НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«Київський політехнічний інститут»
Інститут моніторингу якості освіти
Факультет довузівської підготовки
Центр тестування та моніторингу знань

Серія «На допомогу абітурієнту»

О. А. САРАНА, В. В. ЯСІНСЬКИЙ

ІДЕЇ ТА МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕСТАНДАРТНИХ ЗАДАЧ З МАТЕМАТИКИ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК
ДЛЯ СЛУХАЧІВ підготовчих курсів ФДП НТУУ "КПІ"

Київ - 2014

О. А. Сарана, Ясінський В.В.
ІДЕЇ ТА МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ НЕСТАНДАРТНИХ ЗАДАЧ З МАТЕМАТИКИ
Навчальний посібник для слухачів підготовчих курсів ФДП НТУУ “КПІ”
ФДП НТУУ «КПІ» / Сарана О.А., Ясінський В.В. - К.: Вид. Гнозіс, 2014.– 60 с. – (Серія “На допомогу абітурієнту”)

Затверджено до друку
Вченою радою ІМЯО НТУУ “КПІ”

Навчальне видання

САРАНА Олександр Анатолійович

ЯСІНСЬКИЙ Василь Васильович

ІДЕЇ ТА МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ НЕСТАНДАРТНИХ ЗАДАЧ З МАТЕМАТИКИ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК
ДЛЯ СЛУХАЧІВ ПІДГОТОВЧИХ КУРСІВ ФДП НТУУ “КПІ”

РЕЦЕНЗЕНТ: доктор фіз.-мат. наук, професор Капустян О.В. Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Посібник написано відповідно до програми з математики для слухачів підготовчих курсів ФДП НТУУ «КПІ». У ньому наведено деякі ідеї та методи розв’язування найбільш поширених нестандартних задач зі шкільного курсу математики.

Видання буде корисним слухачам підготовчих курсах при підготовці та проходженні ними поточної та підсумкової атестацій, а також при поглибленій підготовці до ЗНО з математики.

Адресовано слухачам та викладачам підготовчих курсів та вступникам до вищих навчальних закладів України.

ЗМІСТ

§ 1. ВВЕДЕННЯ НОВИХ ЗМІННИХ

При розв'язуванні рівнянь та систем рівнянь часто допомагають вдалі позначення або заміна змінних.

1.1. Розв'язати рівняння

$$\sqrt[3]{x+1}+\sqrt{18-2x}=4.$$

Розв'язання. Позначимо $\sqrt[3]{x+1}=a, \sqrt{18-2x}=b\geq 0$. Тоді отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} a+b=4; \\ x+1=a^3; \\ 18-2x=b^2, \end{cases}$$

яка рівносильна наступній

$$\begin{cases} b=4-a; \\ x=a^3-1; \\ 18-2\left(a^3-1\right)=\left(4-a\right)^2. \end{cases}$$

Розв'язуючи останнє рівняння, послідовно отримуємо $2a^3+a^2-8a-4=0$, $\left(a-2\right)\left(2a^2+5a+2\right)=0$. Тоді маємо наступні випадки: 1) $a_1=2$, $b_1=2$, $x_1=7$; 2) $a_2=-2$, $b_2=6$, $x_2=-9$; 3) $a_3=-0{,}5$, $b_3=4{,}5$, $x_3=-1{,}125$.

Відповідь: $x_1=7$, $x_2=-9$, $x_3=-1{,}125$. ■

1.2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x+y}+\sqrt{x-3y}=4; \\ 2x+3y=17. \end{cases}$$

Розв'язання. Позначимо $\sqrt[3]{x+y}=a, \sqrt{x-3y}=b$. Тоді $x + y = a^3$, $x - 3y = b^2$, звідки $x=\dfrac{3a^3+b^2}{4}$, $y=\dfrac{a^3-b^2}{4}$. Отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} a+b=4; \\ 9a^3-b^2=68, \end{cases}$$

розв'язуючи яку, маємо

$$b = 4 - a, \quad 9a^3 - a^2 + 8a - 84 = 0, \quad (a - 2)(9a^2 + 17a + 42) = 0.$$

Звідси $a = 2$, $b = 2$, $x = 7$, $y = 1$.

Відповідь: $x = 7$, $y = 1$. ■

1.3. Розв'язати рівняння

$$2x\sqrt{1-x^2}\left(8x^4-8x^2+1\right)+1=0.$$

Розв'язання. Корені рівняня мають задовольняти умову $x\in[-1;1]$. Позначимо $x=\cos t$, де змінна $t\in[0;\pi]$. Тоді отримуємо рівняння $2\cos t\ \sin t\ \cos 4t+1=0$, яке рівносильне наступним:

$$\sin 2t\ \cos 4t+1=0,$$

$$\sin 6t-\ \sin 2t+2=0,$$

$$4\sin^3 2t-2\sin 2t-2=0.$$

Розв'язуючи останнє рівняння, отримуємо $\sin 2t=1$, звідки $t=\dfrac{\pi}{4}+\pi\ n,\quad n\in Z$. З врахуванням умови $t\in[0;\pi]$ маємо $t=\dfrac{\pi}{4}$

Відповідь: $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. ■

1.4. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+z}=\dfrac{1}{2}; \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z+x}=\dfrac{1}{3}; \\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Розв'язання. Маємо

$$x+y+z=\frac{x(y+z)}{2}=\frac{y(z+x)}{3}=\frac{z(x+y)}{4}.$$

Позначимо $xy=a$, $xz=b$, $yz=c$, $x+y+z=t$. Тоді

$$\begin{cases} a+b=2t; \\ a+c=3t; \\ b+c=4t, \end{cases}$$

звідки отримуємо $a=\frac{t}{2}$, $b=\frac{3t}{2}$, $c=\frac{5t}{2}$. Однак тоді

$$\frac{a}{b}=\frac{y}{z}=\frac{1}{3},\ \frac{b}{c}=\frac{x}{y}=\frac{3}{5},$$

звідки $x=\frac{3y}{5}$, $z=3y$. Підставивши ці значення в перше рівняння початкової системи, отримуємо

$$\frac{5}{3y}+\frac{1}{4y}=\frac{1}{2},$$

звідки $y=\frac{23}{6}$, $x=\frac{23}{10}$, $z=\frac{23}{2}$. ■

1.5. Довести, що число

$$\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}$$

раціональне.

Розв'язання. Позначимо дане число через x. Тоді

$$x^3 = 12 + 3\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}\,\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}\left(\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}\right),$$

або $x^3 = 12 + 5x$. Розв’язуючи його, отримуємо

$$(x-3)(x^2+3x+4) = 0.$$

Єдиним дійсним коренем цього рівняння є число $x = 3$. ■

1.6. Розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x+y+z=4; \\ xy+yz+zx=5; \\ x^3+y^3+z^3=10. \end{cases}$$

Розв’язання. Дана система є симетричною відносно змінних x, y, z. Позначимо $x + y + z = a$, $xy + yz + zx = b$, $xyz = c$. Тоді $x^3 + y^3 + z^3 = a^3 - 3ab + 3c = 10$, звідки отримуємо $c = 2$. Для розв’язання системи

$$\begin{cases} x+y+z=4; \\ xy+yz+zx=5; \\ xyz=2 \end{cases}$$

зручно скористатись теоремою Вієта для кубічного рівняння: якщо рівняння $ax^3+bx^2+cx+d=0$ має три дійсні корені x_1, x_2, x_3, то

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a},\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\frac{c}{a},\ x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}.$$

Тому числа x, y, z є коренями рівняння $t^3 - 4t^2 + 5t - 2 = 0$.

Знаходимо $t_1 = 1$, $t_2 = 1$, $t_3 = 2$. Розв’язками системи є всі можливі перестановки цих коренів: (1;1;2), (1;2;1), (2;1;1). ■

Задачі для самостійного розв’язування

1.7. Розв’язати рівняння

$$\left(3-x\right)\sqrt[3]{\frac{3-x}{x-1}}+\left(x-1\right)\sqrt[3]{\frac{x-1}{3-x}}=2\,.$$

Вказівка: виконайте заміну $\sqrt[3]{\frac{3-x}{x-1}}=t$. *Відповідь:* $x=2$.

1.8. Розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases} y^2+\sqrt{3y^2+3x-2}=4-x; \\ 2x-y=1. \end{cases}.$$

Відповідь: $(1;1),\left(-\frac{1}{4};-\frac{3}{2}\right)$.

1.9. Розв’язати рівняння

$$4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12)-3x^2=0\,.$$

Вказівка: після ділення на x^2 заміна $x+\frac{60}{x}=t$. *Відповідь:*

$x\in\left\{-8;-\frac{15}{2};\frac{-35\pm\sqrt{265}}{2}\right\}$.

1.10. Розв’язати рівняння

$$(3x^2+7x-2)^2+5x^2(3x^2+7x-2)-24x^4=0\,.$$

Вказівка: після ділення на x^4 заміна $\frac{3x^2+7x-2}{x^2}=t$. *Відповідь:*

$x\in\left\{\frac{2}{7};\frac{-7\pm\sqrt{137}}{22}\right\}$.

1.11. Розв’язати рівняння

$$\frac{x^2+5x+4}{x^2-7x+4}+\frac{x^2-x+4}{x^2+x+4}+\frac{13}{3}=0\,.$$

Вказівка: заміна $x+\frac{4}{x}=t$. *Відповідь:* $x\in\{1;4\}$.

1.12. Розв’язати рівняння

$$(x-2)(x^3-1)=6x^2+x+1\,.$$

Вказівка: після розкриття дужок отримуємо симетричне рівняння, заміна $x+\dfrac{1}{x}=t$. *Відповідь:* $x\in\{-1;2\pm\sqrt{3}\}$.

1.13. Розв'язати рівняння

$$2x+\sqrt{3x+4}=\sqrt{11x-3x^2+20}+\sqrt{5-x}+3.$$

Вказівка: заміна $\sqrt{3x+4}-\sqrt{5-x}=t$. *Відповідь:* $x=4$.

1.14. Розв'язати рівняння

$$7\cdot\sqrt[3]{21x+13}+6=(3x+1)^3 .$$

Вказівка: після позначень $\sqrt[3]{21x+13}=a$, $3x + 1 = b$ отримуємо систему рівнянь $7a + 6 = b^3$, $a^3 = 7b + 6$. *Відповідь:* $x\in\left\{-\dfrac{2}{3};-1;\dfrac{2}{3}\right\}$.

1.15. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{1-x^2}+3x-4x^3=0 .$$

Вказівка: позначте $x=\sin t$, де змінна $t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$. *Відповідь:* $x_1=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $x_2=-\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $x_3=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

Задачі для тематичного контролю

Розв'язати рівняння.

1.16. а) $(x-1)(x-3)(x-5)(x-15)=48x^2$;

б) $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)=9$.

1.17. а) $\left(x^2-6x-9\right)^2=x\left(x^2-4x-9\right)$;

б) $\left(x^2-x-1\right)^2=x\left(x^2+5x-1\right)$.

1.18. а) $x^2+\dfrac{12}{x^2+4x}=4$;

б) $x^2+\dfrac{72}{x^2-6x}=9$.

1.19. а) $\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt{x-10}=1$;

б) $\sqrt[3]{3x-3}+\sqrt{x-6}=5$.

1.20. а) $2x^2-3x=2x\sqrt{x^2-3x}+1$;

б) $4x^2-x=2x\sqrt{3x^2-x}+4$.

1.21. а) $3x-2\sqrt{(2x-1)(x+4)}=3\sqrt{x+4}-3\sqrt{2x-1}-3$;

б) $4x+2\sqrt{(3x-2)(x+7)}=2\sqrt{x+7}+2\sqrt{3x-2}+10$.

1.22. а) $4\cdot\sqrt[3]{8x+19}+15=(2x+1)^3$;

б) $3\cdot\sqrt[3]{6x+49}+52=(2x-1)^3$.

1.23. а) $x+\sqrt{3-3x^2}=4x^2-2$;

б) $x-\sqrt{3-3x^2}=4x^2-2$.

1.24. Розв’язати системи рівнянь

а) $\begin{cases} x+y+z=7; \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{5}{3}; \\ xyz=9. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x+y+z=7; \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{7}{4}; \\ xy+yz+zx=14. \end{cases}$

§ 2. РОЗКЛАД НА МНОЖНИКИ

Основна ідея: рівняння вигляду $f(x)\cdot g(x)=0$ рівносильне за умови $x\in D(f)\bigcap D(g)$ сукупності рівнянь $\left[\begin{array}{l} f(x)=0; \\ g(x)=0. \end{array}\right.$

2.1. Розв'язати рівняння

$$x^4-8x^3+17x^2+2x-24=0\,.$$

Розв'язання. Розкладемо ліву частину цього рівняння на множники. Для цього використаємо наступне твердження (наслідок з теореми Безу): число a є коренем многочлена $P(x)$ тоді і тільки тоді, коли многочлен $P(x)$ націло ділиться на $x-a$ (тобто існує многочлен $Q(x)$ такий, що виконується тотожність $P(x)=(x-a)\cdot Q(x)$).

Число $x_1=2$ є коренем даного рівняння. При діленні його лівої частини на $x-2$ отримуємо многочлен $x^3-6x^2+5x+12$. Отже, дане рівняння рівносильне такому: $(x-2)\left(x^3-6x^2+5x+12\right)=0$.

Число $x_2=3$ є коренем многочлена $x^3-6x^2+5x+12$. При діленні його на $x-3$ отримуємо многочлен x^2-3x-4. Отже, дане рівняння рівносильне такому: $(x-2)(x-3)\left(x^2-3x-4\right)=0$. Для знаходження інших коренів розв'язуємо рівняння $x^2-3x-4=0$.

Відповідь: $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=-1$, $x_4=4$. ■

2.2. Розв'язати рівняння

$$x^2-9x-30=2x\sqrt{3x+10}\,.$$

Розв'язання. Позначимо $\sqrt{3x+10}=a\geq 0$. Тоді дане рівняння можна записати у вигляді рівності $x^2-2ax-3a^2=0$. Після перетворень отримуємо $x^2-a^2-(2ax+2a^2)=0$, $(x-a)(x+a)-2a(x+a)=0$, $(x+a)(x-3a)=0$. Отже, дане рівняння записується у вигляді

$$\left(x+\sqrt{3x+10}\right)\left(x-3\sqrt{3x+10}\right)=0,$$

а тому рівносильне наступній сукупності рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} x+\sqrt{3x+10}=0; \\ x-3\sqrt{3x+10}=0. \end{array}\right.$$

Розв'язуючи їх, отримуємо відповідь: $x_1=-2$, $x_2=30$. ■

2.3. Розв'язати рівняння

$$x^4+8x^3+18x^2+11x+2=0.$$

Розв'язання. Розкладемо ліву частину цього рівняння на множники. Для цього представимо її у вигляді

$$x^4+8x^3+18x^2+11x+2=\left(x^2+ax+b\right)\left(x^2+cx+d\right),$$

де a, b, c, d підберемо методом невизначених коефіцієнтів. Маємо

$$x^4+8x^3+18x^2+11x+2=x^4+(a+c)x^3+(b+d+ac)x^2+(ad+bc)x+bd.$$

Один з розв'язків системи

$$\begin{cases} a+c=8; \\ b+d+ac=18; \\ ad+bc=11; \\ bd=2 \end{cases}$$

знаходимо методом підбору: $a=5, b=2, c=3, d=1$ (знаходити всі її розв'язки не обов'язково). Отже,

$$x^4+8x^3+18x^2+11x+2=\left(x^2+5x+2\right)\left(x^2+3x+1\right),$$

а дане рівняння рівносильне сукупності

$$\left[\begin{array}{l} x^2+5x+2=0; \\ x^2+3x+1=0. \end{array}\right.$$

Відповідь: $x_{1,2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$, $x_{3,4}=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$. ■

2.4. Розв'язати рівняння

$$x^4-4x^3-1=0.$$

Розв'язання. Після заміни $x-1=t$ отримуємо рівняння $t^4-6t^2-8t-4=0$. Розкладемо ліву частину цього рівняння на множники. Для цього представимо її у вигляді

$$t^4-6t^2-8t-4=\left(t^2+a\right)^2-\left(bt+c\right)^2,$$
де a, b, c підберемо методом невизначених коефіцієнтів. Маємо
$$t^4-6t^2-8t-4=t^4+\left(2a-b^2\right)t^2-2bct+a^2-c^2.$$
Один з розв'язків системи
$$\begin{cases} 2a-b^2=-6; \\ -2bc=-8; \\ a^2-c^2=-4 \end{cases}$$
знаходимо методом підбору: $a=-2, b=\sqrt{2}, c=2\sqrt{2}$ (знаходити всі її розв'язки не обов'язково). Тому отримуємо рівняння $\left(t^2-2\right)^2-\left(\sqrt{2}t+2\sqrt{2}\right)^2=0$, або
$$\left(t^2+\sqrt{2}\,t+2\sqrt{2}-2\right)\left(t^2-\sqrt{2}\,t-2\sqrt{2}-2\right)=0.$$
З сукупності
$$\left[\begin{array}{l} t^2+\sqrt{2}\,t+2\sqrt{2}-2=0; \\ t^2-\sqrt{2}\,t-2\sqrt{2}-2=0; \end{array}\right.$$
знаходимо $t_{1,2}=\dfrac{\sqrt{2}\pm\sqrt{10+8\sqrt{2}}}{2}$.

Відповідь: $x_{1,2}=\dfrac{2+\sqrt{2}\pm\sqrt{10+8\sqrt{2}}}{2}$. ■

Задачі для самостійного розв'язування

2.5. Розв'язати рівняння:
$$2x^4+3x^3-12x^2-7x+6=0.$$
Відповідь: $x\in\{-3;-1;\ 0,5;\ 2\}$.

2.6. Розв'язати рівняння:
$$x^4+2x^3-18x^2-4x+24=0.$$
Відповідь: $x\in\left\{1\pm\sqrt{5};-2\pm\sqrt{10}\right\}$.

2.7. Розв'язати рівняння:
$$x^4-25x^2+20x+14=0.$$

Відповідь: $x \in \left\{2 \pm \sqrt{6}; -2 \pm \sqrt{11}\right\}$.

2.8. Розв’язати рівняння:

$$x^2 - 6x + 8 = (2x - 8)\sqrt{2x+1}.$$

Відповідь: $x_1 = 4$, $x_2 = 12$.

2.9. Розв’язати рівняння:

$$x^2 - 16x + 18 = (2x - 18)\sqrt{2x+1}.$$

Відповідь: $x_1 = 4$, $x_2 = 24$.

2.10. Розв’язати рівняння:

$$12^x + 288 = 2^{x+2}\left(2 \cdot 3^x + 9 \cdot 2^x\right).$$

Відповідь: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

Задачі для тематичного контролю

Розв’язати рівняння:

2.10. а) $6x^4 + 11x^3 - 30x^2 - 29x - 6 = 0$;

б) $6x^4 + x^3 - 40x^2 + 31x - 6 = 0$.

2.11.

а) $\sqrt{(x+2)(2x-1)} - 3\sqrt{x+6} = 4 - \sqrt{(x+6)(2x-1)} + 3\sqrt{x+2}$;

б) $3\sqrt{x+6} - \sqrt{(x+2)(2x-1)} = 4 - \sqrt{(x+6)(2x-1)} + 3\sqrt{x+2}$.

2.12. а) $x^4 + 2x^2 - 8x - 4 = 0$; б) $x^4 - 7x^2 + 14x - 40 = 0$.

2.13. а) $x^2 - 7x - 4\sqrt{x+2} + 3 = 0$;

б) $x^2 - 5x + 6\sqrt{x+1} = 6$.

2.14. а) $6^x + 108 = 4 \cdot 3^x + 27 \cdot 2^x$;

б) $10^x + 200 = 8 \cdot 5^x + 25 \cdot 2^x$.

2.15. а) $27^x + 36 = 9\left(7 - \sqrt{22}\right)^x + 4\left(7 + \sqrt{22}\right)^x$;

б) $23^x + 35 = 5\left(8 + \sqrt{41}\right)^x + 7\left(8 - \sqrt{41}\right)^x$.

§ 3. ВРАХУВАННЯ ОБЛАСТІ ВИЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЙ

Часто міркування, пов'язані з областю допустимих значень цього рівняння чи областю значень функцій, що входять у рівняння, допомагають уникнути поширених помилок або зайвої роботи.

3.1. Розв'язати рівняння $(x+5)(x-3)+3(x-3)\sqrt{\dfrac{x+5}{x-3}}-18=0$.

Розв'язання. Знаходимо область допустимих значень рівняння: $x\in(-\infty;-5]\cup(3;+\infty)$. Використавши властивість арифметичного квадратного кореня $\sqrt{a^2}=|a|$, отримуємо, що дане рівняння рівносильне сукупності систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le -5;\\ (x+5)(x-3)-3\sqrt{(x+5)(x-3)}-18=0;\end{cases}\\ \begin{cases}x>3;\\ (x+5)(x-3)+3\sqrt{(x+5)(x-3)}-18=0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Розв'язуючи її, знаходимо:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le -5;\\ \sqrt{(x+5)(x-3)}=6;\end{cases}\\ \begin{cases}x>3;\\ \sqrt{(x+5)(x-3)}=3;\end{cases}\end{array}\right.$$

звідки $x_1=-1-2\sqrt{13}$, $x_2=4$. ■

3.2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases}\sqrt{x+y}=4x-x^2;\\ \sqrt{x+y-16}+x^2+y=18.\end{cases}$$

Розв'язання. З другого рівняння отримуємо, що $x+y-16\ge 0$, звідки $\sqrt{x+y}\ge 4$. Але $4x-x^2=4-(x-2)^2\le 4$. Тому перше рівняння виконується лише, коли одночасно виконуються умови

$\sqrt{x+y}=4$, $4x-x^2=4$. Звідси отримуємо, що $x=2$, $y=14$. Перевірка показує, що ця пара чисел задовольняє також друге рівняння системи.

Відповідь: $x=2$, $y=14$. ■

3.3. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 5x-4=25y^2; \\ x-8y\sqrt{x^2-9xy^2}=(9-16x)y^2. \end{cases}$$

Розв'язання. Із другого рівняння маємо, що розв'язки системи мають задовольняти умову $x^2-9xy^2 \geq 0$, звідки $x \in (-\infty;0]\bigcup[9y^2;+\infty)$.

З першого рівняння маємо $x \geq \frac{4}{5}$. Отже, $x \geq 9y^2$.

Запишемо друге рівняння у вигляді

$$x-9y^2-8y\sqrt{x^2-9xy^2}+16xy^2=0,$$

або $\left(\sqrt{x-9y^2}-4y\sqrt{x}\right)^2=0$, звідки $\sqrt{x-9y^2}-4y\sqrt{x}=0$. Тому дана система рівносильна такій:

$$\begin{cases} y \geq 0; \\ 5x-4=25y^2; \\ x-9y^2=16xy^2. \end{cases}$$

Розв'язавши її, отримуємо відповідь: $x = 1$; $y = 0{,}2$. ■

3.4. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} y^2-16y+12x+67=0, \\ x^2y^2+64x^2-y=0. \end{cases}$$

Розв'язання. Розв'язуючи кожне рівняння як квадратне відносно змінної y, отримуємо

$$D_1=-48x-12,\ D_2=1-256x^4.$$

Умови

$$\begin{cases} D_1 \geq 0, \\ D_2 \geq 0 \end{cases}$$

виконуються лише при $x = -0{,}25$, звідки $y^2 - 16y + 64 = 0$, $y = 8$.

Відповідь: $x = -0{,}25$, $y = 8$. ■

Задачі для самостійного розв'язування

3.5. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x^2 - 5x + 4} = \cos x \log_{\cos x}\left(2\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

Відповідь: $x = 1$.

3.6. Розв'язати рівняння

$$\log_{7x - x^2}(\cos 2x + 3\cos x) = 0.$$

Відповідь: $x_1 = \frac{\pi}{3}$, $x_2 = \frac{5\pi}{3}$.

3.7. При яких значеннях параметра a рівняння

$$\sqrt{x^2 - a^2}\,\left(x^2 - 6ax + 5a^2 - 8a - 4\right) = 0$$

має чотири розв'язки?

Відповідь: $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; -0{,}5)$.

3.8. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} x^2 - y\sqrt{xy} = 84; \\ y^2 - x\sqrt{xy} = 28. \end{cases}$.

Відповідь: $x = -9$, $y = -1$.

3.9. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3 - (y+1)^2 = \sqrt{x - y}; \\ x + 8y = \sqrt{x - y - 9}. \end{cases}$$

Відповідь: $x = 8$, $y = -1$.

3.10. Розв'язати нерівність

$$x + y^2 + \sqrt{x - y^2 - 1} \leq 1.$$

Відповідь: $x = 1$, $y = 0$.

Задачі для тематичного контролю

Розв'язати рівняння

3.11. а) $\sqrt{x+3}+\sqrt{5x-2}=\sqrt{15x-25x^2-2}$;

б) $\sqrt{x+5}+\sqrt{4x-3}=\sqrt{10x-8x^2-3}$.

3.12. а) $(x+1)(x-3)+3(x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}-28=0$;

б) $x-3+\sqrt{\dfrac{x-3}{x+3}}=\dfrac{12}{x+3}$.

3.13. а) $4\cdot\sqrt[3]{x-4}-5\cdot\sqrt[3]{x-67}=3\cdot\sqrt[6]{(x-4)(x-67)}$;

б) $6\cdot\sqrt[3]{x+1}-4\cdot\sqrt[3]{x-62}=\sqrt[6]{(x+1)(x-62)}$.

3.14. а) Знайти найменше ціле значення параметра a, при якому рівняння $(x-2a)\log_3(x-9)=0$ має один корінь;

б) Знайти найбільше ціле значення параметра a, при якому рівняння $(x+3a)\log_2(x^2-8x-11)=0$ має два кореня.

Розв'язати системи рівнянь:

3.15. а) $\begin{cases} x+y-\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}=\dfrac{12}{x-y}; \\ xy=15. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x-y-\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}=\dfrac{20}{x+y}; \\ x^2+y^2=34. \end{cases}$

§ 4. ОБМЕЖЕНІСТЬ ФУНКЦІЙ

При розв'язуванні рівнянь та систем рівнянь найбільш поширені наступні ідеї застосування обмеженості функцій.

1. *Якщо* $f(x) \geq 0$ *та* $g(x) \geq 0$ *при всіх допустимих значеннях змінної* x*, то рівняння* $f(x) + g(x) = 0$ *рівносильне системі рівнянь:*

$$\begin{cases} f(x) = 0; \\ g(x) = 0. \end{cases}$$

2. *Якщо функція* $f(x)$ *набуває найбільшого (чи найменшого) значення, яке дорівнює А, то для розв'язання рівняння* $f(x) = A$ *достатньо дослідити, при яких значеннях х функція* $f(x)$ *досягає свого найбільшого (чи найменшого) значення.*

3. *Якщо* $f(x) \geq A$ *та* $g(x) \leq A$ *при всіх допустимих значеннях змінної* x*, то рівняння* $f(x) = g(x)$ *рівносильне системі рівнянь:*

$$\begin{cases} f(x) = A; \\ g(x) = A. \end{cases}$$

Для доведення обмеженості функцій як правило використовуються властивості елементарних функцій та властивості числових нерівностей, зокрема.

1) Якщо $a > b$, $b > c$, то $a > c$;
2) якщо $a > b$, то для довільного m виконується $a + m > b + m$;
3) якщо $a_1 \geq b_1, a_2 \geq b_2, ..., a_n \geq b_n$, то $a_1 + a_2 + ... + a_n \geq b_1 + b_2 + ... + b_n$;
4) якщо $a > b$, $c > d$, то $a - d > b - c$;
5) якщо $a > b$, $m > 0$, то $a m > b m$, $\frac{a}{m} > \frac{b}{m}$; якщо ж $m < 0$, то $a m < b m$, $\frac{a}{m} < \frac{b}{m}$;
6) якщо $a > b > 0$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$;
7) якщо $a_1 > b_1 \geq 0, a_2 > b_2 \geq 0, ..., a_n > b_n \geq 0$, то $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n > b_1 \cdot b_2 \cdot ... \cdot b_n$;

8) якщо $a > b > 0$, $x > 0$, то $a^x > b^x$, зокрема якщо $n \in N$, $n \geq 2$, то $a^n > b^n$, $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$.

9) якщо $a > b > 0$, $x < 0$, то $a^x < b^x$.

10) $a^2 \geq 0$;

11) $ax^2 + bx + c > 0$, якщо $a > 0$, $b^2 - 4ac < 0$;

12) $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$, якщо $x > 0$ та $x + \dfrac{1}{x} \leq -2$, якщо $x < 0$;

13) $|a + b| \leq |a| + |b|$;

14) $\dfrac{a+b}{2} \leq \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{2}}$.

4.1. Розв’язати рівняння

$$\sqrt{4x - x^2} + \sqrt{5 + 4x - x^2} = 5.$$

Розв’язання. Перепишемо рівняння у вигляді

$$\sqrt{4 - (x-2)^2} + \sqrt{9 - (x-2)^2} = 5.$$

Максимальне значення лівої частини дорівнює 5 та досягається лише при $x = 2$.

Відповідь: $x = 2$. ■

4.2. Розв’язати рівняння

$$2\cos\frac{x}{3} = 5^x + 5^{-x}.$$

Розв’язання. Оскільки $2\cos\dfrac{x}{3} \leq 2$, $5^x + \dfrac{1}{5^x} \geq 2$, то рівність можлива лише при $\begin{cases} 2\cos\dfrac{x}{3} = 2, \\ 5^x + \dfrac{1}{5^x} = 2, \end{cases}$ тобто при $\begin{cases} x = 6\pi k, k \in Z, \\ 5^x = 1. \end{cases}$

Звідси отримуємо $x = 0$. ■

4.3. Розв’язати рівняння

$$\sin 3x + 3\cos\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) = 4 .$$

Розв'язання. Оскільки $-1 \le \sin 3x \le 1$, $-1 \le \cos\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) \le 1$, то для всіх дійсних x виконується

$$-4 \le \sin 3x + 3\cos\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) \le 4 ,$$

тому розв'язками рівняння є ті і тільки ті значення x, при яких

$$\begin{cases} \sin 3x = 1; \\ \cos\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi\ k}{3}, \quad k \in Z; \\ x = \frac{\pi}{30} + \frac{2\pi\ n}{5}, \quad n \in Z. \end{cases}$$

Розв'язки рівняння отримуємо при тих цілих n, k, які задовольняють рівняння в цілих числах $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi\ k}{3} = \frac{\pi}{30} + \frac{2\pi\ n}{5}$, або після спрощень

$$1 + 5k = 3n .$$

Для розв'язання цього рівняння використаємо один з його розв'язків $k = 1, n = 2$. Віднявши від рівності $1 + 5k = 3n$ рівність $1 + 5 \cdot 1 = 3 \cdot 2$, отримуємо, що

$$5(k-1) = 3(n-2).$$

Оскільки n, k - цілі, а числа 3 і 5 взаємно прості, число $(k-1)$ ділиться на 3. Отже, $k - 1 = 3m$, де $m \in Z$. Звідси отримуємо відповідь: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi(1+3m)}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, \quad m \in Z$. ■

4.4. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{x-1} = \frac{2}{x} .$$

Розв'язання. Область допустимих значень даного рівняння: $x \ge 1$. Але при $x \ge 1$ виконуються нерівності: $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-1} \ge 2$, $\frac{2}{x} \le 2$. Тому рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases} \sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}=2; \\ \dfrac{2}{x}=2; \end{cases}$$

з якої отримуємо $x=1$. ■

4.5. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{3}\sin x+2\sqrt{3}\sin 7x+2\cos 7x+\cos 12x\cos x=6.$$

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{\cos 12x}{2}\cos x+2\sin\left(7x+\frac{\pi}{6}\right)=3.$$

Виконуються нерівності $\sin\left(7x+\dfrac{\pi}{6}\right)\le 1$ та

$$\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{\cos 12x}{2}\cos x\right|\le\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right|+\left|\frac{\cos 12x}{2}\cos x\right|\le$$

$$\le\frac{\sqrt{3}}{2}\left|\sin x\right|+\frac{1}{2}\left|\cos x\right|=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\le 1,$$

де $\alpha\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ - такий кут, що $\sin\alpha=\left|\sin x\right|$, $\cos\alpha=\left|\cos x\right|$. Тому дана рівність може виконуватись лише при виконанні наступних умов:

$$\begin{cases} \sin\left(7x+\dfrac{\pi}{6}\right)=1; \\ \cos 12x=1; \\ \sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \\ \cos x=\dfrac{1}{2}, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \sin\left(7x+\dfrac{\pi}{6}\right)=1; \\ \cos 12x=-1; \\ \sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \\ \cos x=-\dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

з яких отримуємо відповідь: $x=\dfrac{\pi}{3}+2\pi n,\quad n\in Z$. ■

4.6. Розв’язати рівняння

$$\frac{3\cos x+2\sin x}{\cos x}=\frac{\cos 2x}{\cos^2 x}+\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}\sqrt{3+2x-2y+2xy-x^2-y^2}.$$

Розв’язання. Позначимо $tgx=t$, $x-y=z$. Тоді рівняння прийме вигляд $3+2t=1-t^2+(1+t)\sqrt{3+2z-z^2}$. При $t=-1$ маємо хибну рівність, тому ця рівність рівносильна такій:

$$\frac{t^2+2t+2}{1+t}=\sqrt{3+2z-z^2},$$

або

$$t+1+\frac{1}{1+t}=\sqrt{4-(z-1)^2}.$$

Права частина цієї рівності невід’ємна і не перевищує 2, а ліва частина $t+1+\dfrac{1}{1+t}\ge 2$ при $t>-1$ та $t+1+\dfrac{1}{1+t}\le -2$ при $t<-1$. Тому рівність виконується лише при $\begin{cases} t+1=1; \\ z-1=0; \end{cases}$ тобто при

$$\begin{cases} tgx=0; \\ x-y=1. \end{cases}$$

Звідси отримуємо відповідь: $x=\pi k,\quad y=\pi k-1,\quad k\in Z$. ■

Задачі для самостійного розв’язування

4.7. Розв’язати рівняння

$$\log_2\left(5+3\cos 4x\right)=\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

Відповідь: $x=\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$.

4.8. Розв’язати рівняння $2\sin x = 5x^2 + 2x + 3$.

Відповідь: $x\in\varnothing$.

4.9. Розв’язати рівняння

$$\sqrt{x-3}+\sqrt{21-x}=x^2-24x+150.$$

Відповідь: $x = 12$.

4.10. Розв’язати рівняння

$$1-2x-x^2=\mathrm{tg}^2(x+y)+\mathrm{ctg}^2(x+y).$$

Відповідь: $x=-1,\ y=1\pm\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$.

4.11. Розв’язати рівняння

$$\sin^{1998}x+\cos^{1999}x+\sin^{1999}x=2.$$

Відповідь: $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$.

Задачі для тематичного контролю

Розв’язати рівняння

4.12. а) $|x+1|+|x+7|=6\cos x$;

б) $|x-3|+|x+7|=10\sin x$.

4.13. а) $|x+3|+|x-7|=2x^2-x^4+9$;

б) $|x-3|+|x+7|=4x^2-x^4+6$.

4.14. а) $2\sin x-3\cos 6x=5$;

б) $2\sin 2x-3\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)=5$.

4.15. а) $\sqrt{3}\sin x+\cos 18x\cos x=2$;

б) $\sqrt{3}\cos x+\cos 30x\sin x=2$.

4.16. а) $4\sin^6 x+3\cos^3 x=4$;

б) $7\cos^5 x-3\sin^3 x=7$.

4.17. а) $\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+14}=4-2x-x^2$;

б) $\sqrt{2x^2-8x+17}+\sqrt{3x^2-12x+16}=8x-2x^2-3$.

4.18. а) $x+\frac{4}{x}=\sqrt{8-4y-y^2}$;

б) $x+\frac{4}{x-2}=2+\sqrt{15-2y-y^2}$.

4.19. а) $\sqrt{x-1}+\sqrt{19-x}=7+\cos\frac{\pi x}{2}$;

б) $\sqrt{x+1}+\sqrt{17-x}=7-\cos\pi x$.

4.20. а) $\sqrt{3}\cos x+4\cos 8x+10=4\sqrt{3}\sin 8x+\sin 15x\sin x$;

б) $2\sqrt{3}\sin 5x-\sqrt{3}\sin x=\cos 24x\cos x+2\cos 5x-6$.

4.21. а) $\cos^2 x+tg^2 x=\cos 7x$;

б) $\sin^2 x+ctg^2 x=3\cos 8x-2$.

4.22. Розв'язати системи рівнянь:

а) $\begin{cases} tgx+ctgx=2\sin\left(y+\frac{\pi}{4}\right); \\ tgy+ctgy=2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right); \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sin 2x+\frac{1}{\sin 2x}=2\cos\left(y+\frac{3\pi}{4}\right); \\ \sin 2y+\frac{1}{\sin 2y}=2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right). \end{cases}$

4.23. Розв'язати нерівності:

а) $\left(4x-x^2-3\right)\cdot\log_2\left(\cos^2\pi x+1\right)\geq 1$;

б) $3^{-|x-2|}\log_2\left(4x-x^2-2\right)\geq 1$.

§ 5. МОНОТОННІСТЬ ФУНКЦІЙ

Найбільш поширені такі ідеї застосування монотонності функцій.

1. *Якщо функція f(x) є строго монотонною, то рівняння* $f(x) = A$ *не може мати більше одного кореня. Для розв'язання такого рівняння достатньо показати монотонність функції f(x) та знайти цей корінь методом добору.*

2. *Якщо функція* $f(x)$ *є строго монотонною, то рівняння* $f\big(g(x)\big) = f\big(h(x)\big)$ *рівносильне рівнянню* $g(x) = h(x)$ *(за умови, що область визначення функції* $f(x)$ *містить область значень функцій* $g(x)$ *та* $h(x)$*).*

3. *Якщо функція* $f(x)$ *є строго монотонною, то рівняння* $f\big(f(x)\big) = f(x)$ *рівносильне рівнянню* $f(x) = x$.

5.1. Розв'язати рівняння

$$6^x + 3^x + 4 = 7^x.$$

Розв'язання. Поділимо обидві частини рівняння на 7^x. Маємо

$$\left(\frac{6}{7}\right)^x + \left(\frac{3}{7}\right)^x + 4 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^x = 1.$$

Оскільки ліва частина рівності є спадною функцією, то рівняння не може мати більше одного кореня. Цим коренем є число $x_0 = 2$. ■

5.2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \sin y + \sin z = 3x; \\ \sin x + \operatorname{tg} y + \sin z = 3y; \\ \sin x + \sin y + \operatorname{tg} z = 3z, \end{cases}$$

якщо $0 \le x < \frac{\pi}{2}$, $0 \le y < \frac{\pi}{2}$, $0 \le z < \frac{\pi}{2}$.

Розв'язання. Додавши рівняння системи, отримуємо, що розв'язок має задовольняти рівняння-наслідок:

$$(2\sin x + \operatorname{tg} x - 3x) + (2\sin y + \operatorname{tg} y - 3y) + (2\sin z + \operatorname{tg} z - 3z) = 0 .$$

Розглянемо функцію $f(x)$ = $2\sin x$ + $\mathrm{tg}\, x$ – $3x$ для $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Її похідна

$$f'(x) = 2\cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 3 = \frac{2\cos^3 x - 3\cos^2 x + 1}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{(2\cos x + 1)(\cos x - 1)^2}{\cos^2 x}.$$

Отже, $f'(x) \geq 0$ для $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, причому $f'(x) = 0$ лише при $\cos x$ = 1, тобто при $x = 0$. Отже, $f(x)$ є зростаючою. Тому $f(x) > f(0) = 0$ для всіх $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, а вказане вище рівняння-наслідок може виконуватись лише при $x = y = z = 0$.

Перевірка показує, що $x = y = z = 0$ є розв’язком системи. ■

5.3. Скільки коренів має рівняння $\left(\sqrt{2}\right)^x = x$?

Розв’язання. Прологарифмувавши рівняння, запишемо його у вигляді

$$\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 2}{2}.$$

Очевидно, що $x_1 = 2$ є коренем даного рівняння.

Розглянемо функцію $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$. Маємо $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$, звідки отримуємо, що функція $f(x)$ зростає на проміжку $(0;e)$ та спадає на проміжку $(e;+\infty)$, причому $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0 < \dfrac{\ln 2}{2}$. Звідси випливає, що рівняння також має точно один корінь на проміжку $(e;+\infty)$.

Відповідь: 2 корені. ■

5.4. Розв’язати рівняння

$$x + x^3 + \sin x = x^2 + x^6 + \sin x^2.$$

Розв’язання. Рівняння має вигляд $f(x) = f(x^2)$, де $f(x) = x + x^3 + \sin x$. Оскільки $f'(x) = 1 + 3x^2 + \cos x > 0$ при всіх $x \in R$, то $f(x)$ є строго зростаючою функцією. Тому рівність $f(x) = f(x^2)$ можлива лише у разі $x = x^2$, звідки відповідь: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.■

5.6. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}} = x.$$

Розв'язання. Функція $f(x) = \sqrt{1+x}$ є зростаючою, а її область визначення $D(f) = [-1,+\infty)$ містить її область значень $E(f) = [0,+\infty)$.

Тому при $x < \sqrt{1+x}$ маємо

$$x < \sqrt{1+x} < \sqrt{1+\sqrt{1+x}} < \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}} < \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}},$$

а при $x > \sqrt{1+x}$ маємо

$$x > \sqrt{1+x} > \sqrt{1+\sqrt{1+x}} > \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}} > \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}}.$$

Тому дане рівняння рівносильне рівнянню $x = \sqrt{1+x}$, з якого знаходимо відповідь: $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. ■

5.7. Розв'язати рівняння

$$e^x - 1 = \ln(x+1).$$

Розв'язання. Позначимо $\ln(x+1) = t$. Тоді дане рівняння рівносильне системі рівнянь:

$$\begin{cases} e^x - 1 = t; \\ e^t - 1 = x. \end{cases}$$

Віднявши рівняння, отримуємо рівність $e^x - e^t = t - x$, або

$$e^x + x = e^t + t.$$

Оскільки функція $f(x) = e^x + x$ є зростаючою, то рівність $f(x) = f(t)$ рівносильна умові $x = t$.

Отже, дане рівняння рівносильне рівнянню

$$e^x - 1 = x,$$

яке має єдиний корінь $x = 0$. (Це випливає з того, що функція $h(x) = e^x - 1 - x$ в точці $x_0 = 0$ має мінімум, причому $h(0) = 0$).

Відповідь: $x = 0$. ■

5.8. Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких нерівність

$$\log_{\frac{1}{a}}\left(\sqrt{x^2 + 2ax + 5} + 5\right) \cdot \log_7\left(x^2 + 2ax + 11\right) + \log_a 6 \geq 0$$

має єдиний розв'язок.

Розв'язання. Позначимо $\sqrt{x^2 + 2ax + 5} = t$. Очевидно, що $t \geq \sqrt{5 - a^2} = t_0$. Тоді після перетворень отримуємо при $0 < a < 1$ рівносильну нерівність

$$\log_7(t+5) \cdot \log_7\left(t^2 + 6\right) \geq \log_7 6,$$

а при $a > 1$ рівносильну нерівність

$$\log_7(t+5) \cdot \log_7\left(t^2 + 6\right) \leq \log_7 6.$$

Функція $f(t) = \log_7(t+5) \cdot \log_7\left(t^2 + 6\right)$ є зростаючою на $[0; +\infty)$, причому $f(1) = \log_7 6$. Тому при $0 < a < 1$ нерівність виконується на $[t_1; +\infty)$, де $t_1 = \max\left\{1; \sqrt{5 - a^2}\right\}$, а отже не може мати єдиного розв'язку.

При $a > 1$ нерівність виконується на $\left[\sqrt{5 - a^2}; 1\right]$ у разі, якщо $1 \geq \sqrt{5 - a^2}$ та не має розв'язків у разі, якщо $1 < \sqrt{5 - a^2}$.

Отже, дана нерівність має єдиний розв'язок у разі, коли виконуються умови $1 = \sqrt{5 - a^2}$ та $a > 1$. Звідси отримуємо відповідь: $a = 2$. ■

Задачі для самостійного розв'язування

5.9. Розв'язати рівняння

$$(3x-1)\left(1 + \sqrt{(3x-1)^2 + 2}\right) - 2x\left(1 + \sqrt{4x^2 + 2}\right) = 0.$$

Вказівка: розгляньте функцію $f(x)=x\left(1+\sqrt{x^2+2}\right)$. *Відповідь:* $x=1$.

5.10. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases}\sin y-\sin x=2x-2y;\\ \sin y-\sin z=2z-2y;\\ \quad 3x-y-z=\pi.\end{cases}$$

Вказівка: розгляньте функцію $f(x)=2x+\sin x$. *Відповідь:* $x=y=z=\pi$.

5.11. Розв'язати у дійсних числах рівняння

$$5^x+12^x=13^x.$$

Вказівка: розділіть рівняння на 13^x. *Відповідь:* $x = 2$.

5.12. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases}2x+\sqrt[5]{x}=2y+\sqrt[5]{y};\\ 2x^2+xy-y^2=18.\end{cases}$$

Відповідь: $x = y = \pm 3$.

5.13. Розв'язати рівняння

$$x^3+4x+\sin 4x=4^{-x}-1.$$

Відповідь: $x = 0$.

5.14. Розв'язати рівняння

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}.$$

Відповідь: $x = 0$.

5.15. Розв'язати рівняння

$$2^{x^2-3x+6}-8\cdot 2^x=\sin\left(2^{x^2-3x+6}\right)-\sin\left(8\cdot 2^x\right).$$

Вказівка: розгляньте функцію $f(z) = z - \sin z$. *Відповідь:* $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

5.16. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases}6^{|x|+y}-2^{|x|+y}=32;\\ x^2+xy-y^2=-4.\end{cases}$$

Вказівка: дослідіть функцію $f(t) = 6^t - 2^t$. Маємо $f(t) < 0$ при $t < 0$, а на проміжку $[0;+\infty)$ функція $f(t)$ зростає. Враховуючи це, отримуємо, що $t = 2$ – єдиний корінь рівняння $6^t - 2^t = 32$, тобто $|x| + y = 2$. *Відповідь:* $x_1 = 0$, $y_1 = 2$ та $x_2 = 6$, $y_2 = -4$.

Задачі для тематичного контролю

Розв'язати рівняння.

5.17. а) $3^{x^2} - 6x = \cos\left(3^{x^2-1}\right) - \cos 2x$;

б) $\ln x - \ln\left(x^2 - 2\right) = x^4 - 5x^2 + 4$.

5.18. а) $(2x-1)\sqrt{x^2 - x + 1} + (2x+1)\sqrt{x^2 + x + 1} + 4x = 0$;

б) $x\left(\sqrt{x^2+2} + 1\right) + (x+1)\left(\sqrt{x^2 + 2x + 3} + 1\right) = 0$.

5.19. а) $\sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{4\sin x + 1}}} = 4\sin x - 2$;

б) $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{tgx + 1}}} = tgx - 1$.

5.20. а) $2 \cdot 2^x - x = 2^{e^x} - \ln(x+1)$;

б) $x + e^x = 2\ln(x+1) + 1$.

5.21.

а) $\sqrt{(x+8)(2x+3)} + \sqrt{(x+4)(2x+3)} - 3\sqrt{x+8} = 4 + 3\sqrt{x+4}$;

б) $\sqrt{(3x-2)(x+8)} + \sqrt{(3x-2)(x-1)} - 2\sqrt{x+8} = 9 + 2\sqrt{x-1}$.

5.22. Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких дана нерівність має єдиний розв'язок:

а) $\log_{\frac{1}{a}}\left(\sqrt{x^2 + ax + 5} + 1\right) \cdot \log_5\left(x^2 + ax + 6\right) + \log_a 3 \geq 0$;

б) $\log_{\frac{1}{3}}\left(\sqrt{ax^2 + 2x + 6} + 1\right) \cdot \log_a\left(ax^2 + 2x + 7\right) + \log_a 5 \leq 0$.

Розв'язати системи рівнянь.

5.23. а) $\begin{cases} 2x - \sqrt{y} = 2y - \sqrt{x}; \\ 3x^2 - xy - y^2 = 25; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x + \ln x = 3y + \ln y; \\ 5x^2 - 2xy - y^2 = 50. \end{cases}$.

5.24. а) $\begin{cases} 3^x - 3^y = 2y - 2x; \\ 4xy + 3y^2 = 63; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 - y^2 = \ln \dfrac{y}{x}; \\ 5xy - 3x^2 = 32. \end{cases}$

5.25. а) $\begin{cases} 5^{x+y} - 2^{x+y} = 21; \\ x^3 + 3y^2 = 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5^{x+2y} + \log_3(x + 2y) = 126; \\ x^2 + 2y^3 = 3. \end{cases}$.

§ 6. ПАРНІСТЬ ТА НЕПАРНІСТЬ ФУНКЦІЙ

Нехай $D(f)$ симетрична відносно початку координат, тобто для довільного $x \in D(f)$ виконується $(-x) \in D(f)$. Якщо при цьому:

1) для всіх $x \in D(f)$ виконується рівність $f(-x) = f(x)$, то функція f називається ***парною***;

2) для всіх $x \in D(f)$ виконується рівність $f(-x) = -f(x)$, то функція f називається ***непарною***.

Теорема. *Довільна функція f, область визначення якої симетрична відносно початку координат, є сумою парної та непарної функцій.*

Найбільш поширеною є така ідея застосування парності функцій: *якщо функція $f(x)$ парна (чи непарна) та x_0 – корінь рівняння $f(x) = 0$, то $(-x_0)$ також корінь цього рівняння.*

6.1. Знайти всі значення параметра a, при яких рівняння

$$a^2 \cdot 3^{|x|} - 6 = a\left(1 + 9 \cdot \sqrt[3]{|x|}\right)$$

має єдиний корінь.

Розв'язання. Оскільки ліва та права частини рівняння є парні функції, то єдиним коренем рівняння може бути лише $x_0 = 0$. Тому параметр a має задовольняти умову $a^2 - 6 = a$, звідки $a = 3$ або $a = -2$.

При $a = 3$ маємо після перетворень рівняння $3^{|x|} = 1 + 3 \cdot \sqrt[3]{|x|}$. Побудувавши графіки функцій $y = 3^{|x|}$ та $y = 1 + 3 \cdot \sqrt[3]{|x|}$, приходимо до висновку, що при $a = 3$ рівняння має три розв'язки.

При $a = -2$ маємо після перетворень рівняння $2 \cdot 3^{|x|} = 2 - 9 \cdot \sqrt[3]{|x|}$. Побудувавши графіки функцій $y = 2 \cdot 3^{|x|}$ та $y = 2 - 9 \cdot \sqrt[3]{|x|}$, приходимо до висновку, що при $a = -2$ рівняння має один розв'язок.

Відповідь: $a = -2$. ■

6.2. Знайти всі значення параметра a, при яких рівняння

$$6\log_2\left(x^2+3x+6{,}25\right)=a^2-a\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)$$

має єдиний корінь. Знайти цей корінь.

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді

$$6\log_2\left((x+1{,}5)^2+4\right)=a^2-a\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)$$

та позначимо $x+1{,}5=t$. Оскільки ця відповідність є взаємно однозначною, то початкове рівняння та отримане після заміни рівняння мають однакову кількість коренів. Отримуємо

$$6\log_2\left(t^2+4\right)=a^2-a\sin\left(\frac{\pi t}{3}-\frac{\pi}{2}\right),$$

або

$$6\log_2\left(t^2+4\right)=a^2+a\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right).$$

Оскільки ліва та права частини рівняння є парні функції, то єдиним коренем рівняння може бути лише $t_0=0$. Тому параметр a має задовольняти умову $a^2+a=12$, звідки $a=3$ або $a=-4$.

При $a=3$ маємо рівняння $2\log_2\left(t^2+4\right)=3+\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$. Оскільки функція $y=2\log_2\left(t^2+4\right)$ приймає своє найменше значення $m=4$ лише при $t=0$ та виконується оцінка $3+\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)\le 4$, то це рівняння має єдиний корінь.

При $a=-4$ маємо рівняння $3\log_2\left(t^2+4\right)=8-2\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$. Неважко помітити, що це рівняння має розв'язки, відмінні від $t=0$, наприклад $t=\pm 2$.

Відповідь: при $a=3$ рівняння має єдиний корінь $x=-1{,}5$. ■

Задачі для самостійного розв'язування

6.3. За яких значень параметра *a* рівняння

$$x^2 + \sin^2 x + 1 = (a+1)^2$$

має точно один корінь?

Відповідь: при $a = -1$ єдиний корінь $x = 0$.

6.4. За яких значень параметра a рівняння

$$\sin^2 ax + 1 = \cos x$$

має точно один корінь?

Відповідь: при $a \in R \setminus Q$ єдиний корінь $x = 0$.

6.5. За яких значень параметра a рівняння

$$3 - \sin^2(2\pi x) + a^2 + 4a = (a+1)\,2^{8x-16x^2}$$

має єдиний корінь?

Вказівка: виконавши заміну $4x - 1 = t$, отримуємо рівняння, лівою і правою частиною якого є парні функції відносно змінної t. *Відповідь:* $a = 0$.

Задачі для тематичного контролю

6.6. Представити функцію $f(x)$ у вигляді суми парної функції $g(x)$ та непарної функції $h(x)$, обчислити значення $g(2)$.

а) $f(x) = (x-1)^3 - 2x + \cos(\pi x)$;

б) $f(x) = x^4 - x - \cos\left(\pi x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

6.7. Знайти всі значення параметра *a,* при яких рівняння має єдиний розв'язок:

а) $1 + ax^2 = |\sin x|$;

б) $1 + ax^2 + \cos 3x = 0$.

6.8. Знайти всі значення параметра *a,* при яких рівняння має єдиний розв'язок:

а) $4\left(\sin^6 x + \cos^6 x\right) - 4a\sqrt{\dfrac{3x}{2\pi} - \dfrac{x^2}{\pi^2}} = 3 - 2a - a^2$;

б) $4\left(\sin^4 \pi x + \cos^4 \pi x\right) - 2a \cdot 3^{4x - x^2} = a^2 - 160a + 1$.

§ 7. ЗАСТОСУВАННЯ НЕРІВНОСТЕЙ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ ТА СИСТЕМ РІВНЯНЬ

При розв'язуванні рівнянь для оцінки виразів зі змінними як опорна часто використовуєсья добре відома нерівність

$$a^2 \geq 0.$$

7.1. Знайти всі пари (x,y) дійсних чисел, що задовольняють рівняння

$$x^4 - 2x^2 y + 3y^2 - 4xy + 4x^2 - 8y + 16 = 0.$$

Розв'язання. Виділивши повні квадрати, маємо

$$\left(x^2 - y\right)^2 + \left(2x - y\right)^2 + \left(y - 4\right)^2 = 0.$$

Оскільки всі доданки невід'ємні, то отримуємо, що рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} x^2 - y = 0; \\ 2x - y = 0; \\ y - 4 = 0, \end{cases}$$

звідки отримуємо $x = 2$, $y = 4$. ■

7.2. Розв'язати рівняння

$$x^2 + 4x\cos xy + 4 = 0.$$

Розв'язання. Маємо

$$x^2 + 4x\cos xy + 4 = (x + 2\cos xy)^2 + 4\sin^2 xy = 0,$$

звідки

$$\begin{cases} x + 2\cos xy = 0; \\ \sin xy = 0. \end{cases}$$

Оскільки при $\sin xy = 0$ маємо $\cos xy = \pm 1$, то можливі два випадки:

1) $\begin{cases} \sin xy = 0; \\ \cos xy = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2; \\ xy = \pi(2k+1), k \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2; \\ y = \dfrac{\pi}{2}(2k+1), k \in Z. \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sin xy = 0; \\ \cos xy = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2; \\ xy = 2\pi k, k \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2; \\ y = \pi k, k \in Z. \end{cases}$ ■

7.3. Знайти всі дійсні числа x, y такі, що $x \ge y \ge 1$ та

$$2x^2 - xy - 3x + y + 1 = 0.$$

Розв'язання. Дане рівняння перетворюється до вигляду

$$(x-1)(x-y)+(x-1)^2 = 0.$$

За умовою перший доданок невід'ємний, тому рівність можлива лише при $x = 1$, звідки $1 \le y \le 1$, тобто $y = 1$. ■

7.4. З А до С о 9 годині ранку відправляється швидкий потяг.У той же час з В, розташованого між А і В, виходять два пасажирських потяги, перший з яких йде в А, а другий – у С. Швидкості пасажирських потягів рівні. Швидкий зустрічає перший пасажирський не пізніше, ніж через три години після відправлення, потім приходить у пункт В не раніше 14 годин того ж дня і, нарешті, прибуває в пункт С одночасно з другим пасажирським через 12 годин після зустрічі з першим пасажирським. Знайдіть час прибуття в А першого пасажирського поїзда.

Розв'язання. Позначимо $AB = S_1$ км, $BC = S_2$ км, x км/год – швидкість пасажирських поїздів, y км/год – швидкість швидкого поїзду.

Нехай швидкий і перший пасажирський зустрілись через t год (за умовою $t \le 3$). Тоді $ty + tx = S_1$, звідки $t = \dfrac{S_1}{x+y} \le 3$. Отже,

$$S_1 \le 3(x+y).$$

Оскільки на шлях з А в В швидкий поїзд витрачає не менше 5 год, то маємо

$$S_1 \ge 5y.$$

Час, протягом якого швидкий їхав з А в С дорівнює часу, протягом якого другий пасажирський їхав з В в С, і дорівнює $(t+12)$ год. Звідси отримуємо рівняння

$$S_1 + S_2 = (t+12)y,\ S_2 = (t+12)x.$$

Тоді $S_1 = (t+12)(y-x) = \left(\dfrac{S_1}{x+y} + 12\right)(y-x)$, звідки

$$S_1 = \frac{6\left(y^2 - x^2\right)}{x}$$

З нерівності

$$\frac{6\left(y^2 - x^2\right)}{x} \le 3(x + y)$$

отримуємо, що $y \le \frac{3x}{2}$.

З нерівності

$$\frac{6\left(y^2 - x^2\right)}{x} \ge 5y$$

отримуємо, що $6y^2 - 5xy - 6x^2 \ge 0$, звідки $y \in \left(-\infty; -\frac{2x}{3}\right] \cup \left[\frac{3x}{2}; +\infty\right)$, звідки з врахуванням $y \le \frac{3x}{2}$, $y > 0$, $x > 0$ отримуємо, що $y = \frac{3x}{2}$.

Тоді $S_1 = 7{,}5x$, звідки час, витрачений першим пасажирським поїздом на шлях з В в А, дорівнює 7,5 год.

Відповідь: 0 16 год 30 хв. ■

Для невід'ємних чисел a_1, $a_2, \ldots$, a_n число $A = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ називається ***середнім арифметичним***, число $G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$ – ***середнім геометричним***, число $Q = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}$ – ***середнім квадратичним***. Для додатних чисел a_1, $a_2, \ldots$, a_n число $H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$ називається ***середнім гармонічним***.

При застосуванні нерівностей як опорні нерівності можуть використовуватися ***співвідношення між середніми значеннями*** невід'ємних чисел:

$$H \le G \le A \le Q.$$

7.5. Знайти максимальне значення виразу

$$\frac{\sqrt[16]{x}\cdot\sqrt[8]{y}\cdot\sqrt[4]{z}\cdot\sqrt{t}}{1+x+2y+z+t}$$

при $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $t \geq 0$ та вказати, при яких x, y, z, t це значення досягається.

Розв'язання. Чисельник дробу $\sqrt[16]{x}\cdot\sqrt[8]{y}\cdot\sqrt[4]{z}\cdot\sqrt{t}=\sqrt[16]{1\cdot x\cdot y^2\cdot z^4\cdot t^8}$ можна розглядати як середнє геометричне 16 чисел. Проте безпосереднє застосування нерівності Коші не приводить до його оцінки через $(1 + x + 2y + z + t)$. Тому застосуємо нерівність Коші так:

$$\sqrt[16]{x}\cdot\sqrt[8]{y}\cdot\sqrt[4]{z}\cdot\sqrt{t}=\sqrt[16]{1\cdot x\cdot y^2\cdot\left(\frac{z}{4}\right)^4\cdot\left(\frac{t}{8}\right)^8\cdot 4^4\cdot 8^8}=4\cdot\sqrt[16]{1\cdot x\cdot y^2\cdot\left(\frac{z}{4}\right)^4\cdot\left(\frac{t}{8}\right)^8}\leq$$

$$\leq 4\,\frac{1+x+2y+4\cdot\frac{z}{4}+8\cdot\frac{t}{8}}{16}=\frac{1+x+2y+z+t}{4}.$$

Звідси $\dfrac{\sqrt[16]{x}\cdot\sqrt[8]{y}\cdot\sqrt[4]{z}\cdot\sqrt{t}}{1+x+2y+z+t}\leq\dfrac{1}{4}$, причому знак рівності досягається за умови $1=x=y=\dfrac{z}{4}=\dfrac{t}{8}$, тобто при $x = y = 1$, $z = 4$, $t = 8$. ■

При розв'язуванні деяких рівнянь можна використати нерівність Коші-Буняковського

$$\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|\leq\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right| .$$

7.6. Розв'язати рівняння

$$xy+2x=\sqrt{2x^2+y^2}\cdot\sqrt{x^2+2y^2-4y+4}\,.$$

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді

$$xy+yx+x(2-y)=\sqrt{x^2+y^2+x^2}\cdot\sqrt{y^2+x^2+(2-y)^2}\,.$$

Позначимо $\vec{a}(x,y,x)$, $\vec{b}(y,x,2-y)$. Маємо $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|$. Це можливо в таких випадках:

1) $\vec{b}=k\cdot\vec{a}, k\geq 0$.

Тоді $\frac{y}{x} = \frac{x}{y} = \frac{2-y}{x} = k$.

Звідси $y = kx$, $x = ky$, $2 - y = kx$, тобто $y = k^2y$, $y(1 - k^2) = 0$. Звідси або $y = 0$, $x = ky = 0$, $2 - 0 = 0$ – суперечність, або $k = 1$, $y = x$, $2 - y = y$, тобто $y = x = 1$.

2) $\vec{a} = \vec{0}$, тобто $x = y = 0$. ■

Задачі для самостійного розв’язування

7.7. Розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 10x^2 + 5y^2 + 13z^2 = 12xy + 4xz + 6yz; \\ x^3 + y^3 + z^3 = 288. \end{cases}$$

Відповідь: $x = 4$, $y = 6$, $z = 2$.

7.8. Розв’язати рівняння

$$\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2}\right)\left(\frac{y^2}{x^2} + \frac{z^2}{y^2} + \frac{x^2}{z^2}\right) = 8 + 2x - x^2.$$

Відповідь: $x = 1$, $y = \pm 1$, $z = \pm 1$.

7.9. Розв’язати нерівність

$$y - \sqrt{1 - y - x^2} \ge \frac{1}{|\cos x|}.$$

Відповідь: $x = 0$, $y = 1$.

7.10. Розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2\sin^2 y; \\ \sin^2 y + \cos^2 z = 1. \end{cases}$$

Відповідь: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$, $y = \frac{\pi}{2} + \pi m$, $z = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $k, m, n \in Z$.

7.11. Знайти найбільше та найменше значення виразу

$$8\sin x\cos y + 4\sin x\sin y + \cos x.$$

Вказівка: щоб знайти потрібні значення, розгляньте вектори $\vec{a}(8;\, 4;\, 1)$ та $\vec{b}(\sin x\cos y;\, \sin x\sin y;\, \cos x)$. *Відповідь:* найменше значення –9, найбільше 9.

7.12. а) Довести, що при всіх $x \in [-3;\, 3]$ справджується нерівність

$$2\sqrt{9-x^2}+2x\sin x+x\cos x\le 9.$$

б) Довести, що при всіх $x\in[-5;5]$ справджується нерівність

$$6\sqrt{25-x^2}+3x\sin x+2x\cos x\le 35.$$

7.13. Розв'язати рівняння

$$x\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}=2\sqrt{x^2+1}.$$

Вказівка: розгляньте вектори $\vec{a}(x;1)$, $\vec{b}(\sqrt{1+x};\sqrt{3-x})$. *Відповідь:* $x_1=1,\ x_2=1+\sqrt{2}$.

7.14. При яких значеннях параметра *a* рівняння

$$\left(\frac{a^2}{16}+\frac{16}{a^2}\right)\left(2+\left|\sin(\pi\sin ax)\right|\right)=3+\left|\cos(\pi\sin ax)\right|$$

має розв'язки? Знайти їх.

Відповідь: при $a=\pm4$ $x=\frac{\pi n}{8},\ n\in Z$.

7.15. При яких значеннях параметра *a* рівняння

$$\frac{x^2+a(9a-6x)+16}{|x-3a|}=4+4x-x^2$$

має розв'язки? Знайти їх.

Відповідь: при $a=2$ та $a=-\frac{2}{3}$ рівняння має один розв'язок $x=2$.

7.16. Знайти всі пари дійсних чисел (*x*,*y*), для кожної з яких виконується рівність

$$12\sqrt{4x-x^2}\sin^2\frac{x+y}{2}+8\cos(x+y)=13+4\cos^2(x+y).$$

Вказівка: виразіть $\sqrt{4x-x^2}$ через $\sin\frac{x+y}{2}$ та в отриманій рівності оцініть ліву та праву частини. *Відповідь:* x = 2, $y=-2\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$.

7.17. Знайти всі пари дійсних чисел (*x*,*y*), для кожної з яких виконується рівність

$$\sqrt{3-2x-x^2}\,\sin^2(2x-y)+\cos(4x-2y)=1+\frac{\cos^2(4x-2y)}{2}.$$

Вказівка: виразіть $\sqrt{3-2x-x^2}$ через $\sin(2x-y)$ та в отриманій рівності оцініть ліву та праву частини. *Відповідь:* x = –1, $y=-2\pm\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$.

7.18. Знайти всі пари дійсних чисел (x,y), для кожної з яких виконується рівність

$$\frac{36}{\sqrt{x-2}}+\frac{4}{\sqrt{y-1}}+4\sqrt{x-2}+\sqrt{y-1}=28.$$

Відповідь: x = 11, y = 5.

7.19. Знайти всі трійки дійсних чисел (x, y, z), для кожної з яких виконується нерівність

$$10^{\lg^2 x}+x^{\lg\frac{1}{x}}+\frac{1}{\sqrt{y-y^2}}\le 2\sqrt{2}(\sin\pi z+\cos\pi z).$$

Відповідь: x = 1, $y=\frac{1}{2}$, $z=\frac{1}{4}+2k,\ k\in Z$.

7.20. З пункту А в пункт В о 7 годині ранку за течією річки відправляються човен і катер. Човен припливає в пункт В о 17 годині того ж дня. Катер, пропливши до пункту В, миттєво повертає назад і на своєму шляху із В в А зустрічає човен не пізніше 15-ї години та прибуває в пункт А не раніше 23 години того ж дня. Знайти час прибуття катера в пункт В, якщо відомо, що власна швидкість катера в два рази більша за власну швидкість човна.

Відповідь: о 13 год.

Задачі для тематичного контролю

Розв’язати рівняння

7.20. а) $x+\frac{4}{x}=\sqrt{8-4y-y^2}$;

б) $x+\frac{4}{x-2}=2+\sqrt{15-2y-y^2}$.

7.21. а) $\dfrac{x-2}{2004}+\sqrt{\dfrac{x-6}{2000}}=\dfrac{x-2004}{2}+\sqrt{\dfrac{x-2000}{6}}$;

б) $\dfrac{x-6}{2000}+\sqrt{\dfrac{x-2}{2004}}=\dfrac{x-2000}{6}+\sqrt{\dfrac{x-2004}{2}}$.

7.22. а) $x^2-6x+y-4\sqrt{y}+13=0$;

б) $x^2+10x+y-6\sqrt{y}+34=0$.

7.23. а) $\operatorname{tg}^4 x+\operatorname{tg}^4 y+2\operatorname{ctg}^2 x\cdot\operatorname{ctg}^2 y=3+\sin^2(x+y)$;

б) $\sin^4 x+\sin^4 y+\dfrac{2}{\sin^2 x\sin^2 y}=3+\cos^2(x+y)$.

7.24. а) $\cos 6x-\cos 4x+4\cos 3x+4=0$;

б) $2\cos 10x-4\cos 5x+3+\sin^2 3x=0$.

7.25. а) $3\cos x+2\sqrt{3+\cos^2 x}+\cos x\cdot\sqrt{3+\cos^2 x}=9$;

б) $\sqrt{8+\sin^2 x}-3\sin x-\sin x\cdot\sqrt{8+\sin^2 x}=9$.

7.26. а) $3\sqrt{x-1}+10x=\sqrt{(x^2+9)(x+99)}$;

б) $15\sqrt{x-5}+10x=\sqrt{(x^2+225)(x+95)}$.

7.27. а) $1+\cos^2 x+2\cos x\cos^2 5x=\sin^2 5x$;

б) $1+\sin^2 x+2\sin x\sin^2 5x=\cos^2 5x$.

7.28. Розв’язати нерівності:

а) $x^2+\dfrac{16}{x^2}+5y^2+\dfrac{20}{y^2}\le 28$;

б) $\dfrac{16\cdot 2^x}{4^x+16}\ge y^2+6y+11.$

§ 8. РІВНЯННЯ З ОБЕРНЕНИМИ ТРИГОНОМЕТРИЧНИМИ ФУНКЦІЯМИ

Рівняння з оберненими тригонометричними функціями за допомогою відповідних позначень краще зводити до систем рівнянь. При цьому важливо враховувати обмеження на область визначення та область значень обернених тригонометричних функцій згідно з їх означенням: функції $y = \arcsin x$ та $y = \arccos x$ визначені при $x \in [-1; 1]$, причому $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \arccos x \le \pi$, $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$; функції $y = arctgx$ та $y = arcctgx$ визначені при $x \in R$, причому $-\frac{\pi}{2} < arctgx < \frac{\pi}{2}$, $0 < arcctgx < \pi$, $arctgx + arcctgx = \frac{\pi}{2}$.

8.1. Розв’язати рівняння

$$\arcsin(2x-1) = \arcsin(x+0{,}25) - \frac{\pi}{3}.$$

Розв’язання. Позначимо $\arcsin(2x-1) = \alpha$, $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $\arcsin(x+0{,}25) = \beta$, $\beta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \alpha = \beta - \frac{\pi}{3}; \\ \sin\alpha = 2x-1; \\ \sin\beta = x + 0{,}25. \end{cases}$$

з якої отримуємо $\sin\alpha = 2\sin\beta - 1{,}5$, $\sin\left(\beta - \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\beta - 1{,}5$.

Розв’язуючи це рівняння, отримуємо

$$\frac{1}{2}\sin\beta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\beta=2\sin\beta-1{,}5\ ;$$

$$\frac{3}{2}\sin\beta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\beta=1{,}5\ ;$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\beta+\frac{1}{2}\cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;$$

$$\sin\left(\beta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Враховуючи умову $-\frac{\pi}{3}\le\beta+\frac{\pi}{6}\le\frac{2\pi}{3}$, отримуємо $\beta_1=\frac{\pi}{6}$, $\alpha_1=-\frac{\pi}{6}$, $x_1=0{,}25$; $\beta_2=\frac{\pi}{2}$, $\alpha_2=\frac{\pi}{6}$, $x_2=0{,}75$.

Відповідь: $x_1=0{,}25$; $x_2=0{,}75$. ■

8.2. Розв'язати рівняння

$$\arccos\frac{x}{2}=2arcctg(x-1).$$

Розв'язання. Позначимо $\arccos\frac{x}{2}=\alpha,\ \alpha\in[0;\pi]$, $arcctg(x-1)=\beta$, $\beta\in[0;\pi]$. Отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases}\alpha=2\beta;\\ \cos\alpha=\frac{x}{2};\\ ctg\beta=x-1.\end{cases}$$

з якої отримуємо $x=2\cos\alpha=ctg\beta+1$, $2\cos2\beta=ctg\beta+1$. Тоді з рівняння $2\frac{1-tg^2\beta}{1+tg^2\beta}=\frac{1}{tg\beta}+1$ знаходимо $tg\beta=-1$. Враховуючи умову $\beta\in[0;\pi]$, отримуємо $\beta=\frac{3\pi}{4}$. Але тоді $\alpha=\frac{3\pi}{2}\notin[0;\pi]$.

Відповідь: $x\in\varnothing$. ■

8.3. Розв'язати рівняння

$$\arcsin\frac{x^2-8}{8}=2\arcsin\frac{x}{4}-\frac{\pi}{2}.$$

Розв'язання. Знайдемо область допустимих значень:

$$\begin{cases}-1\le\dfrac{x^2-8}{8}\le 1;\\[2ex] -1\le\dfrac{x}{4}\le 1,\end{cases}$$

звідки знаходимо, що $|x|\le 4$. Враховуючи, що область значень функції $f(x)=\arcsin x$ – проміжок $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, отримуємо

$$0\le\arcsin\frac{x^2-8}{8}+\frac{\pi}{2}\le\pi,$$

звідки $0\le x\le 4$. Оскільки функція $f(x)=\cos x$ є монотонною на $[0;\pi]$, то дане рівняння рівносильне такому:

$$\cos\left(\arcsin\frac{x^2-8}{8}+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(2\arcsin\frac{x}{4}\right).$$

Отримуємо

$$-\sin\left(\arcsin\frac{x^2-8}{8}\right)=1-2\sin^2\left(\arcsin\frac{x}{4}\right),$$

або

$$-\frac{x^2-8}{8}=1-2\frac{x^2}{16}.$$

Тобто, отримуємо відповідь: $0\le x\le 4$. ■

Задачі для самостійного розв'язування

8.4. Розв'язати рівняння

$$\arcsin x + \arcsin(2x) = \frac{\pi}{2}.$$

Відповідь: $x = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

8.5. Розв’язати рівняння

$$arctg(x-2{,}5) + arctg(x+2{,}5) = arctg(8x).$$

Відповідь: $x_1 = 0, \ \ x_{2,3} = \pm\sqrt{7}$.

8.6. Розв’язати рівняння

$$\arccos(2x^2 - 1) = 2\arccos x.$$

Відповідь: $0 \le x \le 1$.

Задачі для тематичного контролю

Розв’язати рівняння

8.7. а) $arctg 2x = \arcsin x$;

б) $\arccos x = arctg(2\sqrt{3}\,x)$.

8.8. а) $\arcsin x + \arcsin(1-2x) = \frac{\pi}{6}$;

б) $arctg x + arcctg(1-x) = \frac{3\pi}{4}$.

8.9. а) $arcctg(1+x) + arctg(1-x) = \frac{\pi}{4}$;

б) $\arcsin(2x-1) - \arccos\frac{2-x}{2} = \frac{\pi}{6}$.

8.10. а) $\arcsin x + \arcsin(\sqrt{3}x) = \arcsin 2x$;

б) $\arcsin x + 2\arcsin\sqrt{1-x} = \frac{2\pi}{3}$.

§ 9. РІВНЯННЯ З ЦІЛОЮ ТА ДРОБОВОЮ ЧАСТИНОЮ ЧИСЛА

Такі задачі на вступних іспитах та математичних олімпіадах зустрічаються досить часто. При їх розв'язуванні треба додатково знати лише означення цілої та дробової частин числа та деякі їхні властивості.

Цілою частиною* [x] *числа x називається найбільше ціле число, яке не перевищує *x*, ***дробовою частиною* {x} *числа x*** називається різниця $x - [x]$. Очевидно, що

$$x-1<[x]\le x<[x]+1, \quad 0\le\{x\}<1.$$

Для довільних $x\in R$ та $n\in Z$ виконується

$$[x+n]=[x]+n\,,\ \{x+n\}=\{x\}.$$

Для довільних двох чисел *x*, *y* маємо

$$[x+y]\ge[x]+[y].$$

Функція $f(x)=\{x\}$ періодична з перідом $T=1$.

Розв'язування рівнянь з цілою та дробовою частиною числа зводиться за допомогою нерівностей $x-1<[x]\le x<[x]+1$, $0\le\{x\}<1$ та умови $[x]\in Z$ до перебору деякої множини цілих чисел чи до перебору деяких числових проміжків, на яких функції цілої частини, що розглядаються в даній задачі, є сталими.

9.1. Розв'язати рівняння

$$[x]+\left[\frac{3}{2}x\right]+[2x]=1995.$$

Розв'язання. Використовуючи означення цілої частини числа, оцінимо, які значення змінної *x* можуть бути розв'язками рівняння. Маємо:

$$x-1<[x]\le x,\quad \frac{3}{2}x-1<\left[\frac{3}{2}x\right]\le\frac{3}{2}x,\quad 2x-1<[2x]\le 2x,$$

звідки

$$4{,}5x-3<[x]+\left[\frac{3}{2}x\right]+[2x]\le 4{,}5x.$$

Отже, розв'язки рівняння мають задовольняти умови

$$\begin{cases} 4{,}5x - 3 < 1995; \\ 4{,}5x \ge 1995, \end{cases}$$

звідки отримуємо

$$443\frac{1}{3} \le x < 444, \quad 665 \le \frac{3}{2}x < 666, \quad 886\frac{2}{3} \le 2x < 888.$$

Тоді $[x] = 443$, $\left[\frac{3x}{2}\right] = 665$, $[2x] = 886$ або 887. Проте 443 + 665 + + 887 = 1995, тому розв'язками рівняння є ті й тільки ті значення x, що задовольняють умову $887 \le 2x < 888$, тобто розв'язками рівняння є всі

$$x \in \left[443\frac{1}{2}; 444\right). \blacksquare$$

9.2. Розв'язати рівняння

$$[x] + \frac{1}{[x]} = \{x\} + \frac{1}{\{x\}}.$$

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді:

$$[x] - \{x\} + \frac{1}{[x]} - \frac{1}{\{x\}} = 0, \quad [x] - \{x\} - \frac{[x] - \{x\}}{[x] \cdot \{x\}} = 0,$$

$$([x] - \{x\})\left(1 - \frac{1}{[x] \cdot \{x\}}\right) = 0,$$

звідки отримуємо, що рівність можлива в таких випадках: або $[x] = \{x\}$, або $[x] \cdot \{x\} = 1$. Розглянемо ці випадки окремо.

1) $[x] = \{x\}$. Оскільки $[x] \in Z$, $\{x\} \in [0;1)$, то маємо $[x] = \{x\} = 0$, що неможливо (шукані числа мають бути такі, що їхня ціла та дробова частини не дорівнюють нулю).

2) $[x] \cdot \{x\} = 1$. Тоді $\{x\} = \frac{1}{[x]}$. Позначивши $[x] = n$, маємо $x = [x] + \{x\} = n + \frac{1}{n}$, де $n \ge 2$ – будь-яке натуральне число. $\blacksquare$

9.3. Розв'язати рівняння

$$[x]\{x\}+3x=[x]+12.$$

Розв’язання. Запишемо рівняння у вигляді:

$$\{x\}([x]+3)=12-2[x].$$

При $[x]+3=0$ маємо хибну рівність. Отже, $[x]+3\neq 0$ і тому

$$\{x\}=\frac{12-2[x]}{[x]+3}.$$

Позначивши $[x] = n$, отримуємо з врахуванням $0\le\{x\}<1$, що

$$0\le\frac{12-2n}{n+3}<1.$$

Звідси знаходимо, що $n\in(3;\,6]$. Оскільки $[x] = n$ є цілим числом, то n приймає значення 4, 5, 6. Відповідь: $x_1=4\frac{4}{7}$, $x_2=5\frac{1}{4}$, $x_3=6$. ■

Задачі для самостійного розв’язування

9.4. Розв’язати рівняння:

а) $[2x]+[5x]=9$; б) $1-|x+1|=\frac{[x]-x}{|x-1|}$;

в) $[x^2]=1+\sin x$; г) $[x^3]+[x^2]+[x]=\{x\}-1$;

д) $[19x]+98[x]=1998$; е) $\left[\frac{x+3}{4}\right]=\{2x-1\}$.

Відповідь: а) $x\in[1{,}4;\,1{,}5)$; б) 0; –2; $-\sqrt{5}$; в) $x=\frac{\pi}{2}$; г) $x=-1$;

д) $x\in\left[17\frac{9}{19};17\frac{10}{19}\right)$; е) $x\in\{-3;-2{,}5;-2;-1{,}5;-1;-0{,}5;\,0;\,0{,}5\}$.

9.5. Довести, що для всіх дійсних x виконується рівність

$$[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x].$$

9.6. Знайти всі такі дійсні числа p, що для довільного $x\in R$ виконується рівність

$$[x]+[x+p]+[x+2p]=[3x].$$

Вказівка: позначте $[x] = n$, $\{x\} = t$. Тоді дана рівність рівносильна такій: $[t + p] + [t + 2p] = [3t]$. При $t = 0$ отримуємо $[p] + [2p] = 0$, звідки $p \in \left[0;\frac{1}{2}\right)$. Враховуючи цю оцінку, побудуйте на проміжку $[0;1)$ графіки функцій $f(t) = [t + p] + [t + 2p]$ та $g(t) = [3t]$. *Відповідь*: $p = \frac{1}{3}$.

9.7. Знайти всі додатні числа x, які задовольняють рівність

$$x[x]+[x]\{x\}+\{x\}x=2000 .$$

Відповідь: $x = 2\sqrt{1105} - 22$.

9.8. Нехай число n є цілою частиною числа

$$\left(44+\sqrt{1975}\right)^{100}.$$

Довести, що n – непарне число.

Вказівка: покажіть, що $n=\left(44+\sqrt{1975}\right)^{100}+\left(44-\sqrt{1975}\right)^{100}-1$.

Задачі для тематичного контролю

Розв’язати рівняння:

9.9. а) $\left[x+\frac{1}{2}\right]+[x]=\frac{x^6}{2}$; б) $\frac{1}{[x]^2}=\frac{6}{5|x|+1}$.

9.10. а) $-\frac{[x]}{2}+3=\sqrt{8\{x\}+1}$; б) $[2x]+1=(\{x\}+1)^2$.

9.11. а) $\left[2^x\right]\cdot\sqrt{9-3^{|x|}}=3^x$; б) $\left[3^x\right]\cdot\sqrt{16-2^{|x|}}=2^x$.

9.12. а) $[x]\cdot\{x\}+10[x]=16+2\{x\}$; б) $[x]\cdot\{x\}-6[x]=12+\{x\}$.

9.13. а) $x^2-3x-4=[\sin x]$; б) $x^2+4x-5=[\cos x]$.

9.14. а) При яких додатних значеннях параметра a рівняння $[x]\cdot\{x\}=a-x$ має чотири розв’язки?

б) При яких значеннях параметра a рівняння $a\cdot[x-2]=\{x+3\}$ має шість розв’язків?

§ 10. ВИКОРИСТАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ НЕРІВНОСТЕЙ.

Серед геометричних нерівностей найбільш відома ***нерівність трикутника***: *для довільних точок A, B, C площини виконується нерівність* $AC \le AB + BC$*, причому знак рівності можливий тоді і тільки тоді, коли точки A, B, C у такому ж порядку лежать на одній прямій.*

З нерівностей $AC \le AB + BC$, $BC \le AB + AC$ отримуємо $AB \ge AC - BC$, $AB \ge BC - AC$, звідки отримуємо іншу форму нерівності трикутника: *для довільних точок A, B, C площини виконується нерівність* $AB \ge \left| AC - BC \right|$*, причому знак рівності можливий тоді і тільки тоді, коли точки A, B, C лежать на одній прямій, причому точка C знаходиться за відрізком AB або співпадає з однією з точок A, B.*

У деяких задачах для встановлення екстремальних значень геометричних величин з використанням нерівності трикутника корисними є рухи та перетворення площини.

10.1. Знайти на прямій $l : y = 2x + 1$ точку C, для якої сума відстаней до точок $A(2;0)$ та $B(4;1)$ є найменшою.

Розв'язання. Точки *A* і *B* знаходяться по одну сторону від даної прямої. Розглянемо точку A_1, яка симетрична точці A відносно прямої l.

Продовжимо пряму A_1B до перетину з прямою l в деякій точці *C* (рис. 1). Оскільки для довільної іншої точки $M \in l$ виконується

$$\left| AM + BM \right| = \left| A_1M + BM \right| \ge A_1B = \left| A_1C + BC \right| = \left| AC + BC \right|,$$

то точка C – шукана.

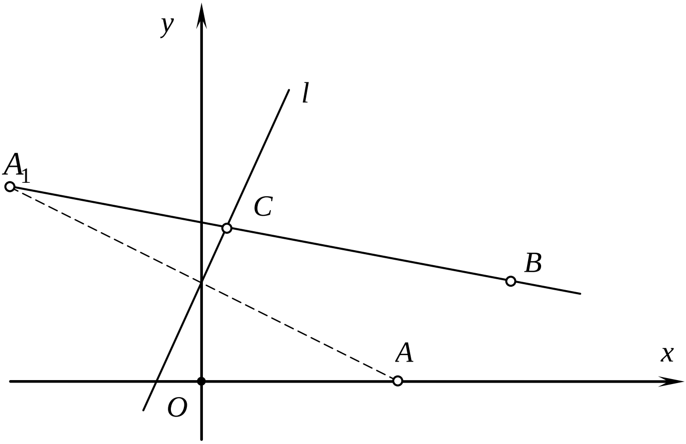

Рис. 1

Послідовно знаходимо $A_1(-2;2)$, $A_1B: y=-\frac{1}{6}x+\frac{5}{3}$, $C\left(\frac{4}{7};\frac{11}{7}\right)$.

Відповідь: $C\left(\frac{4}{7};\frac{11}{7}\right)$. ■

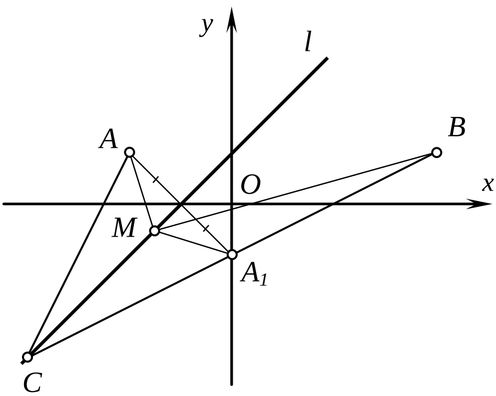

Рис. 2

10.2. Знайти на прямій $l: y=x+1$ точку С, для якої модуль різниці відстаней до точок $A(-2;1)$ та $B(4;1)$ є найбільшим.

Розв'язання. Точки A і B знаходяться по різні сторони від даної прямої. Розглянемо точку A_1, яка симетрична точці А відносно прямої l. Продовжимо пряму A_1B до перетину з прямою l в деякій точці C (рис. 2). Оскільки для довільної іншої точки $M \in l$ виконується нерівність

$$\left|AM - BM\right| = \left|A_1M - BM\right| \le A_1B = \left|A_1C - BC\right| = \left|AC - BC\right|,$$

то точка C – шукана.

Послідовно знаходимо $A_1(0;-1)$, $A_1B: y = 0{,}5x - 1$, $C(-4;-3)$.

Відповідь: $C(-4;-3)$. ■

10.3. Дано точки $A(-2;0)$ і $B(2;0)$. Знайти на прямій $l: y = 6 - x$ точку C, для якої кут ACB є найбільшим.

Розв'язання. Розглянемо коло ω, яке проходить через точки A і B та дотикається до прямої l в деякій точці C (рис. 3). За властивостями геометричного місця точок, з яких даний відрізок видно під даним кутом, маємо, що для довільної іншої точки $M \in l$ виконується $\angle AMB < \angle ACB$. Отже, така точка C - шукана. Для її знаходження необхідно мати рівняння кола ω.

Оскільки центр кола ω рівновіддалений від точок A і B, які симетричні відносно осі ординат, то центр знаходиться на цій осі.

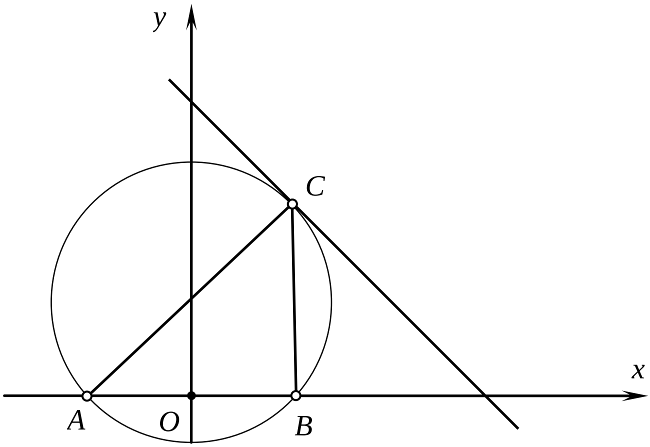

Рис. 3

Отже, $\omega: x^2 + (y-b)^2 = R^2$. Для знаходження невідомих b, R використаємо те, що коло проходить через точку B та дотикається до прямої l, що рівносильно тому, що це коло має з прямою одну спільну точку. Система рівнянь $\begin{cases} x^2+(y-b)^2=R^2; \\ y=6-x \end{cases}$ має єдиний розв'язок тоді, коли дискримінант квадратного рівняння $x^2+(6-x-b)^2=R^2$ дорівнює нулю. Це рівняння після перетворень має вигляд:

$$2x^2+(2b-12)x+36+b^2-12b-R^2=0,$$

$$D=8R^2-4b^2+48b-144.$$

Отже, маємо систему: $\begin{cases} 2R^2=(b-6)^2; \\ 4+b^2=R^2. \end{cases}$

Розв'язавши її, отримуємо $b_1=2, R_1=2\sqrt{2}$, $b_2=-14, R_2=10\sqrt{2}$. Оскільки в обох випадках відрізок AB видно з точки дотику під гострим кутом, то $\angle ACB$ є більшим у випадку меншого кола.

З системи $\begin{cases} x^2+(y-2)^2=8; \\ y=6-x \end{cases}$ знаходимо $C(2;4)$.

Відповідь: $C(2;4)$. ■

10.4. Дано точки $A(10;5)$ і $B(8;7)$. Знайти на колі $\omega: x^2+y^2=5$ точку C, для якої кут ACB є найбільшим.

Розв'язання. Розглянемо коло γ, яке проходить через точки A і B та має зовнішній дотик з даним колом ω в деякій точці C (рис. 4). За властивостями геометричного місця точок, з яких даний відрізок видно під даним кутом, маємо, що для довільної іншої точки $M \in \omega$ виконується $\angle AMB < \angle ACB$. Отже, така точка C - шукана. Для її знаходження необхідно

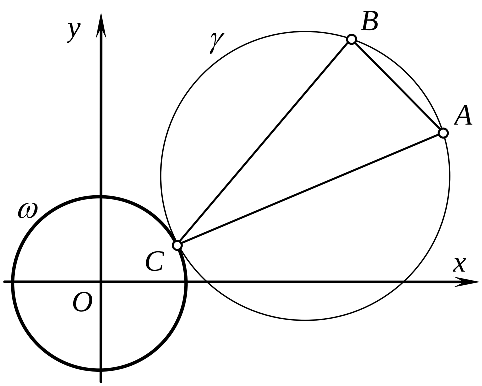

Рис. 4

мати рівняння кола γ.

Нехай $\gamma:(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$. Для знаходження невідомих a, b, R використаємо те, що коло проходить через точки *A, B* та умову зовнішнього дотику кіл ω та γ.

Отже, маємо систему:

$$\begin{cases} \sqrt{a^2+b^2}=R+\sqrt{5}; \\ (10-a)^2+(5-b)^2=R^2; \\ (8-a)^2+(7-b)^2=R^2. \end{cases}$$

Маємо

$a^2+b^2-R^2=2R\sqrt{5}+5=20a+10b-125=16a+14b-113$,

Звідки отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} b=a-3; \\ R=\sqrt{5}(3a-16); \\ \sqrt{a^2+(a-3)^2}=3\sqrt{5}(a-5). \end{cases}$$

Розв'язавши її, отримуємо $a=6, b=3, R=2\sqrt{5}$.

Очевидно, що точка С може бути знайдена як перетин даного кола та прямої, що з'єднує центри кіл $O(0;0)$, $O_1(6;3)$. З системи

$$\begin{cases} x^2+y^2=5; \\ x=2y \end{cases}$$

знаходимо $C(2;1)$.

Відповідь: $C(2;1)$. ■

Задачі для самостійного розв'язування

10.5. Знайти всередині опуклого чотирикутника точку, сума відстаней від якої до вершин чотирикутника була б найменшою. *Відповідь:* точка перетину діагоналей.

10.6. а) Дано чотирикутник $ABCD$, де *A*(1;3), *B*(2;6), *C*(9;6), *D*(6;4). Знайти всередині цього чотирикутника точку *M*, сума відстаней від якої до вершин чотирикутника є найменшою.

Відповідь: $M(5; 4{,}5)$.

10.7. Дано точки $A(20;10)$ і $B(14;16)$. Знайти на колі $\omega : x^2 + y^2 = 20$ точку C, для якої кут ACB є найменшим.

Вказівка: розгляньте коло γ, яке проходить через точки A і B та має внутрішній дотик з даним колом ω в деякій точці C. *Відповідь*: $C(-4;-2)$.

10.8. На кожній стороні квадрата позначено по точці. Довести, що периметр утвореного ними чотирикутника не менший від подвоєної довжини діагоналі квадрата.

Вказівка: “розгорнувши” за допомогою осьових симетрій периметр чотирикутника, отримуємо ламану з таким самим периметром, початок і кінець якої є протилежними вершинами квадрата з вдвічі більшою стороною.

10.9. На осі абсцис знайти точку M, модуль різниці відстаней від якої до точок $A(1;6)$ і $B(5;-1)$ є найбільшим. Знайти цю відстань.

Відповідь: $M\left(\dfrac{29}{5}; 0\right)$.

10.10. Дано кут і точку C всередині кута. Знайти на сторонах кута такі точки A і B, щоб периметр трикутника ABC був найменшим.

Вказівка: розгляньте точки M_1 та M_2, симетричні точці M відносно сторін кута.

10.11. Периметр опуклого чотирикутника дорівнює 4. Довести, що його площа не перевищує 1.

Вказівка: $S \le \dfrac{1}{4}(ab + bc + cd + da) \le \dfrac{1}{16}(a + b + c + d)^2$, де a, b, c, d – послідовні сторони чотирикутника.

10.12. Розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + (y-3)^2} + \sqrt{x^2 + (y+3)^2} = 6; \\ y^2 + 2x^3 = 4y. \end{cases}$$

Вказівка: розгляньте геометричне місце точок, координати яких задовольняють перше рівняння. *Відповідь:* (0;0).

10.13. Дано трикутник ABC. Знайти на прямій AB точку M, для якої сума радіусів кіл, описаних навколо трикутників ACM і BCM, є найменшою.

Відповідь: точка M така, що $CM \perp AB$.

10.14. Периметр трикутника *ABC* дорівнює 2*p*. На сторонах *AB* і *AC* взято точки *M* і *N* так, що $MN \| BC$ і *MN* дотикається до вписаного в трикутник кола. Знайти найбільше значення довжини *MN*.

Вказівка: покажіть, що $MN = BC - \dfrac{BC^2}{p}$. *Відповідь:* $\max MN = \dfrac{p}{4}$.

10.15. Трапеція *ABCD* з основою *AD* розрізана діагоналлю *AC* на два трикутники. Паралельна основі пряма *l* розрізає ці трикутники на два трикутники і два чотирикутники. При якому положенні прямої *l* сума площ отриманих трикутників найменша?

Відповідь: пряма *l* проходить через точку перетину діагоналей.

10.16. Трапеція з основами a і b описана навколо кола радіуса *R*. Довести, що $4R^2 \le ab$.

10.17. Діагоналі опуклого чотирикутника *ABCD* перетинаються в точці *O*. Відомо, що площі трикутників *ABO* та *CDO* дорівнюють 1, а площа чотирикутника *ABCD* не перевищує 4. Знайти довжину сторони *BC*, якщо *AD*=3.

Вказівка: трикутники *ADO* та *CBO* подібні, звідси отримуємо, що *ABCD* – трапеція. Виразіть площі прилеглих до основ трикутників через коефіцієнт подібності. *Відповідь: BC*=3.

Задачі для тематичного контролю

10.18. а) У трикутнику *ABC* кожна з висот h_b, h_c не менша за сторону, на яку вона опущена. Знайти кути трикутника.

б) Сторона *BC* трикутника *ABC* дорівнює a; кожна з висот, опущених на сторони *AB* і *AC* не менша за сторону, на яку вона опущена. Знайти сторони *AB* і *AC*.

10.19. а) Знайти на прямій $l: y = 2x - 1$ точку С, для якої модуль різниці відстаней до точок $A(2;1)$ та $B(6;2)$ є найбільшим.

б) Знайти на прямій $l: y = 2x + 1$ точку С, для якої сума відстаней до точок $A(-2;3)$ та $B(4;1)$ є найменшою.

10.20. а) Дано чотирикутник $ABCD$, де *A*(1;5), *B*(2;7), *C*(9;7), *D*(11;4). Знайти всередині цього чотирикутника точку *M*, сума відстаней від якої до вершин чотирикутника є найменшою.

б) Дано чотирикутник $ABCD$, де $A(0;3)$, $B(2;8)$, $C(10;7)$, $D(7;3)$. Знайти всередині цього чотирикутника точку M, сума відстаней від якої до вершин чотирикутника є найменшою.

10.21. а) Знайти на прямій $l : y = 2x - 3$ точку С, для якої сума відстаней до точок $A(3;0)$ та $B(7;3)$ є найменшою.

б) Знайти на прямій $l : y = 3x + 1$ точку С, для якої модуль різниці відстаней до точок $A(-2;1)$ та $B(5;2)$ є найбільшим.

10.22. а) Дано точки $A(13;4)$ і $B(14;-3)$. Знайти на колі $\omega : x^2 + y^2 = 25$ точку C, для якої кут ACB є найбільшим.

б) Дано точки $A(7;10)$ і $B(13;-8)$. Знайти на колі $\omega : x^2 + y^2 = 9$ точку C, для якої кут ACB є найменшим.

10.23. а) Дано точки $A(-1;0)$ і $B(3;0)$. Знайти на прямій $l : y = 7 - x$ точку C, для якої кут ACB є найбільшим.

б) Дано точки $A(0;4)$ і $B(0;-2)$. Знайти на прямій $l : y = x + 10$ точку C, для якої кут ACB є найбільшим.

10.24. Знайти найбільше значення виразу $x^2 + y^2$, якщо пара (x, y) задовольняє умову:

а) $x^2 + y^2 = 4x + 6y - 5$; б) $\begin{cases} y \geq |x+2| + |x-4|; \\ y \leq x + 5. \end{cases}$

10.25. Знайти найменше значення виразу $f(x, y)$.

а) $\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x+2)^2 + (y+3)^2}$;

б) $\sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{(x+10)^2 + (y-4)^2}$.

10.26. Розв'язати системи рівнянь:

а) $\begin{cases} \sqrt{(x-8)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-6)^2} = 10; \\ x^2 + 3y^2 = 43. \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sqrt{(x+3)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-4)^2} = 5; \\ 4x^2 + y^2 = 13. \end{cases}$

Література

1. *Апостолова Г.В., Ясінський В.В.* Антьє і мантиса числа. – Київ, «Факт», 2006.
2. *Вишенский В. А., Карташов Н. В., Михайловский В. И., Ядренко М. И.* Сборник задач Киевских математических олимпиад. - Издательство при Киевском университете, Киев, 1984.
3. *Вишенський В. А., Карташов М. В., Михайловский В. І., Ядренко М. Й.* Київські математичні олімпіади 1984-1993 р. р. – Київ, “Либідь”, 1993.
4. *Конет І.М., Паньков В.Г., Радченко В.М., Теплінський Ю.В.* Обласні математичні олімпіади. Кам’янець-Подільський, “Абетка”, 2005.
5. *Лейфура В.М., Мітельман І.М., Радченко В.М., Ясінський В.А.* Математичні олімпіади школярів України: 1991-2000 рр.: - Київ, “Техніка”, 2003.
6. *Кругликов А.В., Плакса С.А.* Сборник заданий для довузовской подготовки по математике. – Київ: НТУУ “КПІ”, 1999.
7. *Сарана О.А.* Математичні олімпіади: просте і складне поруч. Тернопіль, “Навчальна книга - Богдан”, 2011.
8. *Сарана О.А., Ясінський В.В.* Конкурсні задачі підвищеної складності з математики. Навчальний посібник з математики для слухачів ФДП НТУУ «КПІ». Київ, “Факт”, 2006.
9. *Сарана О.А. Ясінський В.В.* Варіанти тематичних тестів з математики. Навчальний посібник для слухачів підготовчих курсів ФДП НТУУ «КПІ». К.: НТУУ «КПІ», 2011.
10. *Ясінський В.А.* Задачі математичних олімпіад та методи їх розв’язування. – Тернопіль, Навчальна книга - Богдан, 2005.
11. *Ясінський В.В.* Математика. Навчальний посібник для слухачів ФДП НТУУ «КПІ». Київ, “Факт”, 2006.