Є.О. Севостьянов

КВАЗІКОНФОРМНИЙ АНАЛІЗ

Міністерство освіти і науки України
Житомирський державний університет імені Івана Франка

Є.О. Севостьянов

КВАЗІКОНФОРМНИЙ АНАЛІЗ

Навчально-методичний посібник

Житомир
Вид-во ЖДУ імені Івана Франка
2021

УДК 517.95
ББК 22.161.6
В22

Рекомендовано до друку вченою радою Житомирського державного університету імені Івана Франка (протокол № 6 від 30 квітня 2021 р.)

Рецензенти:

В.І. Рязанов – професор, доктор фіз.-мат. наук, завідувач відділу теорії функцій Інституту прикладної математики і механіки НАН України, м. Слов'янськ

Р.Р. Салімов – кандидат фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України, м. Київ

О.Ф. Герус – кандидат фіз.-мат. наук, доцент, завідувач кафедри математичного аналізу, бізнес-аналізу та статистики Житомирського державного університету імені Івана Франка

Севостьянов Є. О.

В 22 Квазіконформний аналіз / Севостьянов Є.О. – Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2021.– 60 с.

Навчально-методичний посібник стосується основ теорії відображень, зокрема, теорії квазіконформних відображень, відображень зі скінченним і обмеженим спотворенням. Ми обговорюємо питання, пов'язані з основними характеристиками відображень, такими як комплексна, внутрішня і зовнішня дилатації, матрична норма похідної, головні розтяги, головні значення і визначник відображень. Піднімаються питання, стосовні топологічних властивостей відображень (гомеоморфність, відкритість, дискретність), диференційованість відображень майже всюди, нормальність сімей відображень і їх локальна поведінка. Посібник містить чимало прикладів розв'язань задач, теоретичні завдання для самоконтролю (окремо для кожного розділу) і задачі для самостійного розв'язання по 30 варіантів кожна.

Для аспірантів фізико-математичного факультету усіх форм навчання.

УДК 517.95
ББК 22.161.6

ЗМІСТ

Перелік умовних позначень

$f : D \to \mathbb{R}^n$	відображення, задане в області D значеннями в $\mathbb{R}^n$
$f(D)$	$f(D) = \{y \in \mathbb{R}^n : \exists\, x \in D : f(x) = y\}$ – образ області D при відображенні f
$f(A)$	$f(A) = \{y \in \mathbb{R}^n : \exists\, x \in D : f(x) = y\}$ – образ множини $A \subset D$ при відображенні f
$f^{-1}(B)$	$f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists\, y \in B : f(x) = y\}$ – (повний) прообраз множини B при відображенні f
$\mathbb{R}^n$	n-вимірний евклідів простір
$\mathbb{C}$	множина комплексних чисел $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$
$S(x_0, r)$	$S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \lvert x - x_0\rvert = r\}$ – сфера (коло) з центром в точці x_0 радіуса r
$B(x_0, r)$	$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \lvert x - x_0\rvert < r\}$ – куля (круг) з центром в точці x_0 радіуса r
$\mathbb{B}^n$	$\mathbb{B}^n = B(0, 1)$ – одинична куля
Ω_n	об'єм одиничної кулі $\mathbb{B}^n$ в $\mathbb{R}^n$
$\mathbb{S}^{n-1}$	$\mathbb{S}^{n-1} = S(0, 1)$ – одинична сфера
ω_{n-1}	площа одиничної сфери $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$
$\mathbb{D}$	$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : \lvert z\rvert < 1\}$ – одиничний круг
$\overline{A}$	$\overline{A} = A \cup \partial A$ – замикання множини A в $\mathbb{R}^n$
∂A	межа множини A в $\mathbb{R}^n$
$f^{-1} : f(D) \to D$	обернене відображення до відображення f, $f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall\, x \in D$, $f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall\, y \in f(D)$
$\lvert x\rvert$	$\lvert x\rvert = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$ – модуль вектора $x = (x_1, \ldots, x_n)$ в $\mathbb{R}^n$. Зокрема, якщо $x \in \mathbb{R}$, то $\lvert x\rvert = \begin{cases} x\,, & x \geqslant 0 \\ -x\,, & x < 0 \end{cases}$
$f'(x)$	– матриця Якобі відображення $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ в точці $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$; якщо мова йде про одновимірне відображення $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $f'(x)$ служить означенням звичайної похідної f в точці x
$m(A)$	міра Лебега вимірної множини $A \subset \mathbb{R}^n$
$dm(x)$	елемент міри Лебега m в $\mathbb{R}^n$
$C^1(D)$	клас відображень $f : D \to \mathbb{R}^n$, що мають усі частинні похідні порядку, не менше 1, які є неперервними в D
$C^k(D)$	клас відображень $f : D \to \mathbb{R}^n$, що мають усі частинні похідні порядку, не менше $k \in \mathbb{N}$, які є неперервними в D
$C^\infty(D)$	клас відображень $f : D \to \mathbb{R}^n$, що мають усі частинні похідні

	будь-якого порядку, які є неперервними в D
$\mathcal{H}^\alpha(E)$	α-вимірна хаусдорфова міра множини $E \subset \mathbb{R}^n$
$d\mathcal{H}^\alpha$	елемент α-вимірної хаусдорфової міри

1 Гомеоморфізми і квазіконформні відображення

1.1 Гомеоморфізми

Оскільки початки теорії відображень докладно наведено в нашій попередній методичці [Sev$_2$], ми дозволимо собі лише оглядовий стиль викладення цієї секції.

Означення 1.1. Визначимо простір $\mathbb{R}^n$ наступним чином:

$$\mathbb{R}^n := \{x = (x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

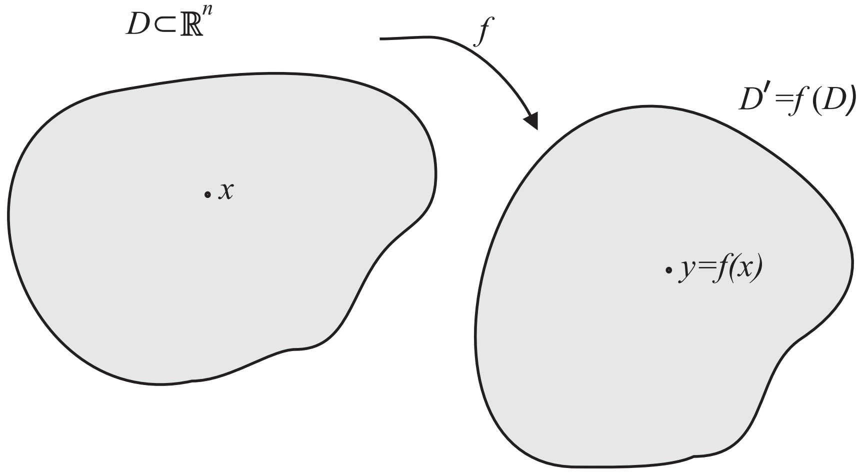
Означення 1.2. *Відображенням* $f : D \to \mathbb{R}^n$ називається неперервне перетворення, котре кожному елементу

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in D$$

ставить у відповідність деякий (єдиний) елемент

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$$

(див. мал. 1).



Малюнок 1: Відображення області D

Для відображень комплексної площини $\mathbb{C}$ замість запису

$$f(z) = (f_1(z), f_2(z))$$

може використовуватися запис

$$f(z) = f_1(z) + i f_2(z)$$

(де, як звично, $f_1(z)$ називається *дійсною частиною* f, а $f_2(z)$ – *уявною частиною* f, з позначеннями $\operatorname{Re} f(z) := f_1(z)$ і $\operatorname{Im} f(z) := f_2(z)$, відповідно).

Означення 1.3. *Кулею* в $\mathbb{R}^n$ з центром в точці x_0 радіусу $r > 0$ називається множина

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\} \ .$$

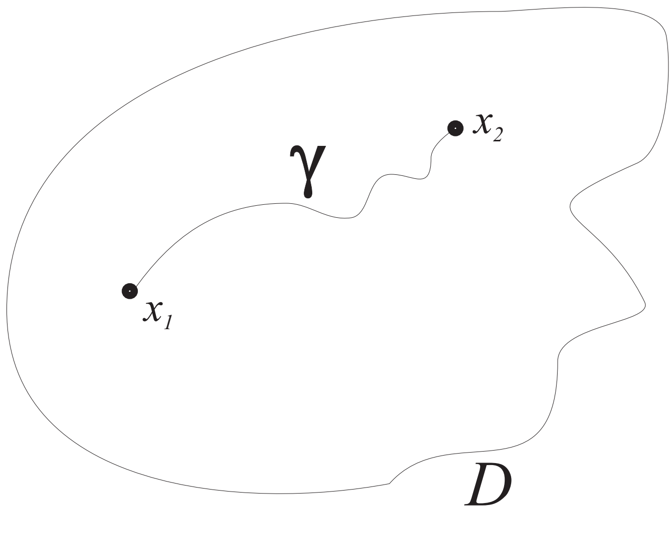
Замкненою кулею $\overline{B(x_0, r)}$ з центром в точці x_0 радіусу $r > 0$ називається, відповідно, множина

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leqslant r\} \ .$$

Означення 1.4. Множина $A \subset \mathbb{R}^n$ називається *відкритою*, якщо кожна точка $x_0 \in A$ входить до множини A разом з деякою кулею $B(x_0, \varepsilon_0)$.

Означення 1.5. Нагадаємо, що множина C в $\mathbb{R}^n$ *зв'язна,* якщо для кожної множини $X \subset C$ виконано умову: $C \cap \overline{X} \cap \overline{C \setminus X} \neq \varnothing$. Множина C в $\mathbb{R}^n$ *лінійно зв'язна,* якщо для будь-яких точок $x_1, x_2 \in C$ існує крива $\gamma : [0, 1] \to C$ така, що $\gamma(0) = x_1$ і $\gamma(1) = x_2$.

Означення 1.6.*Областю в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, називається множина D яка, по-перше, відкрита, а по-друге, лінійно зв'язна, див. малюнок 2).



Малюнок 2: Відображення області D

Означення 1.7. Для будь якої множини D її *образом* за відображенням $f : D \to \mathbb{R}^n$ називається множина $f(D)$, що складається з усіх елементів $y \in \mathbb{R}^n$, для яких існує $x \in D$, такий що $f(x) = y$ (див., наприклад, малюнок 3).

Означення 1.8. Нехай D – область в $\mathbb{R}^n$. *Гомеоморфізмом* $f : D \to \mathbb{R}^n$ називається будь-яке відображення, котре має обернене відображення $f^{-1} : f(D) \to D$, і яке також є неперервним.

Більш загально, можна визначити гомеоморфізм $f : A \to \mathbb{R}^n$ для довільних множин $A \subset \mathbb{R}^n$, а не тільки областей. Нагадаємо, що відображення $f : A \to B$ називається *ін'єктивним* (*ін'єкцією*), якщо з умови $a \neq b$, $a, b \in A$, випливає, що $f(a) \neq f(b)$. Відображення $f : A \to B$ називається *сюр'єктивним* (*сюр'єкцією*, або *відображенням «на»*), якщо для будь-якого $y \in B$ знайдеться $x \in A$ таке, що $f(x) = y$. Відображення $f : A \to B$ називається *бієктивним* (*взаємнооднозначним*) відображенням, якщо воно одночасно є ін'єктивним і сюр'єктивним. З означення гомеоморфізму випливає, що гомеоморфізми довільних множин A є бієкціями на свій образ $f(A)$. Обернене твердження є невірним (наведіть контрприклад !), але у випадку, коли A є областю, маємо наступне твердження.

Твердження 1.1. *Ін'єктивне неперервне відображення $f : D \to \mathbb{R}^n$ області $D \subset \mathbb{R}^n$ є гомеоморфізмом області D на $f(D)$, див. наслідок 3.1 в [RSS].*

Маємо також наступний фундаментальний результат (див. [Sp, теорема 4.7.16]).

Теорема Брауера. *Гомеоморфний образ області є областю, тобто, якщо відображення $f : D \to \mathbb{R}^n$ є гомеоморфізмом і D – область, то і $f(D)$ – область.*

Наслідок з теореми Брауера. *Якщо f – гомеоморфізм області D в $\mathbb{R}^n$ і, крім того, f має неперервне продовження на ∂D, то $f(\partial D) = \partial f(D)$.*

Деякі інші властивості гомеоморфізмів

1) Суперпозиція гомеоморфізмів $h = f \circ g$ є гомеоморфізмом.

2) Якщо число число $\lambda \neq 0$ і f – гомеоморфізм, то відображення $\lambda \cdot f$ також є гомеоморфізмом.

3) Гомеоморфний образ зв'язної множини є зв'язним, однозв'язної – однозв'язним, m-зв'язної – m-зв'язним. Гомеоморфний образ лінійно зв'язної множини є лінійно зв'язним.

4) Обернене відображення f^{-1} до гомеоморфізму f є гомеоморфізмом (за означенням)

5) Гомеоморфізми зберігають топологічну розмірність множини, але, взагалі говорячи, не зберігають її хаусдорфову розмірність.

6) Будь-які неперервні відображення (зокрема, гомеоморфізми) зберігають властивість множини бути зв'язною. Більш коротко: *зв'язність є інваріантом при (неперервних) відображеннях.*

7) Гомеоморфізми є відкритими і дискретними відображеннями.

Розглянемо наступні приклади.

Приклад 1. Довести, що будь-яке дробово-лінійне відображення

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}\,, \quad ad-bc \neq 0\,,$$

є гомеоморфізмом області $\mathbb{C}\setminus\{-\frac{d}{c}\}$.

Тут і надалі $\mathbb{C}$ позначає множину комплексних чисел $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$.

Розв'зок. Очевидно, відображення f є неперервним у $\mathbb{C}\setminus\{-\frac{d}{c}\}$ як частка двох неперервних лінійних функцій $f_1(z) = az+b$ і $f_2(z) = cz+d$, де знаменник $f_2(z) = cz+d$ не обертається в нуль. Отже, для завершення розв'язку можна скористатися твердженням 1.1. Для цього встановимо, що f є ін'єктивним у $\mathbb{C}\setminus\{-\frac{d}{c}\}$. Візьмемо $z_1, z_2 \in \mathbb{C}\setminus\{-\frac{d}{c}\}$ і покажемо, що рівність $f(z_1) = f(z_2)$ є можливою тільки при $z_1 = z_2$. Маємо:

$$f(z_1) = f(z_2) \Rightarrow$$

$$\frac{az_1+b}{cz_1+d} = \frac{az_2+b}{cz_2+d} \Rightarrow$$

$$\frac{(az_1+b)(cz_2+d)-(az_2+b)(cz_1+d)}{(cz_1+d)(cz_2+d)} = 0 \Rightarrow$$

$$(az_1+b)(cz_2+d)-(az_2+b)(cz_1+d) = 0 \Rightarrow$$

$$acz_1z_2+bcz_2+adz_1+bd-acz_1z_2-bcz_1-adz_2-bd = 0 \Rightarrow$$

$$(ad-bc)(z_2-z_1) = 0\,.$$

Оскільки за умовою $ad-bc \neq 0$, то звідси випливає, що $z_1 - z_2 = 0$, або $z_1 = z_2$, що і потрібно було довести. □

Приклад 2. Довести, що при будь-якому натуральному $n \geqslant 2$ відображення $f(z) = z^n$ не є гомеоморфізмом одиничного круга $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Розв'зок. Оберемо будь-яке $z \in \mathbb{D}$, що не дорівнює нулю. Тоді за відомою формулою Муавра число w має рівно n комплексних коренів, які обчислюються за формулою

$$z_k := \sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1\,,$$

де $w = r \cdot e^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Очевидно, всі z_k належать одиничному кругу $\mathbb{D}$, бо маємо: $|z_k| = \sqrt[n]{r} \leqslant r < 1$. Зокрема, наприклад, для z_1 і z_2 (за означенням кореня числа n-го степеня) будемо мати: $f(z_1) = f(z_2) = w$. Таким чином, знайшлися точки $z_1 \neq z_2$ такі, що $f(z_1) = f(z_2)$. Отже, ін'єктивність відображення f порушується в $\mathbb{D}$. □

Приклад 3. Перевірити теорему Брауера для відображення

$$f(z) = \frac{z+1}{z-2}$$

і області

$$D = \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

шляхом знаходження образу $f(D)$.

Розв'язок. Знайдемо $f(D)$ для вказаного відображення і вказаної області. Скористаємося відомим принципом: *довільне дробово-лінійне відображення* $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc \neq 0$, *переводить коло, або пряму в коло, або пряму.* Оскільки коло цілком визначається трьома точками, що лежать на ньому, для визначення образу кола $\partial D = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ при відображенні f достатньо визначити лише образ довільних трьох точок цього кола. Візьмемо, наприклад, $z_1 = 1$, $z_2 = i$ і $z_3 = -1$. Одразу маємо: $f(1) = -2$, $f(-1) = 0$, $f(i) = \frac{i+1}{i-2} = \frac{(i+1)(-2-i)}{5} = -\frac{1}{5} - i\frac{3}{5}$.

Знайдемо рівняння кола, яке проходить через задані точки $w_1 = -2$, $w_2 = 0$ і $w_3 = -\frac{1}{5} - i\frac{3}{5}$. Рівняння кола відшукуємо в невизначених коефіцієнтах:

$$(a-x)^2 + (b-y)^2 = r^2\,. \tag{1.1.1}$$

Оскільки коло в (1.1.1) має проходити через точки $(x_1, y_1) = (0, 0)$, $(x_2, y_2) = (-1, 0)$ і $(x_3, y_3) = \left(-\frac{1}{5}, -\frac{3}{5}\right)$, то з рівняння (1.1.1) ми отримаємо, що

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = r^2\,, \\ (a+1)^2 + b^2 = r^2\,, \\ \left(a + \frac{1}{5}\right)^2 + \left(b + \frac{3}{5}\right)^2 = r^2\,. \end{cases} \tag{1.1.2}$$

Вичитаючи з другого рівняння в (1.1.2) перше, отримаємо:

$$2a + 1 = 0\,, \Rightarrow a = -1/2\,.$$

З урахуванням цього, запишемо тільки перше і третє рівняння системи (1.1.2). Будемо мати:

$$\begin{cases} \frac{1}{4} + b^2 = r^2\,, \\ \frac{9}{100} + \left(b + \frac{3}{5}\right)^2 = r^2\,. \end{cases} \tag{1.1.3}$$

Доцільно відняти від другого рівняння перше, попередньо розкривши дужки при піднесенні до квадрату в другому рівнянні. Будемо мати:

$$\frac{9}{100} - \frac{1}{4} + \frac{6}{5}b + \frac{9}{25} = 0\,,$$

звідки

$$\frac{6}{5}b = \frac{11}{100}\,,$$

або $b = \frac{11}{120}$. Нарешті, з першого рівняння вихідної системи отримаємо:

$$r^2 = a^2 + b^2 = \frac{1}{4} + \frac{121}{14400} = \frac{3721}{14400}\,,$$

звідки $r = \frac{61}{121}$. Іншими словами, $S(z_0, r)$ визначається рівністю

$$\left(\frac{1}{2} + x\right)^2 + \left(\frac{11}{120} - y\right)^2 = \frac{3721}{14400}\,.$$

Отже,

$$f(\partial\mathbb{D}) = S(z_0, r),$$

де $z_0 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{11}{120}\right)$, а $r = \frac{61}{121}$. Згідно наслідку з теореми Брауера, $\partial f(\mathbb{D}) = f(\partial\mathbb{D}) = S(z_0, r)$. Для з'ясування $f(\mathbb{D})$ нам потрібно обрати будь-яку точку $x_0 \in \mathbb{D}$ і подивитись, якій області: $B(z_0, r)$ чи $\mathbb{C} \setminus \overline{B(z_0, r)}$ належить $f(x_0)$. Нехай $x_0 = 0$, тоді $f(0) = -1/2$. Дана точка $(-1/2, 0)$ належить $B(z_0, r)$, бо

$$\left(\frac{1}{2} + x\right)^2 + \left(\frac{11}{120} - y\right)^2 \Bigg|_{\substack{x=-\frac{1}{2} \\ y=0}} = \frac{121}{14400} = \left(\frac{11}{120}\right)^2\,,$$

$$\frac{11}{120} < \frac{61}{121} = r\,.$$

Отже, $f(\mathbb{D}) = B(z_0, r)$, де z_0 і r_0 вказані вище. Оскільки $B(z_0, r)$ є областю, перевірку теореми Брауера закінчено. $\Box$

Зауваження 1.1. На останньому кроці розв'язання прикладу, можна було міркувати і іншим чином, уникаючи прямих обчислень. Оскільки $\overline{\mathbb{D}}$ є компактом в $\mathbb{C}$, то $f(\overline{\mathbb{D}})$ – компакт в $\mathbb{C}$ як неперервний образ компакту при неперервному відображенні f. Отже, $f(\mathbb{D})$ може бути лише $B(z_0, r)$. Альтернативні міркування: $f(\mathbb{D})$ є однозв'язною областю як гомеоморфний образ однозв'язної області. Тому, оскільки область $\mathbb{C} \setminus \overline{B(z_0, r)}$ не є однозв'язною, то $f(\mathbb{D}) = B(z_0, r)$.

1.2 Завдання для самоконтролю

1. Чи буде сума (різниця) двох гомеоморфізмів f і g також гомеоморфізмом ?

2. Чи буде прообраз довільної зв'язної множини $B \subset f(D)$ при гомеоморфізмі $f : D \to \mathbb{R}^n$ зв'язною множиною ?

3. Чи буде прообраз довільної зв'язної множини $B \subset \mathbb{R}^n$ при гомеоморфізмі $f : D \to \mathbb{R}^n$ зв'язною множиною ?

4. Надайте відповіді на попередні питання 2 і 3 у випадку, коли відображення f є просто неперервним, але, взагалі кажучи, не є гомеоморфним.

5. Чи можна в означення лінійної зв'язності множини A замінити слово «крива» на словосполучення «спрямювана крива» ? (Нагадаємо, що крива називається *спрямлюваною*, якщо її довжина скінченна).

Означення 1.9. Нехай $A \subset \mathbb{R}^n$ – відкрита множина. Відображення $f : A \to \mathbb{R}^n$ називається *диференційовним в точці* $x_0 \in A$, якщо для будь-яких $\Delta x \in \mathbb{R}^n$, таких, що $(x_0 + \Delta x) \in A$, і деякого лінійного перетворення $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, виконано рівність

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = L\Delta x + \alpha(x_0, \Delta x) \cdot |\Delta x| \,, \tag{1.2.1}$$

де $\alpha(x_0, \Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. В цьому випадку, позначимо $L := f'(x_0)$ – *матриця Якобі* відображення f в точці x_0. Нагадаємо, що *матриця Якобі* має вигляд

$$f'(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} . \tag{1.2.2}$$

6. Чи є вірним твердження: будь-який гомеоморфізм $f : D \to \mathbb{R}^n$ є диференційовним майже скрізь в D? Скрізь в D?

7. Чи можна відобразити відрізок $I = [a,b]$ на круг $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ гомеоморфно ?

8. Відобразите гомеоморфно півкулю $\mathbb{B}^n_+ = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : |x| < 1, x_n > 0\}$ на одиничну кулю $\mathbb{B}^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : |x| < 1\}$.

9. Відображення $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ вигляду $f(x) = x^3$ є гомеоморфізмом, а відображення $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, визначене співвідношенням, $f(z) = z^3$ не є таким. Чи немає тут суперечності ?

10. Оберіть відображення $f : D \to \mathbb{R}^n$ і $g : D \to \mathbb{R}^n$ області $D \subset \mathbb{R}^n$ так, щоб:

а) f і g не були гомеоморфізмами, але $f + g$ було гомеоморфізмом;
б) f і g не були гомеоморфізмами, але $f \cdot g$ було гомеоморфізмом (при $n = 2$);
в) f і g не були гомеоморфізмами, але $\frac{f}{g}$ було гомеоморфізмом (при $n = 2$).

11. Наведіть приклад відображення $f : A \to B$ і множин A і B так, щоб f було ін'єктивним, неперервним відображенням, обернене до якого розривне в деякій точці $y_0 \in B$.

12. Доведіть, що відкрита множина $A \subset \mathbb{R}^n$ зв'язна тоді і тільки тоді, коли вона лінійно зв'язна.

1.3 Завдання для самостійної роботи № 1

Задача 1. *Перевірити теорему Брауера для відображення* $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ *і області*

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

шляхом знаходження образу $f(\mathbb{D})$ *для кожного з варіантів.*

Варіант	Відображення	Варіант	Відображення
1	$f(z) = \frac{3z+1}{2z+1}$	16	$f(z) = \frac{z+6}{z+7}$
2	$f(z) = \frac{z-1}{z+1}$	17	$f(z) = \frac{z+7}{z+8}$
3	$f(z) = \frac{z+1}{z+2}$	18	$f(z) = \frac{z+3}{z-2}$
4	$f(z) = \frac{z+2}{z+3}$	19	$f(z) = \frac{z+2i}{z-2i}$
5	$f(z) = \frac{z}{z+1}$	20	$f(z) = \frac{9z}{z-2}$
6	$f(z) = \frac{z}{z-1}$	21	$f(z) = \frac{z+3i}{z-2}$
7	$f(z) = \frac{z}{z-2}$	22	$f(z) = \frac{z}{z-3i}$
8	$f(z) = \frac{z}{z+3}$	23	$f(z) = z - 9$
9	$f(z) = \frac{z}{z+4}$	24	$f(z) = \frac{1}{z-9}$
10	$f(z) = \frac{z}{z-i}$	25	$f(z) = \frac{z+8}{z-2}$
11	$f(z) = \frac{z+i}{z-i}$	26	$f(z) = \frac{z+4i}{z-2}$
12	$f(z) = \frac{3z}{z-2}$	27	$f(z) = \frac{z-1-i}{z-2}$
13	$f(z) = \frac{z+5}{z-2}$	28	$f(z) = \frac{z+1+i}{z-2}$
14	$f(z) = \frac{z+5}{z-1}$	29	$f(z) = \frac{2i}{z-2}$
15	$f(z) = \frac{z+5}{z+6}$	30	$f(z) = \frac{3i}{z-1}$

1.4 Класи Соболєва, лінійні перетворення і квазіконформні відображення

Нагадаємо деякі означення.

Означення 1.10. Множина $K \subset \mathbb{R}^n$ називається *обмеженою*, якщо існує $C > 0$ таке, що $|x| \leqslant C$ для всіх $x \in K$.

Означення 1.11. Множина K в $\mathbb{R}^n$ називається *замкненою*, якщо $\mathbb{R}^n \setminus K$ є відкритою множиною.

Означення 1.12. *Компактом* K в $\mathbb{R}^n$ називається множина, яка одночасно є замкненою і обмеженою.

Означення 1.13. Нехай D – область в $\mathbb{R}^n$. Тоді будемо говорити, що функція $f : D \to \mathbb{R}$ є *функцією з компактним носієм*, якщо існує компакт $C \subset D$ такий, що $f \equiv 0$ зовні компакту C.

У подальшому $C_0^k(U)$ позначає простір функцій $u : U \to \mathbb{R}$ з компактним носієм в U, що мають k частинних похідних за будь якою змінною $x_1, \ldots, x_n$, які є неперервними в U.

Означення 1.14. Нехай U – область, $U \subset \mathbb{R}^n$, $u : U \to \mathbb{R}$ – деяка функція, що інтегровна на будь-яких компактах $K \subset U$. Припустимо, що знайдеться функція v, яка також інтегровна на будь-яких компактах $K \subset U$ і така, що

$$\int\limits_U \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) u(x)\, dm(x) = -\int\limits_U \varphi(x) v(x)\, dm(x)$$

для будь-якій функції $\varphi \in C_1^0(U)$. Тоді будемо говорити, що функція v є *узагальненою похідною першого порядку функції* u *за змінною* x_i і позначати символом: $\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) := v$.

Функція $u \in W^{1,1}_{\rm loc}(U)$, якщо u має узагальнені частинні похідні першого порядку по кожній зі змінних в області U, які є інтегровними на будь якому компакті $K \subset U$, тобто, мають скінченний інтеграл.

Означення 1.15. Нехай G – область в $\mathbb{R}^n$. Відображення $f : G \to \mathbb{R}^n$ належить *класу Соболєва* $W^{1,1}_{\rm loc}(G)$, пишуть $f \in W^{1,1}_{\rm loc}(G)$, якщо всі координатні функції $f = (f_1, \ldots, f_n)$ належать до класу $W^{1,1}_{\rm loc}$. Нарешті, $f \in W^{1,n}_{\rm loc}(G)$, якщо $f \in W^{1,1}_{\rm loc}(G)$ і, крім того, узагальненні частинні похідні $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ є інтегровними на будь-яких компактах $K \subset D$ у степені n.

Без доведення приймемо наступне

Твердження 1.2. *Для будь-якого $p \in \mathbb{N}$ і для будь-якої відкритої множини $U \subset \mathbb{R}^n$ має виконується включення:*

$$C^1(U) \subset W^{1,p}_{\rm loc}(U)\,.$$

Означення 1.16. *Лінійним перетворенням* $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ називається таке відображення, що задовольняє умови: $A(x+y) = A(x) + A(y)$ і $A(\lambda x) = \lambda A(x)$ для будь-яких векторів $x, y \in \mathbb{R}^n$ і будь-якого числа $\lambda \in \mathbb{R}$.

Добре відомо, що в конкретному базисі $e_1, \ldots, e_n$ будь-яке лінійне перетворення можна записати в вигляді матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\,. \end{pmatrix}$$

Наступне твердження є ключовим для всього подальшого викладення (див. [Re$_1$, теорема 2.1, гл. I]).

Теорема 1.1. *Припустимо, що $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – довільне лінійне відображення. Тоді знайдуться ортонормовані системи векторів $e_1, \ldots, e_n$ и $\widetilde{e_1}, \ldots, \widetilde{e_n}$ і невід'ємні числа*

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \quad 0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n\,,$$

такі що

$$A(e_i) = \lambda_i \widetilde{e_i} \tag{1.4.1}$$

при всіх $i = 1, 2 \ldots, n$. Більше того, якщо $\det A \neq 0$, то числа λ_i в (1.4.1) є додатними.

Означення 1.17. Системи векторів $e_1, \ldots, e_n$ і $\widetilde{e_1}, \ldots, \widetilde{e_n}$ з теореми 1.1 називаються *головними векторами* відображення A, а числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – *головними числами,* або *головними розтягами* відображення A.

Тут і надалі Ah позначає дію лінійного відображення A на вектор-стовпець $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$, а $|Ah|$ позначає довжину вектора Ah,

$$|Ah| = \sqrt{(a_{11}h_1 + \cdots + a_{1n}h_n)^2 + \cdots + (a_{n1}h_1 + \cdots + a_{nn}h_n)^2}\,.$$

Означення 1.18. *Матричною нормою*, або просто *нормою* лінійного відображення $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ називається число $\|A\|$, котре визначається за наступним правилом:

$$\|A\| = \sup_{|h|=1} |Ah| = \max_{|h|=1} |Ah| =$$

$$= \max_{|h|=1} \sqrt{(a_{11}h_1 + \cdots + a_{1n}h_n)^2 + \cdots + (a_{n1}h_1 + \cdots + a_{nn}h_n)^2}\,. \tag{1.4.2}$$

Є справедливим наступний результат [Sev$_2$].

Теорема 1.2. *Нехай A – лінійне перетворення, а $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ – його головні розтяги. Тоді*

$$\|A\| = \lambda_n, \qquad l(A) := \min_{|h|=1} |Ah| = \lambda_1\,, \quad |\det A| = |\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n|\,. \tag{1.4.3}$$

Означення 1.19. Будемо говорити, що властивість A має місце *для майже всіх x з області D, якщо A має місце для всіх $x \in D$, крім, можливо, деякої множини E, що має міру нуль.*

Нагадаємо, що матриця Якобі має вигляд (1.2.2). Величина $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$ знаходиться елементарно: якщо відображення $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$, то $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$ – це звичайна похідна компоненти f_i цього відображення за змінній x_i, взята в точці x_0 і обчислена за умовою, що решта змінних є сталими.

Зауваження 1.2. Величини $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ з означення 1.14 позначаються так само, як звичайні частинні похідні функції f_i по змінній x_j. В той самий час, ці об'єкти визначені дещо по-різному. Слід зауважити, що вони співпадають між собою майже скрізь в точках існування, див. [Ma, теорема 1, п. 1.1.3, § 1.1, гл. I].

Нехай $f : D \to \mathbb{R}^n$ – довільне відображення, $e \in \mathbb{S}^{n-1}$ – одиничний вектор. *Похідною відображення f за напрямком e в точці $x_0 \in D$* називається наступна границя (якщо вона існує):

$$\frac{\partial f}{\partial e}(x_0) = \lim_{t \to +0} \frac{f(x_0 + te) - f(x_0)}{t}\,.$$

Зауважимо, що якщо f є диференційовним у точці x_0, і $f'(x_0)$ – матриця Якобі відображення f в цій точці, то за означенням диференційовності у (1.2.1)

$$\frac{\partial f}{\partial e}(x_0) = f'(x_0)e\,, \tag{1.4.4}$$

де, як звично, $f'(x_0)e$ позначає дію матриці Якобі $f'(x_0)$ на вектор e.

Зафіксуємо точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$, тоді матрицю у (1.2.2) можна розглядати як лінійне відображення $A := f'(x_0)$, яке діє на вектори $h \in \mathbb{R}^n$. Покладаючи в означенні 1.18 $A := f'(x_0)$, за означенням маємо:

$$\|f'(x_0)\| := |f'(x_0)h|\,.$$

Тут x_0 виступає як параметр, а змінною є вектор h; $f'(x_0)h$ служить позначенням для дії матриці Якобі $f'(x_0)$ на вектор-стовпець $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$.

Отже, $f'(x_0)h$ – знову деякий вектор, а $|f'(x_0)h|$ – це його довжина. (Тобто, якщо $f'(x_0)h = (c_1, \ldots, c_n)$, то $|f'(x_0)h| = \sqrt{c_1^2 + \cdots + c_n^2}$).

Так само покладемо

$$J(x_0, f) := \det f'(x_0)$$

– *якобіан* відображення f в точці x_0.

Означення 1.20. Відображення $f : D \to \mathbb{R}^n$ називається *квазіконформним*, якщо виконано наступні умови:
1) $f \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}$,
2) f є гомеоморфізмом у D,
3) для певної сталої $K \geqslant 1$

$$\boxed{\|f'(x)\|^n \leqslant K \cdot |J(x, f)|} \qquad (1.4.5)$$

при майже всіх $x \in D$ і певній сталій $K < \infty$, де, як звично,

$$\|f'(x)\| := \sup_{h \in \mathbb{R}^n : |h|=1} |f'(x)h|\,,$$

див., напр., § 3 розд. I [Re_1], або означення 2.1 розд. 2 розд. I [Ri] (див. [MRV, пункт 2.20]).

Означення 1.21. Відображення $f : D \to \mathbb{R}^n$ називається *відображенням з обмеженим спотворенням*, якщо в означенні 1.20 замість умови гомеоморфності відображення f висувається вимога: якобіан відображення f майже скрізь зберігає свій знак.

Означення 1.22. Відображення $f : D \to \mathbb{R}^n$ називається *дискретним*, якщо прообраз $\{f^{-1}(y)\}$ кожної точки $y \in \mathbb{R}^n$ складається з ізольованих точок, і *відкритим*, якщо образ будь–якої відкритої множини $U \subset D$ є відкритою множиною в $\mathbb{R}^n$.

Деякі властивості квазіконформних відображень

1. Якщо $f : D \to \mathbb{R}^n$ і $g : f(D) \to \mathbb{R}^n$ – квазіконформні відображення, то суперпозиція $F = g \circ f$ також є квазіконформним відображенням.

2. Квазіконформні відображення (більше того, будь-які гомеоморфізми класу $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}$) є диференційовними майже скрізь.

Ю. Вяйсяля доведено більш загальне твердження, а саме, що будь-яке відкрите відображення класу $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$, $p > n - 1$, є диференційовним майже скрізь (див. [Va_1], лема 3). Властивість 2 доведена А. Морі на площині, а просторовий аналог сформульовано і доведено в монографії Ю. Вяйсяля (див. [Va_2, теорема 32.1 і наслідок 32.2]).

Означення 1.23. Нагадаємо, що відображення $f : D \to \mathbb{R}^n$ має *N-властивість Лузіна,* або просто *N-властивість*, якщо воно переводить множини міри нуль у множини міри нуль. Іншими словами, з умови $m(E) = 0$, $E \subset D$, випливає, що $m(f(E)) = 0$. Аналогічно, відображення $f : D \to \mathbb{R}^n$ має *N^{-1}-властивість,* якщо з умови $m(f(E)) = 0$, $f(E) \subset f(D)$, випливає рівність $m(E) = 0$.

3. Будь-яке квазіконформне відображення (більше того, будь-який гомеоморфізм класу $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}$) має N і N^{-1}-властивості Лузіна.

Для гомеоморфізмів класу $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}$ даний результат встановлено Ю.Г. Решетняком (див. [Re_2, теорема 3]). Для більш загальних відкритих відображень класу $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}$ цей результат належить Малому і Мартіо, див. [MM, наслідок B].

1.5 Характеристики квазіконформності

Наступні дві величини мають велике значення і характеризують як би степінь відхилення відображення від конформного. Покладемо $l\,(f'(x)) = \min\limits_{|h|=1} |f'(x)h|$. *Внутрішньою дилатацію* відображення f у точці x зветься величина

$$K_I(x,f) \quad = \quad \frac{|J(x,f)|}{l\,(f'(x))^n}\,, \tag{1.5.1}$$

якщо $J(x,f) \neq 0$; $\quad K_I(x,f) = 1$, якщо $f'(x) = 0$; і $K_I(x,f) = \infty$ в інших точках. *Зовнішня дилатація* відображення f у точці x є величина

$$K_O(x,f) \quad = \quad \frac{\|f'(x)\|^n}{|J(x,f)|}\,, \tag{1.5.2}$$

якщо $J(x,f) \neq 0$; $\quad K_O(x,f) = 1$, якщо $f'(x) = 0$; і $K_O(x,f) = \infty$ в інших точках. Добре відомо, що

$$K_I(x,f) \leqslant K_O^{n-1}(x,f)\,, \quad K_O(x,f) \leqslant K_I^{n-1}(x,f)\,. \tag{1.5.3}$$

Можна показати також справедливість наступного твердження.

Твердження 1.3. *Для будь-якого відображення $f : D \to D'$ і будь-якого конформного відображення $\varphi : D' \to \mathbb{R}^n$*

$$K_O(x,f) = K_O(x,\varphi \circ f)\,, \quad K_I(x,f) = K_I(x,\varphi \circ f)\,.$$

Виходячи зі співвідношення (1.4.5), означення квазіконформного відображення може бути дано у наступній еквівалентній формі.

Означення 1.24. Відображення $f : D \to \mathbb{R}^n$ називається *квазіконформним*, якщо виконано наступні умови:
1) $f \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}$,
2) f є гомеоморфізмом у D,
3) для певної сталої $K \geqslant 1$ і майже всіх $x \in D$

$$K_O(x, f) \leqslant K\,.$$

Нехай $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_n(x)$ – головні числа (розтяги) матриці $f'(x)$, і нехай $J(x_0, f) \neq 0$. За теоремою 1.2

$$|J(x_0, f)| = \lambda_1(x_0) \ldots \lambda_n(x_0), \qquad \|f'(x_0)\| = \lambda_n(x_0)\,, \tag{1.5.4}$$

$$l\left(f'(x_0)\right) = \lambda_1(x_0)\,, \tag{1.5.5}$$

$$K_O(x_0, f) = \frac{\lambda_n^n(x_0)}{\lambda_1(x_0) \ldots \lambda_n(x_0)}\,, \tag{1.5.6}$$

$$K_I(x_0, f) = \frac{\lambda_1(x_0) \ldots \lambda_n(x_0)}{\lambda_1^n(x_0)}\,. \tag{1.5.7}$$

1.6 Квазіконформні відображення і дилатації на площині

Для зручності ми, як звично, ототожнюємо простір $\mathbb{R}^2$ з комплексною площиною, тобто,

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1\}\,.$$

Розглянемо наступне

Означення 1.25. Нехай $z, z_0 \in D \subset \mathbb{C}$. Для комплекснозначної функції $f : D \to \mathbb{C}$, заданої в області $D \subset \mathbb{C}$, що має частинні похідні по x і y при майже всіх $z = x + iy$, покладемо:

$$\overline{\partial} f = f_{\overline{z}} = \left(f_x + if_y\right)/2 \tag{1.6.1}$$

і

$$\partial f = f_z = \left(f_x - if_y\right)/2\,. \tag{1.6.2}$$

Покладемо

$$\boxed{\mu(z) = \mu_f(z) = f_{\overline{z}}/f_z} \tag{1.6.3}$$

при $f_z \neq 0$ і $\mu(z) = 0$ в противному випадку. Комплекснозначна функція μ, наведена вище, називається *комплексною дилатацією* відображення f

в точці z. *Максимальною дилатацією* відображення f в точці z називається наступна функція:

$$\boxed{K_\mu(z) \quad = \quad \frac{1+|\mu(z)|}{|1-|\mu\,(z)||}}\,. \tag{1.6.4}$$

Приклад 4. Обчислити f_z і $f_{\overline{z}}$ для функції $f(z)=f(z)=z^3-\overline{z}$.

Розв'язок. Будемо мати, що

$$f(z)=z^3-\overline{z}=(x+iy)^3-(x-iy)=(x+iy)^3-x+iy;$$

$$f_z=(f_x-if_y)/2=(3(x+iy)^2-1-i-i3(x+iy)^2\cdot i-i\cdot i)/2=3z^2;$$

$$f_{\overline{z}}=(3(x+iy)^2-1-i+i3(x+iy)^2\cdot i+i\cdot i)/2=-1\,.\ \Box$$

Зауважимо, що

$$J(f,z)=|f_z|^2-|f_{\overline{z}}|^2\,,$$

що може бути перевірено прямим підрахунком (див., напр., [A, пункт C, гл. I]) (– перевірте це !). Є справедливим наступний результат [Sev$_2$].

Теорема 1.3. *Нехай відображення $f\,:\,D\to\mathbb{C}$ має майже скрізь частинні похідні по x і y. Тоді:*

$$\|f'(z)\|=|f_z|+|f_{\overline{z}}|\,, \tag{1.6.5}$$

де, як звично, $\|f'(z)\|:=\sup\limits_{|h|=1}|f'(z)h|$. Крім того,

$$K_\mu(z)=\frac{(|f_z|+|f_{\overline{z}}|)^2}{|f_z|^2-|f_{\overline{z}}|^2}\,. \tag{1.6.6}$$

Приклад 5. Знайдіть $K_\mu(z)$ і $\mu(z)$ для функції

$$\varphi(z)=\overline{\sin z-1}\,.$$

Розв'язок. Будемо міркувати в більш загальних термінах. Ми можемо розглянути питання диференційовності будь-якої функції

$$\varphi(z)=\overline{f(z)}\,, \tag{1.6.7}$$

де f – аналітична функція. Маємо: $f(z)=u(z)+iv(z)$, тоді

$$\varphi(z)=u(z)-iv(z)\,. \tag{1.6.8}$$

Далі будемо мати:

$$\varphi_z = (\varphi_x - i\varphi_y)/2 = (u_x - iv_x - iu_y - v_y)/2 = \{u_x = v_y, u_y = -v_x\} = 0\,; \; (3)$$

$$\varphi_{\overline{z}} = (\varphi_x + i\varphi_y)/2 = (u_x - iv_x + iu_y + v_y)/2 =$$

$$\{u_x = v_y, u_y = -v_x\} = u_x - iv_x = \overline{u_x + iv_x} = \overline{f'(z)} = \overline{f}_z = \overline{\cos z}\,. \quad (1.6.9)$$

$$\mu_(z) = \begin{cases} \frac{f_{\overline{z}}}{f_z}\,, & f_z \neq 0\,; \\ 0\,, & f_z = 0\,. \end{cases} \quad (1.6.10)$$

Отже, згідно формул (1.6.10)

$$\mu(z) = \mu_f(z) = 0\,, \qquad K_\mu(z) = K_O(z,f) = K_I(z,f) = \frac{1 + |\mu(z)|}{1 - |\mu(z)|} = 1\,. \;\square$$

1.7 Похідні складної функції

Припустимо, що функція f диференційовна в точці z_0, а g – диференційовна в точці $\zeta_0 = f(z_0)$, тоді $F := g(f(z))$ є диференційовною в точці z_0 і справедлива формула (див. також [A, пункт C, розд. I, с. 15]):

$$F_z(z_0) = g_\zeta(\zeta_0)\zeta_z(z_0) + g_{\overline{\zeta}}(\zeta_0)\overline{\zeta}_z(z_0)\,,$$

та згадуючи, що $\zeta = f(z)$ це можна записати так:

$$\boxed{F_z(z_0) = g_\zeta(f(z_0))f_z(z_0) + F_{\overline{\zeta}}(f(z_0))\overline{f}_z(z_0)}\,. \quad (1.7.1)$$

Тут похідні по $\zeta, \overline{\zeta}, z, \overline{z}$ визначені в позапопередній секції – див. співвідношення (1.6.1)–(1.6.2). Зокрема, якщо $\zeta = \xi + i\eta$ і $g = g(\zeta)$, то $g_\zeta = (g_\xi - ig_\eta)/2$ і $g_{\overline{\zeta}} = (g_\xi + ig_\eta)/2$. Міркуючи аналогічно до (1.7.1), будем мати:

$$\boxed{F_{\overline{z}}(z_0) = g_\zeta(f(z_0))f_{\overline{z}}(z_0) + g_{\overline{\zeta}}(f(z_0))\overline{f}_{\overline{z}}(z_0)}\,. \quad (1.7.2)$$

Можна показати, що якщо g – аналітична функція, то $g_{\overline{\zeta}} = 0$. Тоді формули (1.7.1)–(1.7.2) можна переписати так:

$$\boxed{F_z(z_0) = g_\zeta(f(z_0))f_z(z_0)}\,, \quad (1.7.3)$$

$$\boxed{F_{\overline{z}}(z_0) = g_\zeta(f(z_0))f_{\overline{z}}(z_0)}\,. \quad (1.7.4)$$

Приклад 6. Нехай

$$f(z) = \cos \overline{z}^3\,.$$

Знайти $f_{\overline{z}}$.

Розв'язок. Скористаємося формулою (1.7.2). Будемо мати:

$$f_{\overline{z}} = \{g(\zeta) = \cos\zeta; h(z) = \overline{z}^3\} = (g_\zeta \circ h)h_{\overline{z}} + (g_{\overline{\zeta}} \circ h)\overline{h}_{\overline{z}} =$$

$$= -\sin(\overline{z}^3) \cdot h_{\overline{z}} + 0 \cdot \overline{h}_{\overline{z}} = \sin(\overline{z}^3) \cdot h_{\overline{z}}\,. \qquad (1.7.5)$$

В свою чергу, отримаємо, що

$$h_{\overline{z}} = (\overline{z}^3)_{\overline{z}} = ((x - iy)^3)_{\overline{z}} = (h_x + ih_y)/2 =$$

$$= (((x-iy)^3)_x + i((x-iy)^3)_y)/2 = (3(x-iy)^2 + 3(x-iy)^2)/2 = 3\overline{z}^2\,. \quad (1.7.6)$$

Остаточно, з (1.7.5) та (1.7.6) випливає, що

$$f_{\overline{z}} = -3\sin(\overline{z}^3)\overline{z}^2\,. \ \square$$

1.8 Завдання для самоконтролю

1. Чи буде сума (різниця) двох квазіконформних відображень квазіконформним ?

2. Нехай $f : D \to \mathbb{C}$ і $g : D \to \mathbb{C}$ – два квазіконформних відображення. Чи буде квазіконформним $F(z) = f(z) \cdot g(z)$?

3. Чи можна відобразити квазіконформно $B(0, 2)$ на кругове кільце $A(0, r_1, r_2) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x| < r_2\}$? Чи вірно це для довільних гомеоморфізмів?

4. Нехай квазіконформне відображення $f : D \to \mathbb{R}^n$ визначено в обмеженій області $D \subset \mathbb{R}^n$ і є неперервним в замиканні D. Чи вірно, що $f(\partial D) = \partial f(D)$?

5. Нехай відображення $f : D \to \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, – квазіконформне відораження, і нехай P – довільна гіперплощина, яка має непорожній перетин з D. Чи буде відображення $f|_{D\cap P}$ квазіконформним? Чому поставлене питання взагалі є не зовсім коректним?

6. Наведіть приклад області D і квазіконформного відображення $f : D \to \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, визначеного в ній, яке не належить до класу $C^1(D)$.

7. Нехай $D \subset \mathbb{C}$, і нехай $f : D \to \mathbb{C}$ – квазіконформне відображення. Чи вірно, що

$$f(\overline{z}) \overset{?}{=} \overline{f(z)}\,.$$

У разі негативної відповіді, наведіть контрприклад.

8. Нехай $F(z) = f(z) + \overline{g(z)}$, де f і g – аналітичні функції, визначені в деякій області $D \subset \mathbb{C}$. Чи вірно, що: а) $F_z = f'(z)$; б) $F_{\overline{z}} = \overline{g'(z)}$?

9. Кажуть, що функція $f : D \to \mathbb{C}$ *диференційовна в сенсі Дарбу-Штольця в точці* $z \in D$, якщо

$$f(z + \Delta z) - f(z) = A\Delta z + B\overline{\Delta z} + o(|\Delta z|)\,,$$

де

$$o(|\Delta z|) = |\Delta(z)| \cdot \varepsilon(\Delta z)\,,$$

$$\varepsilon(\Delta z) \to 0 \quad \text{при} \quad \Delta z \to 0\,.$$

а) Знайти A і B через похідні f по z і $\overline{z}$;
б) Знайти A і B через похідні u і v по x і y, де $f = u(x,y) + iv(x,y)$.

10. Нехай $F(z) = f(\overline{z})$, де f – аналітична функція. Чи вірно, що

$$F_{\overline{z}} = (f'(z))|_{z \mapsto \overline{z}} = f'(\overline{z})?$$

11. Доведіть, що при $n = 2$

$$K_\mu(z) = K_I(z, f) = K_O(z, f)$$

(див., напр., співвідношення (1.5.6)).

1.9 Завдання для самостійної роботи № 2

Задача 2. *Знайти комплексну і максимальні дилатації відображення $f : D \to \mathbb{C}$ та його якобіан, якщо $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, а відображення f задано для кожного з варіантів.*

Номер варіанту	**Відображення**	**Номер варіанту**	**Відображення**
1	$f(z) = \cos \overline{z}$	16	$f(z) = z^2 + \overline{z}^2$
2	$f(z) = \cos \overline{z} + z$	17	$f(z) = z + \overline{z}^2$
3	$f(z) = \cos \overline{z} + z^2$	18	$f(z) = z^2 + \overline{z}$
4	$f(z) = \cos \overline{z} + z^3$	19	$f(z) = z^2 - \overline{z}$
5	$f(z) = \sin \overline{z} + z^2$	20	$f(z) = z^3 + \overline{z}$
6	$f(z) = \sin \overline{z} + 2z^2$	21	$f(z) = z^3 - \overline{z}$
7	$f(z) = \sin \overline{z} - z^2$	22	$f(z) = \overline{\cos z}$
8	$f(z) = \cos z + \overline{z}$	23	$f(z) = \overline{\cos z + 1}$
9	$f(z) = e^{\overline{z}}$	24	$f(z) = \overline{\sin z}$
10	$f(z) = e^{\overline{z}} + z$	25	$f(z) = \overline{\sin z + 1}$
11	$f(z) = e^{\overline{z}} + \overline{z}$	26	$f(z) = \overline{\sin z - 1}$
12	$f(z) = e^{\overline{z}} + z^2$	27	$f(z) = \overline{e^z}$
13	$f(z) = e^{\overline{z}} - z^2$	28	$f(z) = \frac{1}{\overline{z}-1}$
14	$f(z) = e^{\overline{z}} + z^3$	29	$f(z) = \frac{1}{\overline{z}+1}$
15	$f(z) = e^{\overline{z}} - z^3$	30	$f(z) = \frac{1}{(\overline{z})^2+1}$

1.10 Дилатації радіальних відображень

Хоча ми не акцентували увагу на складності чи легкості обчислення дилатацій тих чи інших відображень, слід зауважити, що далеко не в кожному випадку їх знаходження технічно можливе. Більш менш оптимістичним виглядає обчислення дилатацій на площині, оскільки маємо в цьому випадку явну формулу (1.6.6), див. також вправу 11 на сторінці 25. Щодо дилатацій $K_I(x, f)$ та $K_O(x, f)$ у просторі, в більшості випадків їх з'ясування є достатньо важкою справою. Іноді їх обчислення можливо лише з «геометричних» міркувань, іноді доцільно зробити лише оцінки зверху та знизу. Проте, в деяких окремих випадках обчислення дилатацій проводиться безпосередньо, і наразі ми маємо розібрати один з них.

Обчислимо головні вектори і розтяги так званих *радіальних відобра-*

жень, див. [Sev$_1$, пункт 1.1.9]. Так називаються відображення вигляду

$$f(x) = \frac{x}{|x|}\rho(|x|)\,, \tag{1.10.1}$$

де ρ – деяка наперед задана функція, що залежить лише від $|x|$. Припустимо, що $x \in B(0,p)\setminus\{0\}$, $p \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$, $p > 0$, а функція $\rho : (0,p) \to \mathbb{R}$ є неперервною і майже скрізь диференційовною. Тоді з огляду на теорему Фубіні f також є диференційовним майже скрізь. Нехай $x_0 \in B(0,p)\setminus\{0\}$ – точка дифереційовності відображення f, $|x_0| = r \in (0,p)$.

1) Нехай $e_1 \in \mathbb{S}^{n-1}$ – довільний вектор, ортогональний вектору x_0. Якщо зобразити e_1 з початком в точці x_0, то, за означенням, e_1 знаходиться у площині, яка є дотичною до сфери $S(0,r)$ в точці x_0. Такий вектор будемо називати *дотичним напрямком* по відношенню до x_0. Обчислимо похідну $\partial_\tau f(x_0)$ відображення f за напрямком вектора e_1 в точці x_0. Будемо мати:

$$\partial_\tau f(x_0) = \lim_{t\to+0}\frac{f(x_0+te)-f(x_0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to+0}\frac{1}{t}\left\{\frac{x_0+te_1}{|x_0+te_1|}\rho(|x_0+te_1|) - \frac{x_0}{|x_0|}\rho(|x_0|)\right\}\,. \tag{1.10.2}$$

Оскільки e_1 є ортогональним до вектора x_0, за теоремою Піфагора будемо мати: $|x_0+te_1| = \sqrt{r^2+t^2}$. Тоді з (1.10.2) випливає, що

$$\partial_\tau f(x_0) = \lim_{t\to+0}\frac{1}{t}\left\{\frac{x_0+te_1}{\sqrt{r^2+t^2}}\rho(\sqrt{r^2+t^2}) - \frac{x_0}{r}\rho(r)\right\}\,. \tag{1.10.3}$$

Скориставшись у (1.10.3) правилом Лопиталя, ми отримаємо, що

$$\partial_\tau f(x_0) = e_1\frac{\rho(r)}{r}\,. \tag{1.10.4}$$

2) Нехай тепер вектор e_2 однаково спрямований з вектором x_0 (такий вектор e_2 будемо називати *радіальним напрямком*). Зауважимо, що вектор e_2 є ортогональним до дотичної площини до сфери $S(0,r)$ в точці x_0.

Обчислимо похідну $\partial_r f(x_0)$ відображення f за напрямком вектора e_2 в точці x_0. Будемо мати:

$$\partial_r f(x_0) = \lim_{t\to+0}\frac{f(x_0+te)-f(x_0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to+0} \frac{1}{t}\left\{\frac{x_0+te_2}{|x_0+te_2|}\rho(|x_0+te_2|) - \frac{x_0}{|x_0|}\rho(|x_0|)\right\}\,. \tag{1.10.5}$$

Зауважимо, що $|x_0+te_2| = r+t$. Тоді з (1.10.5) випливає, що

$$\partial_r f(x_0) = \lim_{t\to+0} \frac{1}{t}\left\{\frac{x_0+te_2}{r+t}\rho(r+t) - \frac{x_0}{r}\rho(r)\right\}\,. \tag{1.10.6}$$

Скориставшись у (1.10.6) диференційовністю функції ρ у точці r і тим, що $e_2 r = x_0$, ми отримаємо, що

$$\partial_r f(x_0) = \lim_{t\to+0} \frac{e_2\rho(r+t) - e_2\rho(r)}{t} = \rho'(r)e_2\,. \tag{1.10.7}$$

Отже, з (1.10.4) і (1.10.7), з урахуванням рівності (1.4.4), ми отримаємо наступний висновок.

Твердження 1.4. *Нехай $f : B(0,p)\setminus\{0\}\to\mathbb{R}^n$ – відображення, яке можна записати у вигляді (1.10.1), де функція $\rho(t) : (0,p)\to\mathbb{R}$ є неперервною і диференційовною майже скрізь. Тоді f також є диференційовним майже скрізь, причому в точці x_0 його диференційовності в якості головних векторів $e_{i_1},\ldots,e_{i_n}$ і $\widetilde{e_{i_1}},\ldots,\widetilde{e_{i_n}}$ можна обрати $(n-1)$ лінійно незалежних дотичних напрямків до сфери $S(0,r)$ в точці x_0, де $|x_0| = r$, і один радіальний напрямок у вказаній точці.*

Відповідні головні розтяги (які називаються дотичними і радіальними розтягами) дорівнюють $\lambda_\tau(x_0) := \lambda_{i_1}(x_0) = \ldots = \lambda_{i_{n-1}}(x_0) = \frac{\rho(r)}{r}$ і $\lambda_r(x_0) := \lambda_{i_n} = \rho'(r)$.

Приклад 7. Знайти внутрішню і зовнішню дилатації радіального відображення

$$f(x) = \frac{x}{|x|}\exp\left\{\log^{\alpha}\frac{1}{|x|}\right\}\,,\quad x\in\mathbb{B}^n\setminus\{0\}\,,$$

де $\mathbb{B}^n = \{x\in\mathbb{R}^n : |x|<1\}$ і $\alpha\geqslant 1$ – задане фіксоване число.

Розв'язок. Очевидно, відображення f має вигляд (1.10.1), де

$$\rho(t) \;=\; \exp\left\{\log^{\alpha}\frac{1}{t}\right\}\,.$$

Будемо мати:

$$\delta_\tau(x) = \frac{|f(x)|}{|x|} = \frac{|\rho(x)|}{|x|} = \frac{\exp\left\{\log^{\alpha}\frac{1}{|x|}\right\}}{|x|}\,,$$

$$\delta_r(x)=\frac{\partial|f(x)|}{\partial|x|}=\frac{\alpha\exp\left\{\log^{\alpha}\frac{1}{|x|}\right\}}{|x|}\cdot\log^{\alpha-1}\frac{1}{|x|}\,.$$

Оскільки $\alpha\geqslant 1$, ми маємо, що $\delta_r\geqslant\delta_\tau$ при $|x|\leqslant e^{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)}}$ і $\delta_r<\delta_\tau$ при $|x|>e^{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)}}$.

1) Нехай $|x|\leqslant e^{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)}}$. Тоді в відомих позначеннях

$$\|f'(x)\|=\delta_r(x)=\frac{\alpha\exp\left\{\log^{\alpha}\frac{1}{|x|}\right\}}{|x|}\cdot\log^{\alpha-1}\frac{1}{|x|}\,,$$

$$l(f'(x))=\delta_\tau(x)=\frac{\exp\left\{\log^{\alpha}\frac{1}{|x|}\right\}}{|x|}\,.$$

Отже, за твердженням 1.4

$$\lambda_1(x)=\lambda_2(x)=\ldots=\lambda_{n-1}(x)=\delta_\tau(x)=\frac{\exp\left\{\log^{\alpha}\frac{1}{|x|}\right\}}{|x|}\,,$$

$$\lambda_n(x)=\delta_r(x)=\frac{\alpha\exp\left\{\log^{\alpha}\frac{1}{|x|}\right\}}{|x|}\cdot\log^{\alpha-1}\frac{1}{|x|}\,.$$

Тоді згідно формул (1.5.1) і (1.5.2) і з огляду на (1.5.4)–(1.5.7)

$$K_I(x,f)=\frac{\delta_\tau^{n-1}(x)\cdot\delta_r(x)}{\delta_\tau^{n}(x)}=$$

$$=\frac{\exp\left\{(n-1)\log^{\alpha}\frac{1}{|x|}\right\}}{|x|^{n-1}}\cdot\frac{\alpha\exp\left\{\log^{\alpha}\frac{1}{|x|}\right\}}{|x|}\cdot\log^{\alpha-1}\frac{1}{|x|}\cdot\frac{|x|^n}{\exp\left\{n\log^{\alpha}\frac{1}{|x|}\right\}}=$$

$$=\alpha\cdot\log^{\alpha-1}\frac{1}{|x|}\,.$$

Аналогічно,

$$K_O(x,f)=\frac{\delta_r^{n}(x)}{\delta_\tau^{n-1}(x)\cdot\delta_r(x)}=$$

$$=\frac{\alpha^n\exp\left\{n\log^{\alpha}\frac{1}{|x|}\right\}}{|x|^n}\cdot\log^{n(\alpha-1)}\frac{1}{|x|}\cdot\frac{|x|^{n-1}}{\exp\left\{(n-1)\log^{\alpha}\frac{1}{|x|}\right\}}.$$

$$\cdot\frac{|x|}{\alpha\exp\left\{\log^{\alpha}\frac{1}{|x|}\right\}\log^{\alpha-1}\frac{1}{|x|}}=\alpha^{n-1}\cdot\log^{(n-1)(\alpha-1)}\frac{1}{|x|}\,.$$

2) Тепер розглянемо випадок $|x|>e^{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)}}$. Міркуючи аналогічно до випадку 1), будемо мати:

$$l(f'(x))=\delta_r(x)=\frac{\alpha\exp\left\{\log^{\alpha}\frac{1}{|x|}\right\}}{|x|}\cdot\log^{\alpha-1}\frac{1}{|x|}\,,$$

$$\|f'(x)\|=\delta_{\tau}(x)=\frac{\exp\left\{\log^{\alpha}\frac{1}{|x|}\right\}}{|x|}\,,$$

$$K_I(x,f)=\frac{\delta_{\tau}^{n-1}(x)\cdot\delta_r(x)}{\delta_r^n(x)}=\frac{1}{\alpha^{n-1}}\cdot\frac{1}{\log^{(\alpha-1)(n-1)}\frac{1}{|x|}}\,,$$

$$K_O(x,f)=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\log^{\alpha-1}\frac{1}{|x|}}\,.$$

Остаточно,

$$K_I(x,f)=\begin{cases}\alpha\cdot\log^{\alpha-1}\frac{1}{|x|}\,, & |x|\leqslant e^{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)}}\,,\\ \frac{1}{\alpha^{n-1}}\cdot\frac{1}{\log^{(\alpha-1)(n-1)}\frac{1}{|x|}}\,, & |x|>e^{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)}}\end{cases}\,,$$

$$K_O(x,f)=\begin{cases}\alpha^{n-1}\cdot\log^{(\alpha-1)(n-1)}\frac{1}{|x|}\,, & |x|\leqslant e^{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)}}\,,\\ \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\log^{\alpha-1}\frac{1}{|x|}}\,, & |x|>e^{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)}}\end{cases}\,.\ \Box$$

Приклад 8. Нехай $Q:\mathbb{B}^n\rightarrow[1,\infty]$, $n\geqslant 2$, – фіксована вимірна за Лебегом функція. Для фіксованого $r>0$ позначимо

$$q_0(r):=\frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}}\int\limits_{S(0,r)}Q(x)\,d\mathcal{H}^{n-1}\,,\qquad(1.10.8)$$

де ω_{n-1} — площа одиничної $(n-1)$-вимірної сфери в $\mathbb{R}^n$, а $d\mathcal{H}^{n-1}$ – елемент площі на сфері $S(0,r)=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|=r\}$. За теоремою Фубіні інтеграл в (1.10.8) існує для майже всіх $r\in(0,1)$ (див., напр., [Sa, теорема 8.1.III]). Припустимо, що виконано умови

$$\int\limits_0^1\frac{dt}{tq_0^{\frac{1}{n-1}}(t)}=\infty,\qquad\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\frac{dt}{tq_0^{\frac{1}{n-1}}(t)}<\infty\quad\forall\,\varepsilon\in(0,1)\,.$$

Покладемо $f(0) := 0$ і

$$f(x) = \frac{x}{|x|}\rho(|x|) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{B}^n \setminus \{0\}\,, \tag{1.10.9}$$

де

$$\rho(r) = \exp\left\{-\int\limits_r^1 \frac{dt}{tq_0^{1/(n-1)}(t)}\right\}. \tag{1.10.10}$$

Знайти $K_I(x, f)$ і $K_O(x, f)$.

Розв'язок. Можна показати, що функція $\rho = \rho(t)$ диференційовна для майже всіх $t \in (0, 1)$. Далі,

$$\delta_\tau(x) = \rho(|x|) = \frac{\exp\left\{-\int\limits_r^1 \frac{dt}{tq_0^{1/(n-1)}(t)}\right\}}{|x|}\,,$$

$$\delta_r(x) = \exp\left\{-\int\limits_r^1 \frac{dt}{tq_0^{1/(n-1)}(t)}\right\} \cdot \frac{1}{|x|q_0^{1/(n-1)}(|x|)}\,.$$

Ми бачимо, що $\delta_\tau \geqslant \delta_r$, бо з огляду на умову $Q(x) \geqslant 1$ також маємо, що $q_0(t) \geqslant 1$ м.с. Тоді за Твердженням 1.4

$$\|f'(x)\| = \frac{\exp\left\{-\int\limits_{|x|}^1 \frac{dt}{tq_0^{1/(n-1)}(t)}\right\}}{|x|}\,, \quad l(f'(x)) = \frac{\exp\left\{-\int\limits_{|x|}^1 \frac{dt}{tq_0^{1/(n-1)}(t)}\right\}}{|x|q_0^{1/(n-1)}(|x|)}$$

і

$$|J(x, f)| = \frac{\exp\left\{-n\int\limits_{|x|}^1 \frac{dt}{tq_0^{1/(n-1)}(t)}\right\}}{|x|^n q_0^{1/(n-1)}(|x|)}.$$

Шляхом безпосередніх обчислень переконуємося, що

$$K_I(x, f) = \frac{\delta_\tau^{n-1}(x) \cdot \delta_r(x)}{\delta_r^n(x)} = q_0(|x|)\,,$$

$$K_O(x, f) = \frac{\delta_\tau^n(x)}{\delta_\tau^{n-1}(x) \cdot \delta_r(x)} = q_0^{1/(n-1)}(|x|)\,. \ \square$$

1.11 Завдання для самоконтролю

1. Чи буде сума двох радіальних відображень також радіальним відображенням ?

2. З'ясувати показник α, за якого відображення f з прикладу 7 є квазіконформним.

3. Довести, що відображення f з прикладу 8 є квазіконформним, якщо Q – обмежена функція.

4. Чи є внутрішня/зовнішня дилатація радіального відображення функцією, залежною тільки від $|x|$? В разі позитивної відповіді довести це, а в разі негативної навести відповідний контрприклад.

5. Довести, що відображення f з прикладу 8 є гомеоморфізмом за будь-якого $\alpha \geqslant 1$.

6. Нехай відображення f задається співвідношенням (1.10.9), де функцію ρ визначено в (1.10.10). Припустимо, що $\int\limits_0^1 \frac{dt}{tq_0^{\frac{1}{n-1}}(t)} < \infty$. Довести, що відображення f не має неперервного продовження в точку $x_0 = 0$.

7. Нехай відображення має вигляд $f(x) = \frac{x}{|x|}\rho(|x|)$, $x \in B(0, \varepsilon_0) \setminus \{0\}$, $0 < \varepsilon_0 < \infty$, і нехай $\rho : [0, \varepsilon_0] \to \mathbb{R}$ – неперервна монотонно зростаюча функція. Довести, що f є гомеоморфізмом у $B(0, \varepsilon_0) \setminus \{0\}$.

8. Нехай $f(x) = \frac{x}{|x|^\alpha}$, $\alpha \neq 0$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Знайти показник α, для якого відображення f є конформним, зокрема, $K_I(x, f) = K_O(x, f) = 1$.

9. З'ясувати, при яких значеннях α з попереднього прикладу відображення f є квазіконформним.

10. Чи можна вважати відображення $f(x) = 5x$ радіальним? Відповідь обґрунтуйте. Чому дорівнюють $K_I(x, f)$ та $K_O(x, f)$?

11*. Наведіть приклад відображення, яке завідомо не є радіальним.

1.12 Завдання для самостійної роботи № 3

Задача 3. *Знайти $K_I(x,f)$ і $K_O(x,f)$ для радіального відображення $f:\ \mathbb{B}^n\setminus\{0\}\to\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, заданого формулою $f(x)=\frac{x}{|x|}\rho(|x|)$, де функцію ρ визначено окремо для кожного з варіантів.*

Номер варіанту	**Функція**	**Номер варіанту**	**Функція**
1	$\rho(\|x\|)=\log\frac{1}{\|x\|}$	16	$\rho(\|x\|)=1+\|x\|$
2	$\rho(\|x\|)=\log^2\frac{1}{\|x\|}$	17	$\rho(\|x\|)=1+\|x\|^2$
3	$\rho(\|x\|)=\log^3\frac{1}{\|x\|}$	18	$\rho(\|x\|)=1+\|x\|^3$
4	$\rho(\|x\|)=\log^4\frac{1}{\|x\|}$	19	$\rho(\|x\|)=1+\|x\|^4$
5	$\rho(\|x\|)=\log^5\frac{1}{\|x\|}$	20	$\rho(\|x\|)=1+\|x\|^5$
6	$\rho(\|x\|)=e^{\|x\|}$	21	$\rho(\|x\|)=1+\|x\|^6$
7	$\rho(\|x\|)=e^{2\|x\|}$	22	$\rho(\|x\|)=(1-\|x\|)^{1/2}$
8	$\rho(\|x\|)=e^{3\|x\|}$	23	$\rho(\|x\|)=(1-\|x\|)^{1/3}$
9	$\rho(\|x\|)=e^{4\|x\|}$	24	$\rho(\|x\|)=(1-\|x\|)^{1/4}$
10	$\rho(\|x\|)=e^{5\|x\|}$	25	$\rho(\|x\|)=(1-\|x\|)^{1/5}$
11	$\rho(\|x\|)=\|x\|^2$	26	$\rho(\|x\|)=2\log\frac{1}{\|x\|}$
12	$\rho(\|x\|)=\|x\|^3$	27	$\rho(\|x\|)=3\log\frac{1}{\|x\|}$
13	$\rho(\|x\|)=\|x\|^4$	28	$\rho(\|x\|)=2\log\frac{1}{2\|x\|}$
14	$\rho(\|x\|)=\|x\|^5$	29	$\rho(\|x\|)=3\log\frac{1}{2\|x\|}$
15	$\rho(\|x\|)=\|x\|^6$	30	$\rho(\|x\|)=5\log\frac{1}{5\|x\|}$

1.13 Обчислення дилатацій в полярних координатах

Далеко не завжди обчислення комплексних дилатацій за (1.6.3) є простим і зручним. Наприклад, для відображення $f(z)=\frac{z}{|z|}(2|z|-1)^{1/\alpha}$ обчислення f_z і $f_{\overline{z}}$ «в лоб» перетворюється у технічно громіздку роботу. Нижче ми пропонуємо відносно просту процедуру, яка дозволяє уникнути подібних незручностей, а саме – перехід до полярних координат.

Нехай маємо відображення $f=f(z)$, визначене в деякій області D комплексної площини, і яке також приймає значення в $\mathbb{C}$. Припустимо, що f є диференційовним в точці $z\in D$, $z\neq 0$. Тоді при переході до полярних координат для цього відображення справедлива формула похідної складної функції. Нехай $z=re^{i\theta}$, де $0\leqslant r<\infty$ і $0\leqslant\theta<2\pi$.

Будемо мати:

$$f_x = f_r r_x + f_\theta \theta_x \,, \tag{1.13.1}$$

$$f_y = f_r r_y + f_\theta \theta_y \,. \tag{1.13.2}$$

Зауважимо, що $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ і

$$\theta = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}\,, & x > 0, y > 0, \\ \pi + \arctan \frac{y}{x}\,, & x < 0, y > 0, \\ \pi + \arctan \frac{y}{x}\,, & x < 0, y < 0, \\ 2\pi + \arctan \frac{y}{x}\,, & x > 0, y < 0\,, \\ \pi/2\,, & x = 0, y > 0\,, \\ 3\pi/2\,, & x = 0, y < 0\,. \end{cases}$$

Тоді

$$r_x = \frac{x}{r}\,, \quad r_y = \frac{y}{r}\,, \quad \theta_x = -\frac{y}{r^2}\,, \quad \theta_y = \frac{x}{r^2}\,. \tag{1.13.3}$$

З огляду на формули (1.13.1), (1.13.2) і (1.13.3), будемо мати:

$$f_x = f_r \frac{x}{r} - f_\theta \frac{y}{r^2}\,,$$

$$f_y = f_r \frac{y}{r} + f_\theta \frac{x}{r^2}\,.$$

Звідси

$$f_z = \frac{f_x - i f_y}{2} = \frac{1}{2}\left(f_r \frac{x}{r} - f_\theta \frac{y}{r^2} - i f_r \frac{y}{r} - i f_\theta \frac{x}{r^2}\right) = $$
$$= \frac{r x f_r - f_\theta y - i r y f_r - i x f_\theta}{2r^2};$$
$$f_{\overline{z}} = \frac{f_x + i f_y}{2} = \frac{1}{2}\left(f_r \frac{x}{r} - f_\theta \frac{y}{r^2} + i f_r \frac{y}{r} + i f_\theta \frac{x}{r^2}\right) = $$
$$= \frac{r x f_r - f_\theta y + i r y f_r + i x f_\theta}{2r^2}\,.$$

Нехай $f_z \neq 0$. Тоді

$$\mu_f(z) = \frac{f_{\overline{z}}}{f_z} = \frac{r x f_r - f_\theta y + i r y f_r + i x f_\theta}{r x f_r - f_\theta y - i r y f_r - i x f_\theta} = \frac{(x+iy)(r f_r + i f_\theta)}{(x-iy)(r f_r - i f_\theta)} =$$

$$= \frac{r e^{i\theta}(r f_r + i f_\theta)}{r e^{-i\theta}(r f_r - i f_\theta)} = e^{2i\theta} \cdot \frac{r f_r + i f_\theta}{r f_r - i f_\theta}\,.$$

Отже,

$$\boxed{\mu_f(z) = \frac{f_{\overline{z}}}{f_z} = e^{2i\theta}\cdot\frac{rf_r + if_\theta}{rf_r - if_\theta}}\,. \tag{1.13.4}$$

Використовуючи формулу (1.13.4), можна також обчислити і максимальну дилатацію $K_\mu(z) = \frac{1+|\mu_f(z)|}{1-|\mu_f(z)|}$.

Приклад 9. Нехай $\alpha \geqslant 1$. Обчислити комплексну дилатацію відображення $f(z) = \frac{z}{|z|}(2|z|-1)^{1/\alpha}$, користуючись формулою (1.13.4).

Розв'язок. Якщо $z = re^{i\theta}$, то відображення f можна записати в вигляді

$$f(z) = e^{i\theta}(2r-1)^{1/\alpha}\,.$$

Тоді $f_r = \frac{2e^{i\theta}(2r-1)^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\alpha}$ і $f_\theta = ie^{i\theta}(2r-1)^{1/\alpha}$. Тоді за співвідношенням (1.13.4) будемо мати:

$$\mu_f(z) = e^{2i\theta}\cdot\frac{r\frac{2e^{i\theta}(2r-1)^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\alpha} + i\cdot ie^{i\theta}(2r-1)^{1/\alpha}}{r\frac{2e^{i\theta}(2r-1)^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\alpha} - i\cdot ie^{i\theta}(2r-1)^{1/\alpha}} =$$

$$= e^{2i\theta}\cdot\frac{e^{i\theta}(2r-1)^{\frac{1}{\alpha}-1}(\frac{2r}{\alpha}-(2r-1))}{e^{i\theta}(2r-1)^{\frac{1}{\alpha}-1}(\frac{2r}{\alpha}+(2r-1))} = e^{2i\theta}\cdot\frac{2r-\alpha(2r-1)}{2r+\alpha(2r-1)}\,. \;\Box$$

Зауваження 1.3. За потреби в останній формулі можна перейти до змінної z, врахувавши, що $e^{2i\theta} = \frac{z^2}{|z^2|}$ і $r = |z|$.

1.14 Завдання для самостійної роботи № 4

Задача 4. *Обчислити комплексну дилатацію відображення $f = f(z)$, користуючись формулою (1.13.4), якщо відображення має вигляд*

$$f(z) = \frac{z}{|z|}\rho(|z|)\,,$$

а функцію ρ визначено окремо для кожного з варіантів.

Номер варіанту	Функція	Номер варіанту	Функція
1	$\rho(\lvert z\rvert) = \log\frac{1}{\lvert z\rvert}$	16	$\rho(\lvert z\rvert) = 1 + \lvert z\rvert$
2	$\rho(\lvert z\rvert) = \log^2\frac{1}{\lvert z\rvert}$	17	$\rho(\lvert z\rvert) = 1 + \lvert z\rvert^2$
3	$\rho(\lvert z\rvert) = \log^3\frac{1}{\lvert z\rvert}$	18	$\rho(\lvert z\rvert) = 1 + \lvert z\rvert^3$
4	$\rho(\lvert z\rvert) = \log^4\frac{1}{\lvert z\rvert}$	19	$\rho(\lvert z\rvert) = 1 + \lvert z\rvert^4$
5	$\rho(\lvert z\rvert) = \log^5\frac{1}{\lvert z\rvert}$	20	$\rho(\lvert z\rvert) = 1 + \lvert z\rvert^5$
6	$\rho(\lvert z\rvert) = e^{\lvert z\rvert}$	21	$\rho(\lvert z\rvert) = 1 + \lvert z\rvert^6$
7	$\rho(\lvert z\rvert) = e^{2\lvert z\rvert}$	22	$\rho(\lvert z\rvert) = (2 - 3\lvert z\rvert)^{1/2}$
8	$\rho(\lvert z\rvert) = e^{3\lvert z\rvert}$	23	$\rho(\lvert z\rvert) = (3 - 4\lvert z\rvert)^{1/3}$
9	$\rho(\lvert z\rvert) = e^{4\lvert z\rvert}$	24	$\rho(\lvert z\rvert) = (4 - 5\lvert z\rvert)^{1/4}$
10	$\rho(\lvert z\rvert) = e^{5\lvert z\rvert}$	25	$\rho(\lvert z\rvert) = (5 - 6\lvert z\rvert)^{1/5}$
11	$\rho(\lvert z\rvert) = \lvert z\rvert^2$	26	$\rho(\lvert z\rvert) = 2\log\frac{1}{\lvert z\rvert}$
12	$\rho(\lvert z\rvert) = \lvert z\rvert^3$	27	$\rho(\lvert z\rvert) = 3\log\frac{1}{\lvert z\rvert}$
13	$\rho(\lvert z\rvert) = \lvert z\rvert^4$	28	$\rho(\lvert z\rvert) = 2\log\frac{1}{2\lvert z\rvert}$
14	$\rho(\lvert z\rvert) = \lvert z\rvert^5$	29	$\rho(\lvert z\rvert) = 3\log\frac{1}{2\lvert z\rvert}$
15	$\rho(\lvert z\rvert) = \lvert z\rvert^6$	30	$\rho(\lvert z\rvert) = 5\log\frac{1}{5\lvert z\rvert}$

2 Відображення зі скінченним спотворенням і кільцеві Q-відображення

2.1 Відображення зі скінченним спотворенням

Означення 2.1. Відображення $f : D \to \mathbb{R}^n$ називається *відображенням зі скінченним спотворенням*, якщо $f \in W^{1,1}_{\rm loc}(D)$ і, крім того, існує функція $K : D \to [1, \infty)$ така, що виконано умову

$$\|f'(x)\|^n \leqslant K(x) \cdot |J(x, f)| \tag{2.1.1}$$

майже всюди в D, див., напр., п. 6.3 розд. VI [IM]. Іноді умову $f \in W_{\mathrm{loc}}^{1,1}(D)$ заміняють більш сильною умовою $f \in W_{\mathrm{loc}}^{1,n}(D)$ і навпаки. Надалі, якщо мова йде про відображення f зі скінченним спотворенням, ми вважаємо, що $f \in W_{\mathrm{loc}}^{1,1}$.

Приклад 10. Довести, що відображення

$$f(x)=\frac{x}{|x|}\exp\left\{\log^{\alpha}\frac{1}{|x|}\right\}, \quad x\in\mathbb{B}^n\setminus\{0\},$$

$\alpha\geqslant 1$, має скінченне спотворення.

Розв'язок. З запису відображення f видно, що воно належить класу C^1 в $\mathbb{B}^n\setminus\{0\}$, отже, $f\in W_{\mathrm{loc}}^{1,1}(\mathbb{B}^n\setminus\{0\})$. Далі, з розгляду прикладу 7 маємо:

$$\|f'(x)\|=\begin{cases}\frac{\alpha\exp\left\{\log^{\alpha}\frac{1}{|x|}\right\}}{|x|}\cdot\log^{\alpha-1}\frac{1}{|x|}, & |x|\leqslant e^{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)}}, \\ \frac{\exp\left\{\log^{\alpha}\frac{1}{|x|}\right\}}{|x|}, & |x|>e^{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)}}\end{cases},$$

$$|J(x,f)|=\delta_{\tau}^{n-1}\cdot\delta_r=\frac{\exp\left\{(n-1)\log^{\alpha}\frac{1}{|x|}\right\}}{|x|^{n-1}}\cdot\frac{\alpha\exp\left\{\log^{\alpha}\frac{1}{|x|}\right\}}{|x|}\cdot\log^{\alpha-1}\frac{1}{|x|}=$$

$$=\frac{\alpha\exp\left\{n\log^{\alpha}\frac{1}{|x|}\right\}}{|x|^n}\cdot\log^{\alpha-1}\frac{1}{|x|}.$$

Для завершення розгляду прикладу розв'яжемо нерівність (2.1.1) відносно функції $K(x)$. Іншими словами, нам потрібно вказати хоча б одну скінченну майже скрізь функцію K, щоб було виконано (2.1.1).

Враховуючи знайдені вище $\|f'(x)\|$ і $|J(x,f)|$, нерівність (2.1.1) при $|x|\leqslant e^{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)}}$ можна записати так:

$$\frac{\alpha^n\exp\left\{n\log^{\alpha}\frac{1}{|x|}\right\}}{|x|^n}\cdot\log^{n(\alpha-1)}\frac{1}{|x|}\leqslant K(x)\cdot\frac{\alpha\exp\left\{n\log^{\alpha}\frac{1}{|x|}\right\}}{|x|^n}\cdot\log^{\alpha-1}\frac{1}{|x|}.$$

З останньої нерівності, скорочуючи її на $\frac{\exp\left\{n\log^{\alpha}\frac{1}{|x|}\right\}}{|x|^n}\neq 0$, маємо:

$$K(x)\geqslant\alpha^{n-1}\log^{(n-1)(\alpha-1)}\frac{1}{|x|}. \tag{2.1.2}$$

Аналогічно, при $|x| > e^{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)}}$ нерівність (2.1.1) має вигляд

$$\frac{\exp\left\{n\log^{\alpha}\frac{1}{|x|}\right\}}{|x|^n} \leqslant K(x)\cdot\frac{\alpha\exp\left\{n\log^{\alpha}\frac{1}{|x|}\right\}}{|x|^n}\cdot\log^{\alpha-1}\frac{1}{|x|}\,,$$

звідки

$$K(x) \geqslant \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\log^{\alpha-1}\frac{1}{|x|}}\,. \qquad (2.1.3)$$

Розв'язання завершено, оскільки в якості функції K можна взяти будь-яку скінченну майже скрізь функцію $K(x)$, яка задовольняє умову (2.1.2) при $|x| \leqslant e^{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)}}$ і умову (2.1.2) при $|x| > e^{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)}}$. Наприклад, можна покласти

$$K(x) = \begin{cases} \alpha^{n-1}\log^{(n-1)(\alpha-1)}\frac{1}{|x|}\,, & |x| \leqslant e^{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)}}\,, \\ \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\log^{\alpha-1}\frac{1}{|x|}}\,, & |x| > e^{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)}} \end{cases}. \ \square$$

Приклад 11. Нехай $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{B}^n$, і нехай

$$f(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0)\,.$$

Довести, що відображення f не є відображенням зі скінченним спотворенням.

Розв'язок. Оскільки

$$f'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}\,,$$

то за теоремою 1.2 $\|f'(x)\| = 1$ і $J(x,f) = 1\cdot 1\ldots 1\cdot 0 = 0$. Припустимо тепер протилежне, а саме, нехай відображення f має скінченне спотворення. Тоді з огляду на (2.1.1) ми мали б, що $1 \leqslant 0\cdot K(x) = 0$, або $1 \leqslant 0$, що не є можливим. Отримана суперечність вказує на те, що майже скрізь скінченної функції $K(x)$ з умовою (2.1.1) для f не існує. $\square$

2.2 Завдання для самоконтролю

1. Нехай $f : D \to \mathbb{R}^n$ – квазіконформне відображення. Чи є воно

відображенням зі скінченним спотворенням? Навпаки?

2. Чи може відображення $f : D \to \mathbb{C}$ зі скінченним спотворенням на площині обертатися в нуль?

3. Чи є сума відображень зі скінченним спотворенням також відображенням зі скінченним спотворенням?

4. Чи може якобіан відображення зі скінченим спотворенням обертатися в нуль?

5. Нехай f відображення класу C^1 в області $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Чи буде f відображенням зі скінченим спотворенням?

6. Навести приклад відображення зі скінченним спотворенням, яке не належить класу $C^1(D)$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$.

7. Довести, що відображення класу $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(D)$, якобіан котрого не обертається в нуль майже скрізь, має скінченне спотворення.

8*. Чи буде відображення зберігати спрямлюваність кривої, якщо воно: а) є квазіконформним відображенням; б) відображенням зі скінченним спотворенням?

9. Чи вірно твердження: «відображення f зі скінченним спотворенням має повний диференціал (тобто, є диференційовним) в кожній точці своєї області визначення?»

10. Встановити зв'язок між класами квазіконформних відображень, відображень з обмеженим спотворенням і відображень зі скінченним спотворенням відносно операції «$\subset$».

11. Чи є стале відображення відображенням зі скінченним спотворенням? Обмеженим спотворенням? Квазіконформним відображенням?

2.3 Завдання для самостійної роботи № 5

Задача 5. *Довести, що відображення f з задачі 3 на сторінці 33 є відображенням зі скінченним спотворенням для кожного з варіантів.*

2.4 Кільцеві Q-відображення

До сих пір ми мали справу з характеристиками відображень, обчислення яких відбувається безпосередньо з огляду на їх означення. На жаль, далеко не завжди дослідження відображень є настільки простим. Наприклад, якщо мова йде про обчислення комплексної і максимальної дилатацій, нема проблем скористатися явними формулами (1.6.3) і (1.6.4). Але для дослідження більш тонких питань теорії відображень явних формул не існує. Наприклад, для відповіді на питання: «чи є відображення f, що належить класу $W_{\rm loc}^{1,1}$ диференційовним майже скрізь в D?» не допоможуть ані наявні формули, ані означення класів Соболєва (див. означення 1.14). Можна лише сподіватися, що відповідь на це питання криється в самому означенні класів Соболєва, хоча і не зовсім зрозуміло, як само слід ним скористатися.

Зауважимо, що для вивчення «більш тонких» питань теорії відображень існують декілька добре розроблених методів. Один з них – це **метод модулів**, який є одним з найпотужніших інструментів дослідження. Протягом цієї секції нам слід ознайомитись з цим інструментом, а також і відображеннями, безпосередньо пов'язаними з ним.

Дамо декілька важливих означень. Тут і далі *кривою* γ називається неперервне відображення відрізка $[a,b]$ (або відкритого чи напіввідкритого інтервалу (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$) у $\mathbb{R}^n$, $\gamma:[a,b]\rightarrow \mathbb{R}^n$. Під *сім'єю кривих* Γ ми розуміємо деякий фіксований набір кривих γ, а

$$f(\Gamma)=\{f\circ\gamma|\gamma\in\Gamma\}\ .$$

Означення 2.2. Борелева функція $\rho:\mathbb{R}^n\rightarrow[0,\infty]$ називається *допустимою* для сім'ї Γ кривих γ в $\mathbb{R}^n$, якщо криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_{\gamma}\rho(x)\,|dx|$ по γ задовольняє умову

$$\int\limits_{\gamma}\rho(x)\,|dx|\geqslant 1 \qquad (2.4.1)$$

для всіх (локально спрямлюваних) кривих $\gamma\in\Gamma$. У цьому випадку ми пишемо: $\rho\in{\rm adm}\,\Gamma$.

Геометричний сенс «допустимості» в (2.4.1) полягає в тому, що довільна крива γ сім'ї Γ має довжину, не меншу, ніж 1 у «метриці» ρ.

Означення 2.3. *Модулем* сім'ї кривих Γ називається величина

$$M(\Gamma)=\inf_{\rho\in{\rm adm}\,\Gamma}\int\limits_{D}\rho^n(x)\,dm(x)\,. \qquad (2.4.2)$$

Модуль M є зовнішньою мірою на просторі сімей кривих, зокрема, $M(\varnothing)=0$, $\Gamma_1\subset\Gamma_2\quad\Rightarrow\quad M(\Gamma_1)\leqslant M(\Gamma_2)$,

$$M\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\Gamma_i\right)\leqslant\sum\limits_{i=1}^{\infty}M(\Gamma_i)\,, \qquad (2.4.3)$$

див. [Va$_2$, теорема 6.2]. Має місце наступне твердження ([Va$_2$, теорема 8.1]).

Теорема 2.1. *Нехай $\varphi : D \to D'$ – конформне відображення областей D і D' в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Тоді для будь-якої сім'ї кривих Γ в D*

$$M(\varphi(\Gamma)) = M(\Gamma)\,.$$

Нехай $x_0 \in \overline{D}$, $Q : D \to [0, \infty]$ – вимірна за Лебегом функція, $Q(x) \equiv 0$ при $x \notin D$,

$$A(r_1, r_2, x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\}\,, \tag{2.4.4}$$

$S_i = S(x_0, r_i) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r_i\}$. Нехай E, $F \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ – довільні множини. Позначимо через $\Gamma(E, F, D)$ сім'ю всіх кривих $\gamma : [a, b] \to \overline{\mathbb{R}^n}$, що з'єднують E і F у D, тобто $\gamma(a) \in E, \gamma(b) \in F$ і $\gamma(t) \in D$ за $t \in (a,\, b)$.

Означення 2.4. Будемо називати відображення $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ *кільцевим Q-відображенням у точці* $x_0 \in \overline{D}$, якщо існує $0 < r_0 < \sup\limits_{x \in D} |x - x_0|$ таке, що співвідношення

$$M(f(\Gamma(S_1,\, S_2,\, A \cap D))) \leqslant \int\limits_{A} Q(x) \cdot \eta^n(|x - x_0|)\, dm(x) \tag{2.4.5}$$

виконується для будь-якого кільця $A = A(r_1, r_2, x_0)$, $0 < r_1 < r_2 < r_0$ і для кожної вимірної функції $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такої, що

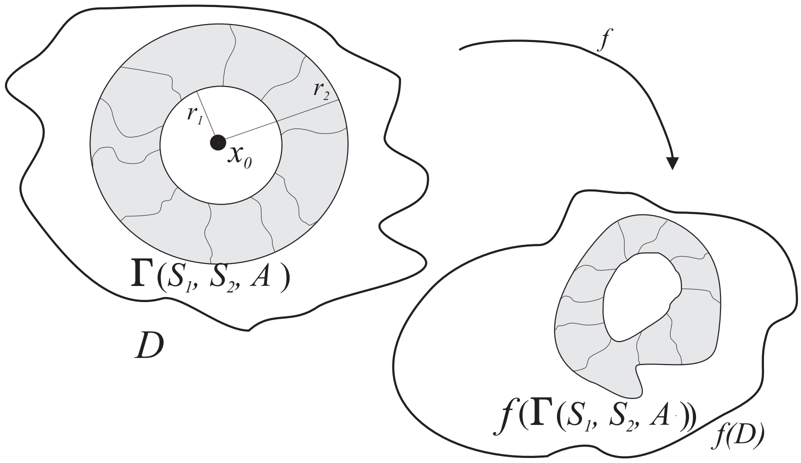
$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr \geqslant 1\,. \tag{2.4.6}$$

Ілюстрацію щодо дії кільцевого Q-відображення ми можемо побачити на малюнку 3. Будемо говорити, що f є *кільцевим Q-відображенням в області D*, або просто *кільцевим Q-відображенням,* якщо умова (2.4.5) виконується в кожній точці $x_0 \in D$. Зауважимо, що кільцева умова (2.4.5) є змістовною не тільки для внутрішніх, але й для межових точок x_0 області D, при цьому, саме відображення f не зобов'язано бути визначеним у цій точці.

Деякі властивості кільцевих Q-відображень

Нехай функція Q є локально інтегровною в області D. Тоді:

1) Будь-яке відкрите дискретне кільцеве Q-відображення f є диференційовним майже скрізь (див. [Sev$_1$, теорема 1.4.1]).



Малюнок 3: Дія кільцевого Q-відображення на сім'ю кривих, що з'єднує обкладинки сферичного кільця

2) Частинні похідні $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ будь-якого відкритого дискретного кільцевого Q-відображення f існують майже скрізь і є локально інтегровними в D. Зокрема, $\|f'(x)\| \in L^1_{\rm loc}(D)$ (див. [Sev$_1$, наслідок 1.5.1]).

3) Будь-яке відкрите дискретне кільцеве Q-відображення f задовольняє умову

$$\|f'(x)\|^n \leqslant C_n \cdot Q^{n-1}(x)|J(x,f)| \quad \text{м.с.}\,, \tag{2.4.7}$$

де $C_n > 0$ – деяка абсолютно стала, залежна тільки від n (див. [Sev$_1$, наслідок 1.5.2]).

4) Для відкритого дискретного кільцевого Q-відображення f виконано

$$K_O(x,f) \leqslant C_n \cdot Q^{n-1}(x) \quad \text{м.с.}$$

Якщо додатково $J(x,f) \neq 0$ майже скрізь, то

$$K_I(x,f) \leqslant c_n \cdot Q(x) \quad \text{м.с.},$$

де $c_n > 0$ – деяка абсолютна стала, залежна тільки від n.

Невідомо, чи належать кільцеві Q-відображення до класу $W^{1,1}_{\rm loc}(D)$. Також невідомо, чи виконується умова $J(x,f) \neq 0$ майже скрізь (див. наслідок 1.5.3 та теорему 1.8.1 в [Sev$_1$]).

Зв'язок кільцевих Q-відображень з іншими класами

1) Будь-яке квазіконформне відображення є кільцевим Q-відображенням при $Q(x) = K$ в будь-якій точці $x_0 \in \overline{D}$, де K є будь-якою сталою, для якої $K_I(x, f) \leqslant K$ (див., напр., [Va$_2$, означення 13.1 теорема 34.6]). Наприклад, можна покласти $Q(x) = K^{n-1}$, де K – стала з умови (1.4.5). Зокрема, будь яке конформне відображення є кільцевим 1-гомеоморфізмом.

2) Будь-яке відображення з обмеженим спотворенням є кільцевим Q-відображенням в будь-якій точці $x_0 \in \overline{D}$ при $Q(x) = K^{n-1}$, де K – стала з умови (1.4.5) (див., напр., [Pol, теорема 1]).

3) Кожен гомеоморфізм $f : D \to \mathbb{R}^n$, такий, що $f \in W^{1,n}_{\rm loc}$ і $f^{-1} \in W^{1,n}_{\rm loc}$ задовольняє оцінку (2.4.5) в будь-якій точці $x_0 \in \overline{D}$ при $Q = K_I(x, f)$, див., напр., теореми 8.1 і 8.6 [MRSY]. Зокрема, гомеоморфізми $f \in W^{1,n}_{\rm loc}$ такі, що $K_I(x, f) \in L^1_{\rm loc}$, задовольняють оцінку (2.4.5) в будь-якій точці $x_0 \in \overline{D}$ при $Q = K_I(x, f)$, див., напр., теореми 8.1 і 8.6 [MRSY] і наслідок 2.3 [KO].

4) На площині кожен гомеоморфізм $f : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$, який має скінченне спотворення, є кільцевим Q-відображенням в кожній точці $z_0 \in D$ (див. [LSS, теорема 3.1]). Цей результат також є справедливим і для межових точок D, див. [KPRS, теорема 3].

Приклад 12. Доведіть, що відображення

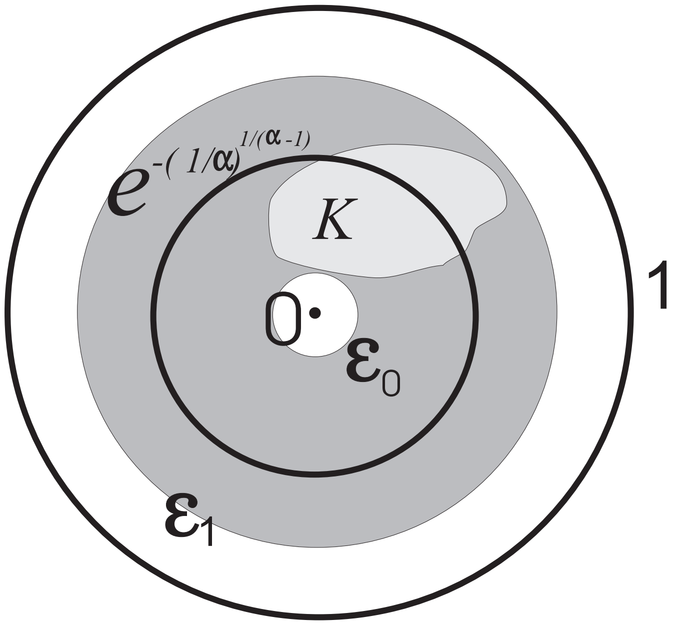
$$f(x) = \frac{x}{|x|} \exp\left\{\log^{\alpha}\frac{1}{|x|}\right\}, \quad x \in \mathbb{B}^n \setminus \{0\},$$

$\alpha \geqslant 1$, є кільцевим Q-гомеоморфізмом в $\mathbb{B}^n$ для деякої функції $Q : \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \to [0, \infty]$, і знайти цю функцію Q.

Розв'язок. Скористаємося пунктом 3) «зв'язку кільцевих Q-відображень з іншими класами», наведеного вище. Зауважимо, що $f \in W^{1,n}_{\rm loc}(\mathbb{B}^n \setminus \{0\})$, оскільки $f \in C^1(\mathbb{B}^n \setminus \{0\})$. З огляду на результати, отримані при розв'язанні прикладу 7,

$$K_I(x, f) = \begin{cases} \alpha \cdot \log^{\alpha-1}\frac{1}{|x|}, & |x| \leqslant e^{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)}}, \\ \frac{1}{\alpha^{n-1}} \cdot \frac{1}{\log^{(\alpha-1)(n-1)}\frac{1}{|x|}}, & |x| > e^{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)}} \end{cases}.$$

Зауважимо, що функція $K_I(x, f)$ локально інтегровна в $\mathbb{B}^n$. Справді, якщо K – будь-який компакт в $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$, то існують $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon_1 < 1$



Малюнок 4: Ілюстрація до прикладу 12

такі що $K \subset B(0,\varepsilon_1) \setminus B(0,\varepsilon_0)$. Без обмеження загальності можна вважати, що $\varepsilon_0 < e^{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)}} < \varepsilon_1$ (див. малюнок 4).

Отже,

$$\int\limits_K K_I(x,f)\,dm(x) \leqslant \int\limits_{B(0,\varepsilon_1)\setminus B(0,\varepsilon_0)} K_I(x,f)\,dm(x) =$$

$$= \int\limits_{\varepsilon_0<|x|<e^{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)}}} K_I(x,f)\,dm(x) +$$

$$+ \int\limits_{e^{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)}}<|x|<\varepsilon_1} K_I(x,f)\,dm(x) \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\mathbb{B}^n\setminus B(0,\varepsilon_0)} \alpha\cdot\log^{\alpha-1}\frac{1}{|x|}\,dm(x) + \int\limits_{B(0,\varepsilon_1)} \frac{1}{\alpha^{n-1}}\cdot\frac{dm(x)}{\log^{(\alpha-1)(n-1)}\frac{1}{|x|}} \leqslant$$

$$\leqslant \alpha\log^{\alpha-1}\frac{1}{|\varepsilon_0|}\cdot\int\limits_{\mathbb{B}^n} dm(x) + \frac{1}{\alpha^{n-1}}\cdot\frac{1}{\log^{(\alpha-1)(n-1)}\frac{1}{|\varepsilon_1|}}\int\limits_{\mathbb{B}^n} dm(x) =$$

$$= \Omega_n \left(\alpha \log^{\alpha-1} \frac{1}{|\varepsilon_0|} + \frac{1}{\alpha^{n-1}} \cdot \frac{1}{\log^{(\alpha-1)(n-1)} \frac{1}{|\varepsilon_1|}} \right) < \infty\,,$$

де, як звично, Ω_n позначає об'єм одиничної кулі $\mathbb{B}^n$ в $\mathbb{R}^n$. Отже, K_I інтегровна на будь-якому компакті $K \subset \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$, тому (за означенням) функція K_I є локально інтегровною в $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$. В такому випадку, за пунктом 3), згаданим вище, відображення f є кільцевим Q відображенням в $\overline{\mathbb{B}^n}$ (зокрема, в $\mathbb{B}^n$) при

$$Q(x) = K_I(x, f) = \begin{cases} \alpha \cdot \log^{\alpha-1} \frac{1}{|x|}\,, & |x| \leqslant e^{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)}}\,, \\ \frac{1}{\alpha^{n-1}} \cdot \frac{1}{\log^{(\alpha-1)(n-1)} \frac{1}{|x|}}\,, & |x| > e^{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)}} \end{cases}. \ \square$$

2.5 Завдання для самоконтролю

1. Користуючись інформацією, наведеною вище, довести, що будь-який гомеоморфізм $f : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$, зі скінченним спотворенням є диференційовним майже скрізь.[1]

2. Чи є кільцеві Q-відображення диференційовними в кожній точці своєї області визначення?

3. Наведіть приклад кільцевого Q-гомеоморфізму $f : D \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, який не є квазіконформним в D. [2]

4. Користуючись підказкою до задачі 3, наведіть приклад кільцевого Q-гомеоморфізму $f : D \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, для якого функція Q інтегровна в D, і який не має неперервного продовження в точку $x_0 \in D$.

5. Користуючись підказкою до задачі 3, наведіть приклад кільцевого Q-гомеоморфізму $f : D \to \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, який є диференційовним в точці $x_0 \in D$, але $J(x_0, f) = 0$.

6. Наведіть приклад кільцевого Q-відображення, $f : D \to \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, яке не є гомеоморфізмом в D.

7. Чи є кільцевим Q-гомеоморфізмом: а) сумма кільцевих Q-гомеоморфізмів; б) множення кільцевого Q-гомеоморфізму на деяке число $\lambda \neq 0$?

8. Розглянемо наступні міркування:

[1] Насправді має місце більш тонкий результат: кожен гомеоморфізм (і навіть просто відкрите дискретне відображення) $f : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$, класу $W^{1,1}_{\rm loc}(D)$ є диференційовним майже скрізь. Це відома теорема Герінга-Лехто [LV, теорема 3.1 і зауваження після доведення].

[2] **Вказівка.** Розгляньте відображення вигляду $f(x) = \frac{x}{|x|}\rho(|x|)$, де функцію ρ слід підібрати «так, як треба».

«Нехай $f : D \to \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, – кільцевий Q-гомеоморфізм, такий, що $Q = const$. Тоді за формулою (2.4.7) $\|f'(x)\|^n \leqslant C_n Q^{n-1}|J(x,f)|$ майже скрізь. Отже, за означенням 1.20 на стор. 19 відображення f є квазіконформним.»

Чи є коректними наведені міркування?

9. Користуючись інформацією, наведеною вище, доведіть, що кільцевий Q-гомеоморфізм класу $W^{1,1}_{\rm loc}(D)$, для якого Q – обмежена функція, є квазіконформним відображенням.[3]

10. Довести, що функція $Q(x) = \log^{\alpha-1}\frac{1}{|x|}$ інтегровна в $\mathbb{B}^n$.[4]

2.6 Завдання для самостійної роботи № 6

Задача 6. *Довести, що відображення f з задачі 3 на сторінці 33 є кільцевим Q-гомеоморфізмом в $\mathbb{B}^n$ для деякої функції $Q : \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \to [0,\infty]$, і знайти цю функцію Q.*

2.7 Нормальні сім'ї відображень

Існує чимало аспектів, в контексті яких вивчаються квазіконформні відображення і їх узагальнення. Серед них локальна, межова поведінка відображень, продовження відображень в ізольовану точку межі тощо. Заключна секція нашого посібника присвячена вивченню саме локальної поведінки. Зокрема, ми поговоримо про локальну поведінку кільцевих Q-відображень в околі заданої точки. Дамо декілька означень.

Означення 2.5. Нехай (X, d) і (X', d') – метричні простори з відстанями d і d', відповідно. Сім'я $\mathfrak{F}$ неперервних відображень $f : X \to X'$ називається *нормальною*, якщо з будь-якої послідовності відображень $f_m \in \mathfrak{F}$ можна виділити підпослідовність f_{m_k}, що збігається локально рівномірно в X до неперервної функції $f : X \to X'$.

Означення, що наведене вище, дуже тісно пов'язано з наступним.

Означення 2.6. Сім'я $\mathfrak{F}$ відображень $f : X \to X'$ називається *одностайно неперервною в точці* $x_0 \in X$, якщо для будь–якого $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$ таке, що $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ для всіх x з $d(x, x_0) < \delta$ і

[3]**Вказівка.** Скористайтеся також відомим фактом: якобіан $J(x,f)$ гомеоморфізму f класу $W^{1,1}_{\rm loc}(D)$ є локально інтегровним, див. [KRSS, співвідношення (3), § 1]

[4]**Вказівка.** Скористайтеся теоремою Фубіні: $\int\limits_{\mathbb{B}^n} Q(x)\,dm(x) = \int\limits_0^1 \int\limits_{S(0,r)} Q(x)\,d\mathcal{H}^{n-1}dr$, яка є справедливою для будь-якої невід'ємної вимірної функції $Q : \mathbb{B}^n \to [0,\infty]$.

$f \in \mathfrak{F}$. Говорять, що сім'я $\mathfrak{F}$ *одностайно неперервна*, якщо $\mathfrak{F}$ одностайно неперервна в кожній точці з X.

Нижче ми формулюємо одну з версій теореми Арцела-Асколі, див. розд. 20.4 [Va_2].

Твердження 2.1. *Якщо $(X,\, d)$ – сепарабельний метричний простір, а $(X',\, d')$ – компактний метричний простір, то сім'я $\mathfrak{F}$ відображень $f : X \to X'$ є нормальною тоді і тільки тоді, коли $\mathfrak{F}$ є одностайно неперервною.*

Слід зауважити, що результат твердження 2.1 знадобиться нам не для абстрактних просторів X і X' і метрик d і d', а лише для одного конкретного випадку. Перед тим, як перейти до нього, розглянемо ще одне означення. У подальшому в розширеному просторі $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \bigcup \{\infty\}$ використовується *сферична (хордальна) метрика* $h(x, y) = |\pi(x) - \pi(y)|$, де π – стереографічна проекція $\overline{\mathbb{R}^n}$ на сферу $S^n(\frac{1}{2}e_{n+1}, \frac{1}{2})$ в $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$h(x, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |x|^2}},$$

$$h(x, y) = \frac{|x - y|}{\sqrt{1 + |x|^2}\sqrt{1 + |y|^2}}\,, \quad x \neq \infty \neq y\,. \tag{2.7.1}$$

Усюди далі X – область D в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $d(x, y) = |x - y|$, $D' = \overline{\mathbb{R}^n}$ і $d'(x, y) = h(x, y)$.

Зауваження 2.1. Якщо сім'я відображень $f : D \to D'$ діє в обмежену область D', то ми також можемо вважати $d'(x, y) = |x - y|$. Дійсно, якщо $D' \subset B(0, R_0)$, то

$$|x - y|\frac{1}{1 + R_0^2} \leqslant h(x, y) \leqslant |x - y| \quad \forall\ x, y \in D'\,. \tag{2.7.2}$$

Зауважимо, що права частина нерівності (2.7.2) взагалі виконується для будь-яких $x, y \in \mathbb{R}^n$, а не тільки в D'. Отже, з огляду на нерівності в (2.7.2) одностайна неперевність сім'ї відображень $f : D \to D'$ в контексті просторів $(D, |\cdot|)$ і (D', h) є еквівалентною до одностайної неперервності в контексті просторів $(D, |\cdot|)$ і $(D', |\cdot|)$. Тут через $|\cdot|$ позначаться евклідова метрика d, тобто, $d(x, y) = |x - y|$.

Наведено один з класичних результатів теорії квазіконформних відображень.

Теорема 2.2. *Сім'я $\mathcal{F}_r^K$, що складається з усіх квазіконформних відображень $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n} \setminus \{a_f, b_f\}$ зі спільним коефіцієнтом квазіконформності K у співвідношенні (1.4.5), є одностайно неперервною (нормальною), за умови, що $h(a_f, b_f) \geqslant r > 0$, де r не залежить від f.*

Твердження 2.2, яке є поширенням добре відомої теореми Монтеля для аналітичних функцій на площині, можна знайти в книзі Ю. Вяйсяля (див. теорему 19.2 [Va$_2$]). Зауважимо, що справедливість цього твердження для плоских квазіконформних відображень доведена О. Лехто і К. Вертаненом у монографії [LV]. Нехай $Q : D \to [0, \infty]$ – вимірна за Лебегом функція. Позначимо через

$$q_{x_0}(r) = \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int\limits_{S(x_0,r)} Q(x)\, d\mathcal{H}^{n-1}$$

середнє інтегральне значення функції Q на сфері $S(x_0, r)$, де ω_{n-1}, як звично, позначає площу одиничної сфери $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$. Щодо кільцевих Q-відображень, маємо наступне твердження (див., напр., теорему 7.5 розділу 7.5 [MRSY]).

Теорема 2.3. *Для фіксованого $r > 0$ позначимо через $\mathcal{F}_r^Q$ сім'ю всіх кільцевих Q-гомеоморфізмів $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ в області D зі спільною функцією Q у (2.4.5), для яких існують $a_f, b_f \in \overline{\mathbb{R}^n}$ такі, що $h(a_f, b_f) \geqslant r > 0$. Припустимо, що для кожного $x_0 \in D$ існує $\delta(x_0) > 0$ таке, що*

$$\int\limits_0^{\delta(x_0)} \frac{dt}{t q_{x_0}^{1/(n-1)}(t)} = \infty\,. \tag{2.7.3}$$

Тоді сім'я $\mathcal{F}_r^Q$ є нормальною (одностайно неперервною) в D.

Приклад 13. Нехай $\alpha \geqslant 1$, і нехай

$$f_m(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} \exp\left\{\log^\alpha \frac{1}{|x|}\right\}\,, & |x| > 1/m\,, \\ mx \cdot \exp\left\{\log^\alpha m\right\}\,, & |x| < 1/m\,, \end{cases} \qquad m = 1, 2, \ldots\,.$$

Довести, що сім'я відображень f_m, $m = 1, 2, \ldots$, не є нормальною в $D = \mathbb{B}^n$.

Розв'язок. Згідно твердження 2.1 достатньо спростувати одностайну неперервність сім'ї відображень f_m, $m = 1, 2, \ldots$, принаймні в одній точці $x_0 \in \mathbb{B}^n$. Доведемо, що ця сім'я не є одностайно неперервною в точці $x_0 = 0$. За означенням, нам слід знайти $\varepsilon_0 > 0$ таке, що для будь-якого

$\delta > 0$ знайдуться $x = x_\delta \in \mathbb{B}^n$ і $f = f_\delta \in \{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ такі, що $|x_\delta| < \delta$, але $|f(x_\delta) - f(0)| = |f(x_\delta)| > \varepsilon_0$.

Нехай $\varepsilon_0 := 1/2$. Зафіксуємо $\delta > 0$ і знайдемо $m \in \mathbb{N}$ таке, що $1/m < \delta$. Покладемо $x_\delta := x_m = (1/m, 0, \ldots, 0)$ і $f_\delta := f_m$. Тоді $|x_\delta| = 1/m < \delta$ і

$$|f_m(x_m)| = \left|mx_m \cdot \exp\left\{\log^{\alpha} m\right\}\right| = \exp\left\{\log^{\alpha} m\right\} \geqslant$$

$$\geqslant \exp\left\{\log m\right\} = m\,.$$

З останнього співвідношення випливає, що $|f_m(x_m)| > 1/2$. Отже, сім'я відображень $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ не є одностайно неперервною в точці $x_0 = 0$. Зокрема, $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ не є нормальною з огляду на твердження 2.1. $\Box$

Для розгляду наступного прикладу нам будуть корисні наступні означення.

Означення 2.7. Нехай $I = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i, i = 1, \ldots, n\}$ – відкритий n-вимірний інтервал. Говорять, що відображення $f : I \to \mathbb{R}^n$ *належить до класу ACL на I* (*абсолютно неперервне на лініях*), якщо f є абсолютно неперервним на майже всіх лінійних сегментах в I, що є паралельними до координатних осей. Говорять, що відображення $f : D \to \mathbb{R}^n$ *належить до класу ACL в області $D \subset \mathbb{R}^n$*, якщо звуження $f|_I$ належить до класу ACL для кожного інтервалу I, $\overline{I} \subset D$.

З означення випливає, що відображення класу ACL мають майже всюди звичайні частинні похідні в своїй області визначення.

Означення 2.8. Говорять, що відображення $f : D \to \mathbb{R}^n$ *належить до класу ACL^p в області $D \subset \mathbb{R}^n$, $p \geqslant 1$, якщо $f \in ACL(D)$ і, крім того, $\|f'(x)\|^p \in L^1_{\rm loc}(D)$.*

Означення 2.9. Відображення $f : D \to \mathbb{R}^n$ *задовольняє умову Ліпшиця,* або просто *ліпшицеве,* якщо існує стала $C > 0$ така, що

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C \cdot |x - y| \qquad \forall\, x, y \in D\,.$$

Приймемо без доведення наступне твердження, яке випливає з теореми Лагранжа про середнє.

Твердження 2.2. *Нехай D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, і $f \in C^1(D)$. Тоді f є ліпшицевим на будь-якому компакті в D.*

Має місце наступне

Твердження 2.3. *(а) Якщо відображення $f : D \to \mathbb{R}^n$ є ліпшицевим, то $f \in ACL(D)$ (див., напр., розд. 5 на с. 12 в [Va$_2$]); (б) Має місце рівність: $ACL^p = W^{1,p}_{\rm loc}$ (див., напр., теореми 1 і 2 пункту 1.1.3 в [Ma]).*

Приклад 14. Довести, що сім'я відображень $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ з прикладу 13 задовольняє умови теореми 2.3. Довести, що ця сім'я є одностайно неперервною (нормальною) в $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$.

Розв'язок. Передусім зауважимо, що відображення

$$f(x) = \frac{x}{|x|} \exp\left\{\log^{\alpha} \frac{1}{|x|}\right\} \qquad (2.7.4)$$

є кільцевим Q-відображенням в $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ з огляду на приклад 12, причому

$$Q(x) = K_I(x,f) = \begin{cases} \alpha \cdot \log^{\alpha-1} \frac{1}{|x|}\,, & |x| \leqslant e^{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)}}, \\ \frac{1}{\alpha^{n-1}} \cdot \frac{1}{\log^{(\alpha-1)(n-1)} \frac{1}{|x|}}\,, & |x| > e^{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)}} \end{cases}. \qquad (2.7.5)$$

Оскільки відображення $\widetilde{f_m}(x) = mx \cdot \exp\{\log^{\alpha} m\}$, $m = 1, 2, \ldots$, є конформними, їх внутрішня дилатація дорівнює 1. Отже,

$$K_I(x, f_m) \leqslant$$

$$\leqslant K_I(x,f) = \begin{cases} \alpha \cdot \log^{\alpha-1} \frac{1}{|x|}\,, & |x| \leqslant e^{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)}}, \\ \frac{1}{\alpha^{n-1}} \cdot \frac{1}{\log^{(\alpha-1)(n-1)} \frac{1}{|x|}}\,, & |x| > e^{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)}} \end{cases}. \qquad (2.7.6)$$

Доведемо, крім того, що відображення f_m належать класу $W_{\mathrm{loc}}^{1,n}(\mathbb{B}^n \setminus \{0\})$. Дійсно, відображення $g_m(x) := \frac{x}{|x|} \exp\left\{\log^{\alpha} \frac{1}{|x|}\right\}$, $m = 1, 2, \ldots$, належать до класу C^1, скажімо, в кільці

$$A(1/m - \varepsilon, 1 + \varepsilon, 0) = \{x \in \mathbb{R}^n : 1/m - \varepsilon < |x| < 1\}$$

при малих $\varepsilon > 0$, а відображення $\widetilde{f_m}(x) = mx \cdot \exp\{\log^{\alpha} m\}$, $m = 1, 2, \ldots$, є відображеннями класу C^1, скажімо, в кулі $B(0, 1/m + \varepsilon)$ при малих $\varepsilon > 0$. Тоді за твердженням 2.2 гомеоморфізми f_m задовольняють умову Ліпшиця в $\mathbb{B}^n$. Отже, $f_m \in ACL(\mathbb{B}^n)$ за твердженням 1.2, (a). Зауважимо також, що при кожному фіксованому $m \in \mathbb{N}$, $K_I(x, f_m) \leqslant c_m$, де $c_m \geqslant 1$ – деяка стала. Тоді $K_O(x, f_m)$ також обмежена деякою сталою $\widetilde{c_m} > 0$, отже,

$$\|f_m'(x)\|^n \leqslant \widetilde{c_m} \cdot |J(x,f)| \qquad \text{м.с.} \qquad (2.7.7)$$

Нехай K – довільний компакт в $\mathbb{B}^n$. З огляду на нерівність (2.7.7),

$$\int\limits_K \|f_m'(x)\|^n \, dm(x) \leqslant \widetilde{c_m} \int\limits_K |J(x,f)| \, dm(x) < \infty\,, \qquad (2.7.8)$$

бо якобіан $J(x, f_m)$ кожного гомеоморфізму f_m локально інтегровний. З огляду на (2.7.8), $f_m \in ACL^n(\mathbb{B}^n)$. Нарешті, за твердженням 1.2, (б) $f_m \in W_{\rm loc}^{1,n}(\mathbb{B}^n)$, $m = 1, 2, \ldots$.

Оскільки функція $K_I(x, f_m)$ обмежена в $\mathbb{B}^n$ сталою c_m, вона локально інтегровна в $\mathbb{B}^n$. Отже, можна застосувати пункт 3) на стор. 43. За цим пунктом f_m є кільцевим Q-відображенням в кожній точці $x_0 \in \mathbb{B}^n$ при $Q = K_I(x, f_m)$. З огляду на нерівність (2.7.6) також f_m є кільцевим Q-відображенням в кожній точці $x_0 \in \mathbb{B}^n$ при $Q = K_I(x, f) = \alpha \cdot \log^{\alpha-1} \frac{1}{|x|}$.

Умова (2.7.3) очевидна. Дійсно, якщо $x_0 \in \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$, то в декому околі U точки x_0 маємо: $K_I(x, f) \leqslant C(x_0)$, де $C(x_0) > 0$ – деяка стала. Тоді також $q_{x_0}(r) \leqslant C(x_0)$. Отже, для достатньо малого $\delta(x_0) > 0$,

$$\int\limits_0^{\delta(x_0)} \frac{dt}{tq_{x_0}^{1/(n-1)}(t)} \geqslant \frac{1}{C(x_0)} \cdot \int\limits_0^{\delta(x_0)} \frac{dt}{t} = \frac{1}{C(x_0)} \lim_{\varepsilon \to 0} \ln \frac{\delta(x_0)}{\varepsilon} = \infty\,.$$

Можна показати, що сім'я відображень $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ не приймає в $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ значення 0 і ∞ (доведіть !). Отже, можна покласти $a_{f_m} = 0$, $b_{f_m} = \infty$, $r = h(0, \infty) = 1$. Всі умови теореми 2.3 виконано, зокрема, $\{f_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}_1^Q$. Зокрема, сім'я відображень $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ одностайно неперервна в $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$. $\Box$

Зауваження 2.2. Зауважимо, що нормальність сім'ї $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ випливає безпосередньо з означення цієї сім'ї, бо для будь-якої точки $x_0 \in \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ існує номер $m_0 \in \mathbb{N}$, такий що всі відображення f_m, $m \geqslant m_0$, тотожно дорівнюють відображенню f в деякому околі U точки x_0. Це означає, що в U одностайна неперервність $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ перетворюється у неперервність відображення f в x_0, яка є очевидною. Отже, перевірка виконання умов теореми 2.3 лише для отримання нормальності/одностайної неперервності сім'ї $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ є недоцільною.

Приклад 15. Нехай $1 \leqslant \alpha \leqslant n$. Довести, що сім'я відображень

$$f_m(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x| \exp\left\{\log^{\alpha} \frac{1}{|x|}\right\}}\,, & |x| > 1/m\,, \\ mx \cdot \exp\left\{-\log^{\alpha} m\right\}\,, & |x| < 1/m\,, \end{cases} \qquad m = 1, 2, \ldots$$

задовольняє умови теореми 2.3. Довести, що ця сім'я є одностайно неперервною (нормальною) в $\mathbb{B}^n$.

Розв'язок. Міркуючи аналогічно до розгляду прикладу 14, можна довести, що $f_m \in W_{\rm loc}^{1,n}$ при кожному $m \in \mathbb{N}$. Зауважимо також, що

$$\widetilde{f}(x) := \frac{x}{|x| \exp\left\{\log^{\alpha} \frac{1}{|x|}\right\}} = (\psi \circ f)(x)\,,$$

де $\psi(x)=\frac{x}{|x|^2}$, а f визначається за формулою (2.7.4). Можна показати, що ψ – конформне відображення в $\mathbb{B}^n\setminus\{0\}$ (доведіть це !). Тоді з огляду на твердження 1.3 і формулу (2.7.5) $K_I(x,f)=K_I(x,\widetilde{f})=\alpha\cdot\log^{\alpha-1}\frac{1}{|x|}$. Отже,

$$K_I(x,f_m)\leqslant K_I(x,\widetilde{f})=\begin{cases}\alpha\cdot\log^{\alpha-1}\frac{1}{|x|}\,, & |x|\leqslant e^{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)}}\,,\\ \frac{1}{\alpha^{n-1}}\cdot\frac{1}{\log^{(\alpha-1)(n-1)}\frac{1}{|x|}}\,, & |x|>e^{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)}}\end{cases},$$

і за пунктом 3) на стор. 43 f_m є кільцевим Q-відображенням в кожній точці $x_0\in\mathbb{B}^n$ при

$$Q(x)=\begin{cases}\alpha\cdot\log^{\alpha-1}\frac{1}{|x|}\,, & |x|\leqslant e^{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)}}\,,\\ \frac{1}{\alpha^{n-1}}\cdot\frac{1}{\log^{(\alpha-1)(n-1)}\frac{1}{|x|}}\,, & |x|>e^{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)}}\end{cases}.$$

Зауважимо, що $|f_m(x)|<1$ при всіх $m\in\mathbb{N}$ і всіх $x\in\mathbb{N}$ (переконайтесь в цьому !). Отже, можна покласти $a_{f_m}=(1,0,\ldots,0)$ і $b_{f_m}=\infty$ для кожного $m\in\mathbb{N}$. Крім того, покладемо $r=h(a_{f_m},b_{f_m})=\frac{1}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{2}/2$.

Залишилося перевірити умову (2.7.3). При розв'язанні прикладу 14 ми вже пояснювали , чому виконання цієї умови правильне для $x_0\neq 0$. Нехай тепер $x_0=0$ і нехай $0<\delta(0)<e^{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)}}$. Будемо мати:

$$q_0(r)=\frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}}\int\limits_{S(0,r)}\alpha\cdot\log^{\alpha-1}\frac{1}{|x|}\,d\mathcal{H}^{n-1}=$$

$$=\frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}}\cdot\alpha\cdot\log^{\alpha-1}\frac{1}{r}\int\limits_{S(0,r)}d\mathcal{H}^{n-1}=\alpha\cdot\log^{\alpha-1}\frac{1}{r}\,.$$

Тоді при $\alpha\neq n$

$$\int\limits_0^{\delta(0)}\frac{dt}{tq_0^{1/(n-1)}(t)}=\frac{1}{\alpha^{n-1}}\int\limits_0^{\delta(0)}\frac{dt}{t\log^{\frac{\alpha-1}{n-1}}\frac{1}{r}}=$$

$$=-\frac{1}{\alpha^{n-1}}\cdot\frac{n-\alpha}{n-1}\cdot\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\log^{\frac{n-\alpha}{n-1}}\frac{1}{\delta(0)}-\log^{\frac{n-1}{n-\alpha}}\frac{1}{\varepsilon}\right)=\infty\,.$$

Випадок $n=\alpha$ розглядається аналогічно. Отже, всі умови теореми 2.3 виконано, зокрема, $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}\subset\mathcal{F}^{Q}_{\frac{\sqrt{2}}{2}}$. Зокрема, це означає, що сім'я відображень $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ одностайно неперервна в $\mathbb{B}^n$. $\Box$

2.8 Завдання для самоконтролю

1. Доведіть, що локально рівномірною границею послідовності відображень f_m, $m = 1, 2 \ldots$, області $D \subset \mathbb{R}^n$ деяке неперервне відображення.

2. Чи є нормальною сім'я відображень $f_m(x) = mx$, $m = 1, 2, \ldots$, в $\mathbb{R}^n$? Чи є ця сім'я одностайно неперервною?

3. Чи є сім'я всіх квазіконформних відображень $f : D \to \mathbb{R}^n$ із загальною сталою квазіконформності $K \geqslant 1$ у (1.4.5) нормальною/одностайно неперервною?

4. Чи є сім'я всіх квазіконформних відображень $f : D \to B(0, R_0)$, $R_0 > 0$, із загальною сталою квазіконформності $K \geqslant 1$ у (1.4.5) нормальною/одностайно неперервною?

5. Відповісти на питання 3 та 4 у випадку, коли замість квазіконформних відображень розглядаються кільцеві Q-гомеоморфізми із фіксованим $Q = Q(x)$ і умовою (2.7.3).

6. Наведіть приклад сімей відображень f_m і g_m, які не є нормальними, але їх сумма $F_m = f_m + g_m$ є нормальною сім'єю, $m = 1, 2, \ldots$.

7. Наведіть приклад нормальної, але не рівномірно обмеженої сім'ї відображень. Чи не суперечить подібний приклад класичній версії теореми Арцела-Асколі?

2.9 Завдання для самостійної роботи № 7

Задача 7. *Довести, або спростувати, що сім'я відображень*

$$f_m(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}\rho(|x|)\,, & |x| > 1/m\,, \\ mx\rho\left(\frac{1}{m}\right)\,, & |x| < 1/m\,, \end{cases} \qquad m = 1, 2, \ldots$$

задовольняє умови теореми 2.3. Довести, або спростувати, що ця сім'я є одностайно неперервною (нормальною) в $\mathbb{B}^n$. Тут $\rho(|x|)$ – функція, визначена в задачі 3 на сторінці 33 для кожного з варіантів.

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[A] Альфорс Л. Лекции по квазиконформным отображениям / Л. Альфорс. – Москва: Мир, 1969. – 133 с.

[IM] Iwaniec T. Geometrical Function Theory and Non–Linear Analysis / T. Iwaniec, G. Martin. – Oxford: Clarendon Press, 2001. – 552 p. - (Oxford Mathematical Monographs).

[KO] Koskela P. Mappings of finite distortion: Capacity and modulus inequalities / P. Koskela and J. Onninen // J. Reine Angew. Math. – 2006. – V. 599. – P. 1–26.

[KPRS] Kovtonyuk D.A. The boundary behavior and the Dirichlet problem for the Beltrami equations / D.A. Kovtonyuk, I.V. Petkov, V.I. Ryazanov, R.R. Salimov // St. Petersburg Math. J. – 2014. – V. 25, no. 4. – P. 587–603.

[KRSS] Ковтонюк Д.А. К теории классов Орлича-Соболева / Д.А. Ковтонюк, В.И Рязанов, Р.Р. Салимов, Е.А. Севостьянов // Алгебра и анализ. – 2013. – Т. **25**, № 6. – С. 50–102.

[LV] Lehto O. Quasiconformal Mappings in the Plane / O. Lehto, K. Virtanen. – New York etc.: Springer, 1973. – 258 p.

[LSS] Lomako T. On equicontinuity of solutions to the Beltrami equations / T. Lomako, R. Salimov and E. Sevost'yanov // Ann. Univ. Bucharest (math. series). – 2010. – V. LIX, no. 2. – P. 261–271.

[MM] Maly J. Lusin's condition N and mappings of the class $W^{1,n}_{\rm loc}$ / J. Maly and O. Martio // J. Reine Angew. Math. – 1995. – V. 458. – P. 19–36.

[MRV] Martio O. Definitions for quasiregular mappings / O. Martio, S. Rickman, J. Väisälä // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. – 1969. – V. 448. – P. 1–40.

[Ma] Мазья В.Г. Пространства Соболева / В.Г. Мазья. – Ленинград: Издательство ленинградского университета, 1985. – 416 с.

[MRSY] Moduli in modern mapping theory / [Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.]. – New York: Springer Science + Business Media, LLC, 2009. – 367 p. – (Springer Monographs in Mathematics).

[Re$_1$] Решетняк Ю.Г. Пространственные отображения с ограниченным искажением / Ю.Г. Решетняк. – Новосибирск: Наука, 1982. – 285 с.

[Re$_2$] Reshetnyak Y. G. Some geometrical properties of functions and mappings with generalized derivatives / Y.G. Reshetnyak // Siberian Mathematical Journal. – 1967. – V. 7, no. 4. – P. 704-–732.

[Ri] Rickman S. Quasiregular mappings / S. Rickman. – Berlin etc. Springer-Verlag, 1993. – 213 p. – (Results in Mathematic and Related Areas (3), 26).

[Pol] Полецкий Е.А. Метод модулей для негомеоморфных квазиконформных отображений / Е.А. Полецкий // Матем. сб. – 1970. – Т. 83, № 2. – С. 261–272.

[RSS] Ryazanov V.I. On Convergence Analysis of Space Homeomorphisms / V.I. Ryazanov, R.R. Salimov and E.A. Sevost'yanov // Siberian Advances in Mathematics. – 2013. – V. 23, no. 4. – P. 263–293.

[Sev$_1$] Севостьянов Е. Исследование пространственных отображений геометрическим методом / Е. Севостьянов. – Киев: Наукова думка, 2014.

[Sev$_2$] Севостьянов Є.О. Модулі сімей кривих і квазіконформні відображення / Є.О. Севостьянов. – Житомир: Видавництво Житомирського державного університету імені Івана Франка, 2015. – 48 с.

[Sa] Сакс С. Теория интеграла / С. Сакс. – М.: Издательство иностранной литературы, 1949.

[Sp] Спеньер Э. Алгебраическая топология / Э. Спеньер. – Москва: Мир, 1971.

[Va$_1$] Väisälä J. Two new characterizations for quasiconformality / J. Väisälä // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A 1 Math. – 1965. – V. 362. – P. 1–12.

[Va$_2$] Väisälä J. Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings / Väisälä J. – Berlin etc.: Springer–Verlag, 1971, 144 p. – (Lecture Notes in Math., V. 229).

Перелік додаткової рекомендованої літератури

[1] The Beltrami Equation: A Geometric Approach / [Gutlyanskii V. Ya., Ryazanov V. I., Srebro U., Yakubov E.] – Developments in Mathematics, vol. 26. New York etc.: Springer, 2012.

[2] Ковтонюк Д. К теории отображений классов Соболева и Орлича-Соболева (под редакцией Рязанова В.И.) / Д. Ковтонюк, Р. Салимов, Е. Севостьянов. – Киев: Наукова думка, 2013.

[3] Сычёв А.В. Модули и пространственные квазиконформные отображения / А.В. Сычёв. – Новосибирск: Наука, 1983.

Для нотаток

Для нотаток

Навчальне видання

СЕВОСТЬЯНОВ Євген Олександрович

Квазіконформний аналіз

Навчально-методичний посібник

Дизайн обкладинки І. Клімової
Редактор, комп'ютерне верстання Є.О. Севостьянов

\

Надруковано з готового оригінал-макету

Підписано до друку 12.05.21. Формат 60x90/16. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman. Друк різографічний.
Ум. друк. арк. 3.5. Обл. вид. арк. 2.4. Наклад 300. Зам. 50.

Видавництво Житомирського державного університету імені Івана Франка
м. Житомир, вул. Велика Бердичівська, 40
Свідоцтво про державну реєстрацію:
серія ЖТ №10 від 07.12.04 р.
електронна пошта (E-mail): zu@zu.edu.ua