Література

1. Бойко Н. Я. Рейтингова система як основа ґрунтовного засвоєння знань / Н. Я. Бойко // Вивчаємо українську мову та літературу. – 2004. – № 12. – С. 2–4.
2. Касянчук Г. Рейтингова система оцінювання / Г. Касянчук // Початкова освіта. – 2005. – № 43. – С. 8.

Фонарюк О.В.,
кандидат педагогічних наук, старший викладач

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ, ПОВ'ЯЗАНИХ З БІСЕКТРИСОЮ КУТА, МЕТОДОМ ВЕКТОРІВ

У різних галузях науки і техніки часто доводиться мати справу з таким поняттям як «векторна величина» (або просто – «вектор»). Знати основи векторної алгебри є однією з головних умов успіху при вивченні будь-якої дисципліни, де зустрічаються векторні величини. Без знання векторної алгебри не можливе глибоке розуміння багатьох розділів сучасної фізики, аналітичної та диференціальної геометрії, теорії багатовимірних просторів, технічних та прикладних наук.

Суть методу векторів полягає в тому, щоб певне геометричне розміщення точок, прямих і площин у просторі записати мовою векторів, точніше – у вигляді векторної рівності; і, навпаки, мову векторних формул і рівностей наповнити геометричним змістом, тобто перевести ту чи іншу векторну рівність на мову геометрії, надати їй геометричного звучання [1].

Розв'язуючи задачу векторним методом, потрібно виконати наступні кроки.

1. Перекласти умову задачі на мову векторів (розглянути деякі з даних у задачі відрізків як вектори, ввести базисні вектори, розкласти розглянуті вектори за базисними, скласти векторну рівність або систему векторних рівностей).
2. Спростити векторні рівності, користуючись законами дій над векторами і відомими векторними рівностями; замінити векторні рівності алгебраїчними рівняннями та розв'язати їх.
3. Перекласти знайдений результат на мову геометрії (пояснити його геометричний зміст).

Метод векторів не є універсальним; його зручно застосовувати для розв'язування задач:

- ✓ пов'язаних з доведенням паралельності прямих (відрізків);

✓ в яких треба довести, що деяка точка ділить відрізок у деякому відношенні або, зокрема, є його серединою;

✓ в яких треба довести, що три точки лежать на одній прямій;

✓ пов'язаних з доведенням того, що даний чотирикутник паралелограм;

✓ на доведення залежностей між довжинами відрізків, знаходження довжини відрізка;

✓ на знаходження величини кута [2, с. 76–81].

Крім того, метод векторів часто застосовується при розв'язуванні задач, в умові яких фігурує бісектриса кута. Щоб розв'язати таку задачу потрібно:

1) на сторонах цього кута від його вершини відкласти одиничні вектори;

2) знайти вектор, що дорівнює сумі даних одиничних векторів;

3) промінь, на якому розміщений вектор суми, буде бісектрисою даного кута (діагональ ромба, побудованого на векторах одиничної довжини).

Розглянемо деякі задачі, пов'язані з бісектрисою кута, які дають можливість проілюструвати застосування методу векторів та показати його ефективність.

Задача 1. Доведіть, що бісектриси двох плоских кутів тригранного кута і бісектриса кута, суміжного з третім плоским кутом, лежать в одній площині.

Доведення. ♦ На ребрах *SA, SB, SC* відкладемо одиничні вектори $\vec{a}_0$, $\vec{b}_0$, $\vec{c}_0$ (*рис.* 1). Паралелограми, побудовані на одиничних векторах $\vec{a}_0$ і $\vec{b}_0$, $\vec{a}_0$ і $\vec{c}_0$, $\vec{b}_0$ і $-\vec{c}_0$, є ромбами.

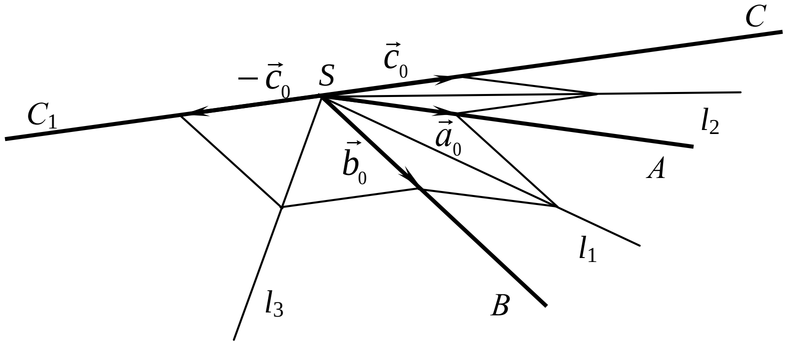

Рис. 1

Отже, вектор $\vec{a}_0 + \vec{b}_0$ лежить на промені l_1, який є бісектрисою кута *ASB*; вектор $\vec{a}_0 + \vec{c}_0$ лежить на промені l_2, який є бісектрисою кута *ASC*; вектор $\vec{b}_0 + (-\vec{c}_0)$ лежить на промені l_3, який є бісектрисою кута BSC_1, суміжного з кутом *BSC*.

Легко переконатись у тому, що $\vec{a}_0 + \vec{b}_0 = (\vec{a}_0 + \vec{c}_0) + (\vec{b}_0 - \vec{c}_0)$.

З цієї рівності випливає компланарність векторів $\overrightarrow{SM}$, $\overrightarrow{SN}$, $\overrightarrow{SK}$, де *M*, *N*, *K* – точки, що належать відповідно променям l_1, l_2, l_3. Оскільки ці вектори мають спільну точку *S*, то промені l_1, l_2, l_3 лежать в одній площині. ♦

Задача 2. Довести, що бісектриса внутрішнього кута трикутника поділяє протилежну сторону на частини, пропорційні прилеглим сторонам.

Доведення. ♦ Нехай $AD : DB = m : n$ (*рис.* 2). Відкладемо на *CA* і *CB* вектори одиничної довжини $\vec{a}_0$ і $\vec{b}_0$. Виразимо вектор $\overrightarrow{CD}$ двічі через вектори $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{CB}$:

1) $\overrightarrow{CD} = \dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{CB} + \dfrac{n}{m+n}\overrightarrow{CA} = \dfrac{m}{m+n}\left|\overrightarrow{CA}\right| \cdot \vec{b}_0 + \dfrac{n}{m+n}\left|\overrightarrow{CB}\right| \cdot \vec{a}_0 =$

$= \dfrac{m}{m+n} a \cdot \vec{b}_0 + \dfrac{n}{m+n} b \cdot \vec{a}_0$, де $\left|\overrightarrow{CA}\right| = a$ і $\left|\overrightarrow{CB}\right| = b$ – довжини векторів $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{CB}$.

2) $\overrightarrow{CD} = x(\vec{a}_0 + \vec{b}_0) = x\vec{a}_0 + x\vec{b}_0$. Отже, можна записати таку систему рівнянь:

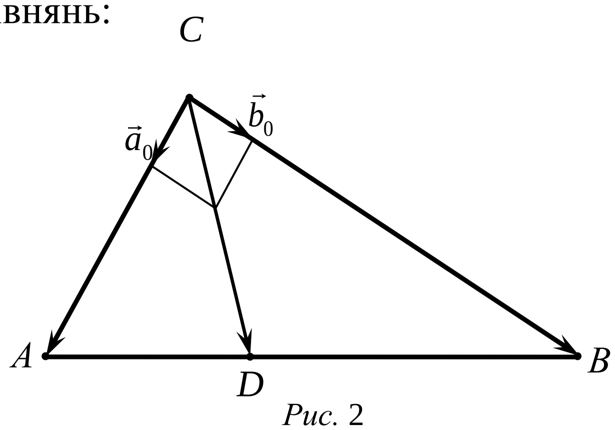

Рис. 2

$$\begin{cases} \dfrac{nb}{m+n} = x; \\ \dfrac{ma}{m+n} = x. \end{cases}$$

Поділивши почленно ці два рівняння системи, одержимо:

$$\frac{nb}{am} = 1, \text{ тобто } \frac{m}{n} = \frac{b}{a}.$$

Або, остаточно: $AD : DB = AC : BC$. ♦

Вивчення векторної алгебри є дуже важливим в сучасних умовах розвитку математики та фізики. Метод векторів широко застосовується в різних галузях науки і техніки, часто це значно полегшує розв’язування деяких задач, а в окремих випадках задачу взагалі неможливо розв'язати іншим способом. Особливістю методу векторів є те, що він не вимагає розгляду складних геометричних конфігурацій, а зводить геометричну задачу до алгебраїчної, яку, як правило, легше розв'язати, ніж вихідну геометричну.

Література

1. Крайзман М.Л. Розвязування геометричних задач методом векторів : навчально-методичний посібник. – К. : Радянська школа, 1998. – 96 с.
2. Бурда М.І., Савченко Л.М. Геометрія : навч. посіб. для 8-9 класів шк. з поглибл. вивч. математики. –К. : Освіта, 2004. –240 с.
3. Кушнир И. А. Векторные методы решения задач. –К. : "Оберіг", 1994. – 208 с.
4. Клопский В.М., Ягодовский М.И., Скопец З.А. Применение векторной алгебры к решению планиметрических задач // Математика в школе. – 1976. – № 6. – С. 26–35.