** *Вказівка:* підрахуйте суму кутів отриманих трикутників. *Відповідь:* $2m + 1$. **1.34.** *Вказівка:* використовуючи теореми синусів та косинусів, виразіть сторони такого трикутника через кути та радіус описаного навколо даного трикутника кола. **1.35.** *Відповідь:* для гострих кутів трикутника справджується умова $2\alpha + \beta = 90°$. **1.36.** *Вказівка:* розгляньте центр *E* кола, описаного навколо трикутника *ABC*, тоді чотирикутник *ACDE* – вписаний. **1.37.** *Вказівка:* нехай $AD\cap CC_1 = R, CD\cap B_1C_1 = O$. Покажіть, що $PO = OC_1 = OQ$. **1.38.**

Відповідь: 20°. *Вказівка:* оберіть на стороні BC точки F і H так, щоб $\angle BDF = \angle HAC = 20°$. **1.39.** *Вказівка:* опишіть навколо даного трикутника коло та продовжте медіану й висоту до перетину з цим колом. *Відповідь:* 30°, 60°. **1.40.** *Вказівка:* нехай $\angle A > \angle B$. Тоді маємо $\angle A = \angle B + 15°$. З подібності трикутників CED і CAB та відношення їх площ отримуємо $CE : CA = 1 : \sqrt{2}$. Застосувавши до трикутника AEC теорему Піфагора, отримуємо $CE = EA$, звідки $\angle C = 45°$. *Відповідь:* $\angle C = 45°$, $\angle A$ і $\angle B$ дорівнюють 75° і 60° (або навпаки). **1.41.** *Вказівка:* позначте середини AB, BP і AP відповідно через D, X і Y. Тоді $\angle PAC = \frac{1}{2}\angle PYM$, $\angle PBC = \frac{1}{2}\angle PXK$. Скористайтесь тим, що чотирикутник $DXPY$ паралелограм, та рівністю трикутників DMY та DKX. **1.43.** *Вказівка:* нехай D – точка перетину EF і AC. Тоді за теоремою Менелая $\frac{AD}{CD} \cdot \frac{CF}{KF} \cdot \frac{KE}{AE} = 1$, тому достатньо довести, що $\frac{CF}{KF} = \frac{AE}{KE}$. **1.44.** *Вказівка:* використайте теорему Чеви. **1.45.** *Вказівка:* використайте теорему Чеви та подібність трикутників AC_1B_2 і BC_1A_1, AB_1C_2 і CB_1A_1.

§ 2. НАЙПРОСТІШІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ПЛОЩИНИ

Часто на математичних олімпіадах пропонуються задачі, в яких розглядаються (чи потрібно використати) рухи та перетворення площини (простору). У процесі розв'язування таких задач важливо знати властивості цих перетворень (центральної та осьової симетрій, паралельного перенесення, повороту, гомотетії), вміти будувати образи геометричних фігур – результатів цих перетворень та їх композицій.

Теорема 2.1. Композиції будь-яких перетворень площини задовольняють асоціативному закону: $F\circ(G\circ H)=(F\circ G)\circ H$.

Теорема 2.2. Композиція двох (і більше) паралельних перенесень є паралельним перенесенням.

Теорема 2.3. Композиція двох центральних симетрій є паралельним перенесенням.

Доведення. Нехай точки A і B – центри симетрій, M – довільна точка (рис. 2.1). При симетрії відносно точки A точка M переходить у точку M', а точка M' при симетрії відносно точки B переходить у точку M''. Тоді в трикутнику $MM'M''$ відрізок AB є середньою лінією, а тому $\overrightarrow{MM''}=2\overrightarrow{AB}$, тобто вектор $\overrightarrow{MM''}$ не залежить від точки M.

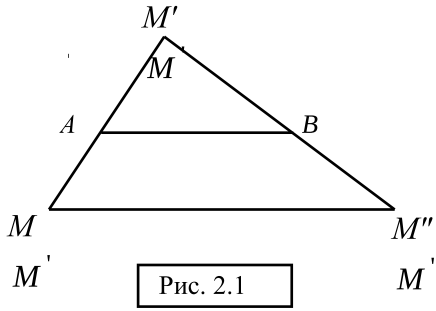


Рис. 2.1

Отже, композиція двох центральних симетрій є паралельним перенесенням. ■

Теорема 2.4. Композиція паралельного перенесення і центральної симетрії (у будь-якому порядку) є центральна симетрія.

Теорема 2.5. Обмежена фігура не може мати більше одного центра симетрії.

Теорема 2.6. Чотирикутник, який має центр симетрії, є паралелограмом.

Теорема 2.7. Композиція двох осьових симетрій, осі яких паралельні, є паралельним перенесенням на вектор, який перпендикулярний до осей симетрій і довжина якого вдвічі більша відстані між осями. І навпаки: будь-яке паралельне перенесення можна розкласти в добуток (композицію) двох осьових симетрій з паралельними осями, які є перпендикулярними до вектора паралельного перенесення і відстань між якими вдвічі менша довжини цього вектора.

Теорема 2.8. Композиція двох осьових симетрій, осі яких перетинаються, є поворотом з центром в точці перетину осей на кут вдвічі більший за кут між осями симетрії. І навпаки: будь-який поворот можна розкласти в композицію двох осьових симетрій з осями, які проходять через центр повороту й утворюють кут вдвічі менший кута повороту.

Теорема 2.9. Композиція двох осьових симетрій із взаємно перпендикулярними осями, є центральна симетрія відносно точки перетину осей (і навпаки).

Теорема 2.10. Будь-яке перетворення площини, яке є рухом можна розкласти в композицію не більше трьох осьових симетрій.

Теорема 2.11. Якщо фігура має рівно дві осі симетрії, то ці осі взаємно перпендикулярні.

Теорема 2.12. Якщо многокутник має декілька (більше двох) осей симетрії, то всі вони перетинаються в одній точці.

Теорема 2.13. Композиція двох гомотетій з коефіцієнтами K_1 *і* K_2, де $K_1 K_2 \neq 1$, є гомотетією з коефіцієнтом $K_1 K_2$, причому її центр належить прямій, що проходить через центри гомотетій.

Розглянемо кілька задач на застосування перетворень площини.

Задача 2.1 (8-9). На площині дано 1995 точок: A_1, A_2,…, A_{1995} (рис. 2.1). Відображення T є композицією центральних симетрій відносно цих точок: спочатку відносно точки A_1, потім відносно точки A_2 і т. д. Довести, що відображення T має нерухому точку.

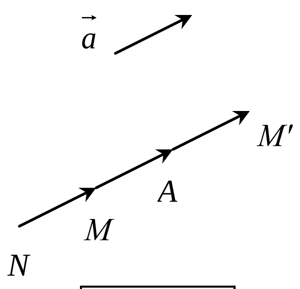


Рис. 2.1

Розв'язання. Композиція перших 1994 центральних симетрій є композицією 997 паралельних перенесень, а тому відображення T є композицією паралельного перенесення на деякий вектор $\bar{a}$ та центральної симетрії відносно точки A_{1995}. Очевидно, що нерухомими точками такого відображення є точка M така, що $2\overrightarrow{MA_{1995}} = \vec{a}$, і точка N така, що $\overrightarrow{NA_{1995}} = \vec{a}$. ■

Задача 2.2 (8-9). У даний трикутник вписати квадрат, вершини якого лежать на сторонах даного трикутника (рис. 2.2).

Розв'язання. Побудуємо квадрат $K_1M_1L_1N_1$, вершини якого K_1 і N_1 лежать на стороні AC, а вершина M_1 – на стороні AB. Проведемо пряму AL_1 до перетину з BC у точці L. Із точки L проведемо прямі, пара- лельні M_1L_1 та L_1N_1, які перетнуть сторони AB і AC відповідно в точках M і N. Із точки M опустимо перпендикуляр MK на AC. Очевидно, що чотирикутник $MLNK$ гомотетичний квадрату $M_1L_1N_1K_1$ (точка A – центр гомотетії), а тому є квадратом. ■

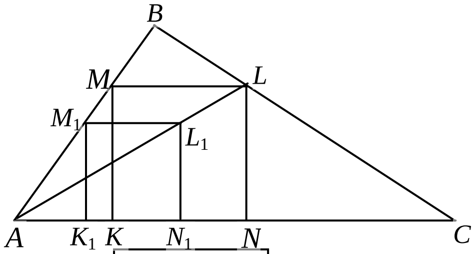


Рис. 2.2

Задача 2.3 (ОМО-1997, 11). Дано опуклий п'ятикутник, у якому кожна діагональ паралельна одній зі сторін. Довести, що відношення довжини діагоналі до довжини відповідної паралельної сторони є одним і тим самим для всіх п'яти пар таких відрізків. Знайти це відношення.

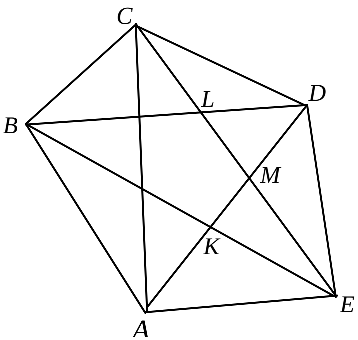


Рис. 2.3

Розв'язання. У даному п'ятикутнику $ABCDE$ (рис. 2.3) позначимо через L, M, K точки перетину відповідно BD і CE, CE і DA, DA і BE. Позначимо $x = \dfrac{BD}{AE}$.

Трикутники MLD і MEA подібні, тому $\dfrac{MD}{MA} = \dfrac{LD}{AE}$. Оскільки чотирикутник $BLEA$ – паралелограм, то $BL = AE$. Звідси отримуємо $LD = BD - BL = BD - AE$. Тому $\dfrac{MD}{MA} = \dfrac{BD - AE}{AE} = \dfrac{BD}{AE} - 1 = x - 1$. Однак трикутники MDE і MAC подібні, а тому $\dfrac{MD}{MA} = \dfrac{ME}{MC} = \dfrac{DE}{AC}$. З подібності трикутників MKE і MDC маємо $\dfrac{ME}{MC} = \dfrac{KE}{CD} = \dfrac{BE - BK}{CD} = \dfrac{BE}{CD} - 1$.

Отже, $\dfrac{MD}{MA} = \dfrac{BD}{AE} - 1 = \dfrac{BE}{CD} - 1$, звідки $\dfrac{BD}{AE} = \dfrac{BE}{CD}$.

Зазначимо, що доводити рівність інших відношень не обов'язково: фактично доведено рівність двох відношень, у яких взято діагоналі п'ятикутника, що виходять з однієї вершини. Враховуючи це, маємо $\frac{BD}{AE} = \frac{BE}{CD} = \frac{EC}{BA} = \frac{CA}{DE} = \frac{AD}{BC}$. Це відношення знайдемо з уже отриманої рівності:

$$x - 1 = \frac{MD}{MA} = \frac{DE}{AC} = \frac{1}{x}.$$

Із рівняння $x - 1 = \frac{1}{x}$ отримуємо $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. ■

Задача 2.4 (8-9). Нехай H – точка перетину висот, O – центр описаного кола, M – точка перетину медіан трикутника ABC (рис. 2.4). Довести, що точки H, O, M лежать на одній прямій (***пряма Ейлера***), причому $HM = 2MO$.

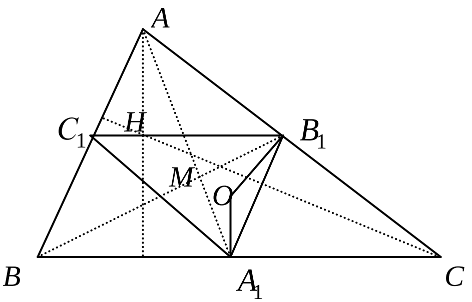


Рис. 2.4

Розв'язання. Нехай A_1, B_1, C_1 – середини сторін BC, CA, AB відповідно. Точка O є точкою перетину висот трикутника $A_1B_1C_1$, а сам трикутник $A_1B_1C_1$ гомотетичний (коефіцієнт гомотетії $k = -0{,}5$) трикутнику ABC відносно точки M. Очевидно, що при такій гомотетії точці перетину висот трикутника ABC відповідає точка перетину висот трикутника $A_1B_1C_1$. Тому точки H, O, M лежать на одній прямій (за означенням гомотетії) і $HM = 2MO$, оскільки $k = -0{,}5$. ■

Задача 2.5 (УМО-2002, 10). Трикутник ABC вписаний у коло (рис. 2.5). Точки A_1, B_1, C_1 – відповідно середини дуг BC, CA, AB, а точки A_2, B_2, C_2 – відповідно точки дотику до сторін BC, CA, AB кола, вписаного у трикутник ABC. Довести, що прямі A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 перетинаються в одній точці.

Розв'язання. Нехай I – центр вписаного кола, $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$,

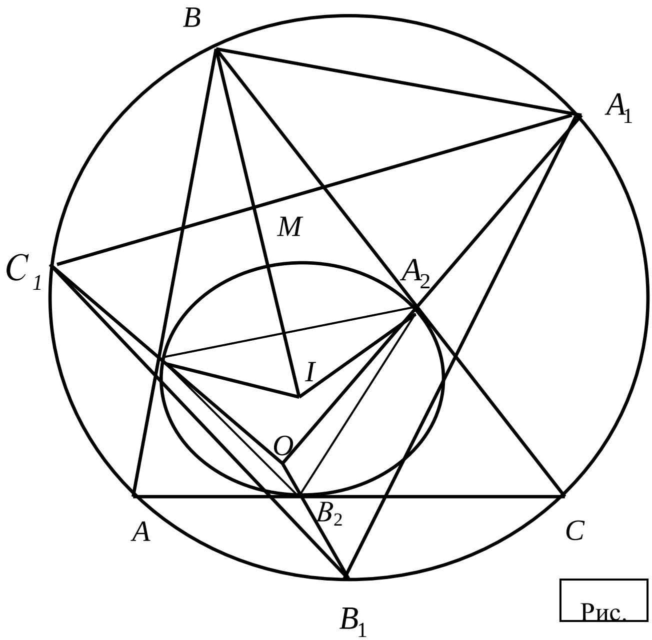


Рис.

$\angle ACB = \gamma$, $M = BI \cap C_1A_1$. Тоді $\angle IBC = \dfrac{\beta}{2}$, а за властивістю вписаних у коло кутів $\angle BA_1C_1 = \dfrac{\gamma}{2}$, $\angle A_1BC = \dfrac{\alpha}{2}$. У трикутнику MBA_1 $\angle BMA_1$ $= 180^\circ - \dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\beta}{2} - \dfrac{\gamma}{2} = 90^\circ$, тобто $BI \perp C_1A_1$.

У чотирикутнику BC_2IA_2 маємо $BC_2 = BA_2$, $C_2I = A_2I$, тому $BI \perp C_2A_2$.

Отже, $C_2A_2 \parallel C_1A_1$. Аналогічно показуємо, що $A_2B_2 \parallel A_1C_1$, $B_2C_2 \parallel B_1C_1$.

Отже, трикутники $A_2B_2C_2$ і $A_1B_1C_1$ подібні.

Нехай $O = C_1C_2 \cap A_1A_2$. Трикутники $A_2B_2C_2$ і $A_1B_1C_1$ гомотетичні відносно точки O (покажіть це самостійно), а тому пряма B_1B_2 також проходить через точку O. ■

Задача 2.6 (8-9). Із вершини B паралелограма $ABCD$ проведено його висоти BK і BH (рис. 2.6). Відомо, що $KH = a$, $BD = b$. Точка P – ортоцентр трикутника BKH. Знайти відстань BP.

Розв'язання. Візьмемо на BC таку точку N, що $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{PH}$. Тоді $BNHP$ – парале-лограм, тому $BP = NH$. Оскільки $KP \perp BH$, $BH \perp CD$, то $KP \parallel DH$. Отже, $PHDK$ – паралелограм, тому $PH = KD$.

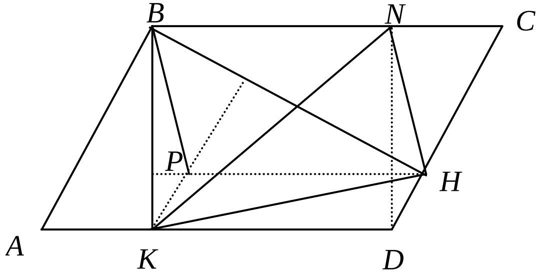


Рис. 2.6

Також $BN = KD$, $BK \perp KD$, тому $BNDK$ – прямокутник. Звідси отримуємо $NK = BD = b$. Оскільки $NH \parallel BP$, $BP \perp KH$, то $NH \perp KH$.

Тому отримуємо $BP = NH = \sqrt{NK^2 - KH^2} = \sqrt{b^2 - a^2}$. ■

Задача 2.7. Двоє гравців почергово кладуть на прямокутний стіл п'ятикопійкові монети. Монету дозволяється класти тільки на вільне місце. Програє той, хто не зможе зробити черговий хід. Довести, що перший гравець завжди може виграти.

Розв'язання. Перший гравець кладе п'ятикопійкову монету в центр стола, а потім кладе симетрично відносно центра монетам, які поклав другий гравець. При такій стратегії перший гравець завжди має можливість зробити черговий хід. ■

Задача 2.8. Дві прямі перетинаються під кутом α. Коник – стрибунець стрибає з однієї прямої на іншу; довжина кожного стрибка 1м і він не стрибає назад, якщо тільки це можливо. Довести, що послідовність стрибків періодична тоді і тільки тоді, коли α/π - раціональне число.

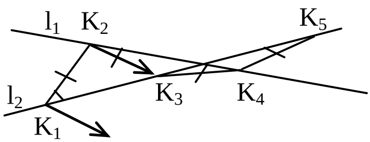


Рис 2.7

Розв'язання. Очевидно, що для кожного напрямку стрибка існує (рис. 2.7) два положення коника – стрибунця на прямій l_1 і l_2 (по одному на кожній прямій). Отже, послідовність стрибків періодична тоді і тільки тоді, коли існує скінченне число напрямків стрибків.

Позначимо $\vec{a}_1$-вектор стрибка з прямої l_2 на пряму l_1, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$,… $\vec{a}_n$ – вектори наступних стрибків. Тоді напрямок вектора $\vec{a}_2$ симетричний напрямку вектора $\vec{a}_1$ відносно прямої l_2, а напрямок вектора $\vec{a}_3$ симетричний напрямку вектора $\vec{a}_2$ відносно прямої l_1 і т.д.

Оскільки композиція двох осьових симетрій відносно прямих l_1 *і* l_2 є поворот на кут 2α, то вектори $\vec{a}_3$, $\vec{a}_5$, $\vec{a}_7,\ldots$ утворюються з вектора $\vec{a}_1$ поворотом на $2\alpha, 4\alpha, 6\alpha,\ldots$ Тому вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_5,\ldots$ утворюють скінчену послідовність різних векторів тоді і тільки тоді, коли $2m\alpha=2n\pi$, $m,n \in N$, звідки $\alpha/\pi = n/m \in Q$.

Аналогічні міркування можна провести, коли коник – стрибунець починає стрибати з прямої l_1 на пряму l_2. ■

Задача 2.9. На прямокутному більярдному столі лежить кулька. Визначити траєкторію, при русі по якій куля, відбившись від кожної стінки по одному разу, повернеться на початкове місце.

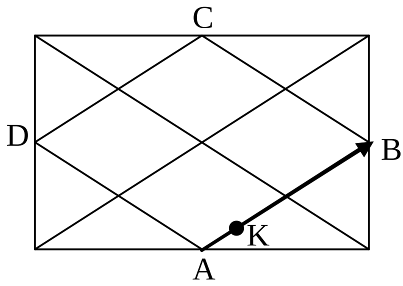


Рис.2.8

Розв’язання. Положення кульки на більярдному столі у певний момент часу її руху може бути визначене виконанням осьових симетрій початкової траєкторії руху кульки відносно прямих, які паралельні сторонам прямокутного більярдного стола. Отже, маємо композицію чотирьох послідовних осьових симетрій, осі яких взаємно попарно перпендикулярні у виконуваній послідовності симетрій.

Згідно з теоремою 2.9, рух кульки може бути представлений двома центральними симетріями. Оскільки кулька має повернутися в початкове положення, то результатом двох центральних симетрій має бути тотожнє перетворення площини. Це можливо тільки за умови, що симетрії мають один і той же центр. Отже, чотирикутник $ABCD$ має центр симетрії (рис. 2.8), а тому є паралелограмом вписаним у заданий прямокутник. Тому задача зводиться до побудови паралелограма, вписаного в прямокутник, сторона якого містить задану точку K. ■

Задачі для самостійного розв’язування

Задача 2.10 (теорема Птолемея, 9-10). Навколо чотирикутника $ABCD$ описано коло. Довести, що

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD \ .$$

Задача 2.11 (8-10). Всередині гострокутного трикутника знайти точку, сума відстаней від якої до вершин трикутника найменша.

Задача 2.12 (8-9). Нехай P – середина сторони AB опуклого чотирикутника $ABCD$. Довести, що коли площа трикутника PCD дорівнює половині площі чотирикутника $ABCD$, то сторони BC і AD паралельні.

Задача 2.13 (8-9). Пряма l перетинає сторони AB і AD паралелограма $ABCD$ в точках E і F відповідно. Нехай G – точка перетину прямої l і діагоналі AC. Довести, що $\frac{AB}{AE}+\frac{AD}{AF}=\frac{AC}{AG}$.

Задача 2.14 (8-9). Через точку перетину діагоналей трапеції проведено пряму, паралельну основам трапеції. Знайти довжину відрізка цієї прямої, що розташований між бічними сторонами, якщо бічні сторони трапеції дорівнюють a та b.

Задача 2.15 (8-9). Через деяку точку Q, яка лежить всередині трикутника ABC, проведено три прямі, паралельні його сторонам. Ці прямі розбивають трикутник на 6 частин, три з яких – трикутники з площами S_1, S_2, S_3. Знайти площу S трикутника ABC.

Задача 2.16 (8-9). Точка O – центр кола, вписаного у трикутник ABC. На сторонах AC і BC дібрано точки M і K відповідно так, що $BK \cdot AB = BO^2$ і $AM \cdot AB = AO^2$. Довести, що точки M, O, K лежать на одній прямій.

Задача 2.17 (9-10). На площині дано 5000 точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Довести, що можна побудувати 1000 п'ятикутників з вершинами в даних точках, що не перетинаються один з одним.

Задача 2.18 (8-9). Точка K – середина сторони AB квадрата $ABCD$, а точка L ділить діагональ AC у відношенні $AL : LC = 3 : 1$. Довести, що $\angle KLD = 90°$.

Задача 2.19 (8-9). На дузі CD кола, описаного навколо квадрата $ABCD$, взято довільну точку P. Довести, що $PA + PC = PB\sqrt{2}$.

Задача 2.20 (8-9). Точка M лежить на дузі AB кола, описаного навколо правильного трикутника ABC. Довести, що $MC = MA + MB$.

Задача 2.21 (9-10). У трикутнику ABC проведено медіану AM, точка K лежить на AM, причому $AK : AM = 1 : 5$. Через точки K і B проведено пряму, яка перетинає AC у точці P. Знайти відношення площ трикутників AKP і ABC.

Задача 2.22 (9-10). У трапеції основи дорівнюють a і b ($a < b$). Діагоналі розбивають трапецію на чотири трикутники, площа найменшого з яких дорівнює S. Знайти площі трьох інших трикутників.

Задача 2.23 (8-9). На сторонах BC і AD чотирикутника $ABCD$ взято точки M і N такі, що $BM : MC = AN : ND = AB : CD$. Прямі AB і DC перетинаються в точці O. Довести, що пряма MN паралельна бісектрисі кута AOD.

Задача 2.24 (9-10). На сторонах BC і CD квадрата $ABCD$ позначили точки M і K відповідно так, що $\angle BAM = \angle MAK$. Довести, що $BM + KD = AK$.

Задача 2.25 (9-10). Точка M лежить на діаметрі AB кола, хорда CD проходить через M і перетинає AB під кутом 45°. Довести, що сума $CM^2 + DM^2$ не залежить від вибору точки M.

Задача 2.26 (9-10). Знайти геометричне місце точок перетину діагоналей прямокутників, що вписані в даний гострокутний трикутник.

Задача 2.27 (ОМО-2001, 9). На колі зафіксовано дві точки A, B, а третя точка C рухається по цьому колу. Знайти геометричне місце точок перетину медіан трикутника ABC.

Задача 2.28 (8-9). На площині дано точку P і дві паралельні прямі. Побудувати рівносторонній трикутник, одна з вершин якого збігається з P, а дві інші лежать на цих прямих.

Задача 2.29 (УМО-2002, 10). У коло вписано гострокутний трикутник ABC. За допомогою циркуля та лінійки побудувати хоча б один вписаний у це коло шестикутник з площею, вдвічі більшою, ніж площа трикутника ABC.

Вказівки та відповіді до задач

2.10. *Вказівка:* розгляньте на діагоналі BD точку M таку, що $\angle MCD = \angle BCA$, та використайте подібність трикутників ABC і DMC, BCM і ACD. **2.11.** *Вказівка:* розгляньте поворот відносно однієї з вершин на кут 60°. *Відповідь:* точка, з якої всі сторони трикутника видно під кутом 120°. **2.12.** *Вказівка:* розгляньте точку M, симетричну точці D відносно точки P. **2.13.** *Вказівка:* розгляньте точки B_1 і D_1 на AC такі, що $BB_1 \parallel l$, $DD_1 \parallel l$, та використайте подібність отриманих трикутників. **2.14.** *Відповідь:* $\frac{2ab}{a+b}$. **2.15.** *Вказівка:* відношення площ подібних трикутників дорівнює квадрату коефіцієнта подібності. Використовуючи подібність даного й отриманих трикутників, доведіть, що $\sqrt{\frac{S_1}{S}}+\sqrt{\frac{S_2}{S}}+\sqrt{\frac{S_3}{S}}=1$. **2.16.** *Вказівка:* з подібності трикутників ABO і OBK отримуємо, що $\angle KOB = \angle OAB$, з подібності трикутників AMO і AOB отримуємо, що $\angle AOM = \angle ABO$. **2.17.** *Вказівка:* розгляньте пряму, яка не паралельна жодному відрізку, заданому довільними двома з даних точок. **2.18.** *Вказівка:* опустіть з точки L перпендикуляри LN на AB і LM на AD, використайте рівність трикутників DLM і KLM. **2.19.** *Вказівка:* використайте теорему Птолемея стосовно вписаного чотирикутника $ABCP$. **2.20.** *Вказівка:* розгляньте точку M_1, яка є образом точки M при повороті відносно точки B на кут 60°. Доведіть, що точки M, M_1, C лежать на одній прямій. **2.21.** *Вказівка:* проведіть $MN \parallel AC$ ($N \in BK$) та знайдіть відношення $AP : AC$. *Відповідь:* 1 : 90. **2.22.** *Відповідь:* $\left(\frac{b}{a}\right)^2 S; \frac{b}{a}S; \frac{b}{a}S$. **2.23.** *Вказівка:* добудуйте трикутник ABM до паралелограма $ABMM_1$, а трикутник DCM до паралелограма $DCMM_2$. З подібності трикутників ANM_1 і DNM_2 отримуємо, що N лежить на M_1M_2, а MN є бісектрисою кута M_1MM_2. **2.24.** *Вказівка:* розгляньте поворот відносно точки A на 90°. **2.25.** *Вказівка:* розгляньте точки C_1 і D_1, симетричні точкам C і D відносно прямої AB, та знайдіть кути трикутника C_1OD (O – центр кола). **2.26.** *Відповідь*: три відрізки, що сполучають середини сторін із серединами відповідних висот. **2.27.** *Відповідь*: коло, гомотетичне з коефіцієнтом $k = \frac{1}{3}$ даному (з виколотими точками A, B) відносно середини відрізка AB. **2.28** *Вказівка:* припустіть, що потрібний трикутник побудовано, та розгляньте поворот відносно даної точки на 60°. **2.29.** *Вказівка:* доведіть, що точки, симетричні ортоцентру гострокутного трикутника відносно його сторін, належать описаному колу.

§ 3. ЗАДАЧІ НА ПОБУДОВУ

У деяких задачах вимагається виконати певні геометричні побудови або, іншими словами, розв'язати задачу на побудову. Розділ геометрії, в якому вивчаються задачі на побудову та методи їх розв'язування, називають конструктивною геометрією.

Умову задачі на побудову можна розглядати як неявне задання шуканої фігури.

Розв'язати задачу на побудову – це означає знайти конструкцію фігури, тобто перейти від неявного задання фігури до явного. Цей перехід називають аналізом. Задачі на побудову розв'язуються як правило циркулем і лінійкою.

Етапи розв'язування задач на побудову.

1. Аналіз (або обернене розв'язування). Робиться припущення, що побудована фігура задовольняє умові задачі. Знаходять необхідні умови існування фігури та встановлюють, які елементарні побудови необхідно виконати, щоб одержати рисунок фігури. Аналіз показує необхідність конструкції шуканої фігури. Тому для строгості розв'язання задачі необхідно показувати достатність (виконати третій етап – доведення).
2. Побудова. Перераховують послідовність елементарних побудов, які необхідно виконати для того, щоб одержати рисунок шуканої фігури. Алгоритм виконання елементарних побудов не описується. Структура побудови є наслідком проведеного аналізу. Сама побудова є креслярською нематематичною дією, для формального математичного розв'язання вона не є обов'язковою.
3. Доведення. Для того, щоб показати, що результатом побудови є шукана фігура, необхідно проводити доведення. Доведення є оберненим переходом від явного задання фігури (у побудові) до неявного (в умові задачі), воно обґрунтовує достатність шуканої конструкції. Коли проведено аналіз і доведення, то тим самим показано еквівалентність явного і неявного задання фігури, що виключає можливість помилки в розв'язанні задачі.
4. Дослідження. Це фактично окрема задача, у якій дають відповідь на два запитання: при яких умовах задача має розв'язки та їх кількість.

Найпростіші задачі на побудову.

До найпростіших задач на побудову відносяться:

1. Поділ відрізка та кута пополам.
2. Побудова кута і трикутника рівних заданим.
3. Побудова трикутника за трьома сторонами, двома сторонами та кутом міжними, стороною та двома прилеглими кутами.
4. Побудова паралельної (перпендикулярної) прямої до заданої.
5. Побудова вписаного і описаного навколо трикутника кіл.
6. Побудова дотичної до кола, спільної дотичної двох заданих кіл.

До основних методів розв’язування задач на побудову відносяться метод геометричних місць точок, алгебричний метод, метод рухів, метод подібності.

Метод геометричних місць точок.

Геометричним місцем точок (ГМТ) називається множина усіх точок площини, кожна з яких має певну властивість.

Суть методу ГМТ полягає у наступному. Якщо при розв’язуванні задач на побудову (у процесі аналізу) виявляється, що потрібно побудувати точку, що має дві деякі властивості і відомими є два геометричні місця точок площини з такими ж властивостями, то шукана точка є перетином цих двох геометричних місць точок. У процесі розв’язування задач на побудову часто використовуються такі ГМТ.

1. ГМТ рівновіддалених від даної точки - коло з центром в цій точці.

2. ГМТ рівновіддалених від даної прямої – паралельна пряма.

3. ГМТ рівновіддалених від двох даних точок – серединний перпендикуляр до відрізка з кінцями в цих точках.

4. ГМТ рівновіддалених від сторін кута – бісектриса цього кута.

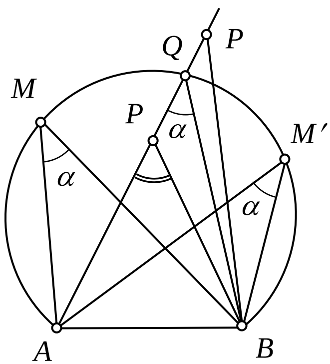


Рис. 3.1

Широке застосування в задачах конструктивної геометрії має таке твердження.

Теорема 3.1. Геометричним місцем точок – вершин кутів із заданою градусною мірою, сторони яких проходять через дві дані точки, а вершини лежать з одного боку від прямої, що сполучає ці точки, є дуга кола з кінцями в цих точках.

Доведення. Нехай A, B – задані точки, а α – кут з визначеною градусною мірою. Якщо M – точка шуканого ГМТ, то $\angle AMB=\alpha$ за умовою. У зв'язку з цим природно згадати наслідок з теореми про рівність вписаних кутів, що спираються на одну і ту ж саму хорду AB.

Проведемо коло через три точки A, M і B, що не лежать на одній прямій ($0^o< \alpha < 180^o$). Тоді для довільної точки M′ дуги кола AMB (крім точок A і B) $\angle$A M′B теж дорівнює α, тобто довільна точка цієї дуги також належить шуканому ГМТ.

Очевидно, що всі точки (окрім A і B) дуги, симетричної з дугою AMB відносно прямої AB, мають ту ж властивість і тому належать тому ж ГМТ.

Щоб довести, що фігура Φ, складена із двох симетричних дуг кіл, які проходять через точки A і B, справді є шуканим ГМТ, залишилося розглянути точки, що не належать цій фігурі. Якщо точка P лежить в області, обмеженій фігурою Φ (див. рис. 3.1), то, провівши промінь AP (чи BP) до зустрічі з фігурою Φ в точці Q, помічаємо, що $\angle APB > \angle AQB=\alpha$ (за теоремою про зовнішній кут трикутника). Якщо ж вибрати точку P поза вказаною областю, то одержимо, що $\angle APB<\alpha$.

Отже, ГМТ, з яких даний відрізок AB видно під заданим кутом α (так у більшості випадків кажуть), є об'єднання двох дуг кіл, що проходять через кінці цього відрізка і розташовані симетрично відносно прямої AB(самі точки A і B не належать цьому ГМТ). ■

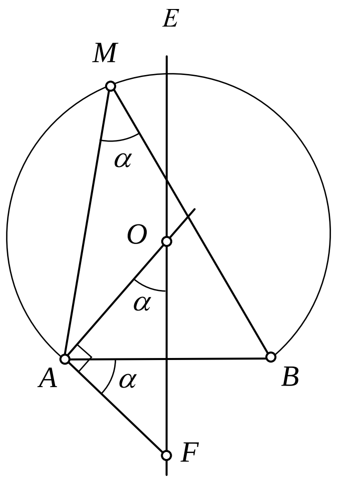


Рис. 3.2

Задача 3.1. Побудувати ГМТ на площині, з яких даний відрізок AB видно під даним кутом α.

Розв'язання. Аналіз. Нехай дуга AMB така, що всякий вписаний у неї кут AMB має градусну міру α. Питання зводиться до відшукання на рисунку центра цієї дуги. Оскільки центр O повинен бути однаково віддалений від точок A і B, то він лежить на прямій $OE\perp AB$, проведеній через середину відрізка AB. Окрім цього, він повинен лежати на перпендикулярі AO, проведеному до дотичної кола AF в точці A. Тому шуканий центр є точкою перетину OA і OE (рис. 3.2). Щодо визначення положення прямої AF, то помічаємо, що кути AMB і

FAB вимірюються половиною одного і того ж центрального кута AOB, і тому $\angle FAB=\alpha$.

Побудова. Із аналізу випливає такий алгоритм побудови: 1) проводимо серединний перпендикуляр відрізка AB; 2) відкладаємо $\angle FAB = \alpha$ і проводимо в точці A перпендикуляр до AF. Центром шуканої дуги є точка перетину цих перпендикулярів.

Очевидно, що дуга, симетрична побудованій відносно прямої AB, також входить до шуканого ГМТ. ■

Теорема 3.2. Геометричним місцем точок, відношення відстаней від яких до двох даних точок є стала величина (яка не дорівнює нулю та одиниці), є коло (**коло Аполлонія**).

Доведення. Нехай точка X площини така, що

$$\frac{XA}{XB} = \frac{m}{n} (\neq 1, 0). \text{ (рис. 3.3).}$$

Проведемо бісектриси внутрішнього та зовнішнього кута трикутника AXB при вершині X. Нехай Y, Z – точки перетину проведених бісектрис із прямою AB.

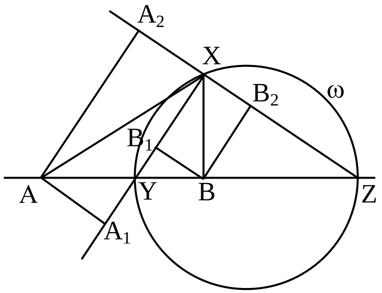


Рис. 3.3

Тоді

$$\frac{AX}{XB} = \frac{AY}{YB} = \frac{AZ}{ZB} = \frac{m}{n}.$$

Отже, точки Y і Z належать шуканому ГМТ і ділять відрізок AB внутрішнім та зовнішнім чином у відношенні m/n. Але $\angle YXZ=90^0$. Тому із точки X відрізок YZ видно під прямим кутом. Отже, точка X належить ГМТ – колу *ω*, побудованому на відрізку YZ як на діаметрі. Доведемо, що і навпаки: для кожної точки *X* кола *ω* відношення відстаней до точок *A* і *B* є величина стала *m/n*.

Отже, відомо, що $\frac{AY}{YB} = \frac{AZ}{ZB} = \frac{m}{n}$ і $X \in \omega$.

З подібності трикутників AA_1Y і BB_1Y випливає, що $\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{AY}{BY} = \frac{m}{n}$. З іншого боку, з подібності трикутників AA_2Z і BB_2Z випливає, що $\frac{AA_2}{BB_2} = \frac{AZ}{BZ} = \frac{m}{n}$. Але $AA_1=A_2X$ і $BB_1=B_2X$.

Отже, $\dfrac{A_2X}{B_2X}=\dfrac{AA_2}{BB_2}=\dfrac{m}{n}$. Тому трикутники AA_2X і BB_2X є подібними. Звідси отримуємо $\dfrac{AX}{BX}=\dfrac{A_2X}{B_2X}=\dfrac{AA_2}{BB_2}=\dfrac{m}{n}$. ■

Задача 3.2 (8-9). Побудуйте трикутник за даними стороною c, протилежним кутом γ і висотою h, проведеною до сторони c.

Аналіз. Нехай *ABC* – трикутник, в якому відомі сторона *AB*=*c* і висота *CK*=*h*, опущена на неї. Геометричним місцем точок, з яких відрізок *AB* видно під кутом γ, є дуга кола ω (див. попередню задачу), тому точка *C* знаходиться на колі ω. Геометричним місцем точок, віддалених від прямої *AB* на відстань *h*, є пряма *l*, яка паралельна *AB* і така, що відстань між *l* і *AB* дорівнює *h*. Отже, точка *C* може бути побудована як перетин кола ω і прямої *l*.

Побудова (рис. 3.4).

1. Проводимо довільну пряму, на якій відкладаємо даний відрізок *AB*=*c*.
2. Вибираємо довільну точку $K\in AB$, проводимо $KM\perp AB$.

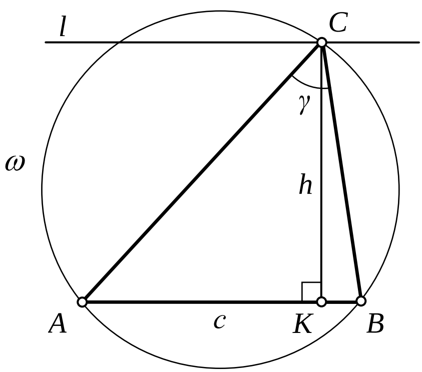


Рис. 3.4

3. Відкладаємо від точки *K* відрізок *KN*=*h*.
4. Через точку *N* проводимо пряму $l\perp KM$ (тоді $l\|AB$).
5. Будуємо дугу кола ω, з якої відрізок *AB* видно під кутом γ.
6. В перетині кола ω і прямої *l* одержуємо точку *C*.
7. З'єднуємо точки *C* і *A*, *C* і *B*. Трикутник ABC – шуканий.

Доведення. Очевидно, що побудований таким способом трикутник *ABC* задовольняє умові задачі. ■

Задача 3.3 (8-9). Побудувати трикутник за заданими бісектрисою, медіаною і висотою, проведеними з однієї вершини.

Розв'язання. ***Аналіз***. Припустимо, що трикутник *ABC* задовольняє умові задачі, *AH, AL, AM* – його висота, бісектриса і медіана відповідно (рис. 3.5). У прямокутних трикутниках *AHL, AHM* відомі гіпотенуза і катет, тому їх можна побудувати за даними задачі. Опишемо навколо трикутника ABC коло і продовжимо бісектрису AL до перетину з цим колом (K – точка перетину). Тоді за властивістю вписаних кутів отримуємо, що K є серединою дуги BKC, а тому $MK \perp BC$, і центр O описаного кола лежить на продовженні MK. Однак точка O також лежить на серединному перпендикулярі PO до відрізка AK. Звідси випливає алгоритм побудови.

Побудова. 1) Будуємо трикутники AHL, AHM за даними $AH = h_a$, $AL = l_a$, $AM = m_a$.

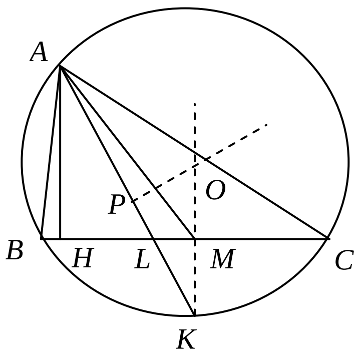


Рис. 3.5

2) Проводимо $MK \perp HM$.

3) Знаходимо точку K як точку перетину MK і AL.

4) Проводимо серединний перпендикуляр PO до відрізка AK, при його перетині з MK отримуємо точку O.

5) Проводимо коло з центром у точці O радіуса $R = OK$.

6) При перетині цього кола з прямою HM отримуємо точки B, C.

7) Проводимо сторони AB, AC трикутника ABC.

Доведення. Очевидно, що відрізок AH є висотою трикутника ABC. За побудовою $OB = OC$, $OK \perp BC$, тому $CM = BM$, тобто відрізок AM є медіаною трикутника ABC. Точка K є серединою дуги BKC, тому за властивістю вписаних кутів отримуємо, що $\angle BAL = \angle CAL$, тобто відрізок AL є бісектрисою трикутника ABC. ■

Задача 3.4. Побудувати трикутник за стороною, кутом проти цієї сторони та медіаною, проведеною до однієї із двох інших сторін трикутника.

Аналіз. Нехай трикутник ABC задовольняє умові задачі (рис. 3.6). Оскільки одна сторона трикутника AB відома, то визначені точки A і B. Точка C належить ГМТ, з яких відрізок AB видно під заданим кутом, - дузі кола ω. Оскільки медіана AD трикутника відома, то точка D належить ГМТ рівновіддалених від точки A на задану відстань – колу ω_1. Але точка D є серединою хорди дуги кола ω, проведеної з точки B. Тому точка D належить ГМТ (середин хорд кола ω, проведених із точки B) – колу ω_2. За методом ГМТ точка $D = \omega_1 \cap \omega_2$. Тоді точка $C = \omega \cap (BD)$. ■

Алгебричний метод розв’язування задач на побудову. У алгебричному методі розв’язування задач на побудову невідомі відрізки та кути пов’язують із відомими за допомогою рівнянь або систем рівнянь. Тоді розв’язки рівнянь (систем) задають шуканий відрізок як функції від відомих відрізків, що дає змогу за допомогою певних дій над відрізками побудувати невідомий відрізок.

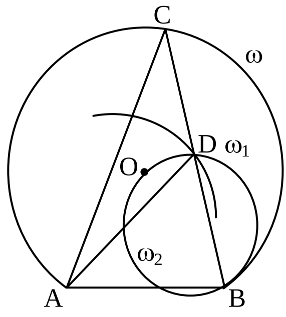


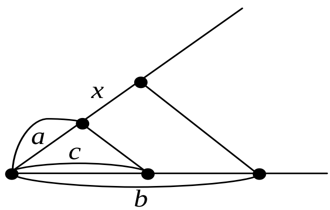
Рис. 3.6

У конструктивній геометрії виконують такі дії над над відрізками (див. відповідні рисунки):

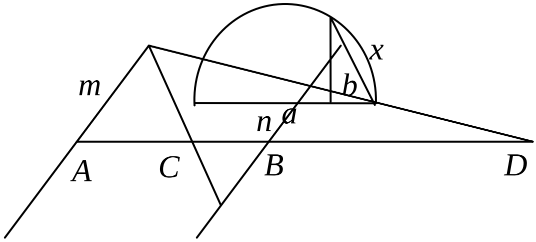
1) $a+b$, 2) $a-b$; 3) $n\cdot a \quad (n\in N)$;

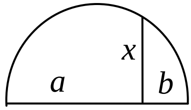
4) $\dfrac{a}{n} \quad (n\in N)$; 5) $a\cdot\dfrac{m}{n} \quad (m, n\in N)$;

6) $x=\dfrac{a\cdot b}{c}$ (побудова четвертого пропорційного відрізка);



7) $x=\sqrt{ab}$ (побудова середнього геометричного відрізка);





8) поділ відрізка у даному відношенні внутрішнім чином $\dfrac{AC}{CB}=\dfrac{m}{n}$ чи зовнішнім чином $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{m}{n}$.

Задача 3.5. Через вершину A даного опуклого чотирикутника $ABCD$ провести пряму, яка ділить площу чотирикутника навпіл (олімпіада механіко-математичного факультету КНУ імені Тараса Шевченка).

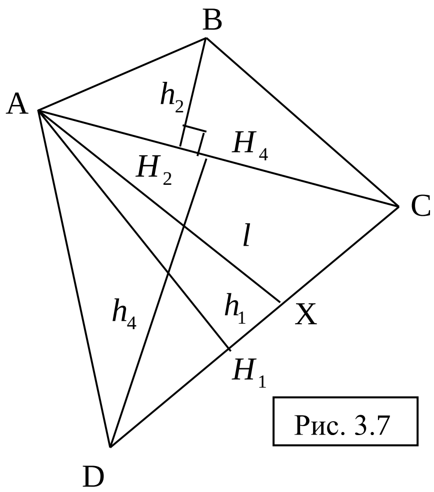


Рис. 3.7

Розв'язання. Побудуємо діагональ AC чотирикутника $ABCD$. Тоді, якщо $h_2 = h_4$, то задача розв'язана.

Нехай $h_2 \neq h_4$. Для визначеності припустимо, що $h_4 > h_2$. Тоді точка X шуканої прямої належить відрізку CD. З точки A опустимо перпендикуляр на пряму CD. Нехай $AH_1 = h_1$. Тоді за умовою задачі $\frac{1}{2} DX \cdot h_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} AC \cdot h_2 + \frac{1}{2} AC \cdot h_4\right)$. Звідки $DX = \frac{h_2 + h_4}{2h_1} \cdot AC$.

Оскільки всі відрізки: h_1, h_2, h_4, AC – задані, то відрізок DX можна побудувати, виконавши дії над цими відрізками:

$$DX = \frac{1}{2}\frac{h_2 + h_4}{h_1} \cdot AC = \frac{1}{2}\frac{a_1 AC}{h_1} = \frac{1}{2} a_2 = a_3,$$

де a_1, a_2, a_3 – відрізки, що будуються. Отже, точка X – знаходиться, а тому й вй значається пряма AX. ■

У процесі розв’язування багатьох задач на побудову доцільним є використання методу подібності або рухів.

Наведемо приклади опорних задач на побудову і застосування різних перетворень площини.

Задача 3.6 (опорна задача, що розв'язується методом паралельного перенесення). Побудувати відрізок рівний і паралельний даному з кінцями на двох даних кривих (рис.3.8).

Аналіз. Нехай такий відрізок *XY* побудований. Тоді чотирикутник *ABYX* є паралелограмом. Для знаходження точки *Y* достатньо виконати паралельне перенесення точки *X* на вектор $\overrightarrow{AB}$. Але точка *X* належить кривій γ_1, тоді точка *Y* належить кривій γ_1', одержаній з кривої γ_1 паралельним перенесенням на вектор $\overrightarrow{AB}$ (таке паралельне перенесення можна виконати за допомогою циркуля і лінійки). Тому точка $Y=\gamma_1'\cap\gamma_2$. Для знаходження точки *X* достатньо виконати паралельне перенесення точки *Y* на вектор $\overrightarrow{BA}$. ■

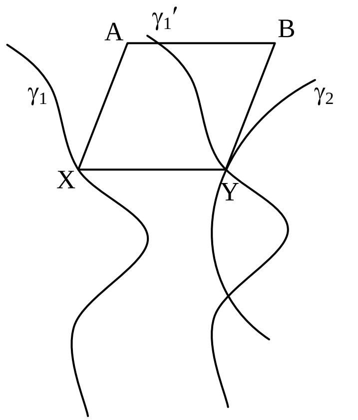


Рис. 3.8

Задача 3.7. Побудувати чотирикутник, знаючи його діагоналі, дві протилежні сторони і кут між цими сторонами.

Аналіз. Нехай чотирикутник *ABCD* задовольняє умові задачі (рис. 3.9). Виконаємо паралельне перенесення відрізка *CD* на вектор $\overrightarrow{DA}$. Тоді чотирикутник $CDAC_1$ – паралелограм і кут BAC_1 – заданий.

Отже, трикутник BAC_1 можна побудувати за двома сторонами і кутом між ними. Тому точки *A* і *B* шуканого чотирикутника визначаються.

Точки *D* і *C* чотирикутника *ABCD* віддалені від точок *B* і *A* відповідно на задані відстані, оскільки в чотирикутнику відомі діагоналі. Тому вони належать відповідним колам з центрами в точках *A* і *B*. Тоді задача зводиться до опорної: побудувати відрізок рівний і паралельний даному AC_1 з кінцями на вказаних вище колах.

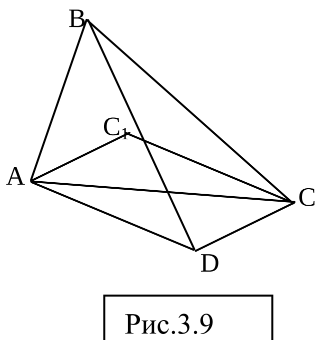


Рис.3.9

Побудова.

1. Будуємо трикутник BAC_1.
2. Будуємо коло ω_1 з центром в точці A і радіусом AC.
3. Будуємо коло ω_2 з центром в точці B і радіусом BD.
4. Будуємо відрізок рівний і паралельний відрізку AC_1 з кінцями на колах ω_1 і ω_2, одержуємо точки D і C.
5. Будуємо чотирикутник $ABCD$, який є шуканим.

(Самостійно проведіть доведення і дослідження). ■

Задача 3.8 (опорна задача, що розв'язується методом центральної симетрії). Побудувати відрізок із серединами в даній точці і кінцями на двох даних кривих.

Аналіз та побудову проведіть самостійно аналогічно попередній задачі, але із застосуванням перетворення центральної симетрії відносно заданої точки.

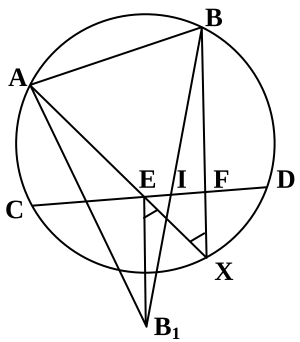


Рис. 3.10

Задача 3.9. Дано дві хорди AB і CD кола, які не перетинаються, і точка I на хорді CD. Побудувати на колі точку X так, щоб хорди AX і BX відтинали на хорді CD відрізок EF, який ділиться точкою I навпіл.

Аналіз. Нехай точка X кола задовольняє умові задачі (рис. 3.10). Виконаємо центральну симетрію точки B відносо точки I. Одержимо чотирикутник BFB_1E, який буде паралелограмом. Але кут AXB – визначений (як кут, що спирається на задану дугу кола). I $\angle AXB = \angle XEB_1$. Тоді $\angle AEB_1 = 180^0 - \angle AXB$. Відрізок AB_1 можна побудувати. Тоді точка E буде належати дузі кола - ГМТ, з яких відрізок AB_1 видно під заданим кутом. Отже, точка E визначається перетином хорди CD і вказаного ГМТ. Тому точка X є точкою перетину прямої AE із заданим колом.

Побудова.

1. Виконуємо центральну симетрію точки B відносно точки I, одержуємо точку B_1.
2. Будуємо відрізок AB_1.
3. Будуємо ГМТ γ, з яких відрізок AB_1 видно під кутом $180^0 - \angle AXB$.
4. Знаходимо точку $E = [CD] \cap \gamma$.

5. Проводимо пряму AE.
6. Знаходимо точку $X=(AE)\cap\omega$, де ω - задане коло.

Доведення. Оскільки за побудовою $\angle B_1EA=180^0-\angle AXB$, то $\angle B_1EX=180^0-\angle B_1EA=\angle AXB$. Отже, прямі $(B_1E)||(XB)$. Але точка I – середина відрізка BB_1. Отже, $\Delta B_1EI=\Delta BFI$ за другою ознакою рівності трикутників, бо $BI=IB_1$, $\angle BIF=\angle B_1IE$ і $\angle IBF=\angle IB_1E$. Тому $EI=IF$. ■

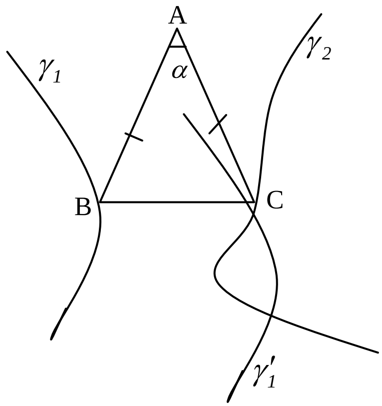


Рис. 3.11

Задача 3.10 (опорна задача, що розв'язується методом повороту). Побудувати рівнобедрений трикутник із вершиною в заданій точці A, кутом при цій вершині α, так щоб дві інші його вершини належали двом даним кривим γ_1, γ_2.

Аналіз (рис. 3.11). Нехай трикутник ABC задовільняє умові задачі. Тоді точа C може бути одержана поворотом точки B з центром в точці A на кут α. Але точка $B\in\gamma_1$. Тому точка C буде належати кривій γ_1', одержаній з кривої γ_1 перетворенням повороту з центром в точці A на кут α. Отже, точка $C=\gamma_1'\cap\gamma_2$. Для відшукання точки B достатньо виконати поворот точки C з центром в точці A на кут α. ■

Задача 3.11. Прямі l_1, l_2, l_3 паралельні між собою, а пряма l їх перетинає. Побудувати рівносторонній трикутник так, щоб вершини його належали прямим l_1, l_2, l_3, а центр – прямій l.

Аналіз. Нехай трикутник ABC зздовільняє умові задачі (рис 3.12). Тоді він може бути одержаний паралельним перенесенням будь-якого рівностороннього трикутника $A_1B_1C_1$ з вершинами на прямих l_1, l_2, l_3 на вектор, який є напрямним для заданих прямих. Тому одну із точок трикутника $A_1B_1C_1$ вибираємо довільно на одній із прямих і будуємо рівносторонній трикутник з двома іншими вершинами на інших двох паралельних прямих (опорна задача).

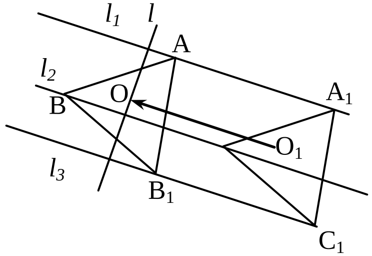


Рис. 3.12

Паралельне перенесення трикутника $A_1B_1C_1$ на визначений вектор $\overrightarrow{O_1O}$ переводить цей трикутник у шуканий. ■

Задача 3.12 (опорна задача, що розв'язується методом осьової симетрії). Побудувати відрізок з кінцями на двох даних кривих та серединою на даній прямій так, щоб пряма, яка містить цей відрізок, була перпендикулярною до даної прямої.

Задача розв'язується аналогічно вищеназваним опорним задачам із застосуванням осьової симетрії відносно заданої прямої.

Методом осьової симетрії раціонально користуватись при побудові фігур, що мають осі симетрії, а також при побудові фігур за відомими різницями відрізків (кутів).

Задача 3.13 (опорна задача, що розв'язується методом перетворення подібності). Через дану точку A провести пряму так, щоб дані дві криві γ_1 і γ_2 відтинали на ній відрізки, довжини яких, рахуючи від точки A, відносилися б у заданому відношенні m/n.

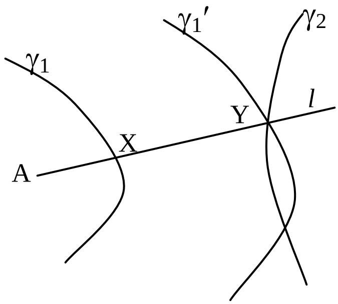


Рис. 3.13

Аналіз. Нехай пряма l задовольняє умові задачі, тобто $\frac{AX}{AY}=\frac{m}{n}$ (рис. 3.13). Тоді точка Y може бути одержана перетворенням гомотетії з центром в точці A, коефіцієнтом n/m точки X. Але точка X належить кривій γ_1, тоді точка Y буде належати кривій γ_1', яка одержана з кривої γ_1 перетворенням вищеназваної гомотетії. Оскільки точка $Y \in \gamma_2$, то $Y=\gamma_1' \cap \gamma_2$. Отже, пряма AY є шуканою прямою. ■

Зауважимо, що метод перетворення подібності раціонально використовувати при побудові фігури, яка є вписаною в іншу фігуру, або коли одразу ж можна побудувати фігуру, яка є подібною до шуканої.

Задача 3.14 (8-9). Через точку всередині кута провести відрізок з кінцями на сторонах кута так, щоб ця точка ділила відрізок пополам (рис. 3.14).

Розв'язання. Позначимо сторони кута через a і b. Побудуємо пряму a', симетричну a відносно даної точки M. Точку перетину a' і b позначимо B і

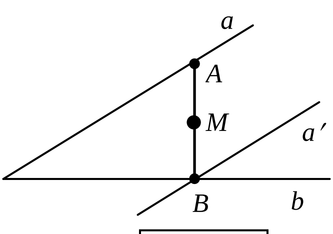


Рис. 3.14

продовжимо *BM* до перетину з півпрямою a. Точку перетину прямих a і *BM* позначимо *A*. Відрізок *AB* – шуканий (доведіть це самостійно). ■

Задача 3.15. Побудувати трикутник за трьома висотами h_a, $h_в$, h_c.

Аналіз. Нехай трикутник *ABC* задовольняє умові задачі. За властивістю висот трикутника h_a,: $h_в$,: h_c = $\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}$.

А тому відомі відношення сторін шуканого трикутника. Отже, одразу ж можна побудувати трикутник, який буде подібним до шуканого. Для цього одну із сторін трикутника вибираємо довільно, наприклад сторону $\bar{a}$. Тоді дві інші знаходимо із рівностей:

$$\bar{b} = \frac{h_a}{h_b}\bar{a}, \ \bar{c} = \frac{h_a}{h_c}\bar{a}.$$

Трикутник із сторонами $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ подібний до шуканого можна побудувати за трьома сторонами. Гомотетія з центром у довільній точці і коефіцієнтом $k = \frac{h_a}{\bar{h}_a}$ переводить побудований трикутник у шуканий. ■

Переважна більшість задач на побудову відноситься до таких, що не розв'язуються циркулем і лінійкою. В основі критеріїв розв'язуваності задач конструктивної геометрії лежать дослідження французького математика Еваріста Галуа.

Теорема 3.3. Відрізок x можна побудувати циркулем і лінійкою тоді і тільки тоді, якщо його довжина виражається через довжини заданих відрізків з допомогою скінченого числа арифметичних операцій („+” „–” „×” „÷”) і добування квадратних коренів.

Як наслідки з цієї теореми отримуємо таке твердження.

Теорема 3.4. Корінь рівняння

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

можна побудувати тоді і тільки тоді, коли його можна знайти, використовуючи квадратні радикали.

Приклад 1 (задача про трисекцію кута). Заданий кут поділити на три рівні частини.

Розвязання. Нехай φ – заданий кут, тоді потрібно знайти такий кут α, що $\varphi = 3\alpha$. Кут можна побудувати тоді, коли можна знайти його косинус.

Тоді $cos\varphi = cos3\alpha$, або $4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha - \cos\varphi = 0$. Виконавши заміну $2cos\alpha = x$, отримуємо рівняння $x^3 - 3x - 2cos\varphi = 0$, яке не завжди можна розв'язати в квадратних радикалах.

Справді, покладемо $\varphi = 60^\circ$. Тоді $x^3 - 3x - 1 = 0$.

Але $x = \pm 1$ – не є коренями цього рівняння. Отже, це кубічне рівняння не має раціональних коренів, тому в квадратних радикалах його розв'язати не можна. Отже, така побудова (для довільного кута) не може бути виконана за допомогою циркуля та лінійки. ■

Приклад 2 (задача про подвоєння куба). Побудувати ребро куба, об'єм якого вдвоє більший об'єму даного куба.

Розв'язання. Нехай даний куб має ребро a, а x – шукане ребро куба. Тоді одержуємо рівняння

$$x^3 = 2a^3.$$

При $a = 1$ рівняння $x^3 - 2 = 0$ не розв'язується в квадратних радикалах, тому така побудова не може бути виконана за допомогою циркуля та лінійки. ■

Приклад 3 (задача про квадратуру круга). Побудувати квадрат, площа якого дорівнює площі даного круга.

Розв'язання. Алгебраїчно задача зводиться до розв'язування рівняння $x^2 = \pi r^2$, де x – сторона квадрати, r – радіус круга.

Представимо його у вигляді $x^2 = yr$ (*x* як середнє геометричне), де $y = \pi r$.

Але при $r = 1$ відрізок $y = \pi$ за допомогою циркуля і лінійки не будується, бо y має бути принаймні алгебричним числом (коренем многочлена). Проте π – трансцендентне число, що довів Ф. Ліндеман (1882 р.). ■

Учені різних часів (починаючи з 2000 р. до н.е.) намагалися розв'язати ці знамениті задачі, збагативши математику цілою низкою видатних відкриттів.

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 3.16 (8-9). Побудувати трикутник за відомими висотою h_a, медіаною m_a і кутом α.

Задача 3.17 (8-9). Побудувати трикутник за відомими стороною a, медіаною m_c і кутом α.

Задача 3.18 (8-9). Побудувати трикутник ABC за відомими точками P, Q, R, в яких висота, бісектриса і медіана, проведені з вершини C, перетинають описане коло.

Задача 3.19 (8-9). Побудувати трикутник ABC за відомими центром описаного кола O, точкою M перетину медіан і основою K висоти CK.

Задача 3.20 (8-9). Побудувати трикутник ABC за відомими сторонами BC і AC, якщо відомо, що кут проти AC втричі більший за кут проти BC.

Задача 3.21 (8-9). Знайти на даній прямій точку M таку, що:

а) сума відстаней від M до даних двох точок є найменшою;

б) різниця відстаней від M до даних двох точок є найбільшою.

Задача 3.22 (8-9). Побудувати трикутник за відомими медіанами m_a, m_b, m_c.

Задача 3.23 (8-9). Всередині кута дано точки A і B. Побудувати коло, яке проходить через ці точки і відтинає на сторонах кута рівні відрізки.

Задача 3.24 (8-9). Дано точки A, B і пряма l. Побудувати коло, яке проходить через ці точки і дотикається до прямої l.

Задача 3.25 (8-9). Побудувати чотирикутник $ABCD$ за відомими кутами та довжинами сторін $AB = a$ і $CD = b$.

Задача 3.26 (8-9). Провести через дану точку M пряму так, щоб вона відсікала від даного кута з вершиною A трикутник ABC даного периметра p.

Задача 3.27 (8-9). Дано два концентричних кола S_1 і S_2. Провести пряму, на якій ці два кола відтинають три рівних між собою відрізки.

Задача 3.28 (8-9). Дано точки $B_1, B_2, \ldots, B_{2n+1}$, які є серединами сторін многокутника $A_1A_2\ldots A_{2n+1}$. Побудувати многокутник $A_1A_2\ldots A_{2n+1}$.

Задача 3.29 (4 СМО-1998, 11). На площині дано трикутник ABC та точка M, відмінна від точок A, B, C. Довести, що площа трикутника з вершинами – точками перетину медіан трикутників MAB, MAC, MBC – не залежить від положення точки M (при фіксованому трикутнику ABC).

Задача 3.30 (8-9). Побудувати трикутник ABC за відомими стороною $AB = c$, висотою h_c та різницею кутів $\angle A - \angle B$.

Задача 3.31 (8-9). Побудувати трикутник ABC, якщо дано точки A, B і пряма l, на якій лежить бісектриса кута C.

Задача 3.32 (8-9). Побудувати трикутник ABC за відомими сторонами AB, AC і бісектрисою AD.

Задача 3.33 (8-9). Побудувати паралелограм *ABCD* за відомими сторонами $AB = a$, $AD = b$ і кутом φ між діагоналями.

Вказівки та відповіді до задач

3.16. *Вказівка:* нехай *ABC* – такий трикутник, *AH* – висота, *AM* – медіана. Розгляньте точку A_1, симетричну точці *A* відносно точки *M*. Трикутник *AHM* можна побудувати. Відрізок $AA_1 = 2m_a$ видно з точки *C* під кутом 180° – α, тому точка *C* може бути знайдена як перетин відповідної дуги кола і прямої *HM*. **3.17.** *Вказівка:* нехай *ABC* – такий трикутник, A_1 – середина *BC*, $BC = a$, C_1 – середина *AB*. Відрізок $BA_1 = \frac{a}{2}$ видно з точки C_1 під кутом α та точка C_1 знаходиться на відстані m_c від точки *C*. **3.18** *Вказівка:* нехай *O* центр описаного кола. Провівши $PC \parallel QO$, отримуємо в перетині з колом точку *C*, $CR \cap QO = M$ – середина *AB*. Через точку *M* проводимо $AB \perp QO$, отримуємо точки *A* і *B*. **3.19.** *Вказівка:* скориставшись результатом задачі, побудуйте точку перетину висот. **3.20.** *Вказівка:* розгляньте точку *D* на *AC* таку, що $AD = BD$. **3.21.** *Вказівка:* розгляньте точку, симетричну одній з даних точок відносно даної прямої. **3.22.** *Вказівка:* нехай *M* – точка перетину медіан AA_1, BB_1, CC_1 трикутника *ABC*; *K* – точка, симетрична *M* відносно точки A_1. Тоді $MK = \frac{2}{3}m_a$, $MC = \frac{2}{3}m_c$, $CK = \frac{2}{3}m_b$, тобто трикутник *MCK* можна побудувати. **3.23.** *Вказівка:* доведіть, що центр такого кола є точкою перетину бісектриси даного кута і серединного перпендикуляра до *AB*. **3.24.** *Вказівка:* нехай *p* – серединний перпендикуляр до *AB*, *n* – пряма, симетрична *l* відносно *p*. Задача зводиться до побудови кола, яке дотикається до прямих *l*, *n* і проходить через точку *A*. **3.25.** *Вказівка:* розгляньте точку *O* таку, що $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DO}$. Спочатку будуємо трикутник *ABO* за двома сторонами $AB = a$, $BO = b$ і кутом між ними ($\angle B + \angle C - 180°$). **3.26.** *Вказівка:* розгляньте зовнішньовписане коло, що дотикається до сторони *BC*. Нехай *K*, *N* – точки дотику до сторін кута. Тоді $AN = AK = \frac{p}{2}$, і задача зводиться до побудови дотичної до цього кола, яка проходить через точку *M*. **3.27.** *Вказівка:* розгляньте центральну симетрію відносно довільної точки M меншого кола. **3.28.** *Вказівка:* точка A_1 є нерухомою точкою композиції центральних симетрій, виконаних послідовно відносно точок B_1, $B_2, \ldots, B_{2n+1}$. **3.29.** *Вказівка:* нехай O_1, O_2, O_3 – точки перетину медіан трикутників MAB, MAC, MBC. Використавши властивості медіан цих трикутників, покажіть, що трикутник $O_1O_2O_3$ гомотетичний з коефіцієнтом $k = \frac{2}{3}$ трикутнику з вершинами – серединами сторін трикутника ABC. **3.30.** *Вказівка:* нехай C_1 – точка, симетрична точці C відносно серединного перпендикуляра до AB, B_1 – точка, симетрична точці B відносно прямої CC_1. Трикутник ABB_1 можна побудувати. Потім використайте те, що $\angle ACB_1 = 180° - (\angle A - \angle B)$. **3.31.** *Вказівка:* використайте симетрію відносно прямої l. **3.32.** *Вказівка:* нехай S_1 і S_2 – кола з центром у точці A і радіусами AB, AC відповідно. Розгляньте гомотетію з центром у точці D і коефіцієнтом $k = -\frac{AB}{AC}$. Тоді точка B є точкою перетину кола S_1 і образу кола S_2. **3.33.** *Вказівка:* розгляньте точку K таку, що $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DK}$. З точки C відрізок $AK = 2b$ видно під кутом $(180° - \varphi)$ та точка C знаходиться на відстані a від точки D.

§ 4. ПЕРЕТВОРЕННЯ ІНВЕРСІЇ

Усі геометричні перетворення площини, які вивчаються в курсі шкільної математики, переводять прямі в прямі, а кола в кола. Інверсія – це перетворення іншого типу, яке може пряму перевести в коло, а коло – в пряму.

Означення. Нехай на площині дано коло ω з центром O і радіусом R. Інверсією відносно кола ω називається перетворення, яке переводить довільну точку A, відмінну від точки O, в точку A', яка належить променю OA на відстані $OA' = \dfrac{R^2}{OA}$ від точки O.

Інверсію відносно кола ω називають інверсією з центром O і степенем R^2, а коло ω – колом інверсії.

Зауваження. Інверсія не є у строгому розумінні перетворенням площини, оскільки точка O не має образу.

Сформулюємо основні властивості інверсії, які використовуються у процесі розв′язування задач.

1) Точки кола інверсії переходять самі в себе (тобто коло інверсії є інваріантним).
2) Точки, які лежать всередині кола інверсії, переходять у зовнішні точки кола інверсії, а точки, які лежать поза колом інверсії – всередину кола інверсії.
3) Якщо точка A при інверсії переходить у A', то точку A′ ця інверсія переводить в A, тобто $f(f(A))=A$, *де* f – перетворення інверсії.
4) Образом прямої, яка проходить через центр інверсії, є ця сама пряма.
5) Пряма, яка не містить центра інверсії, преходить в коло, яке містить центр інверсії.
6) Коло з центром B, яке проходить через O, переходить в пряму, яка перпендикулярна прямій OB.
7) Коло, яке не проходить через центр інверсії, переходить в коло, яке теж не проходить через центр інверсії.
8) Дотик кіл (кіл і прямих) при інверсії зберігається, якщо точка дотику не співпадає з центром інверсії. Якщо точка дотику кіл (прямих і кіл) співпадає з центром інверсії, то їх образами будуть паралельні прямі.

9) При інверсії зберігається величина кута між двома колами (або між колом і прямою, або між двома прямими). Цю властивість називають властивістю конформності.

Із означення інверсії відносно кола та властивості катета прямокутного трикутника як середнього геометричного між гіпотенузою та його проекцією на гіпотенузу, випливає спосіб побудови відповідних точок $A \leftrightarrow A'$ в перетворенні інверсії (рис. 3.1).

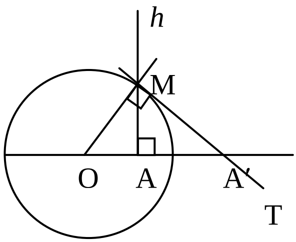


Рис. 4.1

1) Будуємо пряму *OA*;

2) в точці *A* будуємо перпендикуляр h до прямої *OA*;

3) знаходимо точку $M=(O, R)\cap h$;

4) в точці *M* кола *(O, R)* будуємо дотичну *MT*;

5) знаходимо точку $A'=(OA)\cap(MT)$.

У випадку, коли точка *A* поза колом побудову потрібно виконувати в оберненому порядку.

Основна ідея методу інверсії при розв’язуванні задач на побудову полягає в тому, що після виконання деякої інверсії (з раціонально вибраним центром) задача спрощується і та розв′язується. Тоді те ж саме перетворення інверсії побудованого образа фігури переводить його у шуканий прообраз.

Задача 4.1 (10-11). Довести, що два кола S_1 і S_2 (або коло і пряму) можна інверсією перевести в пару концентричних кіл.

Розв′язання. Виберемо на прямій, яка містить центри кіл O_1 і O_2 точку *C* так, щоб відрізки дотичних, які проведені до кіл з точки *C*, були рівними. (побудуйте точку *C* самостійно). Нехай l – довжина цих відрізків дотичних. Коло *S* радіусом l з центром в точці *C* перпендикулярне до кіл S_1, S_2. Тому при інверсії з центром в точці *O*, де т. *O* – будь-яка із точок перетину кола *S* з прямою O_1O_2, коло *S* перейде в пряму, яка перпендикулярна колам S_1' S_2' і, тому, буде проходити через їх центри. Але пряма O_1O_2 теж проходить через центри S_1' і S_2', тому кола S_1' і S_2' будуть концентричними, тобто *O* – центр шуканої інверсії.

У випадку, коли S_2 не коло, а пряма, тоді будуємо перпендикуляр, з точки O_1 на пряму S_2, точка *C* буде точкою його перетину з S_2, а l – довжина відрізка дотичної, проведеної із *C* до S_1. ■

Задача 4.2 (10-11). Через задану точку провести коло, яке перпендикулярне до даних двох кіл.

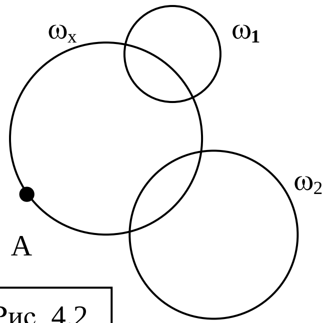


Рис. 4.2

Аналіз. Нехай коло ω_x задовольняє умові задачі. (рис. 4.2). Виконаємо інверсію з центром в точці A і деяким степенем R^2. Тоді кола ω_1 і ω_2 перейдуть в кола ω_1', ω_2', а коло ω_x перейде в пряму ω_x', яка буде ортогональною до кіл ω_1', ω_2', тобто міститиме їх центри. Отже, пряму ω_x' можна побудувати. Тоді виконавши ту ж інверсію (з тим же центром і степенем), одержуємо шукане коло ω_x. ■

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 4.3 (9-10). Дано три кола, які мають спільну точку А. Побудувати коло, яке дотикається трьох даних кіл.

Задача 4.4 (9-10). Побудувати коло, яке проходить через дві дані точки і ортогональне даному колу.

Задача 4.5 (10-11). Побудувати коло, яке проходить через задану точку і ортогональне до до двох заданих кіл.

Задача 4.6 (10-11). Побудувати коло, яке проходить через дані дві точки і дотикається даної прямої.

Задача 4.7 (9-10). Побудувати коло, яке проходить через дану точку і дотикається двох даних кіл.

Задача 4.8 (9-10). Побудувати коло, яке дотикається трьох даних кіл (задача Аполлонія).

Задача 4.9 (10-11). Побудувати коло, яке проходить через дві дані точки і перетинає дану пряму під заданим кутом.

Задача 4.10 (9-10). Побудувати коло, яке проходить через дві дані точки і перетинає дане коло під даним кутом.

Задача 4.11 (10-11). Побудувати коло, яке проходить через дану точку і перетинає дані два кола під заданими кутами.

Задача 4.12 (10-11). Побудувати коло, яке дотикається даного кола і ортогональне до двох даних кіл.

Вказівки та відповіді до задач

4.3. *Вказівка:* виконайте інверсію з центром у заданій точці. **4.4.** *Вказівка:* виконайте інверсію з центром в одній із заданих точок та скористайтесь властивістю конформності інверсії. **4.5.** *Вказівка:* Виконайте інверсію з центром у заданій точці та скористайтесь тим, що пряма і коло ортогонольні, якщо пряма проходить через центр кола. **4.6.** *Вказівка:* виконайте інверсію з центром у одній із заданих точок та скористайтесь властивістю 8 інверсії. **4.7.** *Вказівка:* виконайте інверсію з центром у заданій точці та скористайтесь властивістю 8 інверсії. **4.8.** *Вказівка: с*користайтесь методом варіації радіусів: радіуси заданих кіл зменшіть на радіус найменшого кола, тоді найменше коло „вироджується" в точку. Далі задачу зведіть до 3.7. **4.9.** *Вказівка:* виконайте інверсію з центром у одній із заданих точок та скористайтесь властивістю 8 інверсії. **4.10.** *Вказівка:* виконайте інверсію з центром у одній із заданих точок та скористайтесь властивістю 8 інверсії. **4.11.** *Вказівка:*виконайте інверсію з центром в заданій точці. Тоді задача зводиться до побудови прямої, яка перетинає задані два кола під заданими кутами. **4.12.** *Вказівка:*виконайте інверсію, яка переводить задані два кола (шукане коло, до яких перпендикулярне) в пару прямих (якщо вони мають спільну точку) або в пару концентричних кіл (задача 3.1).

§ 5 АФІННІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ПЛОЩИНИ

Взаємно однозначне перетворення площини, при якому образом будь-якої прямої є пряма, називається ***афінним***.

Всі перетворення площини, які вивчаються в шкільному курсі математики: рухи та перетворення подібності – є афінними перетвореннями.

Можна довести, що будь-яке афінне перетворення площини в довільній системі координат аналітично задається формулами:

$$\begin{aligned} x' &= c_{11}x + c_{12}y + x_0, \\ y' &= c_{21}x + c_{22}y + y_0 \end{aligned}, \qquad \text{де } c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} \neq 0.$$

Афінні перетворення площини мають такі властивості:

1. При афінному перетворенні паралельні прямі переходять в паралельні.
2. Якщо A',B',C' – образи точок A,B,C однієї прямої при афінному перетворенні площини, то зберігається порядок їх взаємного розміщення та просте відношення трьох точок:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{A'C'}{C'B'}.$$

3. Нехай ABC і $A'B'C'$ – будь-які два трикутники. Тоді існує єдине афінне перетворення площини, яке переводить точку A в A', точку B – у B', точку C – в C'. У зв'язку із цим говорять, що будь-які два трикутники є афінно-еквівалентними фігурами.
4. Нехай $ABCD$ і $A'B'C'D'$ – довільні два паралелограми. Тоді існує єдине афінне перетворення, яке переводить один із них в інший. Тобто два будь-які паралелограми є афінно-еквівалентними фігурами.
5. Два чотирикутники $ABCD$ і $A'B'C'D'$ є афінно-еквівалентними тоді і тільки тоді, коли $\frac{AE}{EC} = \frac{A'E'}{E'C'}$ і $\frac{BE}{ED} = \frac{B'E'}{E'D'}$, де E, E' – точки перетину прямих AC, BD і $A'C'$, $B'D'$ відповідно.
6. Для будь-якої трапеції існує афінно-еквівалентна їй рівнобедрена трапеція (але довільні дві трапеції не є афінно-еквівалентними фігурами).
7. Коло і еліпс є афінно-еквівалентними фігурами.

8. Якщо многокутники Φ_1', Φ_2' – образи многокутників Φ_1, Φ_2 при деякому аффінному перетворенні, то відношення площ многокутників Φ_1, Φ_2 дорівнює відношенню площ многокутників Φ_1', Φ_2'.

9. Якщо афінне перетворення площини має три інваріантні напрямки або три інваріантні прямі, то воно є перетворенням гомотетії або паралельного перенесення .

Доведення. Нехай у результаті афінного перетворення

$$\begin{aligned} x' &= c_{11}x + c_{12}y + x_0, \\ y' &= c_{21}x + c_{22}y + y_0 \end{aligned} \quad \text{де } c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} \neq 0$$

довільно вибраної прямої одержалась пряма $Ax' + By' + C = 0$. Тоді рівняння прообразу цієї прямої

$$A(c_{11}x + c_{12}y + x_0) + B(c_{21}x + c_{22}y + y_0) + C = 0.$$

Або $$(Ac_{11} + Bc_{21})x + (Ac_{12} + Bc_{22})y + Ax_0 + By_0 + C = 0.$$

Напрямки прямої образу і прообразу будуть співпадати тоді і тільки тоді, коли $\dfrac{Ac_{11} + Bc_{21}}{A} = \dfrac{Ac_{12} + Bc_{22}}{B}$. Якщо $A = 0$, або $B = 0$ ($A^2 + B^2 \neq 0$), то існуватиме лише один інваріантний напрямок.

Розглянемо випадок, коли $A \neq 0$ і $B \neq 0$. Відношення $-\dfrac{A}{B} = \kappa$ визначає напрямок прямої (її кутовий коефіцієнт). Враховуючи це перепишемо рівняння у вигляді $-c_{11} + \dfrac{c_{21}}{\kappa} = c_{12}\kappa - c_{22}$. У результаті одержимо рівняння $c_{12}\kappa^2 + (c_{11} - c_{22})\kappa - c_{21} = 0$, яке буде мати більше двох розв'язків тоді і тільки тоді, коли $c_{12} = c_{21} = 0$ і $c_{11} = c_{22}$.

Таким чином, афінне перетворення, у якому три інваріантні напрямки, задається аналітично формулами

$$\begin{aligned} x' &= ax + x_0, \\ y' &= ay + y_0 \end{aligned}, \text{де } a \neq 0.$$

Очевидно, що при $a = 1$ афінне перетворення є паралельним перенесенням. Спробуйте обгрунтувати самостійно, що при $a \neq 0$ і $a \neq 1$ ці формули аналітично визначають гомотетію з коефіцієнтом a

та центром в точці $\left(\frac{x_0}{1-a}, \frac{y_0}{1-a}\right)$. Зазначимо, що при $a=-1$ гомотетія є перетворенням центральної симетрії з центром в точці $\left(\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2}\right)$.

Пряма буде інваріантною в заданому афінному перетворенні за умови, що $\frac{Ac_{11}+Bc_{21}}{A}=\frac{Ac_{12}+Bc_{22}}{B}=\frac{Ax_0+By_0+C}{C}$. Отже, у заданому афінному перетворенні існує три інваріантні прямі за умови, що існує принаймні три інваріантні напрямки.

Перетворення площини називається ***перспективно-афінним***, якщо воно має принаймні дві нерухомі точки. Пряма нерухомих точок перспективно-афінного перетворення називається його віссю. Легко обґрунтувати такі найпростіші властивості перспективно-афінних перетворень площини:

1) якщо пряма перетинає вісь перспективно-афінного перетворення в деякій точці, то її пряма-образ буде проходити через цю ж точку;

2) якщо пряма паралельна осі, то її пряма-образ також паралельна його осі;

3) прямі, що сполучають відповідні точки перспективно-афінного перетворення, не інцидентні його осі, співпадають або є паралельними.

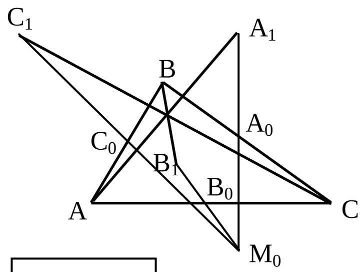


Рис. 5.1

Задача 5.1 (10-11). Нехай M_0 – довільна точка площини трикутника ABC і A_1, B_1, C_1 – точки, які симетричні точці M_0 відносно середин сторін BC, CA і AB. Довести, що відрізки AA_1, BB_1, CC_1 перетинаються в одній точці, яка ділить ці відрізки навпіл і трикутник ABC дорівнює трикутнику $A_1B_1C_1$ (рис. 5.1).

Розв'язання. Трикутник $A_0B_0C_0$ гомотетичний трикутнику ABC із коефіцієнтом $к_1$=1/2 і центром гомотетії в точці перетниу медіан трикутника ABC. Трикутник $A_1B_1C_1$ гомотетичний трикутнику $A_0B_0C_0$ із коефіцієнтом $к_2$=2 і центром гомотетії в точці M_0. Отже, композиція двох перетворень подібності (гомотетій) переводить трикутник ABC в трикутник $A_1B_1C_1$ є рухом, оскільки є перетворенням подібності із коефіцієнтом $к=к_1к_2$=1. Тому

$A_1C_1=AC$ і $A_1C_1 \parallel AC$, $B_1C_1=BC$ і $B_1C_1 \parallel BC$, $A_1B_1=AB$ і $A_1B_1 \parallel AB$. Очевидно, що перетворення центральної симетрії з центром в середині відрізка AA_1 переводить трикутник ABC в трикутник $A_1B_1C_1$. ■

Задача 5.2 (10-11). Через кожну вершину трикутника проведені дві прямі, які ділять протилежну сторону трикутника на три рівні частини. Довести, що діагоналі, які сполучають протилежні вершини шестикутника, утвореного цими прямими, перетинаються в одній точці.

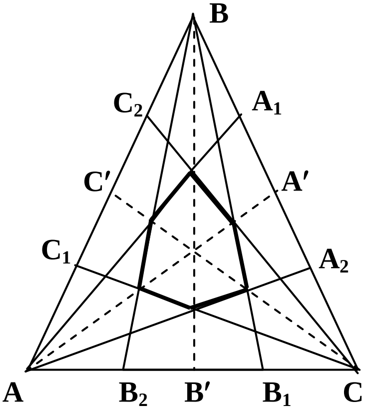


Рис. 5.2

Розв'язання. Оскільки існує афінне перетворення, при якому даний трикутник переходить в правильний і при цьому зберігається відношення довжин паралельних відрізків, то достатньо довести твердження для правильного трикутника (рис. 5.2). Точки A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 ділять сторони трикутника на рівні частини, а A', B', C' - середини його сторін. При симетрії відносно прямої AA' пряма BB_1 переходить в пряму CC_2, а пряма BB_2 – в пряму CC_1. Симетричні прямі перетинаються на осі симетрії тому пряма AA' містить діагональ розглянутого шестикутника.

Аналогічно дві інші діагоналі містяться на прямих BB' і CC'. Але прямі AA', BB', CC' є медіанами трикутника ABC, тому перетинаються в одній точці. ■

Задача 5.3 (10-11). Довести, що центр S описаного кола, ортоцентр H і центр ваги M довільного трикутника належать одній прямій (прямій Ейлера), причому точка M належить відрізку SH і

$$\frac{SM}{MH} = \frac{1}{2}.$$

Розв'язання. Виконаємо гомотетію з центром в точці M і коефіцієнтом $\kappa = -\frac{1}{2}$ трикутника ABC (рис. 5.3).

Одержуємо трикутник $A_1B_1C_1$. Очевидно, що точка S є ортоцентром трикутника $A_1B_1C_1$. Отже, у виконаній гомотетії точці H (ортоцентру трикутника ABC) відповідає точка S (ортоцентр трикутника $A_1B_1C_1$). Із означення гомотетії випливає, що точки M, H, S належать одній прямій. Оскільки коефіцієнт гомотетії $\kappa = -\frac{1}{2}$<0, то точка M належить відрізку SH і $\frac{SM}{MH} = |k| = \frac{1}{2}$. ■

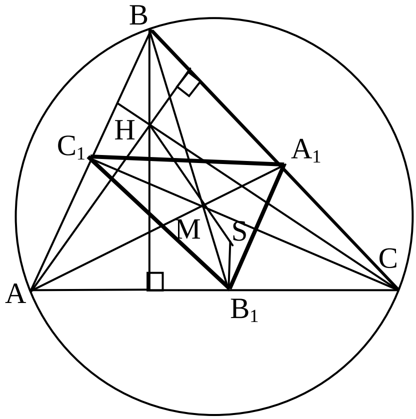


Рис 5.3

Задача 5.4 (10-11). Довести, що довільному трикутнику ABC з ортоцентром в точці H, дев'ять точок – середини трьох сторін, основи трьох висот і середини відрізків HA, HB і HC – належать одному колу (колу Ейлера).

Розв'язання. Виконаємо гомотетію з центром в точці M коефіцієнтом $\kappa = -\frac{1}{2}$ трикутника ABC і описаного навколо нього кола ω (рис. 5.4). Тоді трикутник ABC перейде в трикутник $A_1B_1C_1$, а коло ω – в коло ω_1, яке проходитиме через точки A_1, B_1, C_1. Центр кола ω – точка O перейде в точку O_1 – центр кола ω_1, причому $\frac{O_1M}{MO} = \frac{1}{2}$. За попередньою задачею $\frac{OM}{MH} = \frac{1}{2}$.

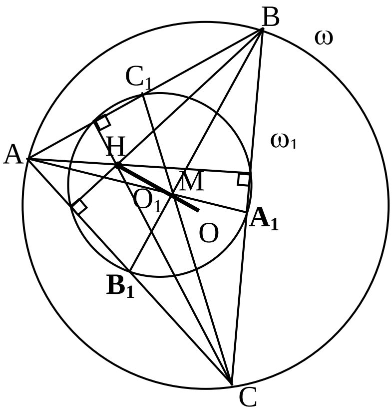


Рис. 5.4

Тоді

$$HO_1 = HM - \frac{1}{2}MO = \frac{3}{2}HO - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}HO = \frac{1}{2}H$$

. Отже, точка O_1 – середина відрізка HO. Очевидно, що радіус кола ω_1 дорівнює половині радіуса кола ω.

Виконаємо гомотетію кола ω з центром в точці H і коефіцієнтом $\kappa = \frac{1}{2}$. Очевидно, що образом цього кола буде теж коло ω_1, оскільки в результаті одержуємо коло з тим центром і тим же радіусом.

Оскільки коефіцієнт гомотетії $\kappa = \frac{1}{2}$, то коло ω_1 проходить через середини відрізків HA, HB, HC. Точки, які симетричні ортоцентру трикутника відносно його сторін, належать описаному навколо нього колу. Тоді коло ω_1 буде проходити через основи висот трикутника. ■

Задача 5.5. Два трикутники ABC і $A'B'C'$ розміщені так, що прямі AA', BB', CC' є паралельними і точки A і A' не співпадають. Визначити тип афінного перетворення , при якому точки A, B, C переходять відповідно в точки A', B', C'.

Розв′язання. Оскільки точки A, A', B не є колінеарними, то приймемо за координатні вектори $\vec{e}_1 = \overline{AA'}$, $\vec{e}_2 = \overline{AB}$. Тоді за умовою задачі $A(0, 0), \mathrm{B}(0,1), \mathrm{C}(\mathrm{b}_1, c)$, $A'(1, 0), B'(a, 1), C'(\mathrm{b}_2, c)$ $\mathrm{b}_1 \neq 0$. Скориставшись загальним аналітичним заданням афінних перетворень одержуємо, що трикутник ABC переходить в трикутник $A'B'C$ за допомогою перетворення, яке має таке координатне задання

$$x' = \frac{\mathrm{b}_2 + (1-a)c - 1}{b_1} x + (a-1)y + 1, \quad y' = y.'$$

Очевидно, що при $a = 1$ і $\frac{\mathrm{b}_2 - 1}{b_1} = 1$ таким перетворенням є паралельне перенесення. Якщо $a \neq 1$, то таке афінне перетворення містить пряму $\left(\frac{\mathrm{b}_2 + (1-a)c - 1}{b_1} - 1\right)x + (a-1)y + 1 = 0$, кожна точка якої буде нерухомою. Отже, при $a \neq 1$ перетворення площини є перспективно-афінним. ■

Задачі для самостійного розв’язання

Задача 5.6. За допомогою властивостей афінних перетворень площини довести, що в довільній трапеції ABCD точка S перетину прямих, які містять бічні сторони, середини E і F основ AB і CD, точка M перетину діагоналей належать одній прямій.

Задача 5.7. Перспективно-афінне перетворення задане віссю a і парою відповідних точок M і M', що не належать осі. Побудувати образ довільної точки N.

Задача 5.8. Два трикутники ABC і $A'B'C'$ на площині розміщені так, що їх відповідні медіани паралельні. Довести, що їх відповідні сторони також паралельні.

Задача 5..9. На сторонах *AB, BC, CD* паралелограма *ABCD* вибрані точки *К, L*, і *M* відповідно, які ділять ці сторони в однакових відношеннях. Нехай *b, c, d* – прямі, які проходять через *B, C, D* паралельно прямим KL, KM, ML відповідно. Довести, що прямі *b, c, d* перетинаються в одній точці.

Задача 5.10. Дано трикутник *ABC. O* – точка перетину його медіан, а *M, N* і *P* – точки сторін *AB, BC,* і *CA*, які ділять ці сторони в однакових відношеннях, тобто *AM:MB=BN:NC=CP:PA*. Довести, що: 1) *O* – точка перетину медіан трикутника *MNP*; 2) *O* – точка перетину медіан трикутника, утвореного прямими *AN, BP* і *CM*.

Задача 5.11. У трапеції *ABCD* з основами *AD* і *BC* через точку *B* проведена пряма, яка паралельна стороні *CD* і перетинає діагональ *AC* в точці *P*, а через точку *C* – пряма, яка паралельна стороні *AB* перетинає діагональ *BD* в точці *Q*. Довести, що пряма *PQ* паралельна основам трапеції.

Задача 5.12. Довести, що якщо в чотирикутнику *ABCD* середня лінія проходить через точку перетину *P* діагоналей і ділиться нею навпіл, то чотирикутник – паралелограм.

Задача 5.13. Два трикутники *ABC* і *A'B'C'* на площині розміщені так, що прямі AA', BB', CC' є паралельними. Довести, що сторони цих трикутників мають дезаргове розташування, тобто виконується один із випадків:

1) в площині трикутників існує пряма, що містить точки перетину відповідних сторін трикутників;
2) відповідні сторони трикутників є паралельними.

Задача 5.14. Нехай пряма m є дотичною еліпса, а його діаметр n проходить через точку дотику. Довести, що пряма m паралельна хордам еліпса, середини яких належать діаметру n.

Вказівки та відповіді до задач до задач

5.6. *Вказівка*: скористайтесь тим, що існує афінне перетворення, яке переводить задану трапецію у рівнобедрену. **5.7.** *Вказівка*: скористайтесь властивостями перспективно-афінних перетворень площини. **5.8.** *Вказівка*: доведіть, що афінне перетворення площини, що переводить трикутник ABC в трикутник $A'B'C'$, має три інваріантних напрямки. **5.9.** *Вказівка:* будь-який паралелограм афінним перетворенням можна перевести в квадрат. Оскільки при цьому зберігається відношення довжин паралельних відрізків, то досить довести це твердження для випадку, коли $ABCD$ – квадрат. Позначимо через P точку перетину прямих b і d. Досить показати, що $PC\| MK$. Відрізок KL переходить в LM при повороті на 90^0 навколо центра квадрата $ABCD$, тому прямі b і d, які відповідно паралельні цим відрізкам, перпендикулярні. Отже, точка P належить колу, описаному навколо $ABCD$. Тоді $\angle CPD = \angle CBD = 45^0$, отже, кут між прямими CP і b дорівнює 45^0. Оскільки кут між прямими KL і MK теж дорівнює 45^0, і $b\| KL$, то $PC\| MK$. **5.10.** *Вказівка:* 1. Виконайте афінне перетворення, яке переводить трикутник ABC в правильний трикутник $A'B'C'$. Нехай O', M', N', P' – образи точок O, M, N, P. При повороті на 120^0 навколо точки O' трикутник $M'N'P'$ переходить в себе, а тому він є правильним і O' – точка перетину його медіан. Далі скористайтесь, що при афінному перетворенні медіана переходить в медіану. 2. Розв'язується аналогічно. **5.11.** *Вказівка:* виконайте афінне перетворення, яке переводить трапецію $ABCD$ у рівнобедрену трапецію $A'B'C'D'$. Тоді при симетрії відносно серединного перпендикуляра до $A'D'$ точка P' переходить в точку Q'. **5.12.** *Вказівка:* розгляньте афінне перетворення, при якому точки P, A, B переходять відповідно в точки P, C, D. Доведіть, що це афінне перетворення є рухом (центральною симетрією). **5.14.** *Вказівка*: скористайтесь афінною еквівалентністю кола і еліпса, доведіть це твердження для кола та скористайтесь основними властивостями афінних перетворень (інваріантність паралельності прямих й простого відношення трьох точок прямої)

§ 6. ПРОЕКТИВНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ПЛОЩИНИ

Перетворення площини, яке у прямокутній декартовій системі координат (ПДСК) задається формулами

$$x' = \frac{A_1x + B_1y + C_1}{A_3x + B_3y + C_3},\ y' = \frac{A_2x + B_2y + C_2}{A_3x + B_3y + C_3}$$

називається ***проективним***.

Очевидно, що для всіх точок *M(x;y)* площини, координати яких які задовольняють рівнянню

$$A_3x + B_3y + C_3 = 0, \qquad (1)$$

точок образів не існує.

Щоб відповідність між точками площини була взаємно однозначною, вважають, що у випадку (1) точці *M(x;y)* відповідає невласна (нескінченно віддалена) точка прямої $M_\infty(x';y')$. Точку *M(x;y)* - називають граничною.

Образом прямої (1) у перетворенні (*) є нескінченно віддалена або невласна пряма. Пряму, яку доповнено її невласною точкою, називають проективною прямою. А площину, доповнену невласною прямою (як множину всіх її невласних точок), називають проективною площиною.

Проективні перетворення площини пов'язані з методом центральної проекції, оскільки під проективними властивостями фігур розуміють ті їх властивості, які зберігаються при будь-яких центральних проекціях.

Інваріантом центрального проектування (проективних перетворень) є складне (подвійне) відношення чотирьох точок прямої. Складне відношення чотирьох точок прямої визначається як частка двох простих відношень трьох точок:

$$(AB,\ CD) = \frac{(AB,\ C)}{(AB,\ D)} = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB},$$

тут $A,\ B$ - базисні точки, $C,\ D$ - подільні.

Отже, при довільному проективному перетворенні площини виконується рівність $(AB,\ CD) = (A'B', C'D')$, де A', B', C', D' – образи точок *A,B,C,D* відповідно в цьому перетворенні.

Можна обгрунтувати такі властивості проективних перетворень площини:

Теорема 6.1 Проективне перетворення площини будь-яку її пряму переводить у пряму.

Теорема 6.2. Для заданого проективного перетворення площини існує єдина гранична пряма, тобто така, яка при цьому перетворенні переходить у невласну пряму.

Теорема 6.3. Проективне перетворення площини цілком визначається заданням чотирьох пар відповідних точок загального розташування (жодні три із яких не належать одній прямій).

Теорема 6.4. Існує проективне перетворення, яке дане коло переводить в коло, а задану точку всередині кола - в центр образу.

Теорема 6.5. Нехай на площині дані коло і пряма, яка його не перетинає. Тоді існує таке проективне перетворення, яке коло переводить в коло, а пряму – в невласну пряму.

Теорема 6.6. Нехай в колі ω задано точку O. Розглянемо усі проективні перетворення, які коло ω відображають у коло, а точку O – в центр образу. Тоді такі перетворення відображають на нескінченність одну і ту ж пряму.

Наведені вище теореми дають змогу довести деякі фундаментальні теореми елементарної геометрі методом, який принципово відрізняється від традиційних.

Теорема 6.7 (Бріаншона). Нехай *ABCDEF* - шестикутник, описаний навколо кола. Тоді його діагоналі *AD*, *BE*, *CF* перетинаються в одній точці (точці Бріаншона).

Доведення. Спочатку доведемо таку лему.

Лема Якщо в шестикутнику *ABCDEF*, описаному навколо кола з центром *O*, діагоналі *AD, BE* проходять через точку *O*, то діагональ *CF* теж містить точку *O*.

Доведення леми. Нехай OH_1, OH_2, OH_3, OH_4, OH_5, OH_6 - висоти трикутників ΔOAB, ΔOBC, ΔOCD, ΔODE, ΔOEF, ΔOFA (рис. 6.1).

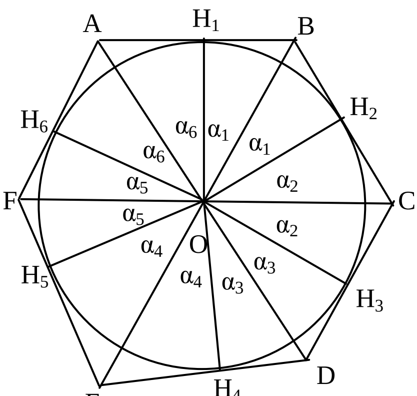


Рис. 6.1

Тоді

$\angle H_1OB=\angle BOH_2=\alpha_1$, $\angle H_4OE=\angle EOH_5=\alpha_4$,, $\angle H_2OC=\angle COH_3=\alpha_2$,, $\angle H_5OF=\angle FOH_6=\alpha_5$, $\angle H_3OD=\angle DOH_4=\alpha_3$,, $\angle H_6OA=\angle AOH_1=\alpha_6$,. Очевидно, що $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6=180°$.

З умови $AD\cap BE=O$ випливає, що $\angle AOB=\angle DOE$. Тоді $\alpha_1+\alpha_6=\alpha_3+\alpha_4$. Знайдемо $\angle COF$. Маємо

$\angle COF=2\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_6+\alpha_5=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6=180°$.

Отже, пряма CF містить точку O, що й треба було довести. Лема доведена.

Для доведення теореми Бріаншона скористаємось теоремою 6.4 про проективне перетворення кола**.** Існує проективне перетворення, яке коло, вписане в шестикутник, переводить в коло, вписане у відповідний шестикутник, а точку перетину двох діагоналей шестикутника - в точку перетину відповідних діагоналей, яка буде центром кола-образу. Згідно з лемою третя дагональ шестикутника-образа, описаного навколо кола-образа, проходить через точку перетину двох інших його діагоналей. Отже, три діагоналі шестикутника-прообраза, описаного навколо кола, теж будуть проходити через одну точку. ■

Теорема 6.8 (Паскаля). Якщо шестикутник $ABCDEF$ є вписаним в коло, то точки перетину протилежних сторін AB і DE, BC і EF, CD і FA належать одній прямій (прямій Паскаля).

Доведення. У курсі елементарної геометрії математики відома теорема.

Лема. Якщо шестикутник $ABCDEF$ вписаний в коло, причому $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$, то $CD \parallel AF$ (доведіть її самостійно).

Для доведення теореми Паскаля розглянемо проективне перетворення, яке переводить описане навколо шестикутника коло в коло, описане навколо відповідного шестикутника-образа, а точки перетину прямих AB і DE, BC і EF – у нескінченно віддалені (невласні) точки. Отже, $A'B' \parallel D'E'$, $B'C' \parallel E'F'$. Тоді за лемою $C'D' \parallel A'F'$. Отже, три пари протилежних сторін шестикутника-образа проективного перетворення перетинаються у трьох невласних точках, які належать невласній прямій. Оскільки при проективному перетворенні пряма переходить в пряму, то три точки перетину протилежних сторін шестикутника - прообраза, вписаного в коло-прообраз, належать одній прямій.

Теорема 6.9 (Дезарга). Нехай прямі a, b, c перетинаються в точці O. Якщо в трикутниках $A_1B_1C_1$ і $A_2B_2C_2$ вершини A_1 і A_2 належать прямій a, B_1 і B_2 - прямій $в$, C_1 і C_2 – прямій c, а точки A, B, C є перетином прямих B_1C_1 і B_2C_2, C_1A_1 і C_2A_2, A_1B_1 і A_2B_2 відповідно, то точки A, B, C належать одній прямій (рис. 6.2).

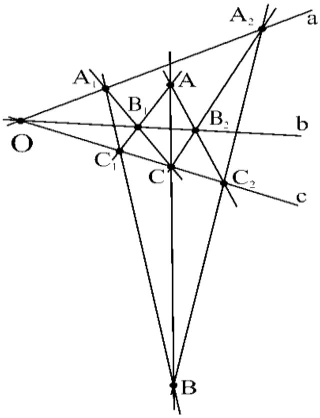


Рис. 6.2

Доведення. Виконаємо проективне перетворення рисунка 6.2, у якому пряма AB є граничною прямою. Тоді $C_1^{'}B_1^{'} \parallel C_2^{'}B_2^{'}$ і $A_1^{'}C_1^{'} \parallel A_2^{'}C_2^{'}$. Розглянемо гомотетію з центром в точці $O^{'}$ і коефіцієнтом $k = \dfrac{OA_2^{'}}{OA_1^{'}}$. При цій гомотетії точка $C_1^{'}$ перейде в точку $C_2^{'}$, а точка $B_1^{'}$ - в $B_2^{'}$, оскільки $C_1^{'}B_1^{'} \parallel C_2^{'}B_2^{'}$ і $A_1^{'}C_1^{'} \parallel A_2^{'}C_2^{'}$.

Тому $B_1^{'}A_1^{'} \parallel B_2^{'}A_2^{'}$, оскільки трикутник $A_1^{'}\ B_1^{'}\ C_1^{'}$ і трикутник $A_2^{'}\ B_2^{'}\ C_2^{'}$ – гомотетичні (рис. 6.3). Отже, точки $A^{'}\ B^{'}\ C^{'}$ належать невласній прямій, а точки A, B, C – граничній прямій.

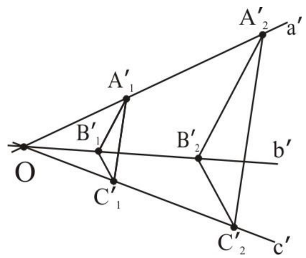


Рис. 6.3

Теорема 4 дає змогу обґрунтувати побудову дотичної до кола за допомогою однієї лінійки.

Побудова (рис. 6.4).

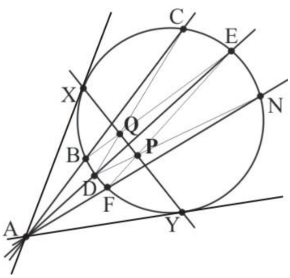


Рис. 6.4

1. Через точку А проводимо довільні січні до кола (AB), (AD), (AF).

2. Знаходимо: $C = (W, r) \cap (AB)$,
$E = (W, R) \cap (AD)$, $N = (W, r) \cap (AF)$.

3. Будуємо прямі: (BE), (DC), (EF), (DN).

4. Знаходимо точки: $Q = (DC) \cap (BE)$ і

$P=(EF)\cap(DN)$.

5. Будуємо пряму (QP).

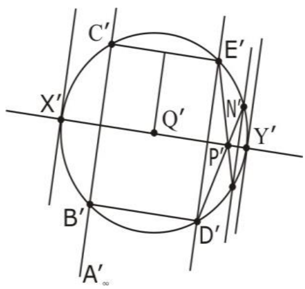


Рис. 6.5

6. Знаходимо: $X=(W,r)\cap(QP)$, $Y=(W,r)\cap(QP)$.

7. Будуємо прямі (AX), (AY), які є шуканими дотичними.

Доведення. У результаті проективного перетворення отримуємо рисунок 6.5. Очевидно, що $(B^{'}C^{'})\parallel(E^{'}D^{'})$ і чотирикутник $B^{'}C^{'}E^{'}D^{'}$ є прямокутником. Тоді $(X^{'}A_{\infty}^{'})$ і $(Y^{'}A_{\infty}^{'})$ є дотичними до кола $\omega^{'}$. Тому прямі (AX) і (AY) є теж дотичними.

Задачі для самостійного розв’язування.

Задача 6.1. Довести, що в п’ятикутнику, описаному навколо кола, дві прямі, які містять по парі несуміжних вершин, і третя пряма, яка проходить через п’яту вершину і точку дотику протилежної сторони, перетинаються в одній точці.

Задача 6.2. Довести, що в чотирикутнику, описаному навколо кола, діагоналі проходять через точку перетину прямих, які містять точки дотику протилежних сторін чотирикутника.

Задача 6.3. Довести, що три прямі, які містять вершини трикутника і точки дотику протилежних сторін до вписаного в трикутник кола, перетинаються в одній точці.

Задача 6.4. Довести, що в п’ятикутнику, вписаному в коло, дві точки перетину двох пар несуміжних сторін і точка перетину п’ятої сторони з дотичною, проведеною у протилежній до неї вершині п’ятикутника, належать одній прямій.

Задача 6..5. Довести, що дві точки перетину протилежних сторін чотирикутника, вписаного в коло і дві точки перетину дотичних до кола, проведених у протилежних вершинах чотирикутника, належать одній прямій.

Задача 6.6. Довести, що сторони трикутника вписаного в коло і дотичні, проведені у вершинах трикутника, які протилежні цим сторонам, перетинаються у трьох точках однієї прямої.

Задача 6.7. Довести, якщо точки A, B, C належать прямій l, а точки A_1, B_1, C_1 прямій l_1, то точки перетину прямих AB_1 і BA_1, BC_1 і CB_1, CA_1 і AC_1 належать одній прямій (теорема Паппа).

Задача 6.8. Доведіть твердження обернене до теореми 6.9 (Дезарга).

Вказівки та відповіді до задач

6.1. *Вказівка*. Доведіть спочатку лему: якщо в п'ятикутнику *ABCDE*, описаному навколо кола з центром *O*, діагоналі *AD* і *BE* проходять через точку *O*, то пряма, яка проходить через точку *C* і точку дотику сторони *AE*, буде містити точку *O*. Далі скористайтесь теоремою 6.4 про проективне перетворення кола.

6.2. *Вказівка*. Доведіть лему: якщо в чотирикутнику, описаному навколо кола, діагоналі перетинаються в його центрі, то дві прямі, які містять точки дотику протилежних сторін чотирикутника, теж проходять через центр кола, вписаного в цей чотирикутник. Далі скористайтесь теоремою 6.4.

6.3. *Вказівка*. Використайте очевидне твердження: у правильному трикутнику три прямі, які містять вершини трикутника і точки дотику протилежних сторін до вписаного у нього кола, перетинаються в одній точці – центрі правильного трикутника. Далі скористайтесь теоремою про проективне перетворення кола.

6.4. *Вказівка*. Доведіть лему: якщо в п'ятикутнику, вписаному в коло дві пари сторін паралельні, то його п'ята сторона паралельна дотичній до кола, проведеній у протилежній до цієї сторони вершині п'ятикутника. Далі скористайтесь теоремою 6.5 про проективне перетворення кола і прямої

6.5. *Вказівка*. Доведіть лему: дотичні до кола, які проведені у вершинах вписаного прямокутника, паралельні. Далі скористайтесь теоремою 6.5.

6.6. *Вказівка*. Використайте очевидне твердження: сторони правильного трикутника, вписаного в коло і дотичні проведені у вершинах трикутника, які протилежні цим сторонам, паралельні.

6.7. *Вказівка*. Доведіть спочатку лему: нехай точки A, B, C належать одній прямій, а точки A_1, B_1, C_1 – іншій. Тоді, якщо $AB_1 \parallel BA_1$ і $AC_1 \parallel CA_1$, то $BC_1 \parallel CB_1$. Далі скористайтесь теоремою про проективне перетворення кола і прямої.

6.8. *Вказівка:* розгляньте проективне перетворення, при якому три точки перетину відповідних сторін трикутників належать граничній прямій і доведіть, що одержані трикутники –образи, будуть гомотетичними.

§ 7. ВЕКТОРНО-КООРДИНАТНИЙ МЕТОД

Застосування векторів, їх координат, операцій над векторами у процесі розв’язування геометричних задач називається ***векторно-координатним методом.***

При встановленні різних векторних співвідношень часто використовуються такі означення і теореми.

Два вектори називаються рівними, якщо вони суміщаються паралельним перенесенням. Для довільних трьох точок A,B,C виконується векторна рівність: $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

Теорема 7.1 (геометричний критерій рівності векторів). Для того, що два вектори були рівними необхідно і досить, щоб вони були співнапрямленими та рівними за абсолютною величиною.

Теорема 7.2 (координатний критерій рівності векторів). Для того, щоб два вектори були рівними необхідно і досить, щоб їх відповідні координати були рівними.

Два вектори називаються ***колінеарними***, якщо вони лежать на паралельних прямих або на одній прямій. Отже, колінеарні вектори можуть бути співнапрямленими або протилежно напрямленими.

Теорема 7.3 (критерій колінеарності векторів). Для того, щоб два вектори $\vec{a}(a_1;a_2)$ та $\vec{b}(b_1;b_2)$ були колінеарними, необхідно і досить, щоб їх відповідні координати були пропорційними, тобто $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2}$.

Із цього випливає, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є колінеарними, якщо існує дійсне число *k* таке, що $\vec{a} = k\,\vec{b}$ чи $\vec{b} = k\,\vec{a}$.

Теорема 7.4. Якщо M – точка перетину медіан трикутника ABC, то для довільної точки O (простору) виконується векторна рівність

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right).$$

Крім операцій додавання, віднімання векторів, множення вектора на число доцільно використовувати скалярний добуток векторів.

Якщо у прямокутній системі координат два вектори задані своїми координатами: $\vec{a}(a_1;a_2)$, $\vec{b}(b_1;b_2)$, то скалярним добутком цих векторів називається число:

$$\vec{a}\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 .$$

Аналогічне означення має місце для трьохвимірних векторів.

Теорема 7.5. Скалярний добуток двох векторів чисельно дорівнює добутку їх абсолютних величин і косинуса кута між ними:

$$\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}|\;|\vec{b}|\cos\varphi,\ \text{де}\ \varphi = \angle(\vec{a};\vec{b}) .$$

Формулу $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{a}|\;|\vec{b}|}$ зручно використовувати для знаходження кутів між векторами (чи прямими).

Для знаходження довжини вектора зручною є формула $|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a})^2}$.

Теорема 7.6 (критерій перпендикулярності векторів). Для того, щоб вектори були перпендикулярними, необхідно і досить, щоб їх скалярний добуток дорівнював нулю.

Ефективним засобом розв'язування задач є теорема про єдиність розкладу довільного вектора (на площині) за даними двома неколінеарними векторами та теорема про єдиність розкладу довільного вектора (в просторі) за даними трьома некомпланарними векторами

Нехай $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – вектори на площині (чи паралельні деякій площині).

Теорема 7.7. Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні, то для довільного вектора $\vec{c}$ існує єдина впорядкована пара дійсних чисел х, у таких, що $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називаються ***компланарними***, якщо рівні їм вектори із спільним початком лежать в одній площині.

Теорема 7.8. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ є компланарними тоді і тільки тоді, коли існує трійка дійсних чисел х, у, z таких, що $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$ *та* $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$.

Нехай $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ – вектори у просторі.

Теорема 7.9. Якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ некомпланарні, то для довільного вектора $\vec{d}$ існує єдина впорядкована трійка дійсних чисел x, y, z таких, що $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$.

Теорема 7.10. Нехай $\overrightarrow{OC} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$ - розклад вектора $\overrightarrow{OC}$ за двома неколінеарними векторами $\overrightarrow{OA}$ та $\overrightarrow{OB}$. Тоді точки A, B, C належать одній прямій тоді і тільки тоді, коли

$$\alpha + \beta = 1.$$

Теорема 7.11. Нехай $\overrightarrow{OD} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}$ - розклад вектора $\overrightarrow{OD}$ за трьома некомпланарними векторами $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$. Тоді точки *A, B, C, D* належать одній площині тоді і тільки тоді, коли

$$\alpha + \beta + \gamma = 1.$$

Раціонально застосовувати вектори при розв'язуванні геометричних задач на знаходження довжин відрізків, кутів між прямими (півпрямими), поділу відрізка в деякому відношенні, а також при доведенні, що три точки належать одній прямій, чотири точки одній площині, паралельності прямих.

При розв'язуванні задач векторним методом раціонально скористатись таким алгоритмом.

1. Ввести два неколінеарні вектори (при розв'язуванні планіметричних задач) або три некомпланарні вектори (при розв'язанні стереометричних задач).
2. "Необхідні" вектори (відповідно до умови задачі) розкласти через введені.

3.1. При знаходженні довжини відрізка скористатися властивістю скалярного квадрата вектора.

3.2. При знаходженні кута між прямими (півпрямими) – формулою скалярного добутку двох векторів.

3.3. При знаходженні поділу відрізка в деякому відношенні – коефіцієнтом колінеарності двох колінеарних векторів.

3.4. При доведенні того, що три точки належать одній прямій – колінеарністю векторів, побудованих на цих точках (або теоремою 4.10).

3.5. При доведенні того, що чотири точки належать одній площині – компланарністю трьох векторів, побудованих на цих точках (або теоремою 4.11).

Задача 7.1 (УМО-1964, 9). Всередині трикутника *ABC* взято точку *O*. На променях *OA*, *OB*, *OC* побудовано вектори з початком у точці *O*, довжина кожного з яких дорівнює 1. Довести, що сума цих векторів має довжину, меншу за 1.

Розв'язання. Нехай на променях *OA*, *OB*, *OC* побудовано відповідно вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ такі, що $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$. Позначимо $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=\gamma$, $\angle(\vec{b},\vec{c})=\alpha$, $\angle(\vec{a},\vec{c})=\beta$. Очевидно, що $\alpha+\beta+\gamma=360°$.

Тоді отримуємо

$$|\vec{d}|=\sqrt{\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)^2}=\sqrt{\vec{a}^{\,2}+\vec{b}^{\,2}+\vec{c}^{\,2}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{a}\cdot\vec{c}+2\vec{b}\cdot\vec{c}}=$$

$$=\sqrt{3+2(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)}=\sqrt{3+2(\cos\alpha+\cos\beta)+2\cos(\alpha+\beta)}=$$

$$=\sqrt{3+4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+4\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}-2}=$$

$$=\sqrt{1+4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}=$$

$$=\sqrt{1+8\cos\left(180^\circ-\frac{\gamma}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}=\sqrt{1-8\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}<1,$$

оскільки кути $\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2},\frac{\gamma}{2}$ – гострі. ■

Задача 7.2 (УМО-1973, 10). Нехай *SABC* – тригранний кут. Довести, що коли один із кутів, які утворюють між собою бісектриси плоских кутів при вершині *S*, є прямим, то два інших також прямі.

Розв'язання. Відкладемо на ребрах даного тригранного кута рівні між собою відрізки *SA*, *SB*, *SC* та позначимо $\overrightarrow{SA}=\vec{a}, \overrightarrow{SB}=\vec{b}, \overrightarrow{SC}=\vec{c}$. Тоді бісектриси плоских кутів при вершині *S* паралельні векторам $\vec{a}+\vec{b}, \vec{b}+\vec{c}, \vec{c}+\vec{a}$. За умовою два з цих векторів перпендикулярні (тобто їх скалярний добуток дорівнює нулю), довжини цих векторів рівні між собою, попарні скалярні добутки цих векторів також рівні між собою:

$$\left((\vec{a}+\vec{b}),(\vec{b}+\vec{c})\right)=\left((\vec{b}+\vec{c}),(\vec{c}+\vec{a})\right)=\left((\vec{a}+\vec{b}),(\vec{c}+\vec{a})\right)=$$

$$=(\vec{a},\vec{b})+(\vec{b},\vec{c})+(\vec{c},\vec{a})+\left|\vec{a}\right|^2 .$$

Отже, вектори $\vec{a}+\vec{b},\ \vec{b}+\vec{c},\ \vec{c}+\vec{a}$, а тому і бісектриси плоских кутів при вершині *S* попарно перпендикулярні. ■

Задача 7.3 (9-10). У трикутнику *ABC* на сторонах *AB* та *AC* точки *M* та *N* відповідно вибираються так, що $AM=\dfrac{AB}{n}$, $AN=\dfrac{AC}{n+1}$. Довести, що при всіх натуральних *n* пряма *MN* проходить через одну і ту ж точку. Знайти цю точку.

Розв'язання. Нехай *O* – деяка точка площини (відмінна від точки *M*), $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$. Тоді існують *x*, *y* $\in$ *R* такі, що $\overrightarrow{AO}=x\,\vec{b}+y\,\vec{c}$. Покажемо, що існує пара чисел (*x*, *y*) таких, що для всіх $n\in N$ вектори $\overrightarrow{MN}$ і $\overrightarrow{MO}$ колінеарні (це рівносильно тому, що пряма *MN* проходить через точку *O*). Маємо

$$\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AO}=-\frac{1}{n}\vec{b}+x\,\vec{b}+y\,\vec{c}=\left(x-\frac{1}{n}\right)\vec{b}+y\,\vec{c},$$

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=-\frac{1}{n}\vec{b}+\frac{1}{n+1}\vec{c}.$$

Вектори $\overrightarrow{MN}$ і $\overrightarrow{MO}$ колінеарні тоді і тільки тоді, коли $\left(x-\dfrac{1}{n}\right):\left(-\dfrac{1}{n}\right)=y:\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$, тобто $-nx+1=(n+1)y$. Легко перевірити, що така рівність виконується при всіх $n\in N$ тоді і тільки тоді, коли $x=-1$, $y=1$.

Тоді $\overrightarrow{AO}=\vec{c}-\vec{b}$, або $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{BC}$, тобто шукана точка *O* така, що чотирикутник *ABCO* – паралелограм. ■

Задача 7.4 (10). Нехай *P* і *Q* – середини діагоналей *BD* і *AC* чотирикутника *ABCD*. Довести, що

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4PQ^2 .$$

Розв'язання. Позначимо $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$. Оскільки ці вектори неколінеарні, то існує єдина пара дійсних чисел *x*, *y* таких, що $\overrightarrow{AC}=x\,\vec{a}+y\,\vec{b}$. Тоді маємо

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(x-1)\vec{a}+y\vec{b},\quad \overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a},$$

$$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}=-x\vec{a}+(1-y)\vec{b},\quad \overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AQ}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\vec{b}-\vec{a}\right)-\vec{b}+\frac{1}{2}\left(x\vec{a}+y\vec{b}\right)=\frac{1}{2}(x-1)\vec{a}+\frac{1}{2}(y-1)\vec{b}.$$

Тоді отримуємо

$$AC^2+BD^2+4PQ^2=\left(x\,\vec{a}+y\,\vec{b}\right)^2+\left(\vec{b}-\vec{a}\right)^2+\left((x-1)\,\vec{a}+(y-1)\,\vec{b}\right)^2=$$

$$=\vec{a}^{\,2}\left(2x^2-2x+2\right)+\vec{b}^{\,2}\left(2y^2-2y+2\right)+2\vec{a}\vec{b}\left(2xy-x-y\right),$$

$$AB^2+BC^2+CD^2+AD^2=\vec{a}^{\,2}+\left((x-1)\,\vec{a}+y\,\vec{b}\right)^2+\left(-x\,\vec{a}+(1-y)\,\vec{b}\right)^2+$$

$$+\vec{b}^{\,2}=\vec{a}^{\,2}\left(2x^2-2x+2\right)+\vec{b}^{\,2}\left(2y^2-2y+2\right)+2\vec{a}\vec{b}\left(2xy-x-y\right).$$

Отже, $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4PQ^2$. ■

Задача 7.5 (10-11). У паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка *K* є серединою B_1C_1. Знайти відношення, у якому площина *BKD* ділить діагональ AC_1 (рис.7.1).

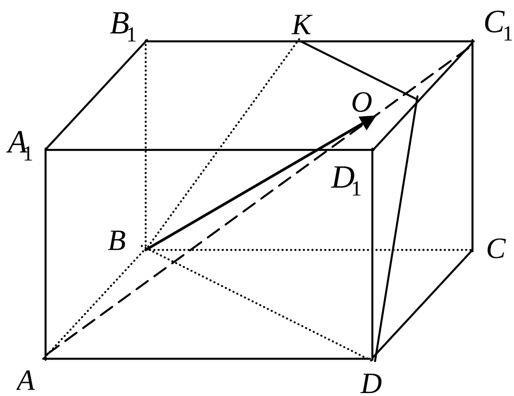


Рис. 7.1

Розв'язання. Нехай *O* – точка перетину площини *BKD* і діагоналі AC_1. Позначимо $\overrightarrow{AA_1}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{c}$, $\frac{AO}{AC_1}=x$. Тоді $\overrightarrow{AO}=$ $=x\,\overrightarrow{AC_1}=x\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.

Існує єдина пара чисел *y*, *z* таких, що $\overrightarrow{BO}=y\,\overrightarrow{BK}+z\,\overrightarrow{BD}$. Тому отримуємо також, що

$$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}=\vec{b}+y\left(\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1K}\right)+z\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)=$$

$$=\vec{b}+y\left(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)+z\left(\vec{c}-\vec{b}\right)=y\vec{a}+(1-z)\vec{b}+\left(\frac{y}{2}+z\right)\vec{c}.$$

Отже,

$$\overrightarrow{AO}=x\vec{a}+x\vec{b}+x\vec{c}=y\vec{a}+(1-z)\vec{b}+\left(\frac{y}{2}+z\right)\vec{c}.$$

З єдиності такого представлення отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x=y; \\ x=1-z; \\ x=0{,}5y+z. \end{cases}$$

Розв'язавши її, отримуємо $x=\frac{2}{3}$. Отже, $AO:OC_1=2:1$. ■

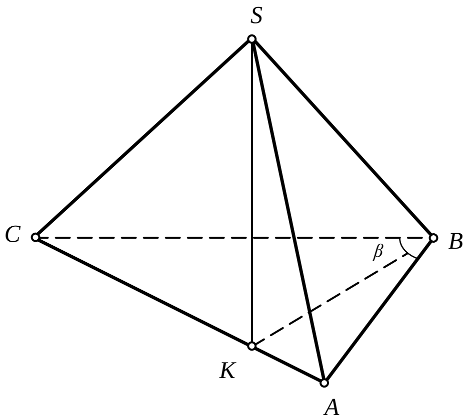


Рис. 7.2

Задача 7.6 (11). Основою піраміди SABC є трикутник ABC, у якого $AB=a$, $BC=3a$, $\angle ABC=\beta$. Бічне ребро $SB=a$ і утворює з ребром AB кут β, а з ребром BC кут γ. Визначити площу перерізу піраміди площиною, яка проходить через ребро SB і ділить ребро AC у відношенні 1:3, рахуючи від точки A (рис. 7.2).

Розв'язання. Маємо

$$S_n=\frac{1}{2}BK\cdot BS\cdot\sin\angle KBS.$$

Для знаходження BK запишемо векторну рівність

$$\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}\right)=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BC},$$

звідки знаходимо

$$BK=\sqrt{\left(\overrightarrow{BK}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{9}{16}BA^2+\frac{3}{8}BA\cdot BC\cdot\cos\beta+\frac{1}{16}BC^2}=\frac{3a}{2}\cos\frac{\beta}{2}.$$

Також маємо

$$\cos\angle KBS=\frac{\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{BS}}{BK\cdot BS}=\frac{\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}\right)\cdot\overrightarrow{BS}}{BK\cdot BS}=\frac{\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BS}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BS}}{BK\cdot BS}=$$

$$=\frac{\frac{3}{4}a^2\cos\beta+\frac{3}{4}a^2\cos\gamma}{\frac{3}{2}a^2\cos\frac{\beta}{2}}=\frac{\cos\beta+\cos\gamma}{2\cos\frac{\beta}{2}},$$

звідки отримуємо

$$\sin\angle KBS=\sqrt{1-\cos^2\angle KBS}=\sqrt{1-\frac{\cos^2\frac{\beta+\gamma}{2}\cos^2\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos^2\frac{\beta}{2}}}.$$

Остаточно отримуємо відповідь: площа перерізу дорівнює $S_n=\frac{3a^2}{4}\sqrt{\cos^2\frac{\beta}{2}-\cos^2\frac{\beta+\gamma}{2}\cos^2\frac{\beta-\gamma}{2}}$. ■

Теореми **7.7** та **7.9** дають змогу вводити загальну декартову систему координат. ***Загальною декартовою (або афінною) системою координат*** Oxy на площині ($Oxyz$ в просторі) називають таку систему координат, у якій осі координат Ox та Oy (вісь аплікат Oz) утворюють довільний кут $\alpha\in\left(0^0;180^0\right)$ і містять координатні (базисні) вектори $\overrightarrow{OE_1}=\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{OE_2}=\overrightarrow{e_2}$ (та додатково $\overrightarrow{OE_3}=\overrightarrow{e_3}$ у просторі), які утворюють репер. За базисні вектори $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ на площині (та додатково $\overrightarrow{e_3}$ у просторі) можна взяти два довільних неколінеарні (три довільних некомпланарні) вектори. ***Координатами*** точки M у такій системі координат називається впорядкована пара чисел (x,y) таких, що $\overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}$ (відповідно у просторі – впорядкована трійка чисел (x,

y, z) таких, що $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3}$). У разі, коли базисні вектори взаємно перпендикулярні та мають одиничну довжину, отримуємо звичайну прямокутну декартову систему координат.

Введення системи координат часто дає змогу спростити процес розв'язування задачі. Застосування векторно-координатного методу особливо ефективне при вдалому виборі системи координат.

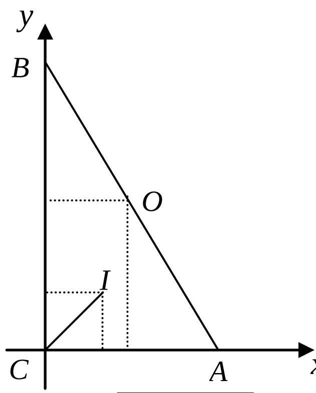


Рис. 7.3

Задача 7.7 (9). У прямокутному трикутнику катети дорівнюють 12 см і 5 см. Знайти відстань між центрами вписаного й описаного кіл (рис. 7.3).

Розв'язання. Нехай ABC – заданий трикутник, $\angle C = 90°$. Введемо прямокутну систему координат так, щоб її початок збігався з точкою C, а катети лежали на координатних осях. Тоді $A(5;0)$, $B(0;12)$.

Знаходимо, що радіус вписаного кола $r = 2$ см, тоді центр вписаного кола $I(2;2)$. Середина O гіпотенузи AB є центром кола, описаного навколо прямокутного трикутника. Тому $O(2{,}5;6)$. Отже, відстань $OI = \sqrt{16{,}25}$ см. ■

Задача 7.8 (9-10). Дано координати вершин $A(4;1)$, $B(1;5)$, $C(9;13)$ трикутника ABC. Записати рівняння сторони BC, медіани AM, висоти AN, бісектриси AL, знайти площу трикутника ABC.

Розв'язання. Нехай $Z(x;y)$ - довільна точка прямої BC. Тоді вектори $\overrightarrow{BZ}(x-1;y-5)$ та $\overrightarrow{BC}(8;8)$ колінеарні, тому

$$\frac{x-1}{8} = \frac{y-5}{8},$$

звідки отримуємо рівняння прямої BC: $x - y + 4 = 0$.

Координати точки M знайдемо як координати середини відрізка BC. Маємо $M(5;9)$. Нехай $Z(x;y)$ - довільна точка прямої AM. Тоді вектори $\overrightarrow{AZ}(x-4;y-1)$ та $\overrightarrow{AM}(1;8)$ колінеарні, тому

$$\frac{x-4}{1}=\frac{y-1}{8},$$

звідки отримуємо рівняння медіани *AM*: $8x-y-31=0$.

Нехай $Z(x;y)$ - довільна точка прямої *AN*. Тоді вектори $\overrightarrow{AZ}(x-4;y-1)$ та $\overrightarrow{BC}(8;8)$ перпендикулярні, тому їх скалярний добуток $\overrightarrow{AZ}\cdot\overrightarrow{BC}=0$, тобто

$$8(x-4)+8(y-1)=0,$$

звідки отримуємо рівняння висоти *AN*: $x+y-5=0$.

За властивістю бісектриси пряма *AL* перетинає відрізок *BC* в такій точці $L(x_L;y_L)$, що $BL:LC=AB:AC=5:13$. Тоді

$$\overrightarrow{BL}(x_L-1;y_L-5)=\frac{5}{18}\overrightarrow{BC}(8;8),$$

звідки отримуємо $x_L-1=\frac{20}{9}$, $y_L-5=\frac{20}{9}$. Отже, $L\left(\frac{29}{9};\frac{65}{9}\right)$.

Нехай $Z(x;y)$ - довільна точка прямої *AL*. Тоді вектори $\overrightarrow{AZ}(x-4;y-1)$ та $\overrightarrow{AL}\left(-\frac{7}{9};\frac{56}{9}\right)$ колінеарні, тому

$$\frac{x-4}{-\frac{7}{9}}=\frac{y-1}{\frac{56}{9}},$$

звідки отримуємо рівняння бісектриси *AL*: $8x+y-33=0$.

Площу трикутника *ABC* знаходимо за формулою

$$S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\angle BAC.$$

Маємо $\overrightarrow{AB}(-3;4), \overrightarrow{AC}(5;12)$. Тоді їх скалярний добуток $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-3\cdot5+4\cdot12=33.$

З іншого боку, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\cdot AC\cdot\cos\angle BAC=65\cos\angle BAC$.

Отже, $\cos\angle BAC=\frac{33}{65}$, звідки $\sin\angle BAC=\frac{56}{65}$. Тоді знаходимо $S=28$ кв.од.

Відповідь: *BC*: $x-y+4=0$, *AM*: $8x-y-31=0$, *AN*: $x+y-5=0$, *AL*: $8x+y-33=0$, $S=28$ кв.од. ■

Задача 7.9. Знайти відстань d від точки $M(x_0;y_0)$ до прямої l, заданої рівнянням $ax+by+c=0$.

Розв'язання. Нехай $a\neq 0, b\neq 0$, тоді пряма l не є паралельною жодній з координатних осей і утворює з додатною піввіссю Ox кут α такий, що $tg\alpha=-\dfrac{a}{b}$.

Проведемо $MN \parallel Oy$, $MK\perp l$, де $N\in l$, $K\in l$. Очевидно, що $N\left(x_0;-\dfrac{ax_0+c}{b}\right)$, $\angle NMK=\alpha$. Тоді з прямокутного трикутника MNK знаходимо

$$MK=MN\cdot\cos\alpha=\frac{MN}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\frac{\left|y_0+\dfrac{ax_0+c}{b}\right|}{\sqrt{1+\dfrac{a^2}{b^2}}}=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Перевіркою переконуємось, що ця формула справджується також у випадку, коли одне з чисел a, b дорівнює нулю.

Відповідь: $d=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. ■

Векторно-координатний метод також ефективний при відшуканні геометричних місць точок з певними властивостями.

Задача 7.10 (9). Довести, що геометричне місце точок *M*, відношення відстаней від яких до фіксованих точок *A* і *B* дорівнює сталому числу $\lambda\neq 1$, є коло (***коло Аполлонія***).

Розв'язання. Нехай відстань *AB* = 2*c*. Введемо прямокутну систему координат так, щоб *A*(–*c*;0), *B*(*c*;0). Знайдемо співвідношення, яке мають задовольняти координати точки *M*(*x*;*y*) такої, що $AM=\lambda\cdot MB$. Використавши формулу відстані між двома точками, отримуємо:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\lambda\sqrt{(x-c)^2+y^2}\ ,$$

або після тотожних перетворень

$$x^2 - 2xc\frac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1} + y^2 + c^2 = 0,$$

або

$$\left(x - c\frac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1}\right)^2 + y^2 = \frac{4\lambda^2 c^2}{\left(\lambda^2-1\right)^2}.$$

Отже, $AM = \lambda \cdot MB$ тоді і тільки тоді, коли точка M належить колу радіуса $R = \frac{2\lambda c}{\lambda^2-1}$ з центром у точці $O\left(c\frac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1};0\right)$. ■

Задача 7.11. Знайти множину точок, сума квадратів відстаней від кожної з яких до вершин правильного трикутника з стороною a дорівнює $6a^2$.

Розв'язання. Введемо прямокутну систему координат так, що дві вершини A і B трикутника знаходяться на осі абсцис, а саме $A\left(-\frac{a}{2};0\right)$, $B\left(\frac{a}{2};0\right)$. Тоді $C\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.

Нехай $M(x;y)$ - довільна точка шуканої множини. Тоді знаходимо, що

$$AM^2 + BM^2 + CM^2 = 3x^2 + 3y^2 - a\sqrt{3}y = 6a^2.$$

Отже, координати точок шуканої множини задовольняють рівняння

$$x^2 + y^2 - \frac{a\sqrt{3}y}{3} = 2a^2,$$

або

$$x^2 + \left(y - \frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \left(\frac{5a\sqrt{3}}{6}\right)^2.$$

Відповідь: коло радіуса $\frac{5a\sqrt{3}}{6}$, центром якого є середина висоти даного трикутника. ■

Задача 7.12. Знайти площу фігури, координати точок якої задовольняють рівність

$$|x+y-5|+|x-y+3|+|2x-y-4|=y+2.$$

Розв'язання. Неважко помітити, що дану умову можна записати у вигляді

$$|\,x+y-5\,|+|\,x-y+3\,|+|\,y-2x+4\,|=$$
$$=(x+y-5)+(x-y+3)+(y-2x+4).$$

Але рівність

$$|a|+|b|+|c|=a+b+c$$

виконується тоді і тільки тоді, коли $a\ge 0, b\ge 0, c\ge 0$. Тому дана умова рівносильна системі нерівностей:

$$\begin{cases} x+y-5\ge 0; \\ x-y+3\ge 0; \\ y-2x+4\ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\ge 5-x; \\ y\le x+3; \\ y\ge 2x-4. \end{cases}$$

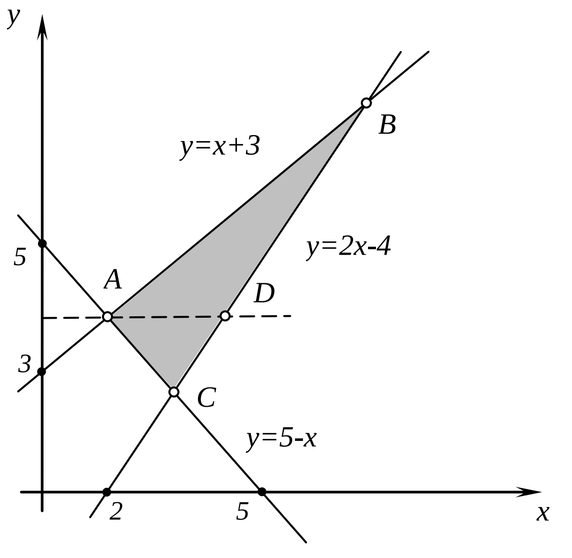


Рис. 7.5

З цієї системи отримуємо, що до даної множини входять ті точки, які розміщені на координатній площині не нижче прямої $y=5-x$, не вище прямої $y=x+3$, не нижче прямої $y=2x-4$, тобто ті точки, які лежать на сторонах або всередині трикутника *ABC*, де $A(1;4)$, $B(7;10)$, $C(3;2)$ (рис. 7.5).

Для знаходження площі цього трикутника розбиваємо його горизонтальною прямою $y=4$ на два трикутники ABD і ACD, де $D(4;4)$. Тоді

$S_{ABC}=S_{ABD}+S_{ACD}=9+3=12$ кв. од. ■

Застосування векторів часто є допоміжним засобом при розв'язуванні алгебричних задач.

Задача 7.13 (КМО-1976, 10). Відомо, що $\sin x+\sin y+\sin z=0$, $\cos x+\cos y+\cos z=0$. Довести, що також

$$\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z=0\,,\ \cos 2x+\cos 2y+\cos 2z=0\,.$$

Розв'язання. Позначимо $\vec{a}(\cos x;\sin x)$, $\vec{b}(\cos y;\sin y)$, $\vec{c}(\cos z;\sin z)$, $\overrightarrow{a_1}(\cos 2x;\sin 2x)$, $\overrightarrow{b_1}(\cos 2y;\sin 2y)$, $\overrightarrow{c_1}(\cos 2z;\sin 2z)$. Очевидно, що $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\overrightarrow{a_1}|=|\overrightarrow{b_1}|=|\overrightarrow{c_1}|=1$.

Оскільки $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$, то вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ утворюють деякий правильний трикутник. Тому вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ утворюють між собою кути по 120°.

З іншого боку,

$$\cos\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{a}|\ |\vec{b}|}=\cos x\cos y+\sin x\sin y=\cos(x-y).$$

Отже, $\cos(x-y)=-\dfrac{1}{2}$, тобто $x-y=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$.

Аналогічно отримуємо, що $\cos\angle\left(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{b_1}\right)=\cos(2x-2y)$. Але $2x-2y=$ $=\pm\dfrac{4\pi}{3}+4\pi k, k\in Z$, тому $\cos\angle\left(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{b_1}\right)=-\dfrac{1}{2}$, тобто $\angle\left(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{b_1}\right)=120^\circ$.

Аналогічно показуємо, що також $\angle\left(\overrightarrow{b_1},\overrightarrow{c_1}\right)=120^\circ$, $\angle\left(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{c_1}\right)=120^\circ$. Оскільки $|\overrightarrow{a_1}|=|\overrightarrow{b_1}|=|\overrightarrow{c_1}|=1$, то це можливо лише при $\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{b_1}+\overrightarrow{c_1}=\vec{0}$, що рівносильно твердженню задачі. ■

Задача 7.14. Довести, що для того щоб чотирикутник був паралелограмом, необхідно і досить, щоб сума довжин відрізків, які сполучають середини його протилежних сторін, дорівнювала половині периметру цього чотирикутника.

Необхідність є очевидною властивістю паралелограма.

Достатність. Для доведення достатності доведемо лему.

Лема. *Якщо точки M і N є серединами відрізків відповідно AB і CD, то*

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right).$$

Доведення. Справді, скористаємося очевидними рівностями $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DN}$.

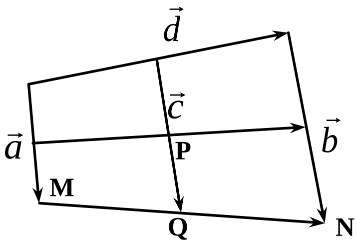


Рис. 7.6

Додавши їх почленно, одержимо шукану рівність, оскільки $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ і $\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DN} = \vec{0}$. Лема доведена.

Нехай в чотирикутнику $\dfrac{a+b+c+d}{2} = PQ + MN$, де a, b, c, d – довжини його сторін і P, Q, M, N – точки, які є серединами сторін. За доведеною лемою $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\vec{c} + \vec{d}\right)$, $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$ (рис. 7.6). Тоді

$$PQ + MN = \sqrt{\overrightarrow{PQ}^2} + \sqrt{\overrightarrow{MN}^2} = \sqrt{\left(\frac{\vec{c} + \vec{d}}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{\vec{c}^{\,2} + 2\vec{c}\vec{d} + \vec{d}^{\,2}} + \sqrt{\vec{a}^{\,2} + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^{\,2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{c^2 + 2cd\cos\alpha + d^2} + \sqrt{a^2 + 2ab\cos\beta + b^2}\right) \le$$

$$\le \frac{1}{2}\left(\sqrt{c^2 + 2cd + d^2} + \sqrt{a^2 + 2ab + b^2}\right) = \frac{1}{2}\left(a + b + c + d\right).$$

Отже, $PQ + MN = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$ тоді і тільки тоді, коли $\cos\alpha = \cos\beta = 1$, де α – кут між векторами $\overleftarrow{c}$ і $\vec{d}$, β – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Отже, рівність виконується тоді і тільки тоді, коли $\alpha = \beta = 0^0$. Отже, вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\overleftarrow{c}$, $\vec{d}$ є співнапрямленими.

Тому чотирикутник є паралелограмом. ■

Наведемо приклад використання векторів при розв'язуванні задач на екстремум із виконанням аналогічних до попередньої задачі оцінок.

Задача 7.15. Дано чотири точки *A, B, C, D*. Знайти точку, для якої сума квадратів відстаней до даних точок була б найменшою.

Розв'язання. Нехай *M* – деяка точка (рис. 7.7). Обчислимо суму квадратів відстаней від цієї точки до точок *A, B, C, D*. Для цього введемо вектори $\overrightarrow{MA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{MB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{MC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{MD} = \vec{d}$. Тоді $\vec{b} - \vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} - \vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{d} - \vec{c} = \overline{CD}$, $\vec{a} - \vec{d} = \overrightarrow{DA}$, $\vec{a} - \vec{c} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{b} - \vec{d} = \overrightarrow{DB}$.

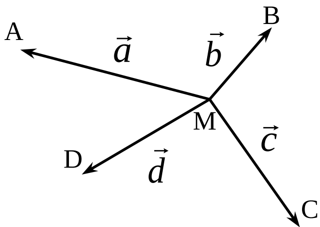


Рис 7.7

Піднесемо ліві і праві частини одержаних векторних рівностей до скалярного квадрату і почленно додамо, в результаті одержимо:

$$3\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right) - 2\left(\vec{a}\vec{b} + \vec{c}\vec{d} + \vec{d}\vec{c} + \vec{a}\vec{d} + \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{d}\right) =$$
$$= AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 + CA^2 + DB^2 \qquad (1).$$

Скористаємося очевидною нерівністю $\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}\right)^2 \ge 0$.

Звідси

$$a^2+b^2+c^2+d^2+2\left(\vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c} + \vec{a}\vec{d} + \vec{b}\vec{c} + \vec{b}\vec{d} + \vec{c}\vec{d}\right) \ge 0 \quad (2).$$

Із рівності (1) знайдемо:

$$2\left(\vec{a}\vec{b} + \vec{c}\vec{d} + \vec{d}\vec{c} + \vec{a}\vec{d} + \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{d}\right) = 3\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right) -$$
$$-\left(AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 + CA^2 + DB^2\right)$$

і підставимо в нерівність (2), в результаті одержимо:

$$a^2+b^2+c^2+d^2 \geq \frac{AB^2+BC^2+CD^2+DA^2+DB^2+AC^2}{4}.$$

Із одержаної нерівності випливає, що сума $a^2+b^2+c^2+d^2$ є найменшою тоді, коли вона дорівнює сталій:

$$\frac{1}{4}\left(AB^2+BC^2+CD^2+DA^2+DB^2+AC^2\right),$$

тобто за умови, що $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$.

Із одержаної векторної рівності випливає, що $\vec{a}+\vec{b}=-\left(\vec{c}+\vec{d}\right)$.

Тобто точка M і середини відрізків AB і DC, AD і BC належать одній прямій.

Отже, точка M є точкою перетину прямих, які містять середини протилежних сторін чотирикутника ABCD. ■

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 7.16 (9). Довести, що для довільного паралелограма *ABCD* має місце рівність $4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=AC^2-BD^2$.

Задача 7.17 (8-9). Нехай O_1 і O_2 – точки перетину медіан трикутників $A_1B_1C_1$ і $A_2B_2C_2$. Довести, що $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{C_1C_2}=3\,\overrightarrow{O_1O_2}$.

Задача 7.18 (УМО-1984, 10). Знайти кути між векторами $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ в просторі, якщо відомо, що ці кути попарно рівні і $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=$ $=|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$.

Задача 7.19 (9). Нехай O – центр правильного многокутника $A_1A_2\ldots A_n$. Довести, що $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}=\vec{0}$.

Задача 7.20 (9). На площині дано правильний семикутник і вектор $\vec{a}$. Знайти суму ортогональних проекцій вектора $\vec{a}$ на сторони семикутника або їх продовження.

Задача 7.21 (КМО-1977, 9). Довжина вектора, що дорівнює сумі даних десяти векторів, більша, ніж довжина суми довільних дев'яти з даних векторів. Довести, що існує вісь, проекція на яку кожного з десяти векторів має додатний напрям.

Задача 7.22 (УМО-1985, 9). Від точки *O* на площині відкладено три вектори. Відомо, що довжина суми будь-яких двох з цих векторів більша, ніж довжина кожного з векторів-доданків. Довести, що через точку O можна провести пряму так, щоб усі три вектори лежали по один бік від цієї прямої.

Задача 7.23 (9-10). Два опуклих многокутники $A_1A_2\ldots A_n$ і $B_1B_2\ldots B_n$ такі, що $\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_2B_2}+\ldots+\overrightarrow{A_nB_n}=\vec{0}$. Довести, що многокутники $A_1A_2\ldots A_n$ і $B_1B_2\ldots B_n$ мають спільну точку.

Задача 7.24 (УМО-1977, 9). Нехай $ABCD$ – довільний прямокутник. Довести, що для довільної точки M простору виконуються рівності

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD},\ \overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MC}^2=\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MD}^2.$$

Задача 7.25 (УМО-1978, 9). В основі піраміди лежить многокутник з непарним числом сторін. Чи можна вздовж кожного її ребра спрямувати вектор, поставивши стрілку в певному напрямі, так, щоб сума всіх таких векторів дорівнювала нульовому вектору?

Задача 7.26 (УМО-1978, 10). На площині дано неколінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Знайти на цій площині всі вектори $\vec{c}$ такі, що площі паралелограмів, побудованих на векторах $\vec{a}+\vec{c},\vec{b}$ та на векторах $\vec{a},\vec{b}+\vec{c}$, рівні між собою.

Задача 7.27 (9-10). У трикутнику ABC кут C прямий. Довести, що при гомотетії з центром C і коефіцієнтом $k = 2$ вписане коло переходить у коло, яке дотикається до описаного кола.

Задача 7.28 (9). На колі, що описане навколо правильного трикутника зі стороною a, взято довільну точку. Знайти суму квадратів відстаней від цієї точки до вершин трикутника.

Задача 7.29 (9-10). У трикутнику ABC на сторонах AB та AC добираються точки M та N відповідно так, що $AM : MB = 3 : 1$, $AN : NC$ = $= 5 : 3$. Відрізки BN і CM перетинаються в точці O. Знайти відношення $BO : ON$.

Задача 7.30 (11). Довести, що у трикутній піраміді $ABCD$ ребра AD та BC взаємно перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли $AB^2 + CD^2 = = AC^2 + BD^2$.

Задача 7.31 (УМО-1981, 10). На сфері одиничного радіуса розміщено $n \geq 2$ точок. Довести, що сума квадратів довжин усіх відрізків, які визначаються цими точками, не перевищує n^2. Чи може ця сума дорівнювати n^2?

Задача 7.32 (5 СМО-1998, 11). У просторі дано два ромби $ABCD$ і $EFGH$. Відомо, що:

площини (ABC) і (EFG) перпендикулярні одна до одної;

відрізок AE перпендикулярний до площин (ABC) і (EFG);

кути BAD і FEH рівні між собою та однаково орієнтовані (один і той самий поворот у просторі відносно прямої AE переводить B у D та F у H).

Нехай P і Q – середини відрізків BH і DF відповідно. Довести, що прямі PQ і CG – перпендикулярні.

Задача 7.33 (9-10). На сторонах CA і CB трикутника ABC взято відповідно точки M і N так, що $CM : CA = m$, $CN : CB = n$. Медіана CD трикутника ABC перетинає відрізок MN у точці E. Знайти відношення $CE : CD$.

Задача 7.34 (9-10). Точка M лежить на колі, описаному навколо заданого правильного трикутника ABC. Довести, що величина $MA^4 + MB^4 + MC^4$ не залежить від вибору точки.

Задача 7.35 (9). Координати вершин трикутника – раціональні числа. Довести, що координати центра описаного навколо нього кола також раціональні числа.

Вказівки та відповіді до задач

7.18. *Відповідь:* $\pi - \arccos\frac{1}{3}$. **7.19.** *Вказівка:* при повороті відносно точки O на кут $\frac{360^\circ}{n}$ вектор $\vec{b} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n}$ переходить у себе. **7.20.** *Вказівка:* замініть сторони семикутника на паралельні їм прямі, що проходять через початок вектора $\vec{a}$. Тоді кінці проекцій вектора $\vec{a}$ на ці прямі утворюють правильний семикутник, центром якого є середина вектора $\vec{a}$. *Відповідь:* $\frac{7}{2}\vec{a}$. **7.21.** *Вказівка:* така вісь паралельна вектору $\vec{S} = \overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \ldots + \overrightarrow{a_n}$. Із нерівності $\left|\vec{S} - \overrightarrow{a_k}\right| < \left|\vec{S}\right|$ отримуємо, що $\overrightarrow{a_k} \cdot \vec{S} > \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{a_k}\right|^2 > 0$. **7.22.** *Вказівка:* доведіть, що кути між довільними двома даними векторами менші за 120°. **7.23.** *Вказівка:* припустіть супротивне. Тоді існує пряма l, яка відокремлює ці многокутники. Розгляньте проекції векторів на пряму, яка перпендикулярна прямій l. **7.24.** *Вказівка:* виразіть вказані вектори через вектори $\overrightarrow{MA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$. **7.25.** *Вказівка:* розгляньте проекції вектора на пряму, паралельну висоті піраміди. *Відповідь:* ні. **7.26.** *Вказівка:* доведіть, що площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{m}(m_1, m_2)$ та $\vec{n}(n_1, n_2)$, дорівнює $|m_1 n_2 - m_2 n_1|$. *Відповідь:* $\vec{c} = x(\vec{a} + \vec{b})$ або $\vec{c} = x(\vec{a} - \vec{b}) - 2\vec{b}$, де $x \in R$. **7.27.** *Вказівка:* запишіть рівняння кіл у прямокутній системі координат. **7.28.** *Відповідь:* $2a^2$. **7.29.** *Вказівка:* позначте $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\frac{BO}{BN} = x$, $\frac{CO}{CM} = y$. Тоді $\overrightarrow{BO} = x\,\overrightarrow{BN} = -x\,\vec{b} + \frac{5x}{8}\vec{c}$, або $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO} = \left(-1 + \frac{3y}{4}\right)\vec{b} + (1 - y)\vec{c}$. Звідси отримуємо $x = \frac{8}{17}$, $y = \frac{12}{17}$. *Відповідь:* $BO : ON = 8 : 9$. **7.30.** *Вказівка:* розгляньте некомпланарні вектори $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ та використайте те, що $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. **7.31.** *Вказівка:* нехай O – центр сфери, M_1, M_1,…, M_n – точки на сфері. Позначте $\overrightarrow{OM_i} = \vec{r_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тоді шукана сума $S = \; = \sum_{i=1, j=1, i \neq j}^{n} \left(\vec{r_i} - \vec{r_j}\right)^2 = n\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{r_i}\right)^2 - \left(\vec{r_1} + \vec{r_2} + \ldots + \vec{r_n}\right)^2$. Знак рівності можливий при $\vec{r_1} + \vec{r_2} + \ldots + \vec{r_n} = \vec{0}$. **7.32.** *Вказівка:* нехай O_1, O_2 – точки перетину діагоналей ромбів $ABCD$ і $EFGH$. Тоді PO_1QO_2 – ромб. Потім розгляньте скалярний добуток векторів $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{CG}$. **7.33.** *Відповідь:* $\frac{2mn}{m+n}$. **7.34.** *Вказівка:* введіть прямокутну систему координат. *Відповідь:* $MA^4 + MB^4 + MC^4 = 18R^4$. **7.35.** *Вказівка:* запишіть рівняння серединних перпендикулярів до сторін трикутника.

§ 8. ГЕОМЕТРИЧНІ НЕРІВНОСТІ ТА ЕКСТРЕМУМИ

Серед геометричних нерівностей найбільш відома ***нерівність трикутника***: для довільних точок *A, B, C* площини виконується нерівність $AC \le AB + BC$, причому знак рівності можливий тоді і тільки тоді, коли точки *A, B, C* у такому ж порядку лежать на одній прямій.

З нерівностей $AC \le AB + BC$, $BC \le AB + AC$ отримуємо $AB \ge AC - BC$, $AB \ge BC - AC$, звідки отримуємо іншу форму нерівності трикутника: для довільних точок *A, B, C* площини виконується нерівність $AB \ge |AC - BC|$, причому знак рівності можливий тоді і тільки тоді, коли точки *A, B, C* лежать на одній прямій, причому точка *C* знаходиться за відрізком *AB* або співпадає з однією з точок *A, B*.

У деяких задачах для встановлення екстремальних значень геометричних величин з використанням нерівності трикутника корисними є рухи та перетворення площини.

Задача 8.1. Знайти на прямій $l: y = 2x + 1$ точку С, для якої сума відстаней до точок $A(2;0)$ та $B(4;1)$ є найменшою.

Розв'язання. Точки *A* і *B* знаходяться по одну сторону від даної прямої. Розглянемо точку A_1, яка симетрична точці А відносно прямої l.

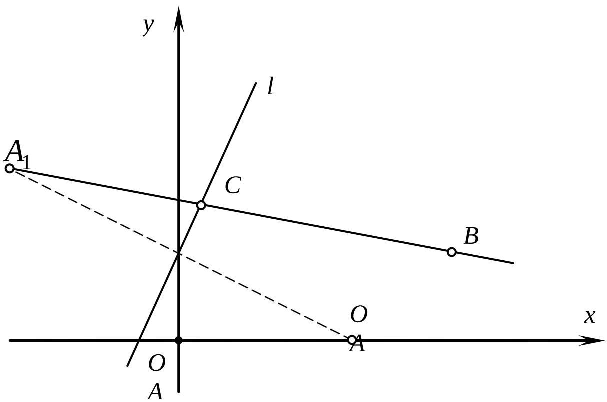


Рис. 8.1

Продовжимо пряму A_1B до перетину з прямою l в деякій точці *C* (рис. 8.1). Оскільки для довільної іншої точки $M \in l$ виконується

$\vec{d}$ $\vec{a}$ $\vec{d}$ $\vec{a}$ $\vec{b}$

$$|AM+BM|=|A_1M+BM|\geq A_1B=|A_1C+BC|=|AC+BC|,$$
то точка C – шукана.

Послідовно знаходимо $A_1(-2;2)$, $A_1B: y=-\frac{1}{6}x+\frac{5}{3}$, $C\left(\frac{4}{7};\frac{11}{7}\right)$.

Відповідь: $C\left(\frac{4}{7};\frac{11}{7}\right)$. ■

Задача 8.2. Знайти на прямій $l: y=x+1$ точку С, для якої модуль різниці відстаней до точок $A(-2;1)$ та $B(4;1)$ є найбільшим.

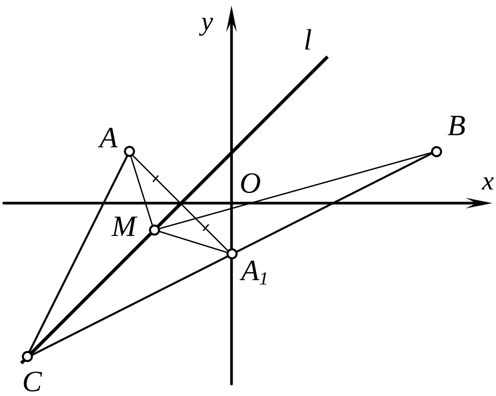


Рис. 8.2

Розв'язання. Точки A і B знаходяться по різні сторони від даної прямої. Розглянемо точку A_1, яка симетрична точці А відносно прямої l. Продовжимо пряму A_1B до перетину з прямою l в деякій точці C (рис. 8.2). Оскільки для довільної іншої точки $M\in l$ виконується нерівність
$$|AM-BM|=|A_1M-BM|\leq A_1B=|A_1C-BC|=|AC-BC|,$$
то точка C – шукана.

Послідовно знаходимо $A_1(0;-1)$, $A_1B: y=0{,}5x-1$, $C(-4;-3)$.

Відповідь: $C(-4;-3)$. ■

Задача 8.3. У якому місці потрібно побудувати міст MN через річку, яка розділяє населені пункти A і B, щоб шлях $AMNB$ був найкоротшим (береги річки вважаються паралельними, а міст – перпендикулярний до берегів)?

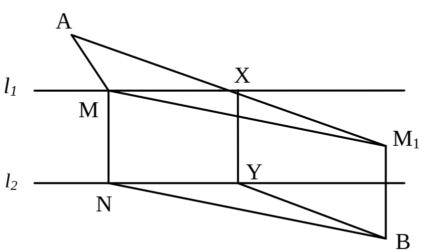


Рис. 8.3

Аналіз. Нехай міст MN задовольняє умові задачі (рис.8.3). Виконаємо паралельне перенесення відрізка MN на вектор $\overrightarrow{NB}$. Тоді чотирикутник MM_1BN – паралелограм. Отже,

$BN + NM + MA = BM_1 + MM_1 + MA \geq BM_1 + M_1A = BY + YX + XA$. Тому точка M має співпадати з точкою X, а точка N – з точкою Y.

Побудова. 1. Виконуємо паралельне перенесення точки B на вектор $\overrightarrow{NM}$, отримуємо точку M_1.

2. Проводимо пряму AM_1, отримуємо точку $X=AM_1 \cap l_1$.

3. З точки X проведимо перпендикуляр на пряму l_2, точка Y – основа проведеного перпендикуляра.

Доведення обґрунтуйте самостійно. ■

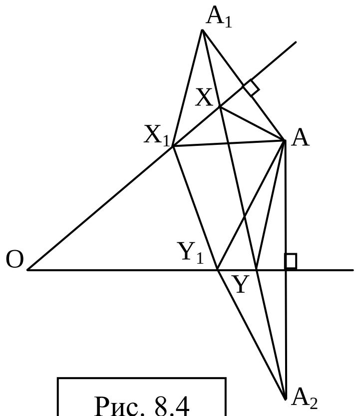


Рис. 8.4

Задача 8.4. Дано кут і всередині нього точку A. На сторонах кута знайти такі точки X і Y, щоб периметр трикутника AXY був найменшим.

Аналіз. Нехай трикутник AX_1Y_1 задовольняє умові задачі (рис 8.4). Виконаємо осьові симетрії точки A відносно сторін кута, одержимо точки A_1 і A_2 відповідно. Тоді $AX_1+X_1Y_1+Y_1A=A_1X_1+X_1Y_1+Y_1A_2 \geq A_1X+XY+YA_2=A_1A_2$ (за властивістю довжини ламаної). Рівність виконується тоді і тільки тоді, коли точки A_1, X, Y, A_2 належать одній прямій. Отже, точки X і Y – є точками перетину прямої A_1A_2 із сторонами кута.

Побудову і доведення проведіть самостійно. ■

Задача 8.5. У даний гострокутний трикутник вписати трикутник найменшого периметру.

Аналіз. Очевидно достатньо знайти одну із вершин трикутника, тоді задача зведеться до попередньої.

Нехай точка $P \in BA$ є однією із шуканих точок (рис. 8.5). Тоді за попередньою задачею, виконавши дві осьові симетрії цієї точки відносно прямих CB і CA, одержимо точки P_1 і P_2 і точки $Q=(CB)\cap(P_1P_2)$, $N=(CA)\cap(P_1P_2)$. Для точки P трикутник PQN буде мати найменший периметр, який дорівнює довжині відрізка P_1P_2. Побудуємо коло ω з центром в точці C, яке дотикається прямої AB, а отже і прямих (P_2B) і (P_1A). Нехай радіус цього кола дорівнює R. Точка C є центром кола ω_1, описаного навколо трикутника PP_2P_1. Якщо радіус кола ω_1

дорівнює R_1, то очевидно, що $R_1 \geq R$. Нехай точка X – є точкою дотику кола ω і прямої AB. Для цієї точки найменший периметр трикутника з вершинами на сторонах CB і CA дорівнює X_1X_2, де X_1 – точка дотику кола ω і прямої BP_2, X_2 – точка дотику кола ω і прямої AB_1. Отже, трикутник XX_1X_2 є вписаним в коло ω. Очевидно, що

$$\angle X_1XX_2 = \angle P_1PP_2 = \alpha .$$

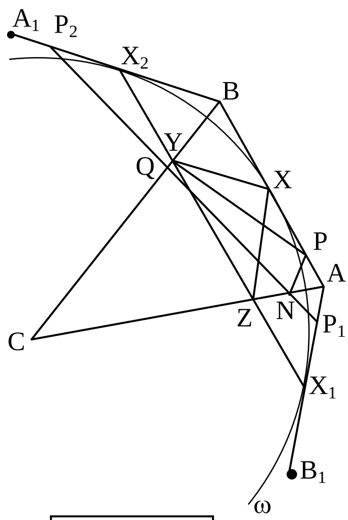


Рис. 8.5

Тоді за наслідком з теореми синусів для трикутників XX_1X_2, P_1PP_2 відповідно одержуємо:

$$\frac{X_1X_2}{sin\alpha} = 2R_1, \; \frac{P_1P_2}{sin\alpha} = 2R.$$

Оскільки $R_1 \leq R$, то $P_1P_2 \leq X_1X_2$. Отже, точці X, яка є основою перпендикуляра, проведеного з точки C на пряму AB, відповідатиме трикутник найменшого периметру, що ёвписаний в трикутник ABC.

Знаходимо дві інші вершини шуканого трикутника $Y=(CB)\cap(X_1X_2)$, $Z=(CA)\cap(X_1X_2)$. Можна легко обгрунтувати те, що точки Y і Z – є основами перпендикулярів, проведених із вершин A і B трикутника на протилежні їм сторони. ■

Нерівність трикутника використовується при доведенні складніших геометричних нерівностей.

Задача 8.6 (8-9). Нехай a, b, c – сторони трикутника із периметром 1. Довести нерівність $\frac{2+a}{1-2a} + \frac{2+b}{1-2b} + \frac{2+c}{1-2c} > 11$.

Розв'язання. Маємо $1 - 2a = (a + b + c) - 2a = b + c - a > 0$. Аналогічно показуємо, що $1 - 2b > 0$, $1 - 2c > 0$. Отже, всі три дроби додатні.

Нехай $a \leq b \leq c$. Тоді $3c \geq a + b + c = 1$, звідки $c \geq \frac{1}{3}$. Тому отримуємо

$$\frac{2+c}{1-2c} \geq \frac{2+\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 7.$$

Очевидно, що $\frac{2+a}{1-2a} > 2$, $\frac{2+b}{1-2b} > 2$.

Додавши ці три нерівності, отримуємо твердження задачі. ■

Задача 8.7 (8-10). Довести, що серед усіх чотирикутників з даними діагоналями і даним кутом між ними найменший периметр має паралелограм.

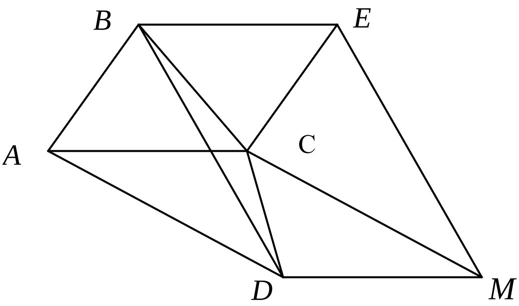


Рис. 8.6

Розв'язання. Нехай *ABCD* – довільний чотирикутник (рис. 8.6), у якому *AC* = *a*, *BD* = *b*, $\angle(AC,BD) = \alpha$, де *a*, *b*, α – задані, $0 < \alpha \leq 90°$.

Позначимо через *E* і *M* такі точки, що *BECA* і *ACMD* – паралелограми. Тоді *BEMD* – паралелограм із сторонами *a*, *b* і кутом α між ними (тобто є інваріантом для різних таких чотирикутників *ABCD*).

Використовуючи нерівність трикутника, отримуємо *AB* + *BC* + *CD* + + *DA* = *EC* + *BC* + *CD* + *CM* ≥ *ED* + *BM*.

Отже, периметр чотирикутника *ABCD* не менший, ніж сума довжин діагоналей паралелограма *BEMD*. Знак рівності досягається лише тоді, коли точки *B*, *C*, *M* лежать на одній прямій і точки *E*, *C*, *D* лежать на одній прямій, тобто при виконанні умови, що *ABCD* – паралелограм. ■

Задача 8.8 (9-11). Дано чотирикутник *ABCD*. Довести, що $AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot AD$ (***нерівність Птолемея***).

Розв'язання. Відкладемо на *AB*, *AC*, *AD* відрізки AB_1, AC_1, AD_1 такі, що $AB_1 = \frac{1}{AB}$, $AC_1 = \frac{1}{AC}$, $AD_1 = \frac{1}{AD}$. Тоді маємо *AB* : *AC* =

$= AC_1 : AB_1$, тому трикутники ABC і AC_1B_1 подібні. З відношень $\frac{AB}{AC_1} = \frac{AC}{AB_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$ отримуємо $B_1C_1 = \frac{BC}{AB} AC_1 = \frac{BC}{AB \cdot AC}$.

Аналогічно $AB : AD = AD_1 : AB_1$, тому трикутники ABD і AD_1B_1 подібні. З відношень $\frac{AB}{AD_1} = \frac{AD}{AB_1} = \frac{BD}{B_1D_1}$ отримуємо, що

$$B_1D_1 = \frac{BD}{AB} AD_1 = \frac{BD}{AB \cdot AD}.$$

Також $AC : AD = AD_1 : AC_1$, тому трикутники ACD і AD_1C_1 подібні. З відношень $\frac{AC}{AD_1} = \frac{AD}{AC_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$ отримуємо, що

$$C_1D_1 = \frac{CD}{AC} AD_1 = \frac{CD}{AC \cdot AD}.$$

З нерівності $B_1D_1 \le B_1C_1 + C_1D_1$, або

$$\frac{BD}{AB \cdot AD} \le \frac{BC}{AB \cdot AC} + \frac{CD}{AC \cdot AD}$$

отримуємо $AC \cdot BD \le AB \cdot CD + BC \cdot AD$. ■

Задача 8.9. Дано точки $A(-2;0)$ і $B(2;0)$. Знайти на прямій $l : y = 6 - x$ точку C, для якої кут ACB є найбільшим.

Розв'язання. Розглянемо коло ω, яке проходить через точки A і B та дотикається до прямої l в деякій точці C (рис. 8.7). За властивостями геометричного місця точок, з яких даний відрізок видно під даним кутом, маємо, що для довільної іншої точки $M \in l$ виконується $\angle AMB < \angle ACB$. Отже, така точка C - шукана. Для її

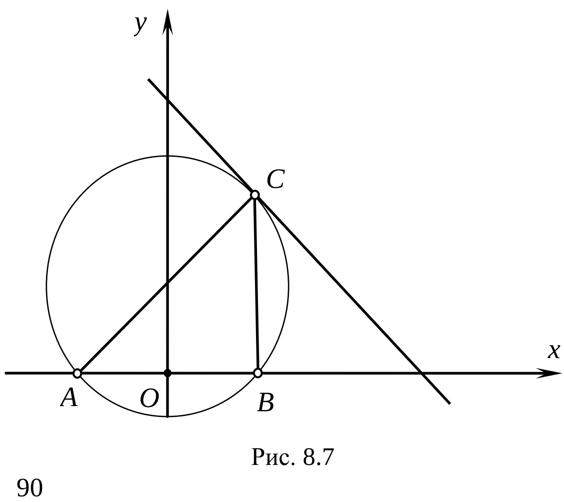


Рис. 8.7

знаходження необ-хідно мати рівняння кола ω. Оскільки центр кола ω рівновіддалений від точок A і B, які симетричні відносно осі ординат, то центр знаходиться на цій осі.

Отже, $\omega : x^2 + (y-b)^2 = R^2$. Для знаходження невідомих b, R використаємо те, що коло проходить через точку B та дотикається до прямої l, що рівносильно тому, що це коло має з прямою одну спільну точку. Система рівнянь $\begin{cases} x^2 + (y-b)^2 = R^2; \\ y = 6 - x \end{cases}$ має єдиний розв'язок тоді, коли дискримінант квадратного рівняння $x^2 + (6 - x - b)^2 = R^2$ дорівнює нулю. Це рівняння після перетворень має вигляд:

$$2x^2 + (2b-12)x + 36 + b^2 - 12b - R^2 = 0, D = 8R^2 - 4b^2 + 48b - 144.$$

Отже, маємо систему: $\begin{cases} 2R^2 = (b-6)^2; \\ 4 + b^2 = R^2. \end{cases}$

Розв'язавши її, отримуємо $b_1 = 2, R_1 = 2\sqrt{2}$, $b_2 = -14, R_2 = 10\sqrt{2}$. Оскільки $\sin\angle ACB = \dfrac{AB}{2R}$, то $\angle ACB$ є більшим у випадку кола меншого радіусу.

З системи

$$\begin{cases} x^2 + (y-2)^2 = 8; \\ y = 6 - x \end{cases}$$

знаходимо $C(2;4)$.

Відповідь: $C(2;4)$. ■

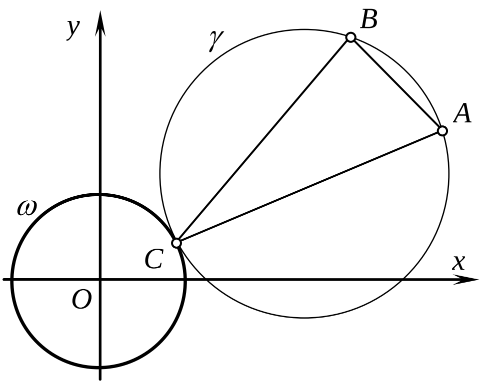


Рис. 8.8

Задача 8.10. Дано точки $A(10;5)$ і $B(8;7)$. Знайти на колі $\omega : x^2 + y^2 = 5$ точку C, для якої кут ACB є найбільшим.

Розв'язання. Розглянемо коло γ, яке проходить через точки A і B та має зовнішній дотик з даним колом ω в деякій точці C (рис. 8.8). За властивостями геометричного місця точок, з яких даний відрізок видно під даним кутом, маємо, що для довільної іншої точки $M \in \omega$ виконується $\angle AMB < \angle ACB$. Отже, така точка C - шукана. Для її знаходження необхідно мати рівняння кола γ.

Нехай $\gamma : (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$. Для знаходження невідомих a, b, R використаємо те, що коло проходить через точки *A, B* та умову зовнішнього дотику кіл ω та γ.

Отже, маємо систему:

$$\begin{cases} \sqrt{a^2+b^2} = R+\sqrt{5}; \\ (10-a)^2 + (5-b)^2 = R^2; \\ (8-a)^2 + (7-b)^2 = R^2. \end{cases}$$

Маємо $a^2+b^2-R^2 = 2R\sqrt{5}+5 = 20a+10b-125 = 16a+14b-113$, Звідки отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} b = a-3; \\ R = \sqrt{5}(3a-16); \\ \sqrt{a^2+(a-3)^2} = 3\sqrt{5}(a-5). \end{cases}$$

Розв'язавши її, отримуємо $a=6, b=3, R=2\sqrt{5}$.

Очевидно, що точка С може бути знайдена як перетин даного кола та прямої, що з'єднує центри кіл $O(0;0)$, $O_1(6;3)$. З системи

$$\begin{cases} x^2+y^2=5; \\ x=2y \end{cases}$$

знаходимо $C(2;1)$.

Відповідь: $C(2;1)$. ■

При доведенні геометричних нерівностей також використовуються добре знайомі такі твердження: довжина перпендикуляра менша за довжину похилої; у трикутнику проти більшого кута лежить більша сторона (і навпаки). Як допоміжний засіб часто використовуються формули площі трикутника та залежності між середніми величинами.

Задача 8.11 (9-11). У трикутнику *ABC* через *G* позначено точку перетину медіан; через r, r_1, r_2, r_3 – радіуси кіл, вписаних у трикутники *ABC*, *GAB*, *GBC*, *GAC* відповідно; p – півпериметр трикутника *ABC*. Довести, що

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\ge\frac{3}{r}+\frac{18}{p}.$$

Розв'язання. Нехай a, b, c, m_a, m_b, m_c – довжини сторін та медіан трикутника *ABC*, $S_{ABC} = S$. Використавши формулу $S = pr$ та те, що $S_{GBC}=S_{GAB}=S_{GAC}=\frac{S}{3}$, отримуємо, що треба довести нерівність

$$\frac{3a+2(m_b+m_c)}{2S}+\frac{3b+2(m_a+m_c)}{2S}+\frac{3c+2(m_a+m_b)}{2S}\ge$$

$$\ge\frac{3(a+b+c)}{2S}+\frac{36}{a+b+c},$$

або після спрощень

$$\frac{m_a+m_b+m_c}{S}\ge\frac{18}{a+b+c}.$$

Ця нерівність рівносильна такій:

$$\frac{m_a}{3}+\frac{m_b}{3}+\frac{m_c}{3}\ge\frac{6S}{a+b+c}.$$

Нехай d_a, d_b, d_c – відстані від точки *G* до сторін a, b, c трикутника *ABC*. Очевидно, що $d_a\le\frac{m_a}{3}, d_b\le\frac{m_b}{3}, d_c\le\frac{m_c}{3}$. Також маємо $d_a=\frac{2S_{GBC}}{a}=\frac{2S}{3a}$. Аналогічно $d_b=\frac{2S}{3b}$, $d_c=\frac{2S}{3c}$.

Отже, достатньо довести нерівність $\frac{2S}{3a}+\frac{2S}{3b}+\frac{2S}{3c}\ge\frac{6S}{a+b+c}$, яка рівносильна нерівності, що виражає відношення між середнім арифметичним та середнім гармонічним трьох додатних чисел:

$$\frac{a+b+c}{3}\ge\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}. \blacksquare$$

Задача 8.12 (9-11). Довести, що серед всіх трикутників з даним периметром найбільшу площу має правильний трикутник.

Розв'язання. Використавши формулу Герона площі довільного трикутника із сторонами a, b, c та нерівність Коші, отримуємо

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) \le p\left(\frac{p-a+p-b+p-c}{3}\right)^3 = \frac{p^4}{27},$$

де p – півпериметр трикутника. Звідси $S \le \frac{p^2\sqrt{3}}{9}$. Знак рівності можливий тоді і тільки тоді, коли $p - a = p - b = p - c$, тобто при $a = b = c$. У цьому разі $p = \frac{3a}{2}$, $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. ■

Задача 8.13 (9-10). Довести, що висоти h_a, h_b, h_c довільного трикутника та радіус r вписаного в нього кола задовольняють нерівність

$$h_a + h_b + h_c \ge 9r.$$

Розв'язання. Оскільки площа трикутника $S = \frac{a\,h_a}{2} = \frac{(a+b+c)r}{2}$, то $h_a = \left(1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right)r$. Аналогічно $h_b = \left(1 + \frac{a}{b} + \frac{c}{b}\right)r$, $h_c = \left(1 + \frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right)r$. Звідси отримуємо

$$h_a + h_b + h_c = \left(3 + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right)\right)r \ge 9r. ■$$

Задача 8.14 (9-11). Всередині трикутника ABC взято довільну точку O (рис. 8.2). Довести, що

$$AO \sin \angle BOC + BO \sin \angle AOC + CO \sin \angle AOB \le p,$$

де p – півпериметр трикутника.

Розв'язання. Відкладемо на променях OB і OC точки C_1 і B_1 відповідно такі, що $OC_1 = OC$, $OB_1 = OB$. Спроектуємо ці точки на пряму, яка проходить через точку O і перпендикулярна до прямої AO. Нехай C_2 і B_2 – відповідні проекції. Тоді маємо

$$BO\sin\angle AOC + CO\sin\angle AOB =$$

$$= OB_1\cos\angle B_1OB_2 + OC_1\angle\cos C_1OC_2 = OB_2 + OC_2 = B_2C_2 .$$

Покажемо, що $B_2C_2 \le BC$. Позначимо $\angle B_1OB_2 = \beta$, $\angle C_1OC_2 = \gamma$. Тоді маємо

$$BC^2 - B_2C_2^2 = (OB\cos\beta + OC\cos\gamma)^2 + (OB\sin\beta - OC\sin\gamma)^2 -$$
$$-(OC\cos\beta + OB\cos\gamma)^2 =$$

$$= (OB\sin\gamma - OC\sin\beta)^2 \ge 0 .$$

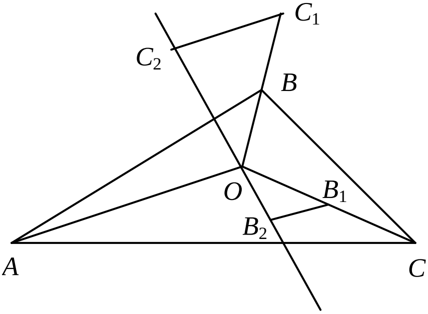


Рис.8.9

Отже,

$$BO\sin\angle AOC + CO\sin\angle AOB \le BC .$$

Аналогічно показуємо, що

$$AO\sin\angle BOC + BO\sin\angle AOC \le AB ,$$
$$AO\sin\angle BOC + CO\sin\angle AOB \le AC .$$

Додавши ці три нерівності, отримуємо твердження задачі. ■

Задача 8.15 (9-10). Дано кут *MAN* і всередині нього точку *O* (рис. 8.10). Провести через точку *O* пряму, яка відтинає від даного кута трикутник найменшої площі.

Розв'язання. Нехай кут *BDC* симетричний куту *MAN* відносно точки *O*, $C \in AM$, $B \in AN$. Точки *C*, *O*, *B* лежать на одній прямій, $CO = OB$ (доведіть це самостійно).

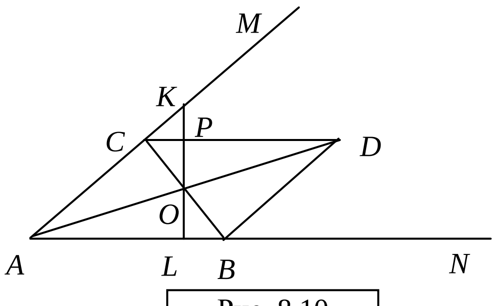


Рис. 8.10

Проведемо через точку *O* довільну відмінну від *BC* пряму. Нехай вона перетинає *AM* у точці *K*, *AN* – у точці *L*, *CD* – у точці *P* (для конкретності вважатимемо, що $AK > AC$).

Оскільки трикутники *COP* і *BOL* рівні між собою, то

$$S_{AKL} = S_{ABC} - S_{BOL} + S_{COP} + S_{CPK} = S_{ABC} + S_{CPK} > S_{ABC} .$$

Отже, пряма *BC* – шукана. ■

Геометричні міркування допомагають при доведенні деяких алгебричних нерівностей. У разі, коли ці нерівності мають аналітичне доведення, геометричні розв'язання, як правило, більш красиві.

Задача 8.16 (9-10). Довести нерівність

$$\sqrt{a^2-c^2}+\sqrt{b^2-c^2}\le\frac{ab}{c}\quad(a>c>0,\, b>c>0).$$

Розв'язання. Запишемо нерівність у вигляді

$$\frac{1}{2}c\cdot\sqrt{a^2-c^2}+\frac{1}{2}c\cdot\sqrt{b^2-c^2}\le\frac{1}{2}ab.$$

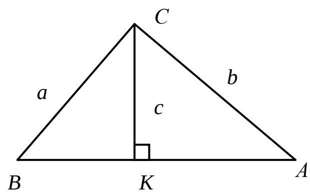


Рис. 8.11

Оскільки $a\ge c$, $b\ge c$, то можна вважати a і b довжинами сторін деякого трикутника, а c – висотою, проведеною до третьої сторони (рис. 8.11). Тоді маємо

$$\frac{1}{2}c\cdot\sqrt{a^2-c^2}+\frac{1}{2}c\cdot\sqrt{b^2-c^2}= S_{BCK}+S_{ACK}=S_{ABC}=$$

$$=\frac{1}{2}ab\cdot\sin\angle BCA\le\frac{1}{2}ab.\ \blacksquare$$

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 8.17 (7-8). Довести, що медіани m_a, m_b, m_c та периметр P довільного трикутника задовольняють нерівність $\frac{3P}{4}<m_a+m_b+m_c<P$.

Задача 8.18 (7-8). Знайти всередині опуклого чотирикутника точку, сума відстаней від якої до вершин чотирикутника була б найменшою.

Задача 8.19 (8-9). Нехай a, b, c – довжини сторін довільного трикутника. Довести нерівність

$$a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca).$$

Задача 8.20 (8-9). Нехай a, b, c – довжини сторін довільного трикутника, $p=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$, $q=\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}$. Довести, що $|p-q|<1$.

Задача 8.21 (8-9). Нехай a, b, c – довжини сторін довільного трикутника. Довести нерівність

$$(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)\le abc.$$

Задача 8.22 (8-9). Дано n точок A_1, $A_2, \ldots$, A_n і коло радіуса R. Довести, що на колі можна вибрати точку M таку, що

$$MA_1 + MA_2 + \ldots + MA_n \geq nR.$$

Задача 8.23 (8-9). Всередині трикутника ABC, периметр якого дорівнює p, взято довільну точку O. Довести, що

$$\frac{p}{2} < AO + BO + CO < p\,.$$

Задача 8.24 (8-9). Дано трикутник ABC, у якому $AB = BC$, $\angle ABC = 20°$. Довести, що $2AC < AB < 3AC$.

Задача 8.25 (8-9). На кожній стороні квадрата позначено по точці. Довести, що периметр утвореного ними чотирикутника не менший від подвоєної довжини діагоналі квадрата.

Задача 8.26 (8-9). У чотирикутнику $ABCD$ кут A тупий, F – середина сторони BC. Довести, що $2FA < BD + CD$.

Задача 8.27 (8-9). Довести, що у довільному опуклому многокутнику сума будь-яких двох кутів більша за різницю будь-яких двох інших кутів.

Задача 8.28 (8-9). Дано кут і точку C всередині кута. Знайти на сторонах кута такі точки A і B, щоб периметр трикутника ABC був найменшим.

Задача 8.29 (9). Периметр опуклого чотирикутника дорівнює 4. Довести, що його площа не перевищує 1.

Задача 8.30 (9-10). Всередині опуклого чотирикутника $ABCD$, площа якого S, обрано точку O так, що $AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2 = 2S$. Довести, що $ABCD$ – квадрат, а точка O – його центр.

Задача 8.31 (9-11). Многокутник площею S вписано в коло радіуса R і описано навколо кола радіуса r. Довести, що $2S \leq \pi R^2 + \pi r^2$.

Задача 8.32 (10-11). Довести, що серед усіх чотирикутників з фіксованими довжинами сторін найбільшу площу має вписаний чотирикутник.

Задача 8.33 (4 СМО-1998, 9). Довести нерівність

$$\frac{1}{h_a - 2r} + \frac{1}{h_b - 2r} + \frac{1}{h_c - 2r} \geq \frac{3}{r}\,,$$

де через h_a, h_b, h_c, r позначають висоти деякого трикутника та радіус вписаного в нього кола відповідно.

Задача 8.34 (9). Чи існує трикутник із висотами 2, $\sqrt{5}$ та $\sqrt{7}$?

Задача 8.35 (9). Периметр трикутника *ABC* дорівнює 2*p*. На сторонах *AB* і *AC* взято точки *M* і *N* так, що $MN \parallel BC$ і *MN* дотикається до вписаного в трикутник кола. Знайти найбільше значення довжини *MN*.

Задача 8.36 (9). Трапеція *ABCD* з основою *AD* розрізана діагоналлю *AC* на два трикутники. Паралельна основі пряма *l* розрізає ці трикутники на два трикутники і два чотирикутники. При якому положенні прямої *l* сума площ отриманих трикутників найменша?

Задача 8.37. а) Дано чотирикутник $ABCD$, де *A*(1;3), *B*(2;6), *C*(9;6), *D*(6;4). Знайти всередині цього чотирикутника точку *M*, сума відстаней від якої до вершин чотирикутника є найменшою.

Задача 8.38. Дано точки $A(20;10)$ і $B(14;16)$. Знайти на колі $\omega : x^2 + y^2 = 20$ точку C, для якої кут ACB є найменшим.

Задача 8.39 (9-10). Трапеція з основами *a* і *b* описана навколо кола радіуса *R*. Довести, що $4R^2 \le ab$.

Задача 8.40 (9-10). З усіх чотирикутників з довжинами діагоналей 4 см та 6 см і кутом між ними 60° знайти чотирикутник з найменшим периметром.

Задача 8.41 (9-10). Нехай *a*, *b*, *c* – сторони трикутника, *p* – його півпериметр, *r* – радіус описаного кола. Довести, що

$$\frac{1}{(p-a)^2} + \frac{1}{(p-b)^2} + \frac{1}{(p-c)^2} \ge \frac{1}{r^2}.$$

Задача 8.42 (9-10). Дано трикутник *ABC*. Знайти на прямій *AB* точку *M*, для якої сума радіусів кіл, описаних навколо трикутників *ACM* і *BCM*, є найменшою.

Задача 8.43 (12 РМО-1986, 11). Межею лісу є пряма *l*. На перпендикулярі *AC* до прямої *l* ($C \in l$) у точках *A* і *B* (*AB* = *BC* = *a*) знаходяться заєць і вовк відповідно. Обидва вони бігають зі сталими швидкостями, причому швидкість зайця вдвічі більша за швидкість вовка. Вовк може зловити зайця в деякій точці, якщо в цю точку він прибіжить або раніше за зайця, або одночасно з ним. Заєць вибирає на прямій *l* точку *D* і біжить у ліс по відрізку *AD*. Як вибрати точку *D* так, щоб вовк не зловив зайця на відрізку *AD*?

Задача 8.44 (9-10). На осі абсцис знайти точку *M*, модуль різниці відстаней від якої до точок *A*(1;6) і *B*(5;–1) є найбільшим. Знайти цю відстань.

Задача 8.45 (10-11). Площа трикутника $A_1B_1C_1$, вершинами якого є основи висот гострокутного трикутника ABC, в чотири рази менша від площі трикутника ABC. Довести, що трикутник ABC – рівносторонній.

Задача 8.46 (5 СМО-1998, 10). Довести, що коли всередині гострокутного трикутника ABC існує точка P така, що $\angle PBA = \angle PCB$, $\angle PBC = \angle PAC$, то $AB < AC\sqrt{2}$.

Задача 8.47 (9-10). Довести нерівність

$$\sqrt{99\cdot 101}+\sqrt{98\cdot 102}+...+\sqrt{2\cdot 198}+\sqrt{1\cdot 199}<2500\pi .$$

Задача 8.48 (9-10). Для всіх натуральних $n \geq 2$ довести нерівність

$$\sqrt{n^2-1^2}+\sqrt{n^2-2^2}+...+\sqrt{n^2-(n-1)^2}<0{,}79\cdot n^2 .$$

Задача 8.49 (10-11). Через дану точку всередині кута провести пряму так, щоб утворився трикутник найменшого периметру

Вказівки та відповіді до задач

8.18. *Відповідь:* точка перетину діагоналей. **8.19.** *Вказівка:* скористайтесь основною нерівністю трикутника. **8.20.** *Вказівка:* $abc|p - q| = = |a - b||b - c||c - a|$. **8.21.** *Вказівка:* введіть нові змінні $a + b - c = x > 0$, $a - b + c = y > 0$, $-a + b + c = z > 0$. **8.22.** *Вказівка:* якщо M, K діаметрально протилежні точки, то $MA_i + KA_i \geq 2R$. |. **8.24.** *Вказівка:* для доведення того, що $AB < 3AC$, “прикладіть” один до одного бічними сторонами три таких трикутники; для доведення того, що $2AC < AB$, розгляньте на стороні AB точку E таку, що $AE = AC$. 6|. **8.25.** *Вказівка:* “розвернувши” за допомогою осьових симетрій периметр чотирикутника, отримуємо ламану з таким самим периметром, початок і кінець якої є протилежними вершинами квадрата з вдвічі більшою стороною. |. **8.26.** *Вказівка:* нехай O – середина BD. Тоді $OA < \frac{BD}{2}$, $FO = \frac{CD}{2}$. |. **8.27.** *Вказівка:* достатньо довести, що сума трьох найменших кутів опуклого многокутника менша за його найбільший кут. Припустивши супротивне, отримуємо суперечність з формулою суми кутів опуклого многокутника. **8.28.** *Вказівка:* розгляньте точки M_1 та M_2, симетричні точці M відносно сторін кута. **8.29.** *Вказівка:* $S \leq \frac{1}{4}$ $(ab$

$+ bc + cd + da) \le \frac{1}{16}(a + b + c + d)^2$, де a, b, c, d – послідовні сторони чотирикутника. **8.30.** *Вказівка:* використайте нерівність $S_\Delta \le \frac{1}{2}ab \le \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$. **8.31.** *Вказівка:* нехай O – центр гомотетії, яка відображає вписане коло в описане. Розбийте многокутник і круги на частини півпрямими, що виходять з точки O та проходять через вершини многокутника чи точки дотику вписаного кола. Доведіть нерівність для площ відповідних частин. **8.32.** *Вказівка:* нехай a, b, c, d – сторони чотирикутника $ABCD$, p – його півпериметр. Доведіть, що його площа $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\frac{\angle A + \angle C}{2}}$. **8.33.** *Вказівка:* перетворіть нерівність до вигляду $\frac{S}{S-ar} + \frac{S}{s-br} + \frac{S}{S-cr} \ge 9$, яка рівносильна нерівності $(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \ge 9$, де $x = S - ar$, $y = S - br$, $z = S - cr$. **8.34.** *Вказівка:* виразіть сторони через площу та висоти і скористайтесь нерівністю трикутника. *Відповідь:* існує. **8.35.** *Вказівка:* покажіть, що $MN = BC - \frac{BC^2}{p}$. *Відповідь:* $\max MN = \frac{p}{4}$. **8.36.** *Відповідь:* пряма l проходить через точку перетину діагоналей. **8.37.** *Відповідь:* $M(5; 4{,}5)$. **8.38.** *Вказівка*: розгляньте коло γ, яке проходить через точки A і B та має внутрішній дотик з даним колом ω в деякій точці C. *Відповідь*: $C(-4;-2)$. **8.40.** *Відповідь:* шуканий чотирикутник – паралелограм. **8.41.** *Вказівка:* після перепозначень $p - a = x$, $p - b = y$, $p - c = z$ та застосування формули Герона отримуємо нерівність $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \ge \frac{x+y+z}{xyz}$, яка рівносильна нерівності $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2 + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right)^2 + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x}\right)^2 \ge 0$. **8.42.** *Відповідь:* точка M така, що $CM \perp AB$. **8.43.** *Відповідь* $CD > \frac{2a}{\sqrt{3}}$. **8.44.** *Вказівка:* розгляньте точку

$B_1(5;1)$ та скористайтесь нерівністю трикутника. *Відповідь:* $M\left(\frac{29}{5};0\right)$, $\max(AM - BM) = \max(AM - B_1M) = AB_1 = \sqrt{41}$. **8.45.** *Вказівка:* нехай A_1, B_1, C_1 – основи висот даного трикутника. Тоді $S_{AB_1C_1} + S_{BA_1C_1} + S_{CA_1B_1} = \frac{3}{4}S_{ABC}$. Виразивши через радіус описаного кола та кути даного трикутника ці площі, приходимо до рівності $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{3}{4}$, звідки отримуємо $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$. **8.46.** *Вказівка:* побудуйте на промені AC точку E таку, що $PA = PE$. **8.47.** *Вказівка:* розгляньте коло $x^2 + y^2 = 100^2$. Тоді кожен доданок $\sqrt{(100-n)(100+n)}$ можна вважати площею прямокутника з шириною 1 та висотою $\sqrt{100^2 - n^2}$. **8.49.** *Вказівка*: спочатку обґрунтуйте побудову прямої, яка відтинає трикутник заданого периметру.

§ 9. СТЕРЕОМЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ

Більшість обчислювальних стереометричних задач розв'язуються за допомогою методу послідовного розв'язування кількох стандартних планіметричних задач та (у разі неможливості виділення жодного повністю визначеного трикутника) методу введення допоміжної невідомої величини. Часто допомагають допоміжні проекції, перерізи та розгортки многогранників. Під час розв'язування стереометричних задач на доведення можна додатково використовувати теореми, які традиційно розглядаються на факультативних заняттях з математики (доведення цих тверджень див. [15]).

Теорема 9. 1. *Плоскі кути* α, β, γ *довільного тригранного кута задовольняють нерівності*

$$\alpha < \beta + \gamma,\ \ \beta < \alpha + \gamma,\ \ \gamma < \alpha + \beta.$$

Теорема 9. 2. *Сума плоских кутів довільного опуклого многогранного кута менша ніж* $360°$.

Теорема 9. 3. *Сума двогранних кутів опуклого* n*-гранного кута більша ніж* $180°(n-2)$.

Теорема 9. 4. *Якщо* α, β, γ *– плоскі кути тригранного кута, а* A, B, C *– протилежні їм двогранні кути, то справедливі такі співвідношення між ними:*

$$\frac{\sin\alpha}{\sin A}=\frac{\sin\beta}{\sin B}=\frac{\sin\gamma}{\sin C} \text{ – теорема синусів;}$$

$$\cos\alpha=\cos\beta\cdot\cos\gamma+\sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot\cos A \text{ – перша теорема косинусів;}$$

$$\cos A=-\cos B\cdot\cos C+\sin B\cdot\sin C\cdot\cos\alpha \text{ – друга теорема косинусів.}$$

Теорема 9. 5. *Радіус кулі, вписаної у многогранник, дорівнює* $r=\dfrac{3V}{S}$*, де* V *– об'єм многогранника,* S *– площа його повної поверхні.*

Теорема 9. 6. *Якщо навколо основи піраміди можна описати коло, то навколо піраміди можна описати сферу, центр якої лежить на перпендикулярі до площини основи, що проведений через центр кола, описаного навколо основи піраміди.*

Задача 9. 1 (10). Довести, що довільну трикутну піраміду можна перетнути площиною так, щоб у перерізі утворився ромб (рис. 9. 1).

Розв'язання. Нехай $ABCD$ – довільна піраміда. Позначимо через K, M, N, P відповідно середини ребер AC, AB, DB, DC. Тоді $KM = NP = \frac{BC}{2}, MN = PK = \frac{AD}{2}$ (як середні лінії відповідних трикутників), а $KMNP$ – паралелограм. Нехай $BC < AD$. Будемо переміщувати точки K, M, N, P по ребрах AC, AB, DB, DC у напрямку ребра BC так, щоб виконувалась умова $\frac{AK}{AC} = \frac{AM}{AB} = \frac{DN}{DB} = \frac{DP}{DC}$.

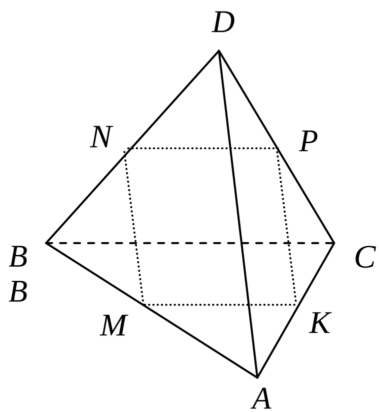


Рис. 9.1 A

При цьому чотирикутник $KMNP$ залишається паралелограмом, довжина сторін KM, NP збільшується, а довжина сторін MN, PK зменшується. Тому при деякому значенні відношення $\frac{AK}{AC}$ паралелограм $KMNP$ стане ромбом. ■

Задача 9. 2 (11). Довести, що в опуклого многогранника всі грані не можуть бути шестикутниками.

Розв'язання. Припустимо, що такий многогранник існує. Нехай n – кількість його граней. Тоді сума плоских кутів кожної грані – 4π, а сума всіх плоских кутів многогранника – $4\pi n$. З іншого боку, число вершин многогранника не перевищує $\frac{6n}{3} = 2n$, а сума плоских кутів при одній вершині строго менша за 2π, а тому сума всіх плоских кутів має бути строго менша за $4\pi n$. Суперечність. ■

Задача 9. 3 (КМО-1981, 10). Дано тетраедр $ABCD$. Нехай α_1, α_2, α_3 – площини, паралельні парам протилежних ребер AB і CD, BD і AC, BC і AD відповідно. Відомо, що проекції тетраедра на площини α_1, α_2, α_3 є прямокутниками. Довести, що всі грані тетраедра конгруентні, а центри описаної та вписаної сфер збігаються.

Розв'язання. Очевидно, що проекції ребер AB і CD на площину α_1, яка їм паралельна, рівні самим ребрам та є діагоналями прямокутника. Отже, $AB = CD$. Аналогічно показуємо, що й інші пари протилежних ребер рівні між собою: $BD = AC$, $BC = AD$. Звідси отримуємо рівність граней ABC, ABD, ACD, BCD.

Нехай точка O – центр описаної сфери. Тоді тетраедри $OABC$, $OABD$, $OACD$, $OBCD$ рівні між собою, а тому їх висоти, опущені з точки O, також рівні між собою. А це й означає, що точка O є центром вписаної сфери. ■

Задача 9. 4 (УМО-2002, 11). Основою чотирикутної піраміди $SABCD$ є ромб $ABCD$ (рис. 9. 2). Відомо, що $\angle SCB + \angle SCD = 180°$. На ребрі SD позначили точку K так, що $SK : KD = 2$. Довести, що площина, яка паралельна до прямої BD і проходить через пряму AK, перетинає висоту піраміди в її середині.

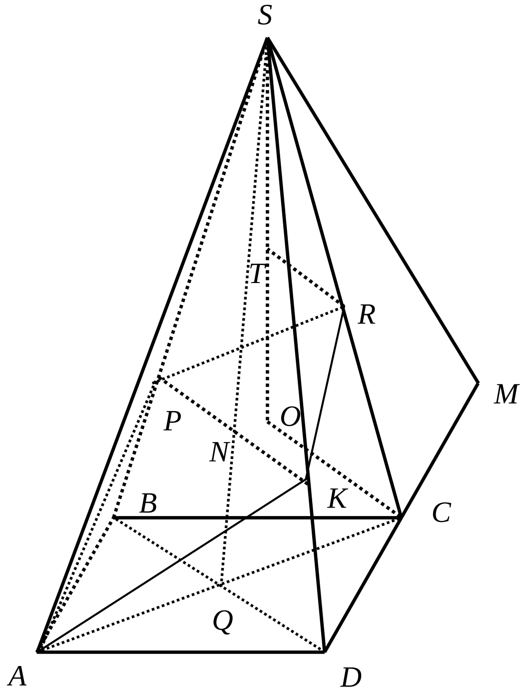


Рис. 9.2

Розв'язання. Нехай SO – висота заданої піраміди $SABCD$, $K \in SD$, $SK : KD = 2$, α – площина, яка паралельна прямій BD і проходить через пряму AK. Позначимо на продовженні відрізка CD таку точку M, що $CM = CD$. Тоді $\angle SCM =$ $= 180° - \angle SCD = \angle SCB$, $CM = CB$, трикутники SCM і SCB рівні між собою за двома сторонами і кутом між ними. З рівності трикутників SOM і SOB отримуємо, що точка O належить бісектрисі кута BCM. Оскільки $ABCD$ ромб, то звідси випливає, що $OC \parallel BD$.

Нехай Q – центр основи піраміди, $SB \cap \alpha = P$, $SC \cap \alpha = R$, $SQ \cap \alpha = T$, $SQ \cap \alpha = SQ \cap PK = N$. Очевидно, що точка N належить прямій *AR*. Оскільки α || *BD*, то *PK* || *BD*, а тому за теоремою Фалеса *SN* : *NQ* = *SK* : *KD* = 2.

Отже, точка *N* є точкою перетину медіан трикутника *ACS*, тобто точка *R* – середина *SC*.

Оскільки α || *CO*, то *RT* || *CO*. Тоді з рівності *SR* = *RC* за теоремою Фалеса отримуємо, що *ST* = *TO*. ■

Задача 9. 5 Обчислити косинус кута φ між ребром c тригранного кута *Оавс* і його ортогональною проекцією h на площину протилежної грані, якщо плоскі кути тригранного кута дорівнюють α, β, γ.

Розв'язання. Відкладемо на ребрах тригранного кута одиничні вектори: $\overline{OA}=\bar{e}_1$, $\overline{OB}=\bar{e}_2$, $\overline{OC}=\bar{e}_3$, (рис. 9.3), тоді маємо $\bar{e}_1\bar{e}_2=\cos\gamma$, $\bar{e}_1\bar{e}_3=\cos\beta$, $\bar{e}_2\bar{e}_3=\cos\alpha$. Нехай точка D – основа перпендикуляра, проведеного із тоски C на площину AOB. Тоді $\overline{OD}=m\bar{e}_1+n\bar{e}_2$. Але $\overline{CD}\cdot\bar{e}_1=0$, $\overline{CD}\cdot\bar{e}_2=0$ і $\overline{CD}=\overline{OD}-\overline{OC}$. Отже,

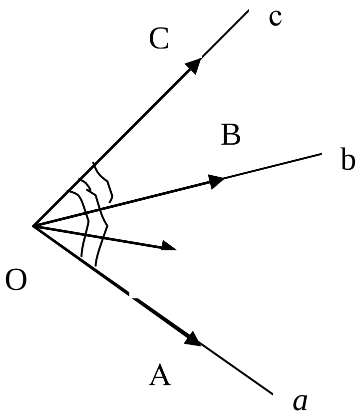


Рис. 9.3

$$(m\bar{e}_1+n\bar{e}_2-e_3)\cdot\bar{e}_1=0,$$

$$(m\bar{e}_1+n\bar{e}_2-e_3)\cdot\bar{e}_2=0.$$

З цих двох рівностей одержуємо:

$$m=\frac{\cos\beta-\cos\alpha\cdot\cos\gamma}{\sin^2\gamma},$$

$$n=\frac{\cos\alpha-\cos\beta\cdot\cos\gamma}{\sin^2\gamma}.$$

Тоді $\cos\varphi=\dfrac{\overline{OD}\cdot\bar{e}_3}{\left|\overline{OD}\right|}=\dfrac{m\cdot\cos\beta+n\cdot\cos\alpha}{\sqrt{m^2+n^2+2m\cdot n\cos\gamma}}$.

Остаточно одержуємо:

$$\cos\varphi=\frac{\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}}{\sin\gamma}.$$ ■

Задача 9. 6. Знайти форму трикутника, знаючи його зображення та зображення його ортоцентра.

Розв'язання. Нехай трикутник $A_1B_1C_1$ є зображенням довільного трикутника ABC і точка H_1 – зображення ортоцентра H цього трикутника. Тоді відрізки A_1P_1, B_1Q_1, C_1F_1 – зображення висот. Скористаємось тим, що інваріантом паралельного проекту-вання є паралельність прямих та просте відношення трьох точок прямої.

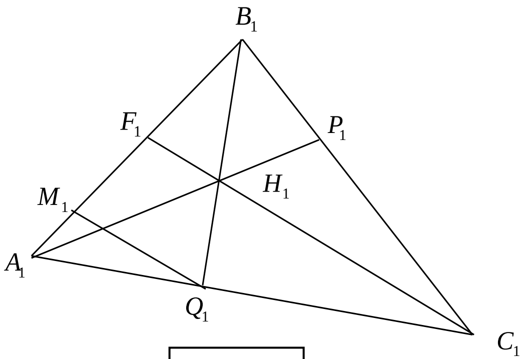


Рис. 9.4

Через точку Q_1 проведемо пряму, паралельну прямій C_1F_1 (рис. 9. 4). тоді трикутник $A_1B_1Q_1$ є зображенням прямокутного трикутного трикутника ABQ і точка $M_1 \in A_1B_1$ – зображення основи висоти, опущеної з вершини Q на гіпотенузу AB. Але $\dfrac{A_1M_1}{M_1B_1} = \dfrac{AM}{MB}$.

Отже, в прямокутному трикутнику AQB відоме відношення, в якому ділить гіпотенузу основа висоти, що проведена з вершини Q. Тому форму такого трикутника можна знайти. Скориставшись тим, що

$$\frac{AQ}{QC} = \frac{A_1Q_1}{Q_1C_1}.$$

Можна знайти точку C, а отже, і трикутник ABC, який буде подібним до трикутника із відомим зображенням. ■

Задача 9. 7. Знайти форму трикутника, знаючи його зображення (паралельну проекцію) та зображення його інцентра (точки перетину бісектрис).

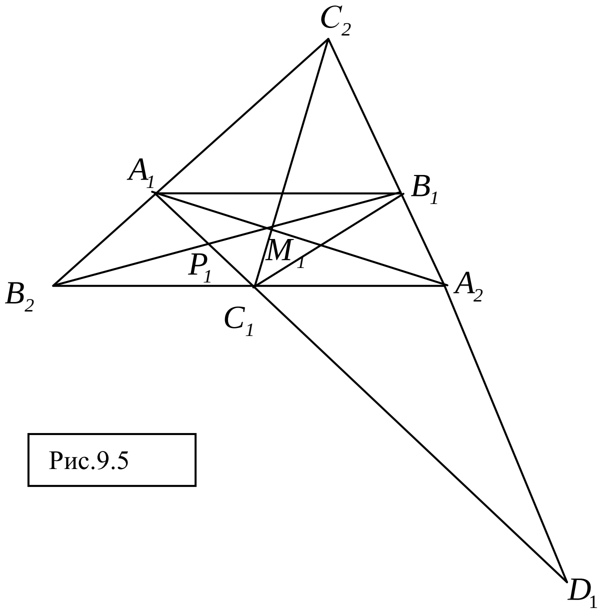


Рис.9.5

Розв'язання. Скористаємось тим, що бісектриса внутрішнього і зовнішнього кутів трикутника при одній вершині взаємно перпендикулярні і ділять протилежну сторону трикутника в одному відношенні (зовнішнім та внутрішнім чином).

Нехай $\Delta A_1B_1C_1$ – зображення трикутника ABC і точка M_1 є зображенням точки M – інцентра (рис. 9.5). Тоді B_1M_1 – зображення бісектриси BM. Знайдемо зображення бісектриси зовнішнього кута трикутника при вершині B_1. Для цього знайдемо точку D_1 із пропорції

$$\frac{A_1P_1}{P_1C_1} = \frac{A_1D_1}{D_1C_1}.$$

Тоді $\angle P_1B_1D_1$ – є зображенням прямого кута. Аналогічно знаходимо зображення прямих кутів при вершинах A_1 і C_1 трикутника. В результаті одержимо трикутник $A_2B_2C_2$, який буде зображенням трикутника $A_0B_0C_0$ з ортоцентром в точці M. За попередньою задачею маючи точку M_1, можна знайти форму трикутника $A_0B_0C_0$. Точки перетину бісектрис внутрішніх кутів цього трикутника з протилежними сторонами визначатимуть вершини трикутника, що подібний трикутнику ABC. ■

Задача 9. 8. Знайти всі значення параметра a, при яких існує трикутна піраміда з ребрами основи $1,a,a$ із відповідними протилежними ребрами $1,1,a$.

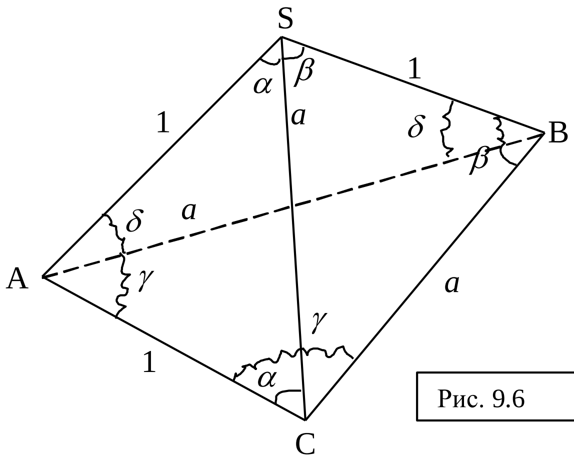


Рис. 9.6

Розв'язання. Скористаємось необхідною та достатньою умовами існування трикутника з трьома сторонами:

$$\begin{cases} a+a>1 \\ 1+1>a \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2}<a<2.$$

За наслідком із просторової теореми косинусів для тригранного кута у будь-якому тригранному опуклому куті кожний плоский кут менший суми двох інших плоских кутів (рис. 9. 6). Врахувавши, що $\alpha,\beta,\gamma,\delta<\frac{\pi}{2}$, одержуємо нерівності

$$\begin{cases} \alpha+\beta>180^0-2\delta \\ \beta+\delta>180^0-2\gamma \\ \alpha+\gamma>180^0-2\beta \\ \delta+\gamma>180^0-2\alpha \end{cases}. \text{ Тоді } \begin{cases} cos(\alpha+\beta)<-cos\,2\delta \\ cos(\beta+\delta)<-cos\,2\gamma \\ cos(\alpha+\gamma)<-cos\,2\beta \\ cos(\delta+\gamma)<-cos\,2\alpha \end{cases} \qquad (*)$$

Знайдемо косинуси та синуси кутів, врахувавши, що грані піраміди є рівнобедреними трикутниками. Маємо

$$cos\,\alpha=\frac{a}{2},\ sin\alpha=\sqrt{1-\frac{a^2}{4}},\quad cos\,\beta=\frac{1}{2a},\ sin\beta=\sqrt{1-\frac{1}{4a^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{1}{2a},\ sin\gamma=\sqrt{1-\frac{1}{4a^2}},\ cos\,\delta=\frac{a}{2},\ sin\delta=\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}.$$

Перейдемо до нерівностей:

$$cos(\alpha+\beta)<-cos\,2\delta,$$

$$cos\,\alpha\,cos\,\beta-sin\alpha\,sin\beta<-\left(2cos^2\delta-1\right),$$

$$\frac{1}{4}-\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{4a^2}}<-\left(\frac{a^2}{2}-1\right).$$

Такою ж буде і четверта нерівність системи (*). Друга і третя нерівності системи (*) визначають таку умову для параметра a:

$$\frac{1}{4}-\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{4a^2}}<-\left(\frac{1}{2a^2}-1\right).$$

Таким чином, значення параметра a має задовольняти систему нерівностей:

$$\begin{cases} \sqrt{1-\frac{a^2}{4}}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{4a^2}}>-\left(\frac{a^2}{2}-\frac{3}{4}\right) \\ \sqrt{1-\frac{a^2}{4}}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{4a^2}}<-\left(\frac{1}{2a^2}-\frac{3}{4}\right) \end{cases},$$

розв'язком якої є проміжок: $\frac{\sqrt{5}-1}{2}<a<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. ■

Задача 9. 9. Відомі довжини усіх ребер тетраедра a, b, c, a', b', c'. Знайти кути між протилежними ребрами тетраедра, якщо a і a', b і b', c і c' – довжини пар протилежних ребер.

Розв'язання. Введемо шість векторів $\vec{a}$, $\vec{a}'$, $\vec{b}$, $\vec{b}'$, $\vec{c}$, $\vec{c}'$ (рис. 9. 7). Обчислимо кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{a}'$. Очевидно $\vec{a} = \vec{c} - \vec{b}' = \vec{b} - \vec{c}'$

$$\vec{a}' = \vec{b}' - \vec{c}' = \vec{c} - \vec{b}.$$

Тоді $\vec{a} \cdot \vec{a}' = \left(\vec{b} - \vec{c}'\right)\left(\vec{c} - \vec{b}\right) = \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{b}^2 - \vec{c}' \cdot \vec{c} + \vec{c}' \cdot \vec{b}$;

Ліву і праву частини векторної рівності $\vec{c} - \vec{b}' = \vec{b} - \vec{c}'$ помножимо скалярно на $\vec{c}$. Отримуємо $c^2 - \vec{c}\vec{b}' = \vec{b}\vec{c} - \vec{c}'\vec{c}$.

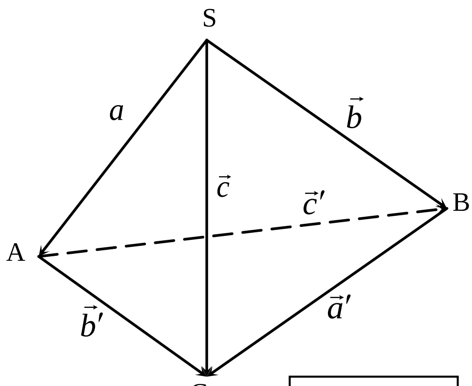


Рис. 9.7

Тоді $\vec{a} \cdot \vec{a}' = c^2 - \vec{c} \cdot \vec{b}' + \vec{c}' \cdot \vec{b} - b^2$.

Піднісемо ліву і праву частини тієї ж рівності до скалярного квадрата. Тоді одержимо $c^2 - 2\vec{c}\vec{b}' + b'^2 = b^2 - 2\vec{b}\vec{c}' + c'^2$.

Звідки $\vec{b}\vec{c}' - \vec{c}\vec{b}' = \dfrac{b^2 + c'^2 - c^2 - b'^2}{2}$.

Отже,

$$\vec{a}\vec{a}' = c^2 + \frac{b^2 + c'^2 - c^2 - b'^2}{2} - b^2 = \frac{c^2 + c'^2 - b^2 - b'^2}{2}.$$

З іншої сторони $\vec{a}\vec{a}' = aa' \cos\alpha$.

Тоді $\cos\alpha = \dfrac{c^2 + c'^2 - b^2 - b'^2}{2aa'}$, де $\alpha = \left(\widehat{\vec{a},\vec{a}'}\right)$.

Аналогічно знаходимо $\cos\beta = \dfrac{c^2 + c'^2 - a^2 - a'^2}{2bb'}$, де $\beta = \left(\widehat{\vec{b},\vec{b}'}\right)$,

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + a'^2 - b^2 - b'^2}{2cc'}, \text{ де } \gamma = \left(\widehat{\vec{c},\vec{c}'}\right). \blacksquare$$

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 9.10 (7 СМО-2000, 10). Чи завжди із шести відрізків можна скласти тетраедр, якщо з будь-яких трьох із них можна скласти трикутник?

Задача 9.11 (УМО-1962, 10). В основі піраміди лежить ромб, менша діагональ якого дорівнює $2a$. Висота піраміди проходить через точку перетину діагоналей основи. Усі п'ять вершин піраміди лежать на циліндричній поверхні, вісь якої перпендикулярна до меншої діагоналі основи піраміди і проходить через її середину. Знайти всі ребра піраміди, якщо кут між віссю циліндричної поверхні та висотою піраміди дорівнює α.

Задача 9.12 (КМО-1936, 10). Навколо конуса, висота якого дорівнює 1 м, описана піраміда, основою якої є ромб з діагоналями 6 м і 8 м. Знайти радіуси куль, які вписані у тригранні кути при основі піраміди і дотикаються до бічної поверхні конуса.

Задача 9.13 (КМО-1948, 9-10). Дано два мимобіжних відрізки AB і CD. Знайти геометричне місце середин відрізків, кінці яких лежать на даних відрізках.

Задача 9.14 (КМО-1954, 9). У трикутній піраміді провести плоскі перерізи так, щоб утворився паралелограм.

Задача 9.15 (КМО-1954, 10). У трикутній піраміді проведено плоскі перерізи паралельно її двом мимобіжним ребрам. Знайти переріз найбільшої площі.

Задача 9.16 (КМО-1957, 10). Знайти площину, ортогональна проекція на яку даного правильного тетраедра має найбільшу площу.

Задача 9.17 (КМО-1968, 10). Серед усіх можливих перерізів конуса площинами, які проходять через його вершину, знайти той, який має найбільшу площу.

Задача 9.18 (КМО-1981, 9). Дано тетраедр $ABCD$, точка O – точка перетину медіан грані ABC. Точка A переміщується так, що довжина OD не змінюється. Знайти множину можливих положень точки A.

Задача 9.19 (УМО-1961, 10). Центри n куль радіуса r, які мають спільну дотичну площину P, утворюють правильний многокутник зі стороною $2r$. Обчислити радіус кулі, яка дотикається до цих куль і площини P.

Задача 9.20 (УМО-1964, 11). Висота посудини, яка має форму циліндра, дорівнює діаметру основи. У посудину вміщено прямий круговий конус, радіус і висота якого такі самі, як у циліндра, і n куль однакового радіуса. Кожна куля дотикається до поверхні посудини, поверхні конуса і двох інших куль. Чи видно кулі з посудини?

Задача 9.21 (УМО-1978, 10). Чи можна на поверхні правильного тетраедра з довжиною ребра 1 знайти чотири такі точки, щоб відстань по поверхні тетраедра від довільної точки на тетраедрі до найближчої з цих чотирьох точок не перевищувала 0,5?

Задача 9.22 (УМО-1979, 9). Для того щоб висоти трикутної піраміди перетинались в одній точці, необхідно та достатньо, щоб суми квадратів протилежних ребер піраміди були рівні між собою. Довести це.

Задача 9.23 (УМО-1974, 9). Наповнену водою високу циліндричну склянку відхилено на кут α. При цьому витікає восьма частина всієї води. Коли склянку відхилити на кут 2α, то витече ще четверта частина тієї води, що залишилась. Знайти кут α.

Задача 9.24 (УМО-1980, 10). На сфері радіуса R поміщено чотири кола однакового радіуса, що попарно дотикаються одне до одного. Знайти радіус цих кіл.

Задача 9.25 (УМО-1987, 10). Довести, що кожна площина, яка проходить через середини двох протилежних ребер трикутної піраміди, перерізує її на дві однакові за об’ємом частини.

Задача 9.26 (УМО-1990, 10). У правильному тетраедрі $ABCD$ на грані ABC взято таку точку M, що радіуси сфер, описаних навколо тетраедрів $DABM$, $DACM$, $DBCM$, однакові. Довести, що DM – висота тетраедра $ABCD$.

Задача 9.27 (УМО-1971, 10). На площині лежать шість однакових конусів, які послідовно дотикаються один до одного і мають спільну вершину. На конусах лежить куля, яка дотикається до їх поверхонь у точках, що лежать на колах основ. Знайти відношення об'єму кулі до суми об'ємів конусів.

Задача 9.28 (КМО-1985, 10). Чи можуть 4 площини розітнути простір на 11 частин?

Задача 9.29 (КМО-1986, 10). Чи можна на горизонтальній площині розмістити кулі (будь-яких радіусів) так, щоб їх перпендикулярні проекції накрили всю площину?

Задача 9.30 (КМО-1987, 10). У прямому круговому конусі з радіусом основи R і висотою h розташовано n куль однакового радіуса r ($n \geq 3$). Кожна куля дотикається до основи конуса, до його бічної поверхні та до двох інших куль. Визначити r.

Задача 9.31 (КМО-1989, 10). Основою чотирикутної піраміди $SABCD$ є чотирикутник $ABCD$, діагоналі якого перпендикулярні. Вершина піраміди проектується в точку O перетину діагоналей основи. Довести, що основи перпендикулярів, опущених з точки O на бічні грані піраміди, лежать на одному колі.

Задача 9.32 (КМО-1990, 11). Довести, що сума відстаней від будь-якої точки простору до вершин куба з ребром a не менша за $4\sqrt{3}\,a$.

Задача 9.33 (КМО-1991, 11). Прямі, проведені перпендикулярно до граней трикутної піраміди через центри вписаних у них кіл, перетинаються в одній точці. Довести, що суми протилежних ребер такої піраміди рівні між собою.

Задача 9.34 (КМО-1992, 11). Основою піраміди є трикутник ABC, у якого $\angle ACB = 30°$, а довжина медіани, що виходить з вершини B, вдвічі менша від сторони AC і дорівнює a. Усі бічні ребра піраміди нахилено до площини основи під кутом α. Визначити площу перерізу піраміди площиною, яка проходить через вершину B паралельно ребру AC і нахилена до площини основи під кутом β.

Задача 9.35 (КМО-1993, 11). У сферу радіуса R вписано два куби. Обчислити суму квадратів усіх відрізків, які сполучають вершини одного куба з вершинами іншого куба.

Задача 9.36 (5 СМО-1998, 11). Нехай σ – сфера, описана навколо довільного тетраедра $ABCD$, σ_A, σ_B, σ_C, σ_D – сфери, що вписані в тригранні кути тетраедра з вершинами A, B, C, D відповідно та дотикаються внутрішнім чином до σ в точках A_1, B_1, C_1, D_1 відповідно. Довести, що прямі AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 перетинаються в одній точці.

Задача 9.37 (УМО-2001, 11). Про тетраедр $ABCD$ відомо, що в ньому $\angle BAC + \angle BAD = \angle ABC + \angle ABD = 90°$. Нехай O – центр кола, описаного навколо трикутника *ABC, M* – середина ребра *CD*. Довести, що прямі *AB* і *MO* взаємно перпендикулярні.

Задача 9.38 (11). У піраміді *SABCD*, основою якої є паралелограм *ABCD*, через ребро *AB* проведено площину, яка перетинає ребра *SC* і *SD* в точках C_1 та D_1 відповідно. Відомо, що $SC_1 : SC = 1 : 3$. Знайти відношення об’єму піраміди $SABC_1D_1$ до об’єму піраміди *SABCD*.

Задача 9.39 (11). Основа піраміди – паралелограм, сторони якого дорівнюють 16 см та 22 см. Відстань від вершини піраміди до центра основи дорівнює 4 см. Знайти довжини бічних ребер піраміди, якщо відомо, що вони виражаються послідовними непарними числами.

Вказівки та відповіді до задач

9.10. *Відповідь:* ні, не завжди. Наприклад, п’ять відрізків завдовжки 5 см та один відрізок завдовжки 9 см. **9.11.** *Відповідь*: $a\sqrt{2+\operatorname{ctg}^2\alpha}, \dfrac{2a}{\sin 2\alpha}, a\sqrt{2+\operatorname{tg}^2\alpha}$. **9.12.** *Відповідь:* радіуси куль дорівнюють 0,1875 м. **9.13.** *Відповідь:* множина точок паралелограма *KMNL*, вершини якого є серединами відрізків *AC, AD, BC, BD*. **9.14.** *Відповідь*: площина перерізу має бути паралельною довільній парі мимобіжних ребер. **9.15.** *Відповідь:* шуканий переріз піраміди *ABCD* проходить через середини ребер *AB, AC, BD, CD*. **9.16.** *Вказівка:* використайте формулу площі чотирикутника $S=\dfrac{1}{2}d_1d_2\sin\gamma$. *Відповідь:* площина, яка паралельна двом мимобіжним ребрам. У цьому разі проекцією є квадрат з діагоналлю, що дорівнює ребру тетраедра. **9.17.** *Відповідь:* якщо кут при вершині осьового перерізу не тупий, то найбільшу площу має осьовий переріз; якщо ж кут при вершині осьового перерізу тупий, то найбільшу площу має переріз, який перетинає основу конуса по прямій, що знаходиться на відстані $d=\sqrt{R^2-\dfrac{L^2}{2}}$ від центра основи. **9.18.** *Вказівка:* розгляньте гомотетію відносно точки *K* – середини відрізка *BC*. *Відповідь:* множина точок сфери $\omega(D_1, R = 3DO)$, де точка D_1 гомотетична точці *D* відносно точки *K* з коефіцієнтом $k = 3$ (крім точок сфери, які лежать у площині D_1BC). **9.19.** *Відповідь*: $R=\dfrac{r}{4\sin^2\dfrac{\pi}{n}}$. **9.20.** *Відповідь:* кулі видно з посудини при n = 3, 4 та не видно при $n \geq 5$. **9.21.** *Відповідь*: можна. Наприклад, середини ребер *AB*, *BC*, *DC*, *DA* тетраедра *ABCD*. **9.23.** *Відповідь:* $\alpha = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3}{11}}$. **9.24.** *Вказівка:* знайдіть відстані між центрами цих кіл. *Відповідь:* $r = \frac{R\sqrt{6}}{3}$. **9.27.** *Відповідь:* $\frac{45\sqrt{5}}{64}$. **9.28.** *Вказівка:* спочатку розгляньте 4 прямі, які ділять площину на 11 частин. *Відповідь:* так. **9.29.** *Відповідь:* так; наприклад, кулі радіусів 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$. **9.30.** *Відповідь:*

$$r = \frac{R\left(\sqrt{R^2 + h^2} - R\right)\sin\frac{\pi}{n}}{\sqrt{R^2 + h^2} - R + h\sin\frac{\pi}{n}}.$$

9.32. *Вказівка:* скористайтесь нерівністю трикутника, діагональ куба $\sqrt{3}a$. **9.34.** *Відповідь:* $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(2 - \sqrt{3}\operatorname{tg}\beta\operatorname{ctg}\alpha\right)$. **9.35.** *Відповідь:* $128R^2$. **9.36.** *Вказівка:* Розгляньте гомотетії з центрами в точках *A*, *B*, *C*, *D*, при яких відповідно сфери σ_A, σ_B, σ_C, σ_D переходять у сферу σ. При цьому використайте лему: композицією двох гомотетій з центрами O_1 і O_2 ($O_1 \neq O_2$) та коефіцієнтами k_1 і k_2 при умові $k_1k_2 \neq 1$ є гомотетія з центром на прямій O_1O_2. **9.37.** *Вказівка:* розгляньте в площині *ABC* трикутник ABD_1, який дорівнює трикутнику *ABD*. **9.38.** *Вказівка:* добудуйте дану та отриману піраміди до трикутних призм. *Відповідь:* 2 : 9. **9.39.** *Вказівка:* скористайтесь формулою довжини медіани трикутника. *Відповідь:* 11 см, 13 см, 15 см, 17 см.

§10 ДЕЯКІ НЕСТАНДАРТНІ ЗАДАЧІ: МЕТОД МАТЕМАТИЧНОЇ ІНДУКЦІЇ, ПРИНЦИП ПАРНОСТІ, ІНВАРІАНТИ, ПРИНЦИП ДІРІХЛЕ

При користуванні ***методом математичної індукції*** потрібно доводити дві теореми:

(Б): перше або кілька перших тверджень істинні;

(П): з істинності довільного твердження випливає істинність наступного твердження.

Теорема (Б) називається ***базою індукції***, теорема (П) – ***індукційним переходом***. При доведенні індукційного переходу можна користуватися істинністю кількох (можливо, всіх) попередніх тверджень. Тому схеми доведення методом математичної індукції можуть відрізнятися. Найбільш поширена: (Б) – T_1, (П) – $T_n \rightarrow T_{n+1}$. Часто використовуються схеми: (Б) – T_1, (П) – $T_1, T_2, \ldots, T_n \rightarrow T_{n+1}$ або (Б) – T_1, T_2, (П) – $T_n \rightarrow T_{n+1}$.

Задача 10.1 (9-11). Довести, що в опуклому n-кутнику не можна вибрати більш як n діагоналей так, щоб будь-які дві з них мали спільну точку.

Розв'язання. Доведемо більш загальне твердження: в опуклому n-кутнику не можна вибрати більше n сторін та діагоналей так, щоб будь-які дві з них мали спільну точку. При $n = 3$ твердження очевидне. Припустимо, що це твердження правильне для довільного опуклого n-кутника та, використовуючи це, доведемо його для довільного $(n + 1)$-кутника.

Припустимо, що для $(n + 1)$-кутника це твердження неправильне. Якщо з кожної вершини $(n + 1)$-кутника виходить не більше двох вибраних сторін чи діагоналей, то всього їх вибрано не більш як $n + 1$. Тому з деякої вершини A виходить хоча б три вибраних сторони чи діагоналі AB, AC, AD. Нехай AC лежить між AB і AD. Оскільки будь-яка сторона чи діагональ, яка виходить із точки C і відмінна від CA, не може одночасно перетинати одночасно AB і AD, то з точки C виходить лише одна вибрана діагональ CA.

Відкинувши точку C разом з діагоналлю CA, отримаємо опуклий n-кутник, у якому вибрано більше n сторін та діагоналей, будь-які дві з них мають спільну точку. Суперечність з припущенням, що твердження правильне для довільного опуклого n-кутника.

Отже, для (n + 1)-кутника це твердження правильне. За принципом математичної індукції твердження правильне для довільного опуклого n-кутника. ■

Задача 10.2 ОМО-1996, 10) На координатній площині позначено точки A, B, C з цілими координатами. Відомо, що $\angle ABC = 45°$ та що на відрізках AB та BC немає точок з цілими координатами, крім точок A, B, C. Довести, що трикутник ABC є прямокутним.

Розв'язання. Оскільки умови задачі не змінюються при паралельному перенесенні на вектор з цілими координатами та осьової симетрії відносно осей координат, то можна звести задачу до розгляду двох положень (рис.10. 1):

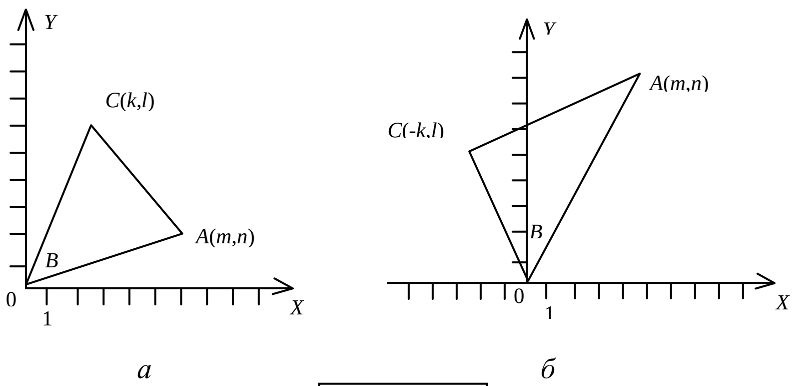


Рис. 10. 1

де k, l, m, n – деякі натуральні числа.

Розглянемо положення *а*. У випадку *б* розв'язок аналогічний, тому пропонуємо провести його самостійно.

Умова про те, що на відрізку AB немає точок з цілими координатами, крім точок A та B, рівносильна тому, що числа m, n взаємно прості, тобто НСД(m,n) = 1. Аналогічно НСД(k,l) = 1.

Маємо

$$\mathrm{tg}\,\angle ABX = \frac{n}{m},\ \mathrm{tg}\,\angle CBX = \frac{l}{k},\ \angle CBX = \angle ABX + 45°,$$

тому

$$\operatorname{tg}\angle CBX=\frac{\operatorname{tg}\angle ABX+\operatorname{tg}45^\circ}{1-\operatorname{tg}\angle ABX\cdot\operatorname{tg}45^\circ}=\frac{\frac{n}{m}+1}{1-\frac{n}{m}}=\frac{m+n}{m-n}.$$

Отже, маємо рівність $\frac{m+n}{m-n}=\frac{l}{k}$.

Можливі випадки:

1) дріб $\frac{m+n}{m-n}$ нескоротний, тоді $l = m + n$, $k = m - n$, $\overrightarrow{BC}(m-n, m+n)$, $\overrightarrow{CA}(n,-m)$, $\overrightarrow{BA}(m,n)$, тобто $AB = AC$. Оскільки проти рівних сторін у трикутнику лежать рівні кути, то $\angle BCA = 45°$, а $\angle BAC = 90°$;

2) дріб $\frac{m+n}{m-n}$ скоротний, тоді НСД($m + n$, $m - n$) = НСД($m - n$,$2n$) = = НСД($2m$,$2n$) = 2, оскільки m і n взаємно прості. Тому $l=\frac{m+n}{2}$, $k=\frac{m-n}{2}$. У цьому разі $\overrightarrow{BC}\left(\frac{m-n}{2},\frac{m+n}{2}\right)$, $\overrightarrow{CA}\left(\frac{m+n}{2},\frac{n-m}{2}\right)$, $\overrightarrow{BA}(m,n)$, тобто $BC = CA$, $\angle BAC = \angle CBA = 45°$, а $\angle ACB = 90°$.■

Деякі задачі легко розв'язуються, якщо замітити, що певна величина не змінюється в результаті деякої операції, тому ситуація, коли ця величина має іншу парність, неможлива. Така величина називається ***інваріантом***. З поняттям інваріанта учні знайомі з курсу фізики – закони збереження енергії, імпульсу. Визначивши інваріант деякого процесу, в багатьох випадках можна вияснити ***питання про можливість певного результату*** цього процесу. При цьому рівність інваріанта на початку та наприкінці процесу ще не забезпечує цієї можливості. Тому, як правило, в таких задачах відповідь на це запитання негативна. Як інваріант часто використовується ***парність.*** Також у ролі інваріанта виступає залишок від ділення на деяке число. ***Півінваріант*** – величина, яка може тільки збільшуватись або тільки зменшуватись.

Задача 10.3 (9). На координатній площині є чотири точки з цілими координатами. Дозволяється замінити будь-яку з цих точок на точку, симетричну їй відносно будь-якої іншої з цих точок. Чи можна за декілька операцій перейти від точок (0,0), (0,1), (1,0), (1,1) до точок з координатами (0,0), (1,1), (3,0), (2,–1)?

Розв'язання. Очевидно, що можливість переходу від першої четвірки точок до другої рівносильна можливості переходу від другої четвірки точок до першої.

У другій четвірці точок різниця координат кожної точки дорівнює 0 або 3, тобто ділиться на 3. Якщо точка $M_2(x_2,y_2)$ симетрична точці $M_1(x_1,y_1)$ відносно точки $M_0(x_0,y_0)$, то їхні координати зв'язані рівностями $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$, звідки отримуємо

$$x_2 = 2x_0 - x_1,\ y_2 = 2y_0 - y_1,\ x_2 - y_2 = 2(x_0 - y_0) - (x_1 - y_1).$$

Звідси видно, що коли різниці координат $x - y$ якихось двох точок діляться на 3, то й різниця координат третьої точки теж ділиться на 3. Тому, виходячи з другої четвірки точок, не можна отримати точки (0,1), (1,0).

Отже, відповідь: ні. ■

Задача 10.4 СМО, 9). На координатній площині накреслено коло радіуса 1995 з центром у точці (0,0). У кожній з точок площини, що лежать всередині кола та обидві координати яких є цілими числами, сидить павук. У деякий момент часу кожен з павуків переповзає на одиничну відстань праворуч, ліворуч, вгору або вниз, залишаючись всередині кола (різні павуки можуть рухатись у різні боки). Чи обов'язково після переповзання два павуки зустрінуться в одній точці?

Розв'язання. Кількість павуків всередині кола є непарним числом, бо кожній точці $П(m,n)$, в якій сидить павук, відповідає симетрична відносно початку координат точка $П_1(-m,-n)$, лише точці (0,0) немає пари. При вказаному в умові переповзанні кожен павук змінює на одиницю одну зі своїх координат, або, що теж саме, змінює парність суми своїх координат. Розіб'ємо павуків на дві групи: M_1 – павуки з парною сумою координат, M_2 – павуки з непарною сумою координат. Припустимо, що після переповзання в кожній точці знову сидить лише один павук. Це означає, що при переповзанні кожен павук групи M_1 зайняв місце точно одного павука з групи M_2 і навпаки, тобто в групах M_1 та M_2 однакова кількість павуків. Це суперечить тому, що їхня загальна кількість непарна.

Отже, в деякій точці після переповзання буде два чи більше павуків.■

Задача 10.5 (8-9). Коло розбите точками на $3k$ дуг: по k дуг завдовжки 1, 2 і 3. Довести, що знайдуться дві діаметрально протилежні точки.

Розв'язання. Припустимо супротивне, тобто, що таких діаметрально протилежних точок розбиття немає. Тоді отримуємо, що проти дуг завдовжки 1 лежать дуги завдовжки 3. Вилучивши дві такі діаметрально протилежні дуги завдовжки 1 та 3, отримаємо дві рівні між собою «великі» дуги завдовжки $\frac{6k-4}{2} = 3k-2$.

Нехай одна з них містить m дуг завдовжки 1 та n дуг завдовжки 3, тоді протилежна містить n дуг завдовжки 1 та m дуг завдовжки 3, причому $m + n = k - 1$. Оскільки, крім цих дуг, кожна з «великих» дуг містить лише дуги завдовжки 2, то парність довжини «великих» дуг збігається з парністю числа $k - 1$. Проте $(3k - 2) - (k - 1) = 2k - 1$, тобто числа $3k - 2$ та $k - 1$ мають різну парність. Дійшли до суперечності.

Отже, обов'язково знайдуться дві діаметрально протилежні точки розбиття. ■

Часто розв'язування задачі зручно починати з розгляду ***особливого, крайнього об'єкта***. Таким об'єктом може бути, наприклад, найбільше число, найближча точка, граничний випадок. За крайній може бути прийнято також геометричний елемент, на якому певна величина (наприклад, довжина сторони, величина кута) набуває найменшого чи найбільшого значення.

Задача 10.6 (10-11). Довести, що у многогранника є дві грані з однаковою кількістю сторін.

Розв'язання. Розглянемо грань G з найбільшою кількістю сторін n. До кожної сторони грані G прилягає грань многогранника, всього n. Якщо в многограннику є ще одна грань з кількістю сторін n, то твердження задачі доведене. Якщо ж більше такої грані немає, то в граней, які прилягають до G, кількість сторін міститься між 3 та $(n - 1)$, всього $(n - 3)$ можливості. Оскільки число можливостей менше n, то якась з можливостей повториться, тобто серед граней, що прилягають до грані G, знайдуться дві грані з однаковою кількістю сторін. ■

При розв'язуванні деяких задач про існування певних об'єктів доцільно застосовувати ***принцип Діріхле***. Найпростіше цей принцип виражається в такій жартівливій формі: ***"Якщо в N клітках сидить не менше N + 1 кроликів, то в якійсь із кліток сидить не менше двох кроликів".*** Якщо ж кроликів замінити на елементи, клітки – на підмножини, то, узагальнивши попереднє твердження, отримаємо таке формулювання: ***“Якщо множину, що складається з Nk + 1 елементів, розбити на k підмножин, то хоча б в одній підмножині виявиться не менш як N + 1 елементів”***; або ще більш загальне: ***“Якщо множину, що складається з m елементів, розбити на k підмножин, то хоча б в одній підмножині виявиться не менш як*** $\boldsymbol{\frac{m}{k}}$ ***елементів”.*** При цьому в останньому формулюванні вас не повинно “лякати” дробове число $\frac{m}{k}$ – якщо отримаєте, що в якійсь підмножині не менш як $\frac{17}{4}$ елементів, значить їх не менш ніж 5.

Доведення принципу Діріхле просте, проводиться припущенням супротивного – кожен з читачів може провести його самостійно. Принцип Діріхле має також ***геометричне формулювання***.

Наприклад:

а) Якщо відрізок завдовжки l розбито на n відрізків (що не мають спільних внутрішніх точок), то довжина найбільшого відрізка не менша від $\frac{l}{n}$, а довжина найменшого відрізка не більша за $\frac{l}{n}$.

б) Якщо фігуру площею S розбито на n частин (що не мають спільних внутрішніх точок), то площа найбільшої фігури не менша від $\frac{S}{n}$, а площа найменшої фігури не більша за $\frac{S}{n}$.

Задача 10.7 (7-9). На площині дано шість точок загального положення (жодні три з них не лежать на одній прямій). Кожні дві точки сполучено відрізком або червоного, або синього кольору. Довести, що знайдеться трикутник з вершинами в даних точках, всі сторони якого мають один колір.

Розв’язання. Позначимо дані точки через A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6. Із точки A_1 виходить 5 відрізків двох кольорів. По принципу Діріхле серед цих відрізків є 3 відрізки одного кольору. Нехай для конкретності це відрізки A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4 червоного кольору. Розглянемо відрізки A_2A_3, A_2A_4, A_3A_4. Можливі випадки:

а) серед цих відрізків є червоний, наприклад A_2A_3. Тоді в трикутнику $A_1A_2A_3$ всі сторони червоні;

б) серед цих відрізків немає червоних. Тоді в трикутнику $A_2A_3A_4$ всі сторони сині.■

Задача 10.8 (8-9). У квадраті, сторона якого дорівнює 6 см, розміщено 1991 точка. Довести, що квадратом, сторона якого дорівнює 5 см, можна покрити хоча б 664 із цих точок.

Розв'язання. Неважко помітити, що 664 становить приблизно третину від 1991, а саме 1991 = 3 · 663 + 2. Тому при будь-якому розбитті множини, що складається з 1991 точки, на три підмножини, хоча б в одну з цих підмножин потрапить 664 чи більше точок. Отже, для розв'язування задачі достатньо показати, що квадрат зі стороною 6 см можна розбити на три частини, кожну з яких можна покрити квадратом зі стороною 5 см. Це видно з рис. 10. 2, у якому

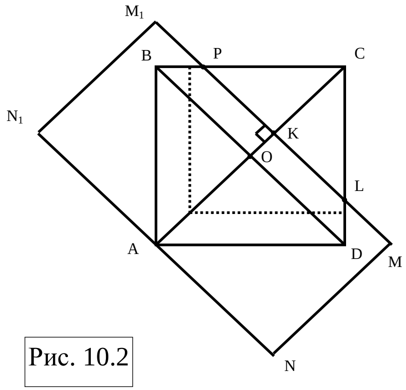


Рис. 10.2

$$AK = 5 \text{ см},\ BO = 3\sqrt{2} \text{ см} < M_1K = 5 \text{ см},$$
$$PC = CL = CK \cdot \sqrt{2} = (6\sqrt{2} - 5)\sqrt{2} \text{ см} = (12 - 5\sqrt{2}) \text{ см} < 5 \text{ см.} \ \blacksquare$$

Задача 10.9 (9-11). Довести, що в довільному опуклому $2n$-кутнику знайдеться діагональ, яка не паралельна жодній зі сторін.

Розв'язання. Припустимо, що в деякому опуклому $2n$-кутнику кожна діагональ паралельна деякій стороні. Ідея отримання суперечності така: оберемо найбільшу групу взаємно паралельних діагоналей і покажемо, що таку кількість діагоналей не можна розмістити всередині опуклого $2n$-кутника. Отже, розіб'ємо всі діагоналі на групи взаємно паралельних діагоналей. Таких груп не більш як $2n$ (деякі сторони можуть бути паралельні між собою). Кількість всіх діагоналей рівна $\dfrac{2n(2n-3)}{2} = 2n \cdot (n - 1{,}5)$, тому в деякій групі є не менш як $(n - 1)$ діагоналей. Ці $(n - 1)$ діагоналі паралельні деякій стороні A_1A_2 і лежать відносно неї в одній півплощині. Однак тоді на цю сторону та на ці $(n - 1)$ діагоналей припадає $2n$ вершин, тобто та з діагоналей, яка лежить далі від сторони A_1A_2, має бути стороною $2n$-кутника. Суперечність.

Отже, припущення неправильне, тому знайдеться діагональ, яка не паралельна жодній зі сторін. $\blacksquare$

Задача 10.10 (9-10). Всередину квадрата зі стороною 10 см «кинуто» 101 точку (жодні три не лежать на одній прямій). Довести, що серед цих точок є три, які утворюють трикутник, площа якого не перевищує 1 см^2.

Розв'язання. Розіб'ємо квадрат на 50 прямокутників зі сторонами 1 см та 2 см. Тоді хоча б в один із цих прямокутників потрапить не менш як 3 точки. Ці три точки утворюють трикутник, площа якого не перевищує половини площі прямокутника, в якому міститься цей трикутник. ■

Задача 10.11 (9-11). Обмежена фігура на площині має площу $S > 1$. Довести, що її можна "пересунути" на вектор з цілими координатами так, щоб початкова фігура та її образ перетинались.

Розв'язання. Нехай дана фігура F міститься в квадраті зі стороною d. Виберемо систему координат так, щоб точка $O(0,0)$ була внутрішньою точкою даної фігури. При довільному $k \in N$ розглянемо всі можливі образи фігури F при паралельних перенесеннях на вектор $\vec{a}(m,n)$, де $m,n \in N,\ \ 0 \le m \le k,\ \ 0 \le n \le k$. Очевидно, що кожен з таких образів міститься всередині квадрата $A = \{(x,y) : -d \le x \le k+d, -d \le y \le k+d\}$.

Припустимо, що жодні два таких образи не перетинаються. Тоді їх загальна площа не перевищує площі квадрата A, тобто

$$(k+1)^2 S \le (k+2d)^2\text{, або } (S-1)k^2 + 2(S-2d)k + S - 4d^2 \le 0.$$

Проте внаслідок умови $S - 1 > 0$ та властивостей квадратичної функції це неможливо при достатньо великих k. Отже, деякі два образи F_1 та F_2 фігури F (при паралельних перенесеннях відповідно на вектори $\vec{a}_1$ та $\vec{a}_2$) перетинаються. Очевидно, що паралельне перенесення на вектор $\vec{a} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1$ відображає фігуру F_1 у фігуру F_2. ■

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 10.12 (11). На площині дано $2n + 1$ точок, які є вершинами деякого опуклого $(2n + 1)$-кутника. Побудувати $(2n + 1)$-кутник, для якого ці точки є серединами сторін.

Задача 10.13 (9-10). Дано декілька квадратів загальною площею 1. Довести, що їх можна розмістити без накладань всередині квадрата зі стороною 2.

Задача 10.14 (10-11). Довести, що n площин ділять простір не більш як на $\frac{(n+1)(n^2-n+6)}{6}$ частин.

Задача 10.15 (8-9). Довести, що коли n точок не лежать на одній прямій, то серед прямих, які їх з'єднують, не менш як n різних.

Задача 10.16 (2 СМО-1995, 10). На прямій вибрали n різних точок $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Нехай M – множина середин відрізків A_iA_j, $1 \le i \le j \le n$. З якої найменшої кількості різних точок може складатись множина M?

Задача 10.17 (9-10). Всередині правильного шестикутника зі стороною 3 см довільним чином розміщено 55 точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Довести, що серед них знайдуться три точки, що утворюють трикутник, площа якого не перевищує $\frac{\sqrt{3}}{4}$ см^2.

Задача 10.18 (ОМО-1996, 11). Кожна точка площини пофарбована в червоний або чорний колір. Довести, що на цій площині знайдеться трикутник з кутами $30°, 60°, 90°$ і гіпотенузою 2, вершини якого однокольорові.

Задача 10.19 (9-10). У квадраті, сторона якого дорівнює 1, взято 51 точку. Довести, що деякі три з цих точок обов'язково містяться всередині круга радіуса $\frac{1}{7}$.

Задача 10.20 (8-9). На площині дано 25 точок, причому серед довільних трьох з них знайдуться дві на відстані меншій за 1. Довести, що існує круг радіуса 1, який містить не менш як 13 даних точок.

Задача 10.21 (9). Всередині квадрата зі стороною 1 розміщено кілька кіл, сума довжин яких дорівнює 9. Довести, що знайдеться пряма, яка перетинає хоча б чотири з даних кіл.

Задача 10.22 (8-9). На відрізку завдовжки 1 зафарбовано кілька відрізків так, що відстань між довільними двома зафарбованими точками не дорівнює 0,1. Довести, що сума довжин всіх зафарбованих відрізків не перевищує 0,5.

Задача 10.23 (9-10). Дано нескінченний папір в клітинку та фігура, площа якої менша за площу клітинки. Довести, що цю фігуру можна покласти на папір так, щоб вона не накрила жодної вершини клітинок.

Задача 10.24 (8-9). На площині дано скінченну кількість точок, причому довільна пряма, яка проходить через дві з даних точок, містить ще хоча б одну з даних точок. Довести, що всі дані точки лежать на одній прямій.

Задача 10.25 (8-9). Чи можна розмістити на площині 1000 відрізків так, щоб кінці кожного відрізка були внутрішніми точками деяких інших відрізків?

Задача 10.26 (8-9). На колі дано 1987 точок, одна з них відмічена. Розглядаються всі можливі опуклі многокутники з вершинами в цих точках. Яких многокутників більше: тих, що містять відмічену точку, чи тих, які її не містять?

Задача 10.27 (8-9). Довести, що в опуклого многокутника не може бути більше трьох гострих кутів.

Задача 10.28 (8-9). Довести, що опуклий 15-кутник не можна розбити на скінченну кількість паралелограмів.

Задача 10.29 (8-9). Квадратне поле розбито на 100 однакових квадратних ділянок, 9 з яких заросли бур'яном. Відомо, що бур'ян за рік поширюється на ті і тільки ті ділянки, у яких не менше двох сусідніх ділянок заросли бур'яном (сусідніми вважаються ті ділянки, які мають спільну сторону). Довести, що поле ніколи не заросте бур'яном повністю.

Вказівки та відповіді до задач

10.12. *Вказівка*: при доведенні кроку індукції від $2n + 1$ точки до $2n + 3$ точок $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}, A_{2n+2}, A_{2n+3}$ використати припущення індукції стосовно точок $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}, A$, де A – четверта вершина паралелограма $A_{2n+1}, A_{2n+2}, A_{2n+3}, A$. **10.13.** *Вказівка*: доведіть більш загальне твердження: n квадратів загальної площі S можна розмістити без накладань всередині квадрата зі стороною $2\sqrt{S}$. Для цього розгляньте найбільший квадрат. **10.16.** *Вказівка:* у випадку, коли координати даних точок утворюють арифметичну прогресію, множина M складається з точно $2n - 3$ різних точок. Доведіть методом математичної індукції, що з меншої кількості точок множина M складатись не може. *Відповідь*: $2n - 3$. **10.17.** *Вказівка:* розбийте шестикутник на правильні трикутники зі стороною 1 см. **10.18.** *Вказівка*: розгляньте всі такі трикутники зі спільною гіпотенузою. **10.19.** *Вказівка:* круг радіуса $\frac{1}{7}$ покриває квадрат зі стороною $\frac{1}{5}$. **10.20.** *Вказівка:* розгляньте два круги радіуса 1 з центрами в даних точках, відстань між якими не менша за 1 (якщо таких точок немає, то твердження задачі очевидне). **10.21.** *Вказівка*: спроектуйте кола на сторону квадрата, тоді деяка точка сторони належить хоча б чотирьом проекціям цих кіл. **10.22.** *Вказівка:* розбийте відрізок на 10 рівних та спроектуйте їх на паралельну їм пряму, при цьому дві зафарбовані точки сусідніх відрізків не можуть спроектуватись в одну точку. **10.23.** *Вказівка:* розгляньте паралельні перенесення, при яких клітинки, в яких знаходиться дана фігура, переходять в одну і ту ж клітинку. Деяка точка цієї клітинки буде непокрита образами частин даної фігури. **10.24.** *Вказівка:* проведіть через кожну пару даних точок пряму та розгляньте деяку точку A і пряму BC (A, B, C – дані точки) такі, що $A \notin BC$ та відстань від A до BC є найменшою з усіх таких відстаней. **10.25.** *Вказівка:* спроектуйте дані відрізки на пряму, яка не перпендикулярна до жодного з відрізків. *Відповідь*: ні. **10.26.** *Відповідь:* тих, які містять відмічену точку. **10.27.** *Вказівка:* розгляньте зовнішні кути многокутника. **10.28.** *Вказівка:* покажіть, що кожній сторон 15-кутника відповідає інша паралельна їй сторона та використайте опуклість многокутника. **10.29.** *Вказівка:* розгляньте довжину межі частини поля, яка заросла бур’яном.

§ 11. ГРАФИ

Часто при розв'язуванні нестандартних задач (чи різних головоломок) зручно зображати об'єкти точками, а зв'язки між цими об'єктами – лініями або стрілками. Такий спосіб зображення ситуації називається ***графом***. Графи широко застосовуються в багатьох розділах прикладної математики, в програмуванні, в теорії планування та управління. Різноманітність застосувань графів зумовила виділення теорії графів як окремої математичної дисципліни.

Дамо більш точне (математичне) означення графу та деяких основних понять теорії графів. Наведені нижче теореми доцільно розібрати разом з доведеннями, оскільки аналогічні цим доведенням міркування можуть бути використані при розв'язуванні інших задач.

Графом називається непорожня множина точок та множина відрізків, обидва кінці яких належать цій множині точок. Ці точки ще називають ***вершинами*** графу, а відрізки – ***ребрами*** графу. Деякі вершини графу можуть бути не сполучені ребрами. Точки перетину ребер на зображенні графу не завжди вважаються його вершинами, а тому вершини графу часто виділяють кружечками. Вершини, які не належать жодному ребру, називаються ***ізольованими***.

При зображенні графів його ребра можуть бути прямолінійними або криволінійними, а довжини ребер і розташування вершин – довільними. Тому одна і та сама ситуація може зображатися графами, які з геометричної точки зору виглядають різними.

Два графи називаються ***ізоморфними***, якщо у них однакова кількість вершин (наприклад, по n) і вершини кожного графу можна занумерувати числами від 1 до n так, щоб вершини першого графу були сполучені ребром тоді і тільки тоді, коли відповідні (тобто занумеровані тими самими числами) вершини другого графу також сполучені ребром.

Розгляд ізоморфних графів може бути корисним при розв'язуванні задач.

Задача 11. 1 (7-9). У трьох вершинах правильного п'ятикутника розмістили по фішці. Дозволяється пересувати їх по діагоналі в будь-яку вільну вершину. Чи можна таким способом досягти того, щоб одна з фішок повернулась на своє місце, а дві інші помінялись місцями?

Розв’язання. Послідовно занумеруємо вершини п’ятикутної зірки (отриманої в результаті можливих переміщень) числами 1, 2, 3, 4, 5. Бачимо, що з вершини 1 можна за один хід попасти або у вершину 3, або у вершину 4; з вершини 2 – або у вершину 4, або у вершину 5; з вершини 3 – або у вершину 5, або у вершину 1; з вершини 4 – або у вершину 1, або у вершину 2; з вершини 5 – або у вершину 2, або у вершину 3. Ці переміщення “стають більш закономірними”, якщо вершини такої п’ятикутної зірки “розвернути” на п’ятикутнику в

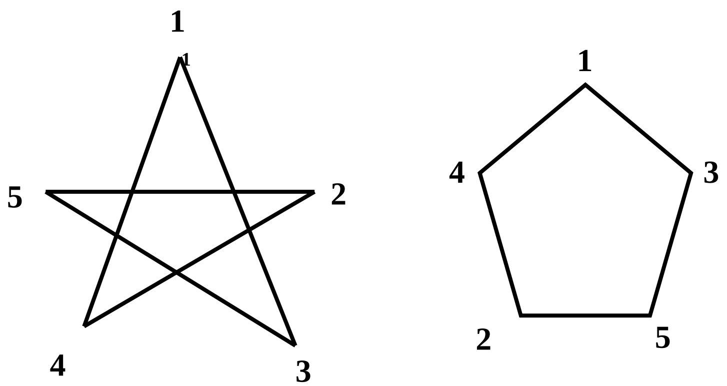


Рис. 11.1

такому порядку: 1, 3, 5, 2, 4 (рис. 11.1). Тоді переміщенням по сторонах зірки відповідають переміщення фішок по п’ятикутнику в сусідню вершину (якщо вона вільна). Очевидно, що за допомогою таких переміщень по п’ятикутнику не можна змінити порядок розміщення фішок, а отже не можна досягти того, щоб одна з фішок повернулась на своє місце, а дві інші помінялись місцями. ■

Граф називається ***повним***, якщо кожні дві його вершини сполучені одним і тільки одним ребром.

Доповненням графу $Г$ називається граф $\overline{Г}$ з тими самими вершинами, що й граф $Г$, та з тими і тільки тими ребрами, які потрібно додати до графу $Г$, щоб отримати повний граф.

Степенем вершини називається кількість ребер графу, яким належить ця вершина. Вершина називається ***парною***, якщо її степінь – парне число, та ***непарною***, якщо її степінь – непарне число. Граф називається парним, якщо всі його вершини парні.

Додавши степені всіх вершин графу, отримаємо кількість ребер графу, підраховану двічі. Тому виконується таке твердження.

Теорема 11. 1. *Число непарних вершин будь-якого графу – парне.*

Задача 11. 2. Чи можна накреслити на площині 25 відрізків так, щоб кожен з них перетинав рівно 5 інших відрізків?

Розв'язання. Поставимо у взаємно однозначну відповідність кожному відрізку деяку точку на площині. Довільну пару таких точок з'єднаємо ребром тоді і тільки тоді, коли відповідні їм відрізки перетинаються. В отриманого графу кількість непарних вершин – парне число, а тому відповідь: ні. ■

Послідовність різних ребер графу, кожне наступне з яких починається наприкінці попереднього, називається ***шляхом***. Шлях, у якому ніяке ребро не зустрічається двічі, називається ***простим***. Простий замкнений (тобто такий, початок і кінець якого збігаються) шлях ще називають ***циклом***. Цикл, який містить всі ребра графу, називається ***обходом*** графу. Обхід, при якому кожне ребро графу проходиться рівно один раз, називається ***правильним***. Граф, який допускає правильний обхід, називається ***ейлеровим*** (вперше такі графи були досліджені Леонардом Ейлером в 1736 році в зв'язку з задачею про кенігсберзькі мости). Шлях, по якому можна обійти всі вершини графу, побувавши при цьому в кожній вершині по одному разу, називається ***гамільтоновим***.

Граф називається ***зв'язним***, якщо будь-які дві його вершини можуть бути з'єднані шляхом. Будь-який незв'язний граф складається з кількох частин, кожна з яких є зв'язним графом. Ці частини називаються ***компонентами зв'язності*** графу.

Зв'язний граф, який не має циклів, називається ***деревом***. З означення дерева випливає таке твердження.

Теорема 11. 2. *Граф є деревом тоді й тільки тоді, коли будь-які дві його вершини сполучені рівно одним простим шляхом.*

Вершина графу, з якої виходить рівно одне ребро, називається ***"висячою"***.

Розглянемо довільну вершину дерева і підемо по будь-якому ребру, що виходить з неї, до іншої вершини, з нової вершини – до іншої, відмінної від попередніх, і так далі. При цьому в жодній вершині ми не зможемо побувати двічі (бо інакше дерево буде містити цикл). Оскільки у графу кількість вершин скінченна, то така подорож обов'язково закінчиться. Однак закінчитись вона може лише у "висячій" вершині. Здійснивши ще одну подорож, вже починаючи з цієї "висячої" вершини, прийдемо ще до однієї "висячої" вершини.

Отже, доведено потрібну при розв'язуванні багатьох задач ***лему про "висячу" вершину***: *кожне дерево, яке має не менше двох вершин, має хоча б дві "висячі" вершини.*

Вилучивши з дерева ребро, яке виходить з "висячої" вершини, разом з цією вершиною, знову отримуємо граф, який є деревом. Виконавши цю операцію стільки раз, скільки ребер має граф, отримаємо граф, який складається з однієї точки. Отже, доведено таке твердження.

Теорема 11. 3. *У дереві кількість вершин на 1 більша за кількість ребер.*

Задача 11. 3 (8-9). Розбита на клітинки площина пофарбована десятьма фарбами так, що сусідні (тобто ті, які мають спільну сторону) клітинки мають різний колір, причому використано всі 10 фарб. Назвемо сусідніми дві фарби, якими пофарбовані дві сусідні клітинки. Яка мінімальна можлива кількість пар сусідніх фарб?

Розв'язання. Кожному розфарбуванню площини поставимо у відповідність граф таким способом. Зобразимо фарби точками з номерами 1, 2, 3,…, 9. Якщо фарби сусідні, то з'єднуємо відповідні точки ребром. Тоді кожній парі сусідніх фарб відповідатиме ребро графу. Очевидно, що з кожної вершини графу виходить хоча б одне ребро. Отриманий граф має бути зв'язним, бо інакше площина розіб'ється на кілька відокремлених одна від одної частин, що неможливо. Найменша кількість ребер у зв'язних графух з однаковою кількістю вершин – у дерева. Отже, кількість пар сусідніх фарб не може бути меншою за 9. Залишається вказати таке розфарбування площини, при якому кількість пар сусідніх фарб дорівнює точно 9. Це можна зробити, наприклад, так: розфарбовувати кожну діагональ однією фарбою, причому фарби чередувати в такому порядку – …, 2, 1, 2, 3,…, 9, 10, 9, 8,…, 2, 1, 2, 3,… ■

Стосовно правильного обходу графу справедливі такі твердження, які часто використовуються при розв'язуванні олімпіадних задач.

Теорема 11. 4. *Для довільного зв'язного парного графу існує правильний обхід, який можна розпочати з будь-якої вершини і який обов'язково закінчується в цій самій вершині.*

Доведення. Проведемо доведення методом математичної індукції по кількості ребер графу. База індукції (граф без ребер) – очевидна.

Припустимо тепер, що для всіх зв’язних парних графів з кількістю ребер, що не перевищує n, можливий правильний обхід. Розглянемо довільний зв’язний парний граф з кількістю ребер $n + 1$. Оскільки цей граф не має “висячих” вершин, то він не є деревом, а тому має цикл. Тимчасово вилучимо всі ребра цього циклу. При цьому з кожної вершини циклу буде вилучено точно два ребра, а тому кожна з компонент зв’язності отриманого графу є парним графом, для якого справедливе припущення індукції. Тепер зрозуміло, як побудувати правильний обхід для початкового графу: при обході циклу, потрапивши в вершину, яка належить деякій з отриманих компонент, обходимо цю компоненту, а повернувшись у ту саму вершину, продовжуємо рух по циклу.

Для доведення другої частини твердження зауважимо, що вказаний на початку доведення цикл може проходити через будь-яку вершину графу. ■

Теорема 11. 5. *Якщо в зв’язному графі є точно дві непарні вершини, то можливий його правильний обхід, причому цей обхід починається в одній непарній вершині та закінчується в другій непарній вершині.*

Доведення. Вилучимо з графу деякий шлях, що з’єднує дві непарні вершини. Кожна з компонент зв’язності отриманого графу є парним графом, для якого справедливе твердження попередньої теореми. Правильний обхід початкового графу полягає у проходженні вилученого шляху з почерговим обходом кожної з таких компонент.

Правильний обхід зв’язного графу, що має дві непарні вершини, з початком у парній вершині неможливий, оскільки при такому обході хоча б у одній з непарних вершин кількість входів має дорівнювати кількості виходів. ■

Оскільки за наявності непарних вершин при правильному обході початок та кінець такого обходу можуть бути лише у непарних вершинах, то справедливе таке твердження.

Теорема 11. 6. *Якщо в графі більше двох непарних вершин, то його правильний обхід неможливий.*

Граф, який можна зобразити так, щоб його ребра не перетинались (ніде, крім вершин), називається ***плоским***. Позначимо кількість частин (граней), на які плоский граф розбиває площину, через $Г$, кількість ребер цього графу – через $Р$ та кількість його вершин – через $В$. Справедливе таке твердження.

Теорема 11. 7 (Ейлера). *Для правильно накресленого зв'язного плоского графу виконується рівність*

$$B + \Gamma - P = 2.$$

Доведення. Знайшовши у графі цикл, вилучаємо з цього циклу будь-яке одне ребро. При цьому кількість вершин не змінюється, а дві частини площини, що прилягають до вилученого ребра, зливаються в одну (рис. 11. 2). Тому за кожен такий крок кількості ребер та частин, на які площина розбивається графом, зменшуються на 1, а величина $B + \Gamma - P$ залишається сталою. Через деяку кількість таких кроків отримаємо граф, який не містить циклів, тобто є деревом. Для довільного дерева маємо $B - P = 1$, $\Gamma = 1$, звідки випливає твердження теореми. ■

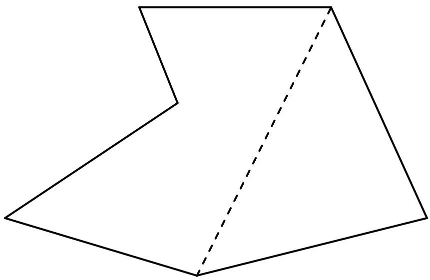


Рис. 11.2

(*Зауваження*: формула Ейлера виконується також для довільного опуклого просторового многогранника. Подумайте, чому.)

Задача 11. 4 (8-10). Довести, що для плоского зв'язного графу справедлива нерівність $\frac{3}{2}\Gamma \le P \le 3B - 6$.

Розв'язання. Кожна "грань" обмежена хоча б трьома ребрами, тому очевидна нерівність $3\Gamma \le 2P$. Звідси отримуємо

$$2 = B - P + \Gamma \le B - P + \frac{2}{3}P = B - \frac{P}{3},$$

звідки $P \le 3B - 6$. ■

Задача 11. 5 (9-11). На площині проведено n кіл так, що кожні два з них перетинаються і жодні три не мають спільної точки. На скільки частин ділять площину ці кола?

Розв'язання. Кожну з точок перетину кіл вважатимемо вершиною графу, а кожну з дуг, кінцями якої є сусідні на даних колах точки перетину, – ребрами графу. Очевидно, що такий граф є плоским та зв'язним, тому для нього виконується рівність $B + Г - P = 2$.

Неважко підрахувати, що кількість вершин $B = n(n-1)$, кількість ребер $P = 2n(n-1)$. Тому отримуємо, що кількість частин, на які ділять площину дані кола, дорівнює $Г = 2 + n(n-1)$. ■

Граф, на кожному ребрі якого задано напрям, називається ***орієнтованим***. Залежно від напряму ребра, які мають спільну вершину, назвемо вхідними або вихідними (відносно цієї вершини), а кількість вхідних та вихідних ребер цієї вершини називається відповідно ***степенем входу*** та ***степенем виходу*** вершини. Оскільки кожне ребро орієнтованого графу точно для однієї вершини є вхідним та точно для однієї вершини є вихідним, то справедливе таке твердження.

Теорема 11. 8. *Сума степенів входу всіх вершин орієнтованого графу дорівнює сумі степенів виходу всіх його вершин.*

Задача 11. 6 (9-10). У тридев'ятому королівстві кожні два міста з'єднані дорогою з одностороннім рухом. Довести, що існує місто, з якого в будь-яке інше можна проїхати не більш як двома дорогами.

Розв'язання. Позначимо за A місто, з якого виходить найбільша кількість доріг. Доведемо методом математичної індукції по кількості n міст королівства, що з міста A можна проїхати в будь-яке інше місто не більш як двома дорогами.

База індукції при $n = 1, 2, 3$ очевидна.

Припустимо, що при кількості міст n при будь-якому виборі напрямків доріг між містами з міста A можна проїхати не більш як двома дорогами в будь-яке інше місто королівства.

Нехай тепер кількість міст дорівнює $n + 1$. Якщо з A є пряма дорога в усі міста королівства, то нічого доводити не треба. У протилежному випадку нехай B – місто, дорога з якого веде в A. Тоді, за припущенням, з міста A можна проїхати не більш як двома дорогами в будь-яке інше місто королівства, крім міста B. Можливі випадки:

1) існує місто C, відмінне від міст A, B, дорога з якого веде в місто A. Тоді, відкинувши з розгляду місто C, отримуємо за припущенням, що з міста A в місто B можна проїхати не більш як двома дорогами;
2) такого міста C не існує. Тоді в місто A входить лише дорога з міста B, а тому, навіть відкинувши з розгляду довільне місто $P \neq C$, залишається справедливим твердження про те, що з міста A виходить найбільша кількість доріг. Тоді за припущенням з міста A в місто B можна проїхати не більш як двома дорогами. ■

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 11. 7 (8-9). У країні Озерна є 7 озер, з'єднаних між собою 10-ма каналами, причому від кожного озера можна допливти до будь-якого іншого. Скільки в цій країні островів?

Задача 11. 8 (7-8). Джон приїхав з Діснейленду і розказує, що там на зачарованому озері є 7 островів, із кожного з яких відходить 1, 3 або 5 мостів. Чи правда, що хоча б один з мостів веде на берег озера?

Задача 11. 9 (9-10). Дано правильний 45-кутник. Чи можна так розставити в його вершинах цифри від 0 до 9, щоб для довільної пари різних цифр знайшлась сторона, кінці якої пронумеровано цими цифрами?

Задача 11. 10 (10-11). Довести, що можна так розмістити по кругу символи 0 та 1, щоб зустрічався будь-який можливий набір з n символів, які йдуть підряд.

Задача 11. 11 (8-9). Чи можна прогулятись парком (схема парку зображена на рисунку 11. 3) та його околицями так, щоб при цьому перелізти через кожен тин рівно один раз?

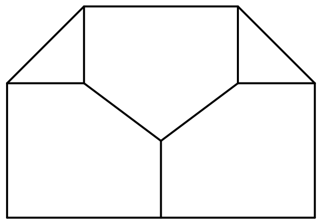


Рис.11.3

Задача 11. 12 (8-9). Дано кусок дроту завдовжки 120 см. Чи можна, не ламаючи дроту, виготовити каркас куба з ребром 10 см?

Задача 11. 13 (9-10). Довести, що в будь-якому зв'язному графі можна так вилучити вершину з усіма ребрами, які виходять з неї, щоб він залишився зв'язним.

Задача 11. 14 (9-10). У країні 30 міст, причому кожне з'єднане з будь-яким іншим дорогою. Яку найбільшу кількість доріг можна закрити на ремонт так, щоб з будь-якого міста можна було проїхати в будь-яке інше?

Задача 11. 15 (8-9). У квадраті позначили 20 точок і з'єднали їх між собою і з вершинами квадрата відрізками, які не перетинаються, так, що квадрат розбився на трикутники. Скільки при цьому утворилось трикутників?

Задача 11. 16 (8-9). Довести, що граф, який має 5 вершин, кожна з яких з'єднана ребром з будь-якою іншою, не є плоским.

Задача 11. 17 (8-9). Довести, що в плоскому графі є вершина, степінь якої не перевищує 5.

Задача 11. 18 (8-9). Семикутник розбито на опуклі п’ятикутники та шестикутники так, що кожна його вершина є вершиною хоча б двох многокутників розбиття. Довести, що число п’ятикутників розбиття не менш як 13.

Задача 11. 19 (8-9). На конференції присутні 50 учених, кожен з яких знайомий хоча б з 25 учасниками конференції. Довести, що знайдуться четверо з них, яких можна посадити за круглий стіл так, щоб кожен з них сидів біля знайомих йому людей.

Задача 11. 20 (8-9). Кожен з 102 учнів однієї школи знайомий не менш як з 68 іншими учнями. Довести, що серед них знайдеться четверо учнів, які мають однакову кількість знайомих.

Задача 11. 21 (9-11). Кожне ребро повного графу з 9 вершинами має синій або червоний колір. Довести, що є або чотири вершини, всі ребра між якими – одного кольору, або три вершини, всі ребра між якими – іншого кольору.

Задача 11. 22 (9-11). Кожне ребро повного графу з 18 вершинами має синій або червоний колір. Довести, що є чотири вершини, всі ребра між якими – одного кольору.

Задача 11. 23 (8-9). У деякій країні кожне місто з’єднане з кожним іншим дорогою з одностороннім рухом. Довести, що знайдеться місто, з якого можна доїхати в будь-яке інше.

Задача 11. 24 (8-9). 20 команд зіграли між собою круговий турнір з волейболу (нічиєї бути не може). Довести, що команди можна пронумерувати числами від 1 до 20 так, що перша команда виграла у другої, друга – у третьої, …, дев’ятнадцята – у двадцятої.

Задача 11. 25 (8-10). У деякій країні є 101 місто.

а) Кожне місто з’єднане з кожним іншим дорогою з одностороннім рухом, причому в кожне місто входить 50 доріг і з кожного міста виходить 50 доріг. Довести, що з будь-якого міста можна доїхати до будь-якого іншого, проїхавши при цьому не більш як двома дорогами.

б) Деякі міста з’єднані між собою дорогами з одностороннім рухом так, що кожні два міста з’єднані між собою не більш як однією дорогою. Причому в кожне місто входить 40 доріг і з кожного міста виходить 40 доріг. Довести, що з будь-якого міста можна доїхати до будь-якого іншого, проїхавши при цьому не більш як трьома дорогами.

Задача 11. 26 (8-9). Тенісна сітка є прямокутником розмірами 20×600 клітинок. Яке максимальне число мотузок, з яких вона сплетена, можна розрізати так, щоб сітка не розсипалась?

Задача 11. 27 (8-9). 20 школярів розв’язували 20 задач. Кожний розв’язав рівно дві задачі, і кожну задачу розв’язали рівно двоє. Довести, що можна влаштувати розбір задач так, щоб кожен учень розповів одну, розв’язану ним задачу.

Задача 11. 28 (УМО-2001, 9). У місті є 13 станцій метро, через них проходять три кільцеві лінії. Кожна кільцева лінія проходить через всі станції рівно по одному разу. Рух по кожній лінії двосторонній. Будь-які дві станції безпосередньо з’єднані щонайбільше однією ділянкою підземної колії. На всіх станціях дозволено робити пересадки.

1) Довести, що таке метро існує.
2) Довести, що з будь-якої станції можна доїхати до будь-якої іншої, побувавши щонайбільше на одній проміжній станції.

Задача 11. 29 (УМО-2001, 11). Про залізницю Тернополії відомо, що з кожної її станції до будь-якої іншої можна дістатися, проїхавши не більш як через дві інші станції. Крім того, з кожної станції можна виїхати не більш як по трьох різних коліях. Яка найбільша кількість залізничних станцій може бути в Тернополії, якщо відомо, що ця кількість непарна?

Задача 11. 30 (8-9). У графу 20 вершин, степінь яких не менший за 9. Довести, що в ньому є гамільтоновий шлях.

Задача 11. 31 (7-8). У царя Гвідона було 3 сини, з його нащадків 100 мали по 3 сини, а інші померли бездітними. Скільки нащадків у царя Гвідона?

Задача 11. 32 (10-11). Послідовність з 36 нулів та одиниць починається з п’яти нулів. Серед п’ятірок цифр, що стоять підряд, зустрічаються всі 32 можливі комбінації. Знайти п’ять останніх цифр послі- довності.

Вказівки та відповіді до задач

11. 7. *Відповідь*: 4 острови. **11. 8.** *Відповідь*: так. **11. 9.** *Вказівка:* розгляньте повний граф, вершинами якого є цифри від 0 до 9. Твердження задачі рівносильне можливості його правильного обходу. **11.10.** *Вказівка:* розгляньте граф, вершинами якого є слова завдовжки n – 1. Дві вершини A і B з’єднуються стрілкою, якщо існує слово завдовжки n, у якого A є початком, а B – кінцем. **11. 11.** *Вказівка:* побудуйте граф, вершини якого відповідають ділянкам парку та

околиці. *Відповідь:* не можна. **11. 12.** *Вказівка:* підрахуйте кількість непарних вершин. *Відповідь:* не можна. **11. 13.** *Вказівка:* з максимального дерева вилучіть висячу вершину. **11. 14.** *Відповідь:* $30\cdot 29/2-29=406$. **11. 15.** *Відповідь:* 42 трикутники. **11. 16.** *Вказівка:* скористайтесь результатом задачі 9.4. **11. 17.** *Вказівка:* припустіть супротивне та скористайтесь результатом задачі 9.4. **11. 18.** *Вказівка:* нехай a – кількість п'ятикутників, b – кількість шестикутників. Доведіть, що $2P=5a+6b+7\le 6Г-12=6(a+b+1)-12$. **11. 19.** *Вказівка:* розгляньте двох незнайомих вчених та їх знайомих. **11. 20.** *Вказівка:* припустіть супротивне та розгляньте можливі кількості знайомих. **11. 21.** *Вказівка:* для вершини, з якої виходить 6 ребер одного кольору, використайте результат задачі 6.1. **11. 22.** *Вказівка:* з довільної вершини виходить хоча б 9 ребер одного кольору. **11. 23.** *Вказівка:* скористайтесь методом математичної індукції. **11. 24.** *Вказівка:* використайте метод математичної індукції. **11. 25.** *Вказівка:* нехай з міста A не можна доїхати до міста B. а) Розгляньте міста, в які входять дороги з A, та міста, з яких виходять дороги в B; б) позначимо через x групу з 40 міст, в які входять догори з A, через y – групу з 40 міст, з яких ідуть дороги в B, через z – групу інших 19 міст. Тоді з міст групи x виходить 1600 доріг, з них до міст групи x – не більш як 780 доріг, а до міст групи z – не більш як 760 доріг. **11. 26.** *Вказівка:* можна вилучати ребра графу доти, доки не отримаємо дерево. *Відповідь:* $601\cdot 20+600\cdot 21-(21\cdot 601-1)=12000$. **11. 27.** *Вказівка:* доведіть, що якщо у графу степінь кожної вершини дорівнює 2, то він розбивається на цикли. **11. 28.** 1) *Відповідь:* наприклад,
перша лінія – $1\leftrightarrow 2\leftrightarrow 3\leftrightarrow\cdots\leftrightarrow 13\leftrightarrow 1$;
друга лінія – $1\leftrightarrow 3\leftrightarrow 5\leftrightarrow\cdots\leftrightarrow 13\leftrightarrow 2\leftrightarrow 4\leftrightarrow\cdots\leftrightarrow 12\leftrightarrow 1$;
третя лінія – $1\leftrightarrow 4\leftrightarrow 7\leftrightarrow\cdots\leftrightarrow 11\leftrightarrow 1$. 2) *Вказівка:* припустіть супротивне відносно деяких станцій A і B. **11. 29.** *Відповідь:* 15 станцій (обов'язково побудуйте схему такої залізниці). *Вказівка:* розгляньте станцію, з якої виходить парна кількість колій (така станція існує, бо кількість непарних вершин будь-якого графу є парним числом). **11. 30.** *Вказівка:* припустіть супротивне, а саме, що найдовший шлях, в якому вершини не повторюються, не містить всіх вершин. **11. 31.** *Відповідь:* 303. **11. 32.** *Відповідь:* 5 одиниць.

§ 12. РОЗМІЩЕННЯ ФІГУР НА ПЛОЩИНІ, ПОКРИТТЯ, РОЗРІЗАННЯ ТА РОЗФАРБУВАННЯ ФІГУР

Множина точок площини називається ***фігурою***. У шкільних задачах найчастіше зустрічаються многокутники – фігури, обмежені замкненими ламаними. Щодо розміщення многокутників на площині необхідно виділити **теорему Жордана**: *довільна замкнена без самоперетинів ламана ділить площину на дві області – внутрішню (обмежену) та зовнішню (необмежену), причому довільний шлях із точки, яка лежить у внутрішній області, в точку, яка лежить у зовнішній області, перетинає цю ламану, а довільні дві точки кожної з цих областей можна з'єднати шляхом, який не перетинає ламаної.*

Фігура називається ***опуклою***, якщо разом з кожними своїми двома точками вона містить також весь відрізок з кінцями в цих точках. ***Опуклим многокутником*** називається многокутник Φ, який має одну з таких рівносильних властивостей:

а) Φ є опуклою фігурою;

б) Φ розміщений в одній півплощині відносно прямої, яка містить будь-яку з його сторін;

в) усі його кути менші за 180°;

г) Φ є перетином кількох півплощин.

Для довільної скінченної множини точок на площині існує її (єдина) ***опукла оболонка*** – найменший опуклий многокутник, який містить всі ці точки. Розв'язання деяких задач варто розпочинати з розгляду опуклої оболонки.

Задача 12.1 (9-11). На площині дано $2n + 3$ точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій та жодні чотири з яких не лежать на одному колі. Довести, що з цих точок можна обрати три точки так, що серед необраних точно n точок лежать всередині кола, проведеного через обрані точки, а точно n – зовні цього кола.

Розв'язання. Розглянемо опуклу оболонку множини даних точок. Нехай AB – одна із її сторін. Усі інші вершини занумеруємо в порядку зростання кутів, під якими видно з них відрізок AB, тобто $\angle AC_1B < \angle AC_2B < \ldots < \angle AC_{2n+1}B$ (оскільки жодні чотири точки не лежать на одному колі, то всі такі кути різні). Проведемо коло через точки A, B, C_{n+1}. Точки $C_1, C_2, \ldots, C_n$ лежать зовні цього кола, а точки $C_{n+2}, C_{n+3}, \ldots, C_{2n+1}$ – всередині цього кола. ■

Методом математичної індукції доводиться (спробуйте зробити це самостійно) таке, цікаве для застосувань, твердження.

Теорема 12.1 (Хеллі). *Нехай на площині дано n опуклих фігур, кожні три з яких мають спільну точку. Тоді всі ці n фігур мають спільну точку.*

Якщо об'єднання фігур $D_1, D_2, \ldots, D_n$ містить дану фігуру Φ, то говорять, що фігури $D_1, D_2, \ldots, D_n$ утворюють ***покриття*** фігури Φ. При цьому фігури $D_1, D_2, \ldots, D_n$ можуть перетинатися.

Множина точок, відстань від яких до точки A менша ніж (додатне) число ε, називається ***ε-околом*** точки A. Точка, яка належить фігурі Φ разом з деяким своїм околом, називається ***внутрішньою точкою*** фігури Φ. Якщо всі точки фігури Φ є її внутрішніми точками, то ця фігура називається ***відкритою***.

Точка, довільний окіл якої містить як точки, що належать фігурі Φ, так і точки, які не належать фігурі Φ, називається ***межовою точкою*** цієї фігури. Множина всіх межових точок фігури називається ***межею*** цієї фігури.

Покриття фігури Φ фігурами $D_1, D_2, \ldots, D_n$, що не мають спільних внутрішніх точок, називається ***розрізанням фігури*** Φ. Як правило, розглядають такі розрізання, що $\Phi = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_n$.

При розв'язуванні задач, пов'язаних з покриттям та розрізанням, використовуються загальні властивості фігур, пов'язані з їх розташуванням на площині.

Задача 12.2. Довести, що опуклий многокутник можна розрізати на паралелограми тоді і тільки тоді, коли він має центр симетрії.

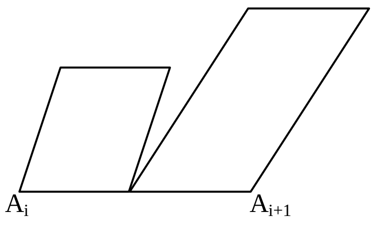


Рис.12.1

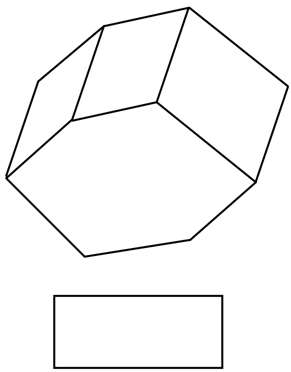
Необхідність. Отже, нехай опуклий многокутник розрізано на паралелограми. Від кожної сторони многокутника відходить ланцюжок паралелограмів, причому вона може розбиватися на декілька частин (рис. 12.1).

Оскільки у опуклого многокутника може бути тільки одна сторона, паралельна даній, то всі ланцюжки паралелограмів закінчуються на одній і тій же стороні, причому її довжина не менша довжини сторони, із якої ланцюг паралелограмів виходить.

Отже, можна скласти ланцюг паралелограмів як із першої сторони многокутника в другу, так і з другої в першу, тому довжини цих сторін рівні, а вони між собою паралельні. Тому опуклий n-кутник має парне число сторін $n=2k$. Тоді

$$A_iA_{i+1}=A_{m+i}A_{m+i+1} \text{ і } A_iA_{i+1} \parallel A_{m+i}A_{m+i+1}.$$

Якщо O_i – середина відрізка A_iA_{m+i}, O_{i+1} – середина відрізка $A_{i+1}A_{m+i+1}$, то $O_i \equiv O_{i+1}$, оскільки чотирикутник $A_iA_{i+1}A_{m+i}A_{m+i+1}$ - паралелограм. Тому всі точки $\{O_i\}$ співпадають і ця точка є центром симетрії многокутника.



Достатність. Нехай опуклий многокутник має центр симетрії. Тоді для кожної сторони многокутника знайдеться рівна і паралельна його сторона. Виконаємо розрізання многокутника так, як показано на рисунку 12.2.

Тоді одержуємо многокутник із числом сторін на два меншим ніж початковий, і у якого для кожної сторони знайдеться рівна і паралельна інша сторона.

Виконаємо розрізання утвореного многокутника, аналогічне попередньому. Очевидно цей процес закінчиться тоді, коли одержиться паралелограм. ■

Задача 12.3 (8-9). Чи можна даний правильний трикутник покрити двома меншими правильними трикутниками?

Розв'язання. Кожен з менших трикутників може покрити тільки одну вершину більшого, тому одна з вершин обов'язково буде не покритою. ■

Задача 12.4 (9-10). Чи можна покрити всю площину скінченною кількістю опуклих фігур, обмежених параболами (осі парабол можуть мати будь-який напрям)?

Розв'язання. Припустимо, що можна, тобто деякий набір опуклих фігур $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_k$, обмежених параболами, покриває площину. Оскільки кількість парабол скінченна, то існує пряма l, яка не паралельна жодній з осей цих парабол. Однак перетином кожної з фігур $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_k$ з прямою l може бути лише точка або відрізок скінченної довжини (або порожня множина). Це суперечить тому, що фігури $П_1$, $П_2$,…, $П_k$ утворюють покриття прямої l .

Відповідь: не можна. ■

У деяких задачах спрацьовує ***ідея розфарбування***. При цьому розуміють, що фігура розфарбована в декілька кольорів, якщо кожній точці фігури поставлено у відповідність один із цих кольорів. Зустрічаються задачі, де розфарбування вже дано, в деяких задачах розфарбування з певними властивостями потрібно придумати.

Задача 12.5 (8-9). Дно коробки розміром 10 × 10 вимощене плитками розміром 1 × 4 та 2 × 2. Одну з цих плиток розміром 1 × 4 загубили, але в запасі є плитка розміром 2 × 2. Чи можна наявними плитками знову вимостити дно коробки?

Розв'язання. Розіб'ємо дно коробки на квадрати та зафарбуємо деякі клітинки так, як показано на рис. 12.4. Тоді кожна плитка 2 × 2 покриває рівно одну зафарбовану, а кожна плитка 1 × 4 покриває дві або жодної з пофарбованих клітинок. Оскільки зафарбованих клітинок 25, то для вимощення дна коробки потрібно непарну кількість плиток 2 × 2.

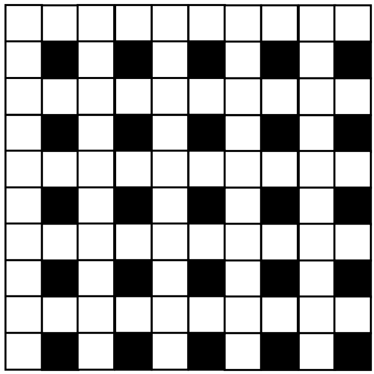


Рис. 12.4

Тому нове вимощення дна коробки неможливе. ■

Задача 12.6 (ОМО-1999, 11). Чи можна таблицю 7 × 7 без кутових клітинок заповнити цілими числами так, щоб сума всіх чисел таблиці дорівнювала 199919991999, але в кожній фігурці, вигляд якої показано на рис. 12.5, сума чисел була від'ємною?

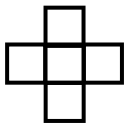


Рис. 12.5

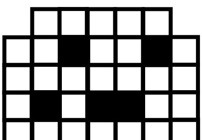


Рис.12.6

Розв'язання. Пофарбуємо у вказаній таблиці найменшу кількість клітинок так, щоб будь-яка частина таблиці вказаного вигляду містила хоча б одну пофарбовану клітинку. Це можна зробити кількома способами, наприклад так, як на рис. 12.6.

У кожній непофарбованій клітинці запишемо натуральне число m, у кожній пофарбованій – число ($-5m$). Тоді у кожній фігурці вказаного вигляду сума чисел дорівнює або ($-m$), або ($-7m$), а у всій таблиці сума чисел

$$S = 7 \cdot (-5m) + (45 - 7) \cdot m = 3m .$$

Залишається покласти $m = \dfrac{1999199919\ 99}{3}$. ■

Задача 12.7 (7-9). На площині розміщено 2003 червоних, жовтих та синіх точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Деякі пари точок різного кольору з'єднано відрізками, при цьому з кожної точки виходить однакова кількість відрізків. Довести, що знайдеться червона точка, яка з'єднана і з жовтою, і з синьою точками.

Розв'язання. Припустимо супротивне, тобто, що кожна червона точка з'єднана лише з жовтими, або лише з синіми точками. Перефарбуємо червону точку в першому випадку в синій колір, а в другому випадку – в жовтий колір. Отримуємо 2003 жовтих та синіх точок, з кожної з яких виходить одна і та сама кількість n відрізків до точок іншого кольору. Нехай кількість всіх відрізків m. Тоді кількості жовтих та синіх точок однакові, а саме $\dfrac{m}{n}$. Одержуємо протиріччя з тим, що 2003 – непарне число. ■

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 12.8 (8-9). Чи можна одиничний квадрат покрити трьома квадратами зі стороною, що дорівнює 0,7?

Задача 12.9 (8-9). Довести, що круги, які побудовано на сторонах довільного чотирикутника як на діаметрах, повністю його покривають.

Задача 12.10 (УМО-1988, 7). Довести, що різносторонній трикутник не можна розрізати прямою на два рівновеликі трикутники.

Задача 12.11 (8-9). Довести, що многокутник не можна покрити двома многокутниками, які гомотетичні йому з коефіцієнтом k, де $0 < k < 1$.

Задача 12.12 (УМО-1983, 7). Паркет, що вкриває площину, складається з правильних трикутників. Чи можна за допомогою 6 фарб розфарбувати ці трикутнички (кожен в один колір) так, щоб кожні два, що мають хоча б одну спільну вершину, було пофарбовано в різні кольори?

Задача 12.13 (УМО-1983, 10). Паркет, що покриває площину, складається з правильних трикутників. Чи можна за допомогою 4 фарб, розфарбувати паркет так, щоб кожний його трикутничок було пофарбовано в один колір, а кожні 4 трикутнички, що утворюють правильний трикутник, були різного кольору?

Задача 12.14 (УМО-1979, 7). Чи можна дошку, розміром 1979 × 1980 розрізати на частини, вигляд яких дано на рис. 12.7, кожна з яких складається з трьох квадратиків розміру 1 × 1?

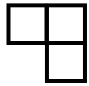


Рис. 12.7

Задача 12.15 (КМО-1981, 7). На яку найбільшу кількість частин розбивають площину три прямокутники?

Задача 12.16 (8-9). На папері в клітинку накреслено квадрат 1993 × 1993. З нього вирізали $399^2 - 1$ квадратиків 3 × 3. Чи можна вирізати ще один такий квадратик із заданого квадрата?

Задача 12.17 (КМО-1965, 8). Шахова дошка 6 × 6 довільним чином покрита вісімнадцятьма плитками доміно (кожна плитка покриває дві клітинки). Довести, що дошку завжди можна розрізати вздовж вертикальної чи горизонтальної прямої на дві частини, не пошкодивши жодної плитки доміно.

Задача 12.18 (КМО-1980, 7). До однієї зі сторін квадрата прикладено квадрат з удвічі меншою стороною так, що обидва квадрати мають спільну вершину. Потрібно перетворити отриману фігуру в квадрат за допомогою двох прямолінійних розрізів і переміщенням утворених частин.

Задача 12.19 (КМО-1980, 6). До кожної сторони квадрата прикладено ще один такий самий квадрат. Потрібно перетворити утворену “хрестоподібну” фігуру в квадрат за допомогою чотирьох прямолінійних розрізів і переміщень утворених частин.

Задача 12.20 (4 СМО-1998, 9). Чи можливо розфарбувати клітинки квадрата 6 × 6 в чорний та білий кольори таким чином, щоб кількість чорних клітинок довільного квадрата 3 × 3 була більша за кількість білих клітинок цього квадрата, а кількість білих клітинок довільного квадрата 5 × 5 була більша за кількість чорних клітинок цього квадрата?

Задача 12.21 (УМО-2001, 8). У кожній клітинці дошки розміром 9 × 9 сидить жук. Щодня всі жуки одночасно переповзають зі своєї клітинки в одну з чотирьох сусідніх (сусідніми називаються клітинки, які мають спільну сторону). При цьому жоден жук не використовує ні напрямок, у якому він повз учора, ні протилежний до нього. Якщо після переповзання на одній клітинці опиняються декілька жуків, то один залишається, а решта відлітає з дошки. Яка найбільша кількість жуків може залишитись на дошці наприкінці 2000-го дня?

Задача 12.22 (8-9). Дошка 9×9 пофарбована в 9 кольорів, причому кожним кольором пофарбовано однакову кількість клітинок та пофарбування симетричне відносно головної діагоналі. Довести, що на цій діагоналі всі клітинки пофарбовані в різні кольори.

Задача 12.23 (7-9). Чи можна квадрат 10×10 розрізати на 25 фігурок, що є прямокутниками розміру 4×1?

Задача 12.24 (9-10). На площині розташовано n точок так, що площа довільного трикутника з вершинами в цих точках не перевищує 1. Довести, що всі ці точки можна покрити трикутником, площа якого дорівнює 4.

Задача 12.25 (9-10). Чотири півплощини, які лежать в одній і тій самій площині, розміщені так, що повністю вкривають площину, тобто довільна точка площини є внутрішньою точкою хоча б однієї з даних півплощин. Довести, що із цих півплощин можна обрати три такі, які також вкривають всю площину.

Задача 12.26 (8-9). Чи можна замостити кісточками доміно розміру 1×2 шахову дошку розміру 8×8, з якої вирізано дві протилежних кутових клітинки?

Задача 12.27 (8-9). Довести, що дошку розміру 10×10 клітинок не можна розрізати на фігурки у вигляді букви Т, які складаються з чотирьох клітинок.

Задача 12.28 (8-9). Із 16 плиток розміру 1×3 та однієї плитки 1×1 склали квадрат 7×7. Довести, що плитка 1×1 лежить у центрі квадрата або прилягає до його межі.

Задача 12.29 (8-9). Площина пофарбована в три кольори. Довести, що знайдуться дві точки одного кольору, відстань між якими дорівнює 1.

Задача 12.30 (8-9). Площина пофарбована в сім кольорів. Чи обов'язково знайдуться дві точки одного кольору, відстань між якими дорівнює 1?

Задача 12.31 (9-10). Довести, що довільний правильний $2n$-кутник можна розрізати на ромби.

Задача 12.32 (9-10). Правильний восьмикутник зі стороною 1 розрізано на паралелограми. Довести, що серед них є хоча б два прямокутники, причому сума площ усіх прямокутників дорівнює 2.

Задача 12.33 (12 РМО-1986, 11). Кожна точка площини пофарбована одним з двох кольорів. Відомо, що у довільного правильного трикутника зі стороною 1 є вершини обох кольорів.

1) Довести, що існує правильний трикутник із стороною $\sqrt{3}$, всі вершини якого мають той самий колір.

2) Навести приклад розфарбування площини, яке задовольняє умову задачі.

Задача 12.34 (9-10). Довести, що довільний опуклий многокутник площі 1 можна помістити в прямокутник площі 2.

Задача 12.35 (9-10). Довести, що коли опуклий многокутник можна розрізати на центрально симетричні многокутники, то він має центр симетрії.

Задача 12.36 (9). Чи існує трикутник, у якого всі висоти менші 1 см, а площа більша 1 м^2?

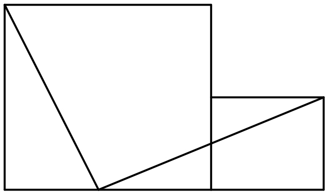
Задача 12.37 (10). Чи існують на площині три такі точки *A, B, C,* що для довільної точки X довжина хоча б одного із відрізків *XA, XB*, і *XC* ірраціональна?

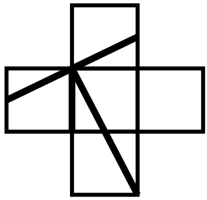
Задача 12.38 (8-9). Довести, що всередині довільного опуклого семикутника є точка, яка не належить жодному з чотирикутників, утворених четвірками його сусідніх вершин.

Вказівки та відповіді до задач

12.8. *Відповідь:* ні, буде непокритою хоча б одна вершина. **12.9.** *Вказівка:* припустіть супротивне та розгляньте суму кутів, під якими з непокритої точки видно сторони чотирикутника. **12.10.** *Вказівка:* припустіть супротивне. **12.11.** *Вказівка:* розгляньте точку даного многокутника, найбільш віддалену від прямої, яка проходить через центри гомотетій. **12.12.** *Вказівка:* розбиваємо площину на смуги. У першій смузі трикутники фарбуємо у послідовності кольорів 1, 2, 3, 1, 2, …; у сусідніх смугах – у послідовності 4, 5, 6, 4, 5, … і т. д. *Відповідь:* так. **12.13.** *Відповідь:* так. **12.14.** *Вказівка:* спочатку треба розрізати дошку на прямокутники розміром 2 × 3. *Відповідь:* так. **12.15.** *Відповідь:* на 26 частин. **12.16.** *Вказівка:* зафарбуйте на папері всі квадрати 3 × 3, координати яких задовольняють такі умови: $5k \le x \le 5k + 3$, $5n \le y \le 5n + 3$, де k, n = 0, 1, 2,…, 398. Тоді при вирізанні довільного квадрата 3 × 3 будуть вирізуватися клітинки з одного і тільки одного із зафарбованих квадратів. *Відповідь:* так. **12.17.** *Вказівка:* доведіть, що кожна з вертикальних та горизонтальних ліній, якими розкреслена дошка, розрізає пополам парну кількість плиток доміно.

12.18. *Вказівка:* **12.19.** *Вказівка*:





12.20. *Відповідь*: так. Наприклад:

Ч	Б	Ч	Ч	Б	Ч
Б	Б	Ч	Б	Б	Ч
Ч	Б	Ч	Ч	Б	Ч
Ч	Б	Ч	Ч	Б	Ч
Ч	Б	Б	Ч	Б	Б
Ч	Б	Ч	Ч	Б	Ч

12.21. *Вказівка:* для доведення того, що це найбільша кількість, зафарбуйте клітинки дошки в 4 кольори в такому порядку: в кожному непарному рядку – 1, 4, 1, 4,… зліва направо; в кожному парному рядку – 2, 3, 2, 3,… зліва направо. *Відповідь:* 64 жуки. **12.22.** *Вказівка:* доведіть, що кожен колір зустрічається на головній діагоналі. **12.23.** *Вказівка:* розфарбуйте квадрат в 4 кольори так, щоб кожна (висхідна) діагональ була пофарбована в один колір, а ці кольори чергувались у такому порядку: 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3,… *Відповідь:* ні. **12.24.** *Вказівка:* проведіть прямі, які проходять через вершини найбільшого за площею трикутника і паралельні протилежним сторонам цього трикутника. **12.26.** *Вказівка:* вирізано клітинки одного кольору, тому залишилось 32 білих клітинок та 30 чорних або навпаки. *Відповідь*: ні. **12.27.** *Вказівка:* розгляньте розфарбування у шаховому порядку. **12.28.** *Вказівка:* зафарбуйте отриманий квадрат у три кольори 1, 2, 3 таким способом:

1	2	2	1	2	2	1
2	3	3	2	3	3	2
2	3	3	2	3	3	2
1	2	2	1	2	2	1
2	3	3	2	3	3	2
2	3	3	2	3	3	2
1	2	2	1	2	2	1

12.30. *Вказівка:* замостіть площину правильними шестикутниками. *Відповідь*: не обов'язково. **12.31.** *Вказівка:* методом математичної індукції доведіть більш загальне твердження для 2*n*-кутника, протилежні сторони якого рівні між собою та паралельні, а довільні дві сторони є сумірними (тобто відношення їх довжин є раціональним числом). **12.33.** *Вказівка:* 2) розбийте площину на смуги завширшки $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **12.34.** *Вказівка:* розгляньте прямокутник, дві сторони якого паралельні найбільшій діагоналі даного многокутника. **12.35** *Вказівка*: скористайтесь теоремою 12.2. **12.36** *Вказівка:* скористайтесь методом контр прикладу. **12.38.** *Вказівка:* скористайтесь теоремою Хеллі.

Список літератури

1. *Бабинская И. Л.* Задачи математических олимпиад. – М.: Наука, 1975.
2. *Березина Л.Ю.* Графы и их применение. – М.: Просвещение, 1979.
3. *Боравльов А.П., Ленчук І.Г.* Аналіз у розв'язуванні задач на побудову. : Навч. Посібник. – К.: Вища школа, 2002.
4. *Вишенский В. А., Карташов Н. В., Михайловский В. И., Ядренко М. И.* Сборник задач Киевских математических олимпиад. – К.: Изд-во при Киевском ун-те, 1984.
5. *Вишенський В. А., Карташов М. В., Михайловский В. І., Ядренко М. Й.* Київські математичні олімпіади 1984–1993 рр. – К.: Либідь, 1993.
6. *Вишенський В. А., Ганюшкін О. Г., Карташов М. В., Михайловський В. І., Призва Г. Й., Ядренко М. Й.* Українські математичні олімпіади. – К.: Вища шк., 1993.
7. *Вишенський В.А., Перестюк М.О., Самойленко А.М.* Збірник задач з математики. – К.: ТВіМС, 2000.
8. *Гєнкін С. А., Ітенберг І. В., Фомін Д. В.* Ленінградські математичні гуртки. – К.: ТВіМС, 1997.
9. *Дороговцев А. Я., Ядренко М. Й.* Метод координат. – К.: Вища шк., 1972.
10. *Конет І. М., Паньков В. Г., Радченко В. М., Теплінський Ю. В.* Обласні математичні олімпіади. – Кам'янець-Подільський: Абетка, 2005.
11. *Кушнір І. А.* Методи розв'язання задач з геометрії. – К.: Абрис, 1994.
12. *Лейфура В.М., Мітельман І.М., Радченко В.М., Ясінський В.М.* Математичні олімпіади школярів України: 1991-2000 рр. – К. : Техніка, 2003.
13. *Мітельман І.М.* Розфарбуємо клітчасту дошку. – Львів: Каменяр, 2001.
14. *Прасолов В.В.* Задачи по планиметрии: В двух частях. – М.: Наука, 1991.
15. *Прасолов В.В., Шарыгин И.Ф.* Задачи по стереометрии. – М.: Наука, 1989.
16. *Сарана О.*А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч. – К.: „А. С. К." 2004.

17. *Сарана О.А., Ясінський В.В.* Конкурсні задачі підвищеної складності з математики. Навчальний посібник для слухачів ФДП НТУУ „КПІ”. – К.: НТУУ „КПІ”, 2005.

18. *Тадєєв В. О.* Розв’язування планіметричних задач векторно-координатним методом: Навч. посібник для учнів. (Бібліотечка заочної математичної школи). – Тернопіль, 1998.

19. *Федак І. В.* Довжини, кути, площі, цікаві лінії і точки. Посібник для підготовки до математичних олімпіад: Бібліотечка заочної математичної школи. – Тернопіль, 1998.

20. *Шклярский Д.О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М.* Избранные задачи и теоремы планиметрии. – М.: Наука, 1967.

21. *Яглом И. М.* Геометрические преобразования. Т.1. – М.: Гостехиздат, 1955.

22. *Ядренко М. Й.* Принцип Діріхле: Бібліотечка фізико-математичної школи. – К.: Вища шк., 1985.

23. *Яковлев Г.Н., Купцов Л.П., Резниченко С.В., Гусятников П.Б.* Всероссийские математические олимпиады школьников. – М.: Просвещение, 1992.

24. *Ясінський В.А.* Задачі математичних олімпіад та методи їх розв’язування. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2005.

З М І С Т