Є.О. Севостьянов

МОДУЛІ СІМЕЙ КРИВИХ І КВАЗІКОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ

Навчально-методичний посібник

Міністерство освіти і науки України
Житомирський державний університет імені Івана Франка

Є. О. Севостьянов

МОДУЛІ СІМЕЙ КРИВИХ І КВАЗІКОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ

Навчально-методичний посібник

Житомир
Вид-во ЖДУ ім. І. Франка
2015

УДК 517.518.17
ББК 22.161.5
В22

Рекомендовано до друку вченою радою Житомирського державного університету імені Івана Франка (протокол № 7 від 27.02.2015 р.)

Рецензенти:

Ю.Б. Зелінський – професор, доктор фіз.-мат. наук, професор, завідувач відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України;

С.І. Скуратівський - кандидат фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри фізики і вищої математики Житомирського державного технологічного університету.

Севостьянов Є. О.

В22 Модулі сімей кривих і квазіконформні відображення : Навчально-методичний посібник. / Севостьянов Є.О. – Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2015.– 48 с.

ISBN 978-966-485-188-3

Навчальний посібник містить елементи впровадження до теорії квазіконформних відображень і відображень з обмеженим спотворенням. Видання знайомить читача з поняттями квазіконформного відображення, зовнішніх, внутрішніх і максимальних дилатацій відображення, модулів сімей кривих і їх зв'язку з квазіконформними відображеннями. Елементи теорії суміщаються з наведенням задач для самостійного розгляду, а також елементарними прикладами їх розв'язку.

Для студентів фізико-математичного факультету усіх форм навчання.

УДК 517.518.17
ББК 22.161.5

ISBN 978-966-485-188-3

ЗМІСТ

1 Вступ до загальної теорії відображень

1.1 Загальні означення. Область, відображення, приклади

Нижче ми вважаємо відомими основні елементарні означення і поняття з математичного аналізу і лінійної алгебри. По-перше, розглянемо (нагадаємо) наступні означення, котрі мають фундаментальне значення для усього курсу.

Означення 1.1.1. Визначимо простір $\mathbb{R}^n$ наступним чином:

$$\mathbb{R}^n := \{x = (x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

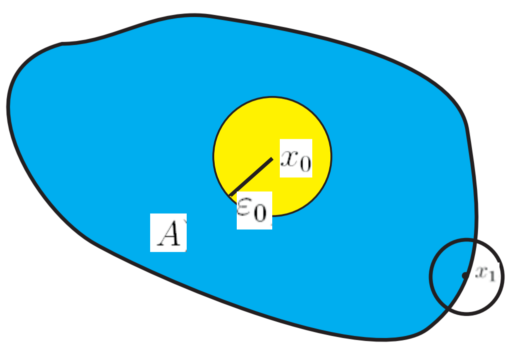
Означення 1.1.2. *Кулею* в $\mathbb{R}^n$ з центром в точці x_0 радіусу $r > 0$ називається множина

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\} .$$

Замкненою кулею з центром в точці x_0 радіусу $r > 0$ називається, відповідно, множина

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq r\} .$$

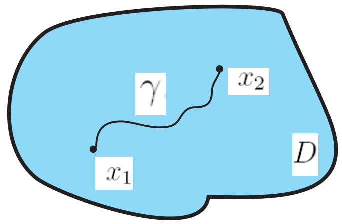
Означення 1.1.3. Множина $A \subset \mathbb{R}^n$ називається *відкритою*, якщо кожна точка $x_0 \in A$ входить до множини A разом з деякою кулею $B(x_0, \varepsilon_0)$.



Мал. 1. Множина A (без межі) як приклад відкритої множини
і з (межею) – як не відкритої

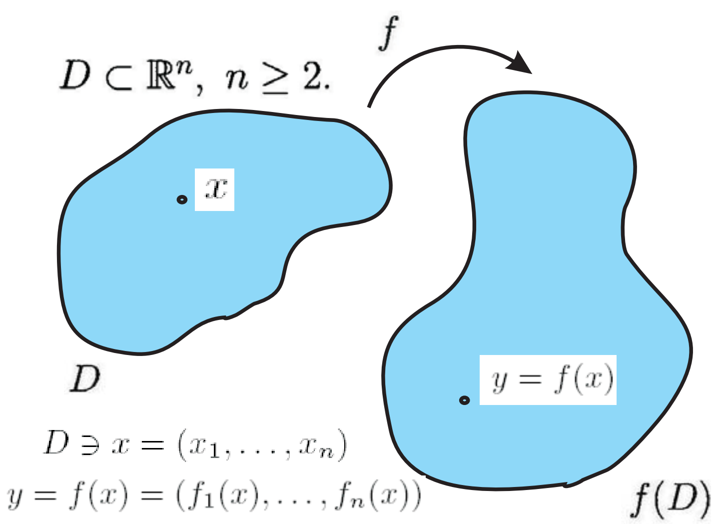
Властивість відкритості множини стає зрозумілою з наступного малюнку 1. Якщо вважати множину A на цьому малюнку такою, що містить свою межу, то A не є відкритою, тому що, наприклад, точка x_1 не є такою, яка містить малий окіл, що цілком належить A (див. малюнок 1). З іншого боку, якщо вважати, що межа A не належить до неї, то A стає вже відкритою: всі внутрішні точки x_0 є такими, що деяка куля $B(x_0, \varepsilon_0)$ все ще належить A.

Означення 1.1.4. *Областю в* $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, називається множина D яка, по-перше, відкрита, а по-друге, зв'язна, тобто будь які точки x_1, $x_2 \in D$ можна з'єднати кривою γ, що цілком належить D (див. малюнок 2).



Мал. 2. Множина D (без межі) як приклад області

Означення 1.1.5. *Відображенням* $f : D \to \mathbb{R}^n$ називається перетворення, котре кожному елементу $x = (x_1, \ldots, x_n) \in D$ ставить у відповідність (єдиним чином) певний елемент $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ (див. мал. 3). Запис $f : D \to \mathbb{R}^n$ припускає, що відображення f, задане в області D, є неперервним.



Мал. 3. Відображення, визначене в області $D \subset \mathbb{R}^n$.

Вправа 1.1.1. *Вкажіть, які з наступних перетворень є відображеннями в області* $D \subset \mathbb{R}^2$, *якщо* $x = (x_1, x_2) \in D$ *і: 1)* $f(x) = x_1$;

$f(x) = (x_1^2, x_2)$.

Означення 1.1.6. Для будь якої множини D її *образом* за відображенням $f : D \to \mathbb{R}^n$ називається множина $f(D)$, що складається з усіх елементів $y \in \mathbb{R}^n$, для яких існує $x \in D$, такий що $f(x) = y$ (див., наприклад, малюнок 3).

Означення 1.1.7. Нехай D – область в $\mathbb{R}^n$. *Гомеоморфізмом* $f : D \to \mathbb{R}^n$ називається будь-яке відображення, котре є взаємно-однозначним (тобто, $f(x_1) = f(x_2)$ лише тоді, коли $x_1 = x_2$).

З означення гомеоморфізму випливає, що в області $f(D)$ можна визначити так зване *обернене відображення* $f^{-1} : f(D) \to D$, тобто таке відображення, що $f^{-1}(f(x)) = x$ для будь-якого $x \in D$ і $f(f^{-1}(y)) = y$ для будь-якого $y \in f(D)$. З того, що f є взаємно-однозначним випливає, що $f(D)$ також буде областю (відкритою і зв'язною множиною), і що відображення f^{-1} також є неперервним (це нетрівіальний факт, який є невірним для довільних множин D, що не є областями).

Приклади. 1) Відображення $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, є гомеоморфізмом, оскільки з умови $f(x_1) = f(x_2)$ маємо $x_1 = x_2$ за означенням цього відображення. 2) Відображення $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, є гомеоморфізмом, оскільки з умови $f(x_1) = f(x_2)$ маємо $x_1^3 = x_2^3$, звідси (беручи корінь кубічний з обох частей) знову $x_1 = x_2$. 3) Відображення $f(z) = z^3$, $z \in \mathbb{C}$ (тут і надалі $\mathbb{C}$ – комплексна площина) не є гомеоморфізмом в одиничному крузі $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, оскільки будь-яка точка z_0 області D, крім нуля, має рівно три різних значення корня кубічного – це відома теорема з алгебри про кількість комплексних корнів n-го ступеня з числа $z_0 \neq 0$. 4) Відображення $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ не буде гомеоморфізмом, оскільки, наприклад, $f(-1/2) = f(1/2) = 1/4$, хоча і $-1/2 \neq 1/2$.

1.2 Класи Соболєва

Для певних питань комплексного і багатовимірного аналізу має певна потреба щодо узагальнення визначення диференційовності. Одним з них є поняття класів Соболєва, яке буде наведено нижче. Його сутність полягає в тому, що відоме з теорії інтегрування "інтегрування по частинах" покладено в основу означення класу відображень. (Цей розділ не дуже важливий для подальшого викладення і його можна сприймати "суто формально". Але все ж таки ми не можемо зовсім уникнути його змісту, оскільки без означення класів Соболєва виникають певні складнощі у визначені квазіконформних відображень, яким присвячено курс).

Означення 1.2.1. Множина $K \subset \mathbb{R}^n$ називається *обмеженою*, якщо існує $C > 0$ таке, що $|x| \leq C$ для всіх $x \in K$ (тут і надалі $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$). Можна сказати і дещо інакше: множина $K \subset \mathbb{R}^n$ називається обмеженою, якщо існує куля $B(x_0, \varepsilon)$ така, що $K \subset B(x_0, \varepsilon)$.

Означення 1.2.2. Множина K в $\mathbb{R}^n$ називається *замкненою*, якщо $\mathbb{R}^n \setminus K$ є відкритою множиною.

Означення 1.2.3. *Компактом* K в $\mathbb{R}^n$ називається множина, яка одночасно є замкненою і обмеженою.

Означення 1.2.4. Нехай D – область в $\mathbb{R}^n$. Тоді будемо говорити, що функція $f : D \to \mathbb{R}$ є *функцією з компактним носієм*, якщо існує компакт $C \subset D$ такий, що $f \equiv 0$ зовні компакту C.

У подальшому $C_0^k(U)$ позначає простір функцій $u : U \to \mathbb{R}$ з компактним носієм в U, що мають k частинних похідних за будь якою змінною $x_1, \ldots, x_n$, які є неперервними в U.

Означення інтегралу від функції ми вважаємо відомим: грубо кажучи, можна сказати так, що якщо $f : U \to \mathbb{R}$, $f \geq 0$ – функція, то $\int\limits_U f(x)dm(x)$ – це певний лінійний функціонал $f \to l(f) := \int\limits_U f(x)dm(x)$. На відміну від функціоналів, тут також допускається випадок $l(f) = \infty$. Функція в цьому випадку називається *неінтегровною*. Якщо $l(f) < \infty$, f *інтегровна*. Для викладення подальшого матеріалу більш докладне знайомство з інтегралами бажане, але не обов'язкове.

Означення 1.2.5. Нехай U – область, $U \subset \mathbb{R}^n$, $u : U \to \mathbb{R}$ – деяка функція, що інтегровна на будь-яких компактах $K \subset U$. Припустимо, що знайдеться функція v, яка також інтегровна на будь-яких компактах $K \subset U$ і така, що

$$\int\limits_U \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)u(x)dm(x) = -\int\limits_U \varphi(x)v(x)dm(x)$$

для будь-якій функції $\varphi \in C_1^0(U)$. Тоді будемо говорити, що функція v є *узагальненою похідною першого порядку функції u за змінною x_i* і позначати символом: $\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) := v$.

Функція $u \in W_{loc}^{1,1}(U)$, якщо u має узагальнені частинні похідні першого порядку по кожній зі змінних в області U, які є інтегровними на будь якому компакті $K \subset U$, тобто, мають скінченний інтеграл.

У визначенні, наведеному вище, індекс "loc" вказує на локальний характер інтегрування узагальнених частинних похідних (тобто, мова йде про інтегрування на компактах); індекси "1, 1" вказують на те, що порядок частинних похідних дорівнює 1, і локальне інтегрування їх теж відбувається в степені 1.

Означення 1.2.6. Нехай G – область в $\mathbb{R}^n$. Відображення $f : G \to \mathbb{R}^n$ належить *класу Соболєва* $W^{1,1}_{loc}(G)$, пишуть $f \in W^{1,1}_{loc}(G)$, якщо всі координатні функції $f = (f_1, \ldots, f_n)$ належать до класу $W^{1,1}_{loc}$. Нарешті, $f \in W^{1,n}_{loc}(G)$, якщо $f \in W^{1,1}_{loc}(G)$ і, крім того, узагальненні частинні похідні $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ є інтегровними на будь-яких компактах $K \subset D$ у степені n.

Зауваження 1.2.1. Можна показати, що неперевно-диференційовні відображення $f : D \to \mathbb{R}^n$, які тут і надалі позначаються символом $C^1(D)$ (тобто, відображення, кожна координатна функція яких має звичайні частинні похідні, що є неперервними в D) завжди належать до класів $W^{1,1}_{loc}$ і $W^{1,n}_{loc}$. На практиці ми, як правило, будемо мати справу саме з такими відображеннями, які ще називаються *гладкими.* Тому перевірка, чи належить відображення до класу $W^{1,1}_{loc}$ або $W^{1,n}_{loc}$, як правило, нам не буде потрібна.

1.3 Деякі властивості лінійних відображень

Нагадаємо деякі відомі факти з лінійної алгебри.

Означення 1.3.1. *Лінійним перетворенням* $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ називається таке відображення, що задовольняє умовам: $A(x + y) = A(x) + A(y)$ і $A(\lambda x) = \lambda A(x)$ для будь-яких векторів $x, y \in \mathbb{R}^n$ і будь-якого числа $\lambda \in \mathbb{R}$.

Добре відомо, що в конкретному базисі $e_1, \ldots, e_n$ будь-яке лінійне перетворення можна записати в вигляді матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\,. \end{pmatrix}$$

Наступне твердження є ключовим для всього подальшого викладення (див. [8, теорема 2.1, гл. I]).

Теорема 1.3.1. *Припустимо, що лінійне відображення* $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *є невиродженим, тобто,* $\det A \neq 0$. *Тоді знайдуться ортонормовані системи векторів* $e_1, \ldots, e_n$ *и* $\widetilde{e_1}, \ldots, \widetilde{e_n}$ *і строго позитивні числа*

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \quad \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n\,,$$

$\lambda_i > 0$ *при* $i = 1, 2, \ldots, n$, *такі що*

$$A(e_i) = \lambda_i \widetilde{e_i} \tag{1.3.1}$$

при всіх $i = 1, 2 \ldots, n$.

Означення 1.3.2. Системи векторів $e_1, \ldots, e_n$ і $\widetilde{e_1}, \ldots, \widetilde{e_n}$ з теореми 1.3.1 називаються *головними векторами* відображення A, а числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – *головними числами,* або *головними розтягами* відображення A.

Тут і надалі Ah позначає дію лінійного відображення A на вектор-стовпець $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$, а $|Ah|$ позначає довжину вектора Ah,

$$|Ah| = \sqrt{(a_{11}h_1 + \cdots + a_{1n}h_n)^2 + \cdots + (a_{n1}h_1 + \cdots + a_{nn}h_n)^2}\,.$$

Означення 1.3.3. *Матричною нормою*, або просто *нормою* лінійного відображення $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ називається число $\|A\|$, котре визначається за наступним правилом:

$$\|A\| = \sup_{|h|=1} |Ah| = \max_{|h|=1} |Ah| =$$

$$= \max_{|h|=1} \sqrt{(a_{11}h_1 + \cdots + a_{1n}h_n)^2 + \cdots + (a_{n1}h_1 + \cdots + a_{nn}h_n)^2}\,. \tag{1.3.2}$$

Правило підрахунку норми матриці і її детермінанту за допомогою теореми 1.3.1

Почнемо з підрахунку детермінанту відображення. Для цього скористуємося міркуваннями, наведеними нижче.

Тут і надалі (x, y) означає скалярний добуток векторів $x = (x_1, \ldots, x_n)$ і $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, а саме,

$$(x, y) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n\,.$$

Розглянемо спряжений оператор A^* для матриці A, тобто такий, що

$$(Ax, y) = (x, A^* y) \quad x, y \in \mathbb{R}^n\,. \tag{1.3.3}$$

(Спряжений оператор в заданому базису елементарно відшукується, оскільки з курсу лінійної алгебри нам відомо, що A^* і A відрізняються операцією транспонування). Розглянемо для невиродженої матриці A систему векторів $e_1, \ldots, e_n$ з теореми 1.3.1. Оскільки $e_1, \ldots, e_n$ є ортонормованою, то вона є базисом і тому вектор A^*Ae_i може бути розкладений по ньому з деякими коефіцієнтами:

$$A^*Ae_i = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n\,, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{1.3.4}$$

Знайдемо коефіцієнти a_i у (1.3.4). Для цього помножимо (1.3.4) скалярно на e_j, $j = 1, 2 \ldots, n$. Оскільки система векторів $e_1, \ldots, e_n$ є ортонормованою, скориставшись властивостями скалярного добутку будемо мати:

$$(A^*Ae_i, e_j) = (a_1e_1 + \cdots + a_ne_n, e_j) = a_j\,. \tag{1.3.5}$$

З іншого боку, скориставшись співвідношенням (1.3.3), рівностями у (1.3.1) і тим, що $(A^*)^* = A$, будемо мати при $i = j$

$$(A^*Ae_i, e_j) = (Ae_i, Ae_j) = (\lambda_i\widetilde{e_i}, \lambda_j\widetilde{e_j}) = \lambda_i^2 \tag{1.3.6}$$

і при $i \neq j$

$$(A^*Ae_i, e_j) = (Ae_i, Ae_j) = (\lambda_i\widetilde{e_i}, \lambda_j\widetilde{e_j}) = 0\,. \tag{1.3.7}$$

З (1.3.5), (1.3.6) та (1.3.7) випливає, що $a_j = 0$ при $i \neq j$ і $a_i = \lambda_i^2$.

Висновок: вектори $e_1, \ldots, e_n$ є *власними векторами* матриці A^*A, оскільки з (1.3.4) випливає, що $A^*Ae_i = \lambda_i^2 e_i$. Тоді перетворення A^*A в базисі $e_1, \ldots, e_n$ буде мати наступний вигляд:

$$A^*A = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n^2\,. \end{pmatrix} \tag{1.3.8}$$

Згідно того, що детермінант добутку матриць дорівнює добутку їх детермінантів, а $\det A^* = \det A$, з (1.3.8) випливає, що

$$\det A^*A = (\det A)^2 = \lambda_1^2 \ldots \lambda_n^2$$

і, отже,

$$\boxed{|\det A| = \lambda_1 \ldots \lambda_n\,.} \tag{1.3.9}$$

Тепер знайдемо норму відображення A (див. співвідношення (1.3.2)). Нехай $h = (h_1, \ldots, h_n)$, $|h| = 1$. Тоді:

$$h = b_1e_1 + \ldots b_ne_n\,,$$

де система векторів $e_1, \dots, e_n$ з формулювання теореми 1.3.1, а $b_1, \dots, b_n$ – координати вектора h в базисі $e_1, \dots, e_n$. Зауважимо, що

$$\sqrt{b_1^2 + \dots + b_n^2} = \sqrt{(b_1 e_1 + \dots b_n e_n, b_1 e_1 + \dots b_n e_n)} = \tag{1.3.10}$$

$$= \sqrt{(h, h)} = 1 \, .$$

З іншого боку,

$$Ah = A(b_1 e_1 + \dots b_n e_n) = b_1 A(e_1) + \dots + b_n A(e_n) =$$

$$= b_1 \lambda_1 \widetilde{e_1} + \dots + b_n \lambda_n \widetilde{e_n} \, .$$

Оскільки $\lambda_n \geq \lambda_i$ для будь-якого $i = 1, \dots, n$, а система векторів $\widetilde{e_1}, \dots, \widetilde{e_n}$ є ортонормованою, за лінійністю скалярного добутку векторів і з урахуванням співвідношення (1.3.10) будемо мати:

$$\|A\| = \sup_{|h|=1} \sqrt{(Ah, Ah)} =$$

$$= \sqrt{(b_1 \lambda_1 \widetilde{e_1} + \dots + b_n \lambda_n \widetilde{e_n}, b_1 \lambda_1 \widetilde{e_1} + \dots + b_n \lambda_n \widetilde{e_n})} =$$

$$= \sqrt{b_1^2 \lambda_1^2 + \dots + b_n^2 \lambda_n^2} \leq$$

$$\leq \lambda_n \cdot \sqrt{b_1^2 + \dots + b_n^2} = \lambda_n \, . \tag{1.3.11}$$

Покажемо, що оцінка (1.3.11) є точною, тобто, знайдеться $h_0 \in \mathbb{R}^n$ такий, що $|h_0| = 1$ і $|Ah_0| = \lambda_n$. Дійсно, як h_0 можна обрати вектор, який в базисі $e_1, \dots, e_n$ має координати $(b_1, \dots, b_n) = (0, \dots, 0, 1)$. Тоді за означенням sup маємо:

$$\|A\| = \sup_{|h|=1} |Ah| \geq |Ah_0| =$$

$$= \sqrt{0 \cdot \lambda_1^2 + \dots + 0 \cdot \lambda_{n-1}^2 + 1 \cdot \lambda_n^2} \, . \tag{1.3.12}$$

Висновок:

$$\boxed{\|A\| = \lambda_n} \, . \tag{1.3.13}$$

Зауваження 1.3.1. Дуже часто також розглядають

$$l(A) := \min_{|h|=1} |Ah| \, . \tag{1.3.14}$$

Вправа 1.3.1._Доведіть, що_

$$l(A) = \lambda_1. \tag{1.3.15}$$

Вказівка. _Міркуйте так само, як при доведенні того, що_ $\|A\| = \lambda_n$.

Приклад 1.3.1. _Знайти норму, якобіан, головні розтяги і головні вектори відображення_ $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

Розв'язок. У нас є відображення $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, тобто, $n = 2$. Поперше, прямим підрахунком отримаємо, що $\det A = 1$.

Візьмемо будь-який вектор $h \in \mathbb{R}^2$, $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$, такий що $|h| = 1$. Треба знайти $\|A\| = \sup\limits_{|h|=1} |Ah|$. Будемо мати:

$$|Ah| = |(h_1\cos\varphi + h_2\sin\varphi, -h_1\sin\varphi + h_2\cos\varphi)| =$$

$$= \sqrt{(h_1\cos\varphi + h_2\sin\varphi)^2 + (-h_1\sin\varphi + h_2\cos\varphi)^2} =$$

$$= \sqrt{h_1^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + h_2^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} =$$

$$= \sqrt{h_1^2 + h_2^2} = 1\,.$$

Висновок: маємо $|Ah| = |h| = 1$ для будь-якого вектора h такого, що $|h| = 1$. Переходячи у рівності $|Ah| = 1$ до sup по всіх векторах h таких, що $|h| = 1$, маємо: $\|A\| = 1$. Оскільки $\det A = 1 = \lambda_1 \cdot \lambda_2$ і $\lambda_2 = \|A\| = 1$, то головні розтяги $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Покладемо тепер $e_1 = (1, 0)$ і $e_2 = (0, 1)$. Тоді будемо мати

$$Ae_1 = (\cos\varphi, -\sin\varphi), \quad Ae_2 = (\sin\varphi, \cos\varphi)\,.$$

Покладемо тепер $\widetilde{e_1} := Ae_1$ і $\widetilde{e_2} := Ae_2$. Ми будемо мати $|\widetilde{e_1}| = |\widetilde{e_2}| = 1$ і $(\widetilde{e_1}, \widetilde{e_2}) = \cos\varphi\sin\varphi - \cos\varphi\sin\varphi = 0$. Отже, $\widetilde{e_1}, \widetilde{e_2}$ – ортонормована система векторів така, що $Ae_1 = 1 \cdot \widetilde{e_1}$ і $Ae_2 = 1 \cdot \widetilde{e_2}$. $\Box$

2 Квазіконформні відображення

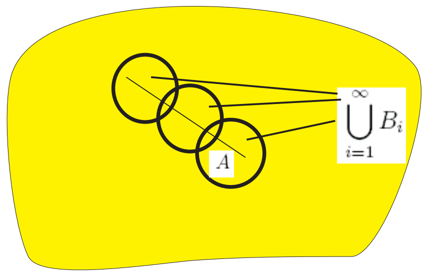
2.1 Означення і приклади просторових квазіконформних відображень

Почнемо з означення.

Означення 2.1.1. Множина $A \subset \mathbb{R}^n$ називається множиною *міри Лебега нуль*, або просто *міри нуль*, якщо для будь якого $\varepsilon > 0$ існує система куль B_i, $i = 1, 2, \dots$, таких що

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \, , \sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam} B_i)^n < \varepsilon \, ,$$

див. малюнок 4.



Мал. 4. Приклад множини міри нуль в $\mathbb{R}^2$.

Означення 2.1.2. Якщо множина не є множиною міри нуль, кажуть, що вона має позитивну міру.

Простими прикладами множини міри нуль є будь-яка одноточкова множина, множина, що складається зі скінченної або зчисленої кількості точок (наприклад, множина всіх раціональних чисел на прямій має міру нуль). Будь яка плоска множина має міру нуль в $\mathbb{R}^3$ (наприклад, квадрат, круг, або весь простір $\mathbb{R}^2$ має міру нуль в $\mathbb{R}^3$). Інтервал (a, b) на прямій – це приклад множини позитивної міри в $\mathbb{R}^1$ і його міра дорівнює $b - a$. Квадрат на площині з довжиною сторони $a > 0$ має позитивну міру, яка дорівнює a^2. Паралелепіпед в $\mathbb{R}^n$ зі сторонами $a_1, \dots, a_n$ має міру $a_1 \cdots a_n$ в $\mathbb{R}^n$. Проще кажучи, множини нульової міри в $\mathbb{R}^n$ – це множини нульової довжини в $\mathbb{R}^1$, нульової площі в $\mathbb{R}^2$ або нульового об'єму в $\mathbb{R}^3$. Підкреслюємо: властивість множини бути множиною міру нуль залежить від простору, в якому вони розглядається: одни і ті ж множини в одному просторі можуть мати міру нуль, а в іншому вже не будуть такими. Наприклад, квадрат в $\mathbb{R}^2$ має позитивну міру, яка дорівнює квадрату довжини його сторони, однак, будучи плоскою фігурою, квадрат має міру нуль в в $\mathbb{R}^3$.

Означення 2.1.3. Будемо говорити, що властивість A має місце *для майже всіх x з області D, якщо A має місце для всіх $x \in D$, крім, можливо, деякої множини E, що має міру нуль.*

Нагадаємо означення диференційовності відображення в точці і матриці Якобі відображення.

Означення 2.1.4. Нехай $A \subset \mathbb{R}^n$ – відкрита множина. Відображення f *диференційовне в точці* x_0, якщо для будь-яких $\Delta x \in \mathbb{R}^n$, таких, що $(x_0 + \Delta x) \in A$, і деякого лінійного перетворення $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, виконано рівність

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = L\Delta x + \alpha(x_0, \Delta x) \cdot |\Delta x| \,, \tag{2.1.1}$$

де $\alpha(x_0, \Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. В цьому випадку оператор L є матрицею, яка називається *матрицею Якобі* відображення f в точці x_0 і позначається символом $f'(x_0)$, а елемент матриці Якобі $f'(x_0)$, що знаходиться в її i-мо рядку и j-му стовпці, позначають символом $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$.

Нагадаємо, що матриця Якобі має вигляд

$$f'(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} . \tag{2.1.2}$$

Величина $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$ знаходиться елементарно: якщо відображення $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$, то $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$ – це звичайна похідна компоненти f_i цього відображення за змінній x_i, взята в точці x_0 і обчислена за умовою, що решта змінних є сталими.

Зауваження 2.1.1. Величини $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ з означень 2.1.4 та 1.2.5, хоча і позначаються однаково, визначені дещо по-різному і, взагалі кажучи, можуть бути різними. Але ці величини, якщо вони обидві існують, співпадають між собою майже всюди (тобто усюди, за виключенням деякої множини міри нуль), див. [7, теорема 1, п. 1.1.3, § 1.1, гл. I]. Це нетрівіальний факт, який, проте, не занадто істотний для нашого курсу. **Як правило, якщо мова йде про величину $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$, то маємо на увазі звичайну частинну похідну,** див. означення 2.1.4.

Зафіксуємо точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$, тоді матрицю у (2.1.2) можна розглядати як лінійне відображення $A := f'(x_0)$, яке діє на вектори $h \in \mathbb{R}^n$. Покладаючи в означенні 1.3.3 $A := f'(x_0)$, за означенням маємо:

$$\|f'(x_0)\| := |f'(x_0)h| \,.$$

Тут x_0 виступає ніби як параметр, а змінною є вектор h. $f'(x_0)h$ – це дія матриці Якобі $f'(x_0)$ на вектор-стовпець $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$. Отже, $f'(x_0)h$

– знову деякий вектор, а $|f'(x_0)h|$ – це його довжина. (Тобто, якщо $f'(x_0)h = (c_1, \ldots, c_n)$, то $|f'(x_0)h| = \sqrt{c_1^2 + \cdots + c_n^2}$).

Так само покладемо

$$J(x_0, f) := \det f'(x_0)$$

– *якобіан* відображення f в точці x_0. Якобіан і норму відображення можна підрахувати за допомогою співвідношень (1.3.9) і (1.3.13). Заради строгості викладення слід також зауважити, що вектори $e_1, \ldots, e_n$, $\widetilde{e_1}, \ldots, \widetilde{e_n}$ і числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ **взагалі, кажучи, залежать від** x_0, **оскільки сама матриця** $A := f'(x_0)$ **залежить від** x_0, **як від параметра.** При кожному x_0 – свої вектори $e_1 = e_1(x_0), \ldots, e_n = e_n(x_0)$, $\widetilde{e_1} - e_1(x_0), \ldots, \widetilde{e_n} = e_n(x_0)$ і свої числа $\lambda_1 = \lambda_1(x_0), \ldots, \lambda_n = \lambda(x_0)$. Однак, для спрощення позначень найчастіше ми будемо уникати таких докладних записів, якщо тільки непорозуміння неможливе.

Фундаментальне значення для всього курсу має наступне означення.

Означення 2.1.5. Відображення $f : D \to \mathbb{R}^n$ називається *квазіконформним*, якщо виконано наступні умови:
1) $f \in W_{loc}^{1,n}$,
2) f є гомеоморфізмом у D,
3) для певної сталої $K \geq 1$

$$\boxed{\|f'(x)\|^n \leq K \cdot |J(x, f)|} \qquad (2.1.3)$$

при майже всіх $x \in D$ і певній сталій $K < \infty$, де, як звично,

$$\|f'(x)\| := \sup_{h \in \mathbb{R}^n : |h|=1} |f'(x)h| \,,$$

див., напр., § 3 розд. I [8], або означення 2.1 розд. 2 розд. I [9].

Означення 2.1.6. Відображення $f : D \to \mathbb{R}^n$ називається *відображенням з обмеженим спотворенням*, якщо в означенні 2.1.5 замість умови гомеоморфності відображення f висувається вимога: якобіан відображення f майже всюди зберігає свій знак.

П Р И К Л А Д И квазіконформних відображень. **1)** Так звані *конформні* відображення (невироджені гомеоморфізми класу $C^1(D)$, для яких $\|f'(x)\|^n = |J(x, f)|$). Тут навіть замість нерівності (2.1.3) має місце рівність і $K \equiv 1$. **2)** Тотожне відображення $f(x) = x$ є окремим випадком конформного відображення і тому квазіконформне. Властивості 1) і 2) не потребують перевірки, оскільки вони є очевидними. Щодо властивості 3), маємо: $f'(x) = E$, де E – одинична матриця, тобто, $\|f'(x)\| =$

$1 = \det f'(x)$. Отже, співвідношення (2.1.3) має місце при $K \equiv 1$. **3)** Відображення з прикладу 1.3.1 є конформним (перевірте !) і, отже, квазіконформне. **4)** Розглянемо відображення $f(x) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, q \cdot x_n)$, де $q \geq 1$ – наперед задане число. Доведемо, що f –квазіконформне відображення. Для цього перевіримо кожну з умов 1), 2) і 3) означення 2.1.5.

Дійсно, якщо $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$, то маємо: $f_1(x) = x_1, \ldots, f_{n-1}(x) = x_{n-1}, f_n(x) = qx_n$. Отже, $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 1$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0, \ldots,$ $\frac{\partial f_n}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 1$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_3} = 0, \ldots, \ldots, \ldots,$ $\frac{\partial f_n}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial f_n}{\partial x_{n-1}} = 0$, $\frac{\partial f_n}{\partial x_n} = q$. **Отже, всі частинні похідні $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ є сталими, а отже, неперервними функціями x. Висновок – відображення f є відображенням класу C^1 і, тим більше, класу $W_{loc}^{1,n}$ і отже, умову 1) означення 2.1.5 перевірено.**

Далі, перевіримо умову 2). Нехай $f(x_1) = f(x_2)$. Нам треба довести, що звідси випливає, що $x_1 = x_2$. Дійсно, якщо $x_1 = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ і $x_2 = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, то умова $f(x_1) = f(x_2)$ тягне, що

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, q \cdot a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, q \cdot b_n)\,. \tag{2.1.4}$$

Два вектори рівні між собою тоді і тільки тоді, коли їх координати співпадають, тоді з (2.1.4) випливає, що $b_1 = a_1, \ldots, a_n = b_n$, звідси маємо $x_1 = x_2$. **Висновок:** f – гомеоморфізм і, отже, умову 2) означення 2.1.5 теж перевірено.

Нарешті, виходячи зі знайдених вище частинних похідних, очевидним стає, що матриця Якобі $f'(x)$ у будь-якій точці $x_0 \in \mathbb{R}^n$ має вигляд

$$f'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & q\,. \end{pmatrix}$$

Звідси елементарно отримаємо, що $J(x, f) = \det f'(x) = q$. Крім того, ми з'ясували вище, що якщо матриця має диагональний вигляд, то її норма дорівнює максимальному з диагональних елементів (у припущені, що вони невід'ємні) – див. формулу (1.3.13). В нашому випадку це максимальне число є числом q, оскільки $q \geq 1$ за припущенням. Отже, $\|f'(x)\| = q$. Співвідношення (2.1.3), яке нам залишилося перевірити, в даному випадку запишеться як $q^n \leq K \cdot q$, що є очевидно виконаним, оскільки q – стале число (ліва і права частина $q^n \leq K \cdot q$ від x не залежать).

2.2 Характеристики квазіконфомності відображення

Наступні дві величини мають велике значення і характеризують як би степінь відхилення відображення від конформного. Покладемо

$l\left(f'(x)\right) = \min\limits_{|h|=1} |f'(x)h|$. *Внутрішньою дилатацію* відображення f у точці x зветься величина

$$K_I(x,f) \quad = \quad \frac{|J(x,f)|}{l\left(f'(x)\right)^n}\,, \tag{2.2.1}$$

якщо $J(x,f)\neq 0$; $\quad K_I(x,f)=1$, якщо $f'(x)=0$; і $K_I(x,f)=\infty$ в інших точках. *Зовнішня дилатація* відображення f у точці x є величина

$$K_O(x,f) \quad = \quad \frac{\|f'(x)\|^n}{|J(x,f)|}\,, \tag{2.2.2}$$

якщо $J(x,f)\neq 0$; $\quad K_O(x,f)=1$, якщо $f'(x)=0$; і $K_O(x,f)=\infty$ в інших точках. Добре відомо, що

$$K_I(x,f)\le K_O^{n-1}(x,f)\,,\quad K_O(x,f)\le K_I^{n-1}(x,f)\,. \tag{2.2.3}$$

Виходячи зі співвідношення (2.1.3), означення квазіконформного відображення може бути дано у наступній еквівалентній формі.

Означення 2.2.1. Відображення $f: D\to\mathbb{R}^n$ називається *квазіконформним*, якщо виконано наступні умови:
1) $f\in W^{1,n}_{loc}$,
2) f є гомеоморфізмом у D,
3) для певної сталої $K\ge 1$ і майже всіх $x\in D$

$$K_O(x,f)\le K\,.$$

Згідно отриманої нами раніше інформації (див. (1.3.9), (1.3.13) і (1.3.15))

$$|J(x_0,f)| = \lambda_1(x_0)\ldots\lambda_n(x_0), \qquad \|f'(x_0)\| = \lambda_n(x_0)\,, \tag{2.2.4}$$

$$l\left(f'(x_0)\right) = \lambda_1(x_0)\,, \tag{2.2.5}$$

$$K_O(x_0,f) = \frac{\lambda_n^n(x_0)}{\lambda_1(x_0)\ldots\lambda_n(x_0)}\,, \tag{2.2.6}$$

$$K_I(x_0,f) = \frac{\lambda_1(x_0)\ldots\lambda_n(x_0)}{\lambda_1^n(x_0)}\,. \tag{2.2.7}$$

Вправа 2.2.1. *Доведіть, що для конформних відображень (тобто таких, що $\|f'(x)\|^n=|J(x,f)|$) виконано наступне: $K_O(x,f)=K_I(x,f)=1$.*

2.3 Геометричний сенс нерівності (2.1.3) і величин (2.2.1)–(2.2.2)

Припустимо, що відображення $f : D \to \mathbb{R}^n$ є диференційовним и невиродженим в точці $x_0 \in D$, тоді матриця $A = f'(x_0)$ невироджена і для неї я справедливим все те, що викладено в секції 1.3. Розглянемо $h \in \mathbb{R}^n$, так що $|h| = r$. Розкладемо h по системе векторов $e_1, \ldots, e_n$ з теореми 1.3.1:

$$h = h_1 e_1 + \ldots + h_n e_n \,, \quad h_i \in \mathbb{R} \,, \quad i = 1, 2, \ldots, n \,,$$

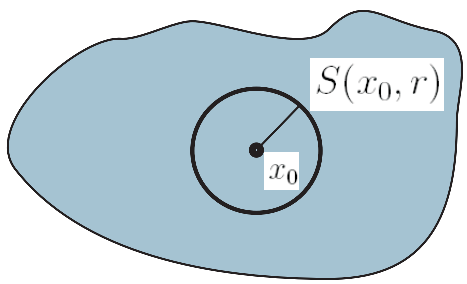
тоді, оскільки $A = f'(x_0)$ – лінійне відображення і таке, що виконано умови (1.3.1), будемо мати:

$$Ah = f'(x_0)h = \lambda_1 h_1 \widetilde{e_1} + \ldots + \lambda_n h_n \widetilde{e_n} \,, \quad h_i \in \mathbb{R} \,, \quad i = 1, 2, \ldots, n \,.$$

Покладемо для зручності

$$S(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = r\}$$

– сфера з центром в нулі радіусу $r > 0$ (див. малюнок 5). Розглянемо



Мал. 5. Сфера $S(x_0, r)$ в $\mathbb{R}^n$

множину

$$\boxed{f'(x_0)S(0, r) := \{y \in \mathbb{R}^n : \exists\, y \in S(0, r) : y = f'(x_0)h\}} \,.$$

Покладемо $y_i = \lambda_i h_i$, тоді, оскільки $|h| = r$, будемо мати:

$$\frac{y_1^2}{\lambda_1^2} + \cdots + \frac{y_n^2}{\lambda_n^2} = h_1^2 + \cdots + h_n^2 = r^2 \,,$$

або

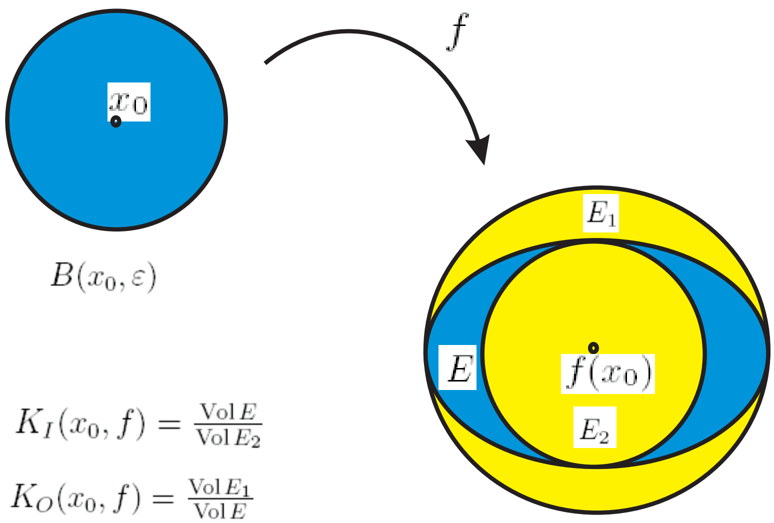
$$\frac{y_1^2}{r^2 \lambda_1^2} + \cdots + \frac{y_n^2}{r^2 \lambda_n^2} = 1 \,.$$

Висновок: $f'(x_0)S(0, r)$ **є частиною еліпсоїда з центром в нулі і півосями** $r\lambda_1, \ldots, r\lambda_n$ **відносно координатною системи** $\widetilde{e_1}, \ldots, \widetilde{e_n}$. **Позначимо цей еліпсоїд через** E.

Поки що ми показали, що $f'(x_0)S(0,r) \subset E$. Можна також показати, що і $E \subset f'(x_0)S(0,r)$ (доведіть це !). Отже,

$$\boxed{f'(x_0)S(0,r) = E},$$

див. малюнок 6. З іншого боку, скористаємося тим, що об'єм кулі радіуса



Мал. 6. Геометричний сенс квазіконформного відображення

$r > 0$ дорівнює $\Omega_n \cdot r^n$ (де Ω_n – об'єм одиничної кулі $\mathbb{B}^n = B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$), а об'єм еліпсоїда E, півосі якого $r\lambda_1, \ldots, r\lambda_n$, дорівнює $\Omega_n \cdot r^n \cdot \lambda_1 \ldots \lambda_n$ (ми вважаємо ці факти за відомі). Помножуючи чисельник і знаменник дробу в (2.2.6) на Ω_n, ми отримаємо, що

$$\boxed{K_O(x_0, f) = \frac{\mathrm{vol}\, E_1}{\mathrm{vol}\, E}},$$

де vol A позначає об'єм множини A, а E_1 – *мінімально можлива описана навколо еліпсоїда E куля* – її радіус дорівнює $\lambda_n = \lambda_n(x_0)$.

Отже,

Геометричний сенс зовнішньою дилатації $K_O(x_0, f)$ полягає в тому, що $K_O(x_0, f)$ є відношенням об'єму "мінімально можливої" описаної навколо E кулі E_1 до об'єму еліпсоїда E, причому еліпсоїд E є образом сфери радіусу r за невиродженим відображенням f', яке відрізняється від f за формулою (2.1.1) ("з точністю до $o(\Delta x)$").

Геометричний сенс квазіконформного відображення полягає в тому, що при такому відображенні ("з точністю до $o(\Delta x)$" сфера радіусу r переходить до еліпсоїда так, що відношення об'ємів "мінімально можливої" описаної навколо еліпсоїда кулі E_1 до об'єму еліпсоїда E є майже всюди обмеженим (або, що те ж саме, зовнішня дилатація квазіконформного відображення $K_O(x_0, f)$ є майже всюди обмеженою – дивіться співвідношення (2.1.3)).

Міркуючи так, як і вище, ми бачимо з формули (2.2.7), що внутрішня дилатація $K_I(x_0, f)$ також *дорівнює співвідношенню об'єму еліпсоїда E до об'єму "максимально можливої" вписаної у E кулі E_2* – див. малюнок 6.

2.4 Завдання для самостійної роботи

Задача 1. *З'ясувати, чи буде відображення $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^2$ квазіконформним в області $\mathbb{D} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ та знайти $K_O(x, f)$ для кожного з варіантів.*

Номер варіанту	**Відображення**	**Номер варіанту**	**Відображення**
1	$f(x) = (x_1, -2x_1)$	16	$f(x) = (2x_1, 3x_2)$
2	$f(x) = (x_2, -x_2)$	17	$f(x) = (x_1, 10x_2)$
3	$f(x) = (x_1^2, -x_1)$	18	$f(x) = (x_1, x_2^2)$
4	$f(x) = (5x_2, -6x_1)$	19	$f(x) = (5x_1, 4x_2)$
5	$f(x) = (x_1, x_1)$	20	$f(x) = (x_1^3, x_1^2)$
6	$f(x) = (x_2, x_2^3)$	21	$f(x) = (x_1^3, x_1)$
7	$f(x) = (x_2, -7x_2)$	22	$f(x) = (3x_1, 3x_2)$
8	$f(x) = (x_2, 2x_2)$	23	$f(x) = (x_2, -2x_2)$
9	$f(x) = (x_1^2, x_2^2)$	24	$f(x) = (5x_1^2, x_2)$
10	$f(x) = (x_2, -10x_2)$	25	$f(x) = (x_1, 10x_1)$
11	$f(x) = (x_1^2, x_2^2)$	26	$f(x) = (-x_1^2, x_2^2)$
12	$f(x) = (x_2, 5x_1)$	27	$f(x) = (5x_2, x_2)$
13	$f(x) = (-x_2, 7x_1)$	28	$f(x) = (-8x_2, x_2)$
14	$f(x) = (x_2, -5x_1)$	29	$f(x) = (-x_2, 1)$
15	$f(x) = (x_2^2, 0)$	30	$f(x) = (x_1^2, -5)$

Приклад 2.4.1. *З'ясувати, чи буде відображення $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^2$ квазіконформним в області $\mathbb{D} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ та знайти $K_O(x, f)$, якщо $f(x) = (x_1^4, x_2)$.*

Розв'язок. У нас плоске відображення, тобто, $f : D \to \mathbb{R}^n$, $D := \mathbb{D}$, відповідає до випадку $n = 2$. Для відповіді на запитання, чи буде відображення квазіконформним, нам треба перевірити три умови з означення 2.1.5.

По-перше, у відомих позначеннях $f_1(x) = x_1^4$ і $f_2(x) = x_2$, тоді $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 4x_1^3$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 1$. **Висновок:** всі координатні функції відображення f мають неперервні частинні похідні, і тому $f \in C^1(\mathbb{D})$ (а тим більше, $f \in W_{loc}^{1,2}$!). Отже, пункт 1) означення 2.1.5 перевірено.

Покажемо, що пункт 2) цього ж означення не є виконаним. Дійсно, f не є гомеоморфізмом, оскільки, наприклад точки $a = (-1/2, 0)$ і $b = (1/2, 0) \in \mathbb{D}$ є різними, але переходять при відображенні f в одну і ту ж саму точку: $f(a) = ((-1/2)^4, 0) = (1/4, 0)$ і $f(b) = ((1/2)^4, 0) = (1/4, 0)$, тобто, $f(a) = f(b)$ при певних $a \neq b$. Це говорить про те, що f не є гомеоморфізмом і, отже, **не квазіконформне**.

Залишилося порахувати $K_O(x, f)$. З урахуванням знайденого вище, матриця Якобі відображення f має вигляд:

$$f'(x) = \begin{pmatrix} 4x_1^3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Тоді $J(x, f) = 4x_1^3 \cdot 1 = 4x_1^3$ і, згідно з (1.3.13), $\|f'(x)\| = \max\{4|x_1|^3, 1\}$. Зауважимо, що якобіан $J(x, f)$ обертається до нуля в точках $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{D}$ таких, що $x_1 = 0$. В цих точках матриця Якобі дорівнює

$$f'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 .$$

Таким чином, за означенням $K_O(x, f)$,

$$K_O(x, f) = \frac{(\max\{4|x_1|^3, 1\})^2}{4|x_1|^3}$$

при $x_1 \neq 0$ і $K_O(x, f) = \infty$ при $x_1 = 0$. $\Box$

2.5 Квазіконформні відображення і дилатації на площині

Досить часто з'ясувати шляхом безпосереднього підрахунку, чи бути відображення квазіконформним, або підрахувати його дилатації (внутрішню чи зовнішню), вельми не просто. Відображення може мати складний аналітичний запис, але проблеми з підрахунком можуть виникнути навіть і при нескладному (на перший погляд) вигляді відображення.

Наприклад, з відображенням $f(x) = (x_1 x_2, x_2)$ вже виникають подібні складнощі (перевірте !).

Однак, на відміну від випадку простору $\mathbb{R}^n$ при довільному $n \in \mathbb{N}$, саме у плоскому випадку (тобто $n = 2$) існує фактично **універсальний** метод підрахунку всіх величин, яких розглянуто в попередній секції. Викладемо цей метод.

Для зручності будемо, як звично, ототожнювати простір $\mathbb{R}^2$ з комплексною площиною, тобто,

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1\}.$$

Розглянемо наступне

Означення 2.5.1. Нехай $z, z_0 \in D \subset \mathbb{C}$. Для комплекснозначної функції $f : D \to \mathbb{C}$, заданої в області $D \subset \mathbb{C}$, що має частинні похідні по x і y при майже всіх $z = x + iy$, покладемо:

$$\overline{\partial} f = f_{\overline{z}} = (f_x + i f_y)/2 \tag{2.5.1}$$

і

$$\partial f = f_z = (f_x - i f_y)/2 . \tag{2.5.2}$$

Покладемо

$$\boxed{\mu(z) = \mu_f(z) = f_{\overline{z}}/f_z}$$

при $f_z \neq 0$ і $\mu(z) = 0$ в противному випадку. Комплекснозначна функція μ, наведена вище, називається *комплексною дилатацією* відображення f в точці z. *Максимальною дилатацією* відображення f в точці z називається наступна функція:

$$\boxed{K_\mu(z) \quad = \quad \frac{1 + |\mu(z)|}{|1 - |\mu(z)||}}. \tag{2.5.3}$$

Зауважимо, що

$$J(f, z) = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2 ,$$

що може бути перевірено прямим підрахунком (див., напр., [2, пункт C, гл. I]) (– перевірте це !). Покажемо, що

$$K_\mu(z) = K_I(z, f) = K_O(z, f)$$

при $n = 2$ (див., напр., співвідношення (2.2.6)).

Якщо $f_z(z_0) \neq 0 \neq f_{\overline{z}}(z_0)$ і $J(z_0, f) = 0$, то $\mu(z_0) = \mu_f(z_0) = 1$, звідси отримаємо, що $K_\mu(z_0) = \infty$, однак, це відповідає рівності $K_I(z_0, f) = K_O(z_0, f) = \infty$. Нехай $f'(z_0) = 0$, тоді також $K_\mu(z_0) = K_I(z_0, f) = K_O(z_0, f) = 1$. Нехай тепер $J(z, f) \neq 0$.

Покажемо спочатку, що

$$\|f'(z)\| = |f_z| + |f_{\overline{z}}| \,. \tag{2.5.4}$$

(Нагадаємо, що $\|f'(z)\| := \sup\limits_{|h|=1} |f'(z)h|$). Дійсно, якщо $f(z) = u(z) + iv(z)$, то за означенням ми отримаємо, що

$$\|f'(z)\| = \sup_{h=(h_1,h_2):|h|=1} \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}h_1 + \frac{\partial u}{\partial y}h_2\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}h_1 + \frac{\partial v}{\partial y}h_2\right)^2} \,. \tag{2.5.5}$$

Шляхом прямого підрахунку модна переконатися, що, у зроблених позначеннях,

$$\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}h_1 + \frac{\partial u}{\partial y}h_2\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}h_1 + \frac{\partial v}{\partial y}h_2\right)^2} = |f_z\Delta z + f_{\overline{z}}\overline{\Delta z}| \,, \tag{2.5.6}$$

де $\Delta z = h_1 + ih_2$. Оскільки в (2.5.5) розглядаються такі h_1 і h_2, що $|h| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2} = 1$, маємо: $\Delta z = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Будемо мати:

$$|f_z\Delta z + f_{\overline{z}}\overline{\Delta z}| \leq |f_z| + |f_{\overline{z}}| \tag{2.5.7}$$

і

$$|f_z\Delta z + f_{\overline{z}}\overline{\Delta z}| = |f_z| \cdot \left|1 + e^{-2i\theta}\mu_f(z)\right| \,, \tag{2.5.8}$$

де, як і вище, $\mu(z) = \mu_f(z) = f_{\overline{z}}/f_z$, при $f_z \neq 0$ і $\mu(z) = 0$ в противному випадку. Обираючи в останньому виразі $\theta = \frac{1}{2}\arg\mu_f(z)$, ми отримаємо, що при обраному $\Delta z = e^{i\frac{1}{2}\arg\mu_f(z)}$ з (2.5.8) випливає співвідношення

$$|f_z\Delta z + f_{\overline{z}}\overline{\Delta z}| = |f_z| + |f_{\overline{z}}| \,. \tag{2.5.9}$$

Тоді з (2.5.5), (2.5.6), (2.5.7) і (2.5.9) мы і отримаємо співвідношення (2.5.4). Враховуючи, що $J(f, z) = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2$, рівності

$$K_\mu(z) = K_I(z, f) = K_O(z, f)$$

можуть бути отримані з (2.5.4) і (2.2.6) прямим підрахунком.

Згідно знайденого вище, можна також записати наступне:

$$K_\mu(z) = \frac{(|f_z| + |f_{\overline{z}}|)^2}{|f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2} \,. \tag{2.5.10}$$

Приклад 2.5.1. *З'ясувати, чи буде відображення* $f = (x_1x_2, x_2)$ *квазіконформним в одиничному крузі* $\mathbb{D} = \{x = (x_1, x_2) : |x| < 1\}$ *і підрахувати його внутрішню і зовнішню дилатації* $K_I(x, f)$ *і* $K_O(x, f)$.

Розв'язок. Те, що відображення f є гладким, очевидно з його вигляду і може бути встановлено аналогічно прикладу **4)** на с. 17. Отже, $f \in W^{1,2}_{loc}$. З'ясуємо, чи буде f гомеоморфізмом. Візьмемо $a = (a_1, a_2)$ і $b = (b_1, b_2)$. Нехай $f(a) = f(b)$, тоді

$$(a_1a_2, a_2) = (b_1b_2, b_2)\,.$$

Прирівнюючи відповідні координати у лівій і правій частині останньої рівності, маємо: $a_2 = b_2$ і $a_1a_2 = b_1b_2$. Якщо $a_2 \neq 0$, то звідси $a_1 = b_1$. Однак, при $a_2 = 0$ маємо $a_1a_2 = b_1b_2 = 0$, які б не були значення a_1 і b_1. Нехай тепер, наприклад, $a_1 = 1/2$ і $b_1 = -1/2$, тоді якщо покласти $a_2 = b_2 = 0$, то при $a = (a_1, a_2) = (1/2, 0)$ і $b = (b_1, b_2) = (-1/2, 0)$ маємо $f(a) = f(b) = (0, 0)$. Висновок: **знайшлись такі** $a \neq b$, **що** $f(a) = f(b)$. $\Rightarrow$ f **не є гомеоморфізмом, а отже, не є квазіконформним.**

Залишилося відрахувати $K_I(x, f)$ і $K_O(x, f)$. Можна скористатися тим, що $K_I(x, f) = K_O(x, f) = K_\mu(z)$, де $K_\mu(z)$ визначається за співвідношенням (2.5.3). Перепишемо відображення f в комплексній формі, тоді

$$f(z) = xy + iy, \quad x, y \in \mathbb{D} \subset \mathbb{C}\,.$$

Маємо: $f_1(z) = xy$, $f_2(z) = y$, $\frac{\partial f_1}{\partial x} = y$, $\frac{\partial f_1}{\partial y} = x$, $\frac{\partial f_2}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f_2}{\partial y} = 1$,

$$f'(z) = \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\,,$$

$J(f, z) = y$. Далі маємо: $f_x = (xy + iy)_x = y$, $f_y = (xy + iy)_y = x + i$,

$$f_z(z) = \frac{1}{2} \cdot (y - xi + 1)\,, \quad f_{\overline{z}}(z) = \frac{1}{2} \cdot (y + xi - 1)\,,$$

$$\|f'(z)\| = |f_z| + |f_{\overline{z}}| = \frac{1}{2}(\sqrt{(y+1)^2 + x^2} + \sqrt{(y-1)^2 + x^2})\,.$$

Нарешті, при $y \neq 0$

$$K_\mu(z) = \frac{(\sqrt{(y+1)^2 + x^2} + \sqrt{(y-1)^2 + x^2})^2}{4|y|}\,.$$

Точки $z = x + iy$, де $y = 0$, розглянемо окремо. В цих точках матриця Якобі $f'(z)$ ненульова, тому що вона дорівнює

$$f'(z) = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0\,.$$

В усіх таких точках (**за означеням !**) маємо: $K_\mu(z) = \infty$. Переходячи до "старих" змінних x_1 і x_2, маємо:

$$K_I(x,f) = K_O(x,f) = K_\mu(x) = \frac{(\sqrt{(x_2+1)^2+x_1^2}+\sqrt{(x_2-1)^2+x_1^2})^2}{4|x_2|}$$

при $x_2 \neq 0$ і $K_(x,f) = K_O(x,f) = K_\mu(x) = \infty$ при $x_2 = 0$. □

2.6 Завдання для самостійної роботи

Задача 2. *З'ясувати, чи буде відображення $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^2$ квазіконформним в області $\mathbb{D} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ та знайти $K_O(x,f)$ для кожного з варіантів.*

Номер варіанту	**Відображення**	**Номер варіанту**	**Відображення**
1	$f(x) = (x_1x_2, -3x_1x_2)$	16	$f(x) = (2x_1x_2, 3x_2)$
2	$f(x) = (3x_1x_2, 5)$	17	$f(x) = (x_1, 10x_1x_2)$
3	$f(x) = (-x_1x_2, x_1x_2)$	18	$f(x) = (x_1x_2, 2x_1x_2)$
4	$f(x) = (5x_2^2, -6x_1x_2)$	19	$f(x) = (8x_1, 9x_2x_1)$
5	$f(x) = (x_2^2x_1, x_1)$	20	$f(x) = (x_1^2, x_2x_1^2)$
6	$f(x) = (x_2, 7x_1x_2)$	21	$f(x) = (x_2x_1^3, x_1x_2)$
7	$f(x) = (x_2x_1, -7x_2)$	22	$f(x) = (3x_1^4, 10x_1x_2)$
8	$f(x) = (-4x_2x_1, 5x_1^2)$	23	$f(x) = (x_2x_1^3, -2x_2)$
9	$f(x) = (x_1x_1^2, x_2^2)$	24	$f(x) = (5x_1^2x_1, x_2)$
10	$f(x) = (x_1x_2, -10x_2)$	25	$f(x) = (5x_1, 6x_1x_2)$
11	$f(x) = (x_1x_1^2, 2x_2^2)$	26	$f(x) = (-x_1x_1^2, x_2^2)$
12	$f(x) = (x_2, 5x_2x_1)$	27	$f(x) = (5x_1x_2, x_1x_2)$
13	$f(x) = (-x_1x_2, 7x_1 + 6)$	28	$f(x) = (6 - 8x_2, x_1x_2)$
14	$f(x) = (3x_1x_2, -5x_1)$	29	$f(x) = (-x_1x_2, 1)$
15	$f(x) = (x_2^2, -4x_1x_2)$	30	$f(x) = (4x_2x_1^2, -5)$

2.7 Похідні складної функції

В цьому підрозділі ми вважаємо відомим загальне правило диференціювання складних функцій з аналізу. Як і вище, розглянемо випадок $n = 2$. Якщо у нас є дві комплекснозначні функції $\zeta = f(z)$ і $g = f(\zeta)$, f є визначеною в деякому околі точки $z_0 \in \mathbb{C}$, $f(z_0) = \zeta_0$, а g визначена в деякому околі $\zeta_0 \in \mathbb{C}$, то в околі точки z_0 визначена складна функція $y = g(f(z))$.

Припустимо, що функція f диференційовна в точці z_0, а g – диференційовна в точці ζ_0, тоді g є диференційовною в точці z_0 і справедлива формула (див. також [2, пункт С, розд. I, с. 15]):

$$(g(f(z)))_z(z_0) = g(f(z))_\zeta(\zeta_0)\zeta_z(z_0) + g(f(z))_{\overline{\zeta}}(\zeta_0)\overline{\zeta}_z(z_0)\,,$$

та згадуючи, що $\zeta = f(z)$ це можна записати так:

$$\boxed{(g(f(z)))_z(z_0) = g(f(z))_\zeta(f(z_0))f_z(z_0) + g(f(z))_{\overline{\zeta}}(f(z_0))\overline{f}_z(z_0)}\,. \qquad (2.7.1)$$

Тут похідні по $\zeta, \overline{\zeta}, z, \overline{z}$ визначені в позапопередній секції – див. співвідношення (2.5.1)–(2.5.2). Міркуючи аналогічно, будем мати:

$$\boxed{(g(f(z)))_{\overline{z}}(z_0) = g(f(z))_\zeta(f(z_0))f_{\overline{z}}(z_0) + g(f(z))_{\overline{\zeta}}(f(z_0))\overline{f}_{\overline{z}}(z_0)}\,. \qquad (2.7.2)$$

Зокрема, якщо g – аналітична функція, то $g_{\overline{\zeta}} = 0$ (перевірте ! – це випливає з умов Коші–Рімана) і формули (2.7.1)–(2.7.2) можна переписати так:

$$\boxed{(g(f(z)))_z(z_0) = g(f(z))_\zeta(f(z_0))f_z(z_0)}\,, \qquad (2.7.3)$$

$$\boxed{(g(f(z)))_{\overline{z}}(z_0) = g(f(z))_\zeta(f(z_0))f_{\overline{z}}(z_0)}\,. \qquad (2.7.4)$$

Приклад 2.7.1. *Користуючись формулами для похідних складної функції, знайти комплексну і максимальні дилатації відображення $f : D \to \mathbb{C}$ та його якобіан, якщо $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, а $f(z) = \cos \overline{z}^3 + z$ (тут і надалі, якщо $z = x + iy$, то $\overline{z} = x - iy$).*

Розв'язок. Знайдемо f_z і $f_{\overline{z}}$. Для зручності позначимо $f_1(z) := \cos \overline{z}^3$ і $f_2(z) = z$. Оскільки диференційовання по z і $\overline{z}$, очевидно, є лінійною операцією, то $f_z = (f_1)_z + (f_2)_z$ і $f_{\overline{z}} = (f_1)_{\overline{z}} + (f_2)_{\overline{z}}$.

Розглянемо спочатку функцію $f_1(z)$. Оскільки $f_1(z) = h_1(h_2(z))$, $h_1(\zeta) = \cos \zeta^3$ і $h_2(z) = \overline{z}$, причому h_1 – аналітична функція, то можна скористатися формулами (2.7.3) і (2.7.4). Згідно цих формул,

$$(f_1)_z = -3(\sin \overline{z}^3) \cdot \overline{z}^2 \cdot 0 = 0\,,$$

$$(f_1)_{\overline{z}} = -3(\sin \overline{z}^3) \cdot \overline{z}^2 \cdot 1 = -3(\sin \overline{z}^3) \cdot \overline{z}^2\,.$$

Крім того, очевидно, що $(f_2)_z = 1$ і $(f_2)_{\overline{z}} = 0$. Остаточно,

$$f_z = 0 + 1 = 1\,,$$

$$f_{\overline{z}} = -3(\sin \overline{z}^3) \cdot \overline{z}^2 + 0 = -3(\sin \overline{z}^3) \cdot \overline{z}^2\,.$$

При $f_{\overline{z}} \neq 0$ маємо, що *комплексна дилатація відображення* f *дорівнює* $\mu(z) = \frac{f_z}{f_{\overline{z}}} = \frac{1}{-3(\sin\overline{z}^3)\cdot\overline{z}^2}$. **Якобіан** $J(f,z) = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2 = 1 - 9|\sin^2\overline{z}^3|\cdot|z|^4$. В точках невиродженості якобіану **максимальна дилатація відображення** f дорівнює (скористаємося співвідношенням (2.5.10))

$$K_\mu(z) = \frac{(|f_z| + |f_{\overline{z}}|)^2}{|f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2} = \frac{(1 + 3|\sin\overline{z}^3|\cdot|z|^2)^2}{1 - 9|\sin^2\overline{z}^3|\cdot|z|^4}\,.$$

□

Приклад 2.7.2. *Знайти частинні похідні по* z *і* $\overline{z}$ *від функції* $w = \overline{\cos(z-5)}$. *Обрахувати максимальну і комплексну дилатації та якобіан.*

Розв'язок. Розв'яжемо задачу спочатку у більш загальному вигляді, тобто, розглянемо комплекснозначну функцію $w(z) = \overline{f(z)}$, де $f(z)$ – аналітична функція (в даному випадку $f(z) = \cos(z-5)$).

Будемо мати: $f(z) = u(z) + iv(z)$, тоді $w = \overline{f(z)} = u(z) - iv(z)$. Маємо:

$$w_z = \frac{1}{2}\cdot(w_x - iw_y) = \frac{1}{2}\cdot(u_x - i\cdot v_x - i(u_y - i\cdot v_y)) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(u_x - v_y + i\cdot(-v_x - u_y)) = 0\,,$$

оскільки функція f – аналітична і, отже, $u_x = v_y$, $-v_x = u_y$ – умови Коші–Рімана. Далі,

$$w_{\overline{z}} = \frac{1}{2}\cdot(w_x + iw_y) = \frac{1}{2}\cdot(u_x - i\cdot v_x + i(u_y - i\cdot v_y)) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(u_x + v_y + i\cdot(-v_x + u_y)) = \overline{\frac{1}{2}\cdot(u_x + v_y + i\cdot(v_x - u_y))} =$$

$$= \overline{\frac{1}{2}\cdot(u_x + i\cdot v_x - i\cdot(u_y + i\cdot v_y))} = \overline{f_z}\,.$$

Отже, для нашої функції $w = \overline{\cos(z-5)}$ ми будемо мати $w_z = 0$, $w_{\overline{z}} = \overline{-\sin(z-5)}$. Комплексна дилатація $\mu_w(z) = w_{\overline{z}}/w_z$ дорівнює нулю за означенням у всіх точках, де $w_z = 0$, тобто, $\mu_w(z) = 0$.

Максимальна дилатація $K_\mu(z) = \frac{(|f_z|+|f_{\overline{z}}|)^2}{||f_z|^2-|f_{\overline{z}}|^2|} = 1$. Рівність $K_\mu(z) = 1$ означає, що w є так званим *локально конформним відображенням* (в околі кожної точки, де якобіан не обертається в нуль, воно є конформним – тобто, $\lambda_1 = \lambda_2$ у викладених вище позначеннях; відповідний еліпсоїд, який відповідає кулі радіусу r при відображенні w, вироджується до точки. Тим більше, відображення є локально квазіконформним, але без приставки "локально" воно таким не буде: можна показати, що відображення – не гомеоморфізм в $\mathbb{C}$.

Якобіан, відповідно, дорівнює $|f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2 = 0 - (|\overline{-\sin(z-5)}|)^2 = -|\sin^2(z-5)|$. $\square$

Приклад 2.7.3. *Знайти частинні похідні по z і $\overline{z}$ від функції $w = \cos(z+\overline{z})$. Обрахувати максимальну і комплексну дилатації та якобіан.*

Розв'язок. Можна скористатися правилом обрахування складної функції: позначаючи $\xi = \xi(z) = z + \overline{z}$ и $f(\xi) = \cos\xi$, будемо мати $w(z) = (f \circ \xi)(z)$

$$w_z = f_z\xi_z + f_{\overline{z}}\overline{\xi}_z\,, \quad w_{\overline{z}} = f_z\xi_{\overline{z}} + f_{\overline{z}}\overline{\xi}_{\overline{z}}\,. \tag{2.7.5}$$

Зі співвідношень (2.7.5), враховуючи, що $f(\xi) = \cos\xi$ – аналітична функція (а для неї $f_{\overline{z}} = 0$), випливає, що

$$w_z = -\sin(\xi)\xi_z = -\sin(z+\overline{z})\,, \quad w_{\overline{z}} = f_z\xi_{\overline{z}} = -\sin(z+\overline{z})\,.$$

Якобіан цього відображення дорівнює нулю:

$$J(w,z) = |w_z|^2 - |w_{\overline{z}}|^2 = |\sin^2(z+\overline{z})| - |\sin^2(z+\overline{z})| = 0\,.$$

Максимальна дилатація $K_\mu(z)$ (котра на площині співпадає з $K_I(z,f)$ і $K_O(z,f)$) дорівнює нескінченності всюди, крім точок z, для яких $\sin(z+\overline{z}) = 0$, де $K_\mu(z) = 1$. Комплексна дилатація $\mu_f(z)$ (за означенням) дорівнює нулю всюди, де вона визначена. $\square$

2.8 Завдання для самостійної роботи

Задача 3. *Користуючись формулами для похідних складної функції, знайти комплексну і максимальні дилатації відображення $f : D \to \mathbb{C}$ та його якобіан, якщо $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, а відображення f задано для кожного з варіантів.*

Номер варіанту	**Відображення**	**Номер варіанту**	**Відображення**
1	$f(z) = \cos \overline{z}$	16	$f(z) = z^2 + \overline{z}^2$
2	$f(z) = \cos \overline{z} + z$	17	$f(z) = z + \overline{z}^2$
3	$f(z) = \cos \overline{z} + z^2$	18	$f(z) = z^2 + \overline{z}$
4	$f(z) = \cos \overline{z} + z^3$	19	$f(z) = z^2 - \overline{z}$
5	$f(z) = \sin \overline{z} + z^2$	20	$f(z) = z^3 + \overline{z}$
6	$f(z) = \sin \overline{z} + 2z^2$	21	$f(z) = z^3 - \overline{z}$
7	$f(z) = \sin \overline{z} - z^2$	22	$f(z) = \overline{\cos z}$
8	$f(z) = \cos z + \overline{z}$	23	$f(z) = \overline{\cos z + 1}$
9	$f(z) = e^{\overline{z}}$	24	$f(z) = \overline{\sin z}$
10	$f(z) = e^{\overline{z}} + z$	25	$f(z) = \overline{\sin z + 1}$
11	$f(z) = e^{\overline{z}} + \overline{z}$	26	$f(z) = \overline{\sin z - 1}$
12	$f(z) = e^{\overline{z}} + z^2$	27	$f(z) = \overline{e^z}$
13	$f(z) = e^{\overline{z}} - z^2$	28	$f(z) = \frac{1}{\overline{z}-1}$
14	$f(z) = e^{\overline{z}} + z^3$	29	$f(z) = \frac{1}{\overline{z}+1}$
15	$f(z) = e^{\overline{z}} - z^3$	30	$f(z) = \frac{1}{(\overline{z})^2+1}$

3 Модулі сімей кривих

3.1 Функції обмеженої варіації. Абсолютно неперервні функції

Перед тим, як безпосередньо перейти до вивчення апарату дослідження квазіконформних відображень – модулів сімей кривих – нам слід вивчити два наступні класи функцій – *функції обмеженої варіації* і *абсолютно неперервні функції*. Дамо означення.

Означення 3.1.1. Нехай $[a, b]$ – відрізок прямої $\mathbb{R}^1$. Функція $f : [a, b] \to \mathbb{R}^1$ називається *функцією обмеженої варіації*, пишуть $f \in V_{[a,b]}$, якщо існує стала $C > 0$ така, що для будь-якого розбиття $\pi = \{a = t_0 \leq$

$t_1 \leq \ldots \leq t_{n-1} \leq t_n\}$ виконано нерівність

$$\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \leq C\,.$$

В цьому випадку величина

$$\bigvee_a^b := \sup_{\pi} \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| < \infty$$

називається *варіацією функції f на відрізку* $[a, b]$.

Зауважимо, що неперервна функція може мати необмежену варіацію і навпаки, розривна функція може бути обмеженої варіації, тобто

$$\boxed{V_{[a,b]} \not\subset C_{[a,b]}\,, \quad C_{[a,b]} \not\subset V_{[a,b]}}\,.$$

Деякі властивості функцій обмеженої варіації:

1) *Функції обмеженої варіації є обмеженими на відрізку* $[a, b]$ (це випливає з нерівності трикутника і означення функцій обмеженої варіації). Обернене твердження невірне (приклад – функція Діріхлє

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

– доведіть це !).

2) *Монотонні функції, визначені на відрізку* $[a, b]$, *мають обмежену варіацію.* Дійсно, нехай, наприклад, f монотонно зростає, тоді

$$\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| = f(t_1) - f(t_0) + f(t_2) - f(t_1) + \cdots + f(t_n) - f(t_{n-1}) =$$

$$= f(t_n) - f(t_0) = f(b) - f(a) < \infty\,.$$

□

3) *Нехай функція f диференційовна на відрізку* $[a, b]$ *(включаючи односторонні похідні у кінцевих точках), причому $|f'(x)| \leq C$ для деякої сталої $C > 0$. Тоді f має обмежену варіацію.* Дійсно, на кожному інтервалі $[t_{i-1}, t_i]$ застосуємо для відображення f теорему Лагранжа, тоді для

деякої точки $\xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$ маємо: $|f(t_i) - f(t_{i-1})| = |f'(\xi_i)| \cdot |t_i - t_{i-1}| \leq C \cdot (t_i - t_{i-1})$. Тоді

$$\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \leq C \cdot \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) = C(b-a)\,.$$

□

4) *Теорема Жордана. Функція f має обмежену варіацію на $[a,b]$ тоді і тільки тоді, коли вона може бути представлена у вигляді $f = f_1 - f_2$, де f_1 і f_2 – монотонно зростаючі функції на $[a,b]$. Зокрема, якщо $f \in V_{[a,b]}$, то f майже всюди диференційовна на $[a,b]$.* (Без доведення. Доведення може бути знайдено, наприклад, в [4, §2, гл. VI]).

Приклад 3.1.1. *З'ясувати, чи буде мати обмежену варіацію функція f на відрізку $[0,1]$, якщо*

$$f(x) \;=\; \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ \quad 0, & x = 0\,. \end{cases}$$

Розв'язок. Покажемо, що функція f має необмежену варіацію на відрізку $[0,1]$, тобто $f \notin V_{[0,1]}$. Для цього спочатку знайдемо всі точки $x \in [0,1]$ такі, що $\sin \frac{1}{x} = \pm 1$. Маємо:

$$\left|\sin \frac{1}{x}\right| = 1 \quad \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + \pi k,\; k \in \mathbb{N} \Rightarrow x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi k} = \frac{2}{\pi + 2\pi k}\,, k \in \mathbb{N}\,.$$

Розглянемо тепер розбиття π_n відрізку $[0,1]$ наступного вигляду:

$$\pi_n = \left\{ x_0 < x_1 = \frac{2}{\pi + 2\pi n} \leq x_2 = \frac{2}{\pi + 2\pi(n-1)} \leq \ldots \leq x_{n-1} = \frac{2}{\pi} \leq x_n = 1 \right\}\,.$$

Тепер маємо:

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \left| \pm \frac{2}{\pi + 2\pi n} - 0 \right| + \left| \pm \frac{2}{\pi + 2\pi n} \pm \frac{2}{\pi + 2\pi(n-1)} \right| +$$

$$+ \left| \pm \frac{2}{\pi + 2\pi(n-1)} \pm \frac{2}{\pi + 2\pi(n-2)} \right| + \cdots + \left| \frac{2}{3\pi} + \frac{2}{\pi} \right| + \left| \sin 1 - \frac{2}{\pi} \right| =$$

$$= \left| \sin 1 - \frac{2}{\pi} \right| + \frac{2}{\pi} + 2 \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{\pi + 2\pi i}\,. \tag{3.1.1}$$

Загальновідомо, що ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{2}{\pi+2\pi i}$ розбігається, тому вираз у (3.1.1) прямує до ∞ при $n \to \infty$. Отже, по обраній послідовності розбить π_n маємо: $\sup\limits_{\pi_n} \sum\limits_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \infty$. $\square$

Приклад 3.1.2. *З'ясувати, чи буде мати обмежену варіацію функція f на відрізку $[0,1]$, якщо*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0\,. \end{cases}$$

Розв'язок. Доведемо, що f має обмежену варіацію на $[0,1]$. Для цього знайдемо похідну функції f і покажемо, що ця похідна є обмеженою. Функція f є диференційовною в усіх точках півінтервалу $(0,1]$ як добуток диференційовних функцій $f_1 = x^2$ і $f_2 = \sin\frac{1}{x}$. Маємо:

$$f'(x) = 2x \cdot \sin\frac{1}{x} + x^2 \cdot \cos\frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \cdot \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\,. \qquad (3.1.2)$$

Оскільки $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq 1$ і $\left|\cos\frac{1}{x}\right| \leq 1$ для всіх $x \in [0,1]$, з (3.1.2) отримаємо:

$$|f'(x)| \leq \left|2x \cdot \sin\frac{1}{x}\right| + \left|\cos\frac{1}{x}\right| \leq 2 \cdot 1 + 1 = 3\,.$$

Доведемо також, що правобічна похідна функції f в точці $x_0 = 0$ існує і дорівнює нулю. Для цього порахуємо похідну в нулі за означенням. Маємо:

$$f'(0) = \lim_{x \to +0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to +0} x^2 \cdot \sin\frac{1}{x} =$$
$$= \lim_{x \to +0} x \cdot \sin\frac{1}{x} = 0\,,$$

оскільки функція $x \sin\frac{1}{x}$ є добутком обмеженої функції $f_1(x) = \sin\frac{1}{x}$ на нескінченно малу функцію $f_2(x) = x$ і отже, є нескінченно малою функцією при $x \to +0$ (тому і $\lim\limits_{x \to +0} x \cdot \sin\frac{1}{x} = 0$ за означенням нескінченно малої функції).

Висновок: функція f має в усіх точках відрізка $[0,1]$, включаючи кінцеві точки, обмежену похідну, тому $f \in V_{[0,1]}$ за властивістю 3) функцій обмеженої варіації (див с. 31). $\square$

3.2 Завдання для самостійної роботи

Задача 4. *Користуючись методикою, розглянутою в прикладах 3.1.1–3.1.2, з'ясувати, чи буде функція f, $f(0) = 0$, на відрізку $[0,1]$ мати обмежену варіацію для кожного з варіантів.*

Номер варіанту	**Відображення**	**Номер варіанту**	**Відображення**
1	$f(x) = x^3 \sin \frac{1}{x}$	16	$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^3}$
2	$f(x) = x^4 \sin \frac{1}{x}$	17	$f(x) = x^3 \sin \frac{1}{x^3}$
3	$f(x) = x^5 \sin \frac{1}{x}$	18	$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^4}$
4	$f(x) = x^6 \sin \frac{1}{x}$	19	$f(x) = x^3 \sin \frac{1}{x^4}$
5	$f(x) = x^7 \sin \frac{1}{x}$	20	$f(x) = x^4 \sin \frac{1}{x^4}$
6	$f(x) = x^8 \sin \frac{1}{x}$	21	$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^5}$
7	$f(x) = x^9 \sin \frac{1}{x}$	22	$f(x) = x^3 \sin \frac{1}{x^5}$
8	$f(x) = x^{10} \sin \frac{1}{x}$	23	$f(x) = x^4 \sin \frac{1}{x^5}$
9	$f(x) = x^3 \sin \frac{1}{x^{1/2}}$	24	$f(x) = x^5 \sin \frac{1}{x^5}$
10	$f(x) = x^4 \sin \frac{1}{x^{1/2}}$	25	$f(x) = x^6 \sin \frac{1}{x^5}$
11	$f(x) = x^5 \sin \frac{1}{x^{1/2}}$	26	$f(x) = x^7 \sin \frac{1}{x^5}$
12	$f(x) = x^6 \sin \frac{1}{x^{1/2}}$	27	$f(x) = x^8 \sin \frac{1}{x^5}$
13	$f(x) = x^7 \sin \frac{1}{x^{1/2}}$	28	$f(x) = x^9 \sin \frac{1}{x^5}$
14	$f(x) = x^8 \sin \frac{1}{x^{1/2}}$	29	$f(x) = x^{10} \sin \frac{1}{x^5}$
15	$f(x) = x^9 \sin \frac{1}{x^{1/2}}$	30	$f(x) = x^{10} \sin \frac{1}{x^{10}}$

Для подальшого викладення нам потрібно розглянути ще один важливий клас функцій. Розглянемо наступне означення.

Означення 3.2.1. Функція $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ називається *абсолютно неперервною*, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon)$: для будь якої системи непересічних інтервалів (a_i, b_i), $i = 1, 2, \ldots, n$ такої, що $\sum\limits_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta$, виконано умову: $\sum\limits_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$.

Деякі властивості абсолютно неперервних функцій

1) Сума, різниця, добуток абсолютно неперервних функцій та помноження абсолютно неперервної функції на число є знову абсолютно неперервною функцією.

2) Якщо функція абсолютно неперервна на відрізку, то вона неперервна, рівномірно неперервна і має обмежену варіацію.

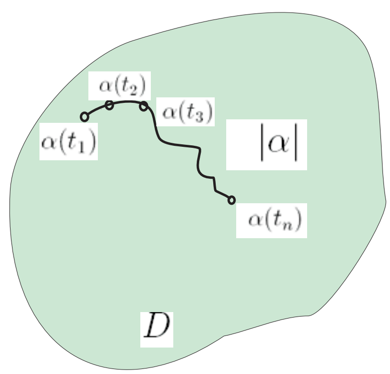
3) Абсолютно неперервні функції і тільки вони відновлюються від своєї похідної за операцією інтегрування з точністю до постійного доданку: $\int\limits_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a)$.

Нескладно побудувати приклад неперервної функції, яка не є абсолютно неперервною. Наприклад, підійде функція з прикладу 3.1.1: оскільки вона має необмежену варіацію, то за властивістю 2) вона не є й абсолютно неперервною. Значно складніше побудувати **неперервну функцію обмеженої варіації, яка не є абсолютно неперервною** (так звана **Канторова дрібниця**). Однак, більш близьке знайомство з абсолютно неперервними функціями не входить до найближчих задач нашого курсу.

3.3 Завдання для самостійної роботи

Задача 5. *З'ясуйте, чи буде функція f з задачі 4 абсолютно неперервною для кожного з варіантів.*

3.4 Найпростіші властивості кривих в $\mathbb{R}^n$.



Мал. 7. Крива в області D в $\mathbb{R}^n$.

Почнемо з означень.

Означення 3.4.1. *Кривою* в $\mathbb{R}^n$ називається неперервне відображення $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$, за умовою, що I – це одна з множин типу $I = (a, b)$; $I = [a, b]$; $I = (a, b]$; $I = [a, b)$. Нехай $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $a = t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_{n-1} \leq t_n$ – розбиття відрізку $[a, b]$, тоді *довжиною* кривої α називається наступна величина:

$$l(\alpha) = \sup \sum_{i=1}^{k} |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})| ,$$

де sup іде по усіх таких розбиттях $a = t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_{n-1} \le t_n$ (див. малюнок 7). Тут і надалі *носій кривої α (або її образ) є множина*

$$|\alpha| = \{x \in D : \exists\, t \in [a, b] : \alpha(t) = x\}\,.$$

Крива α називається спрямлюваною, якщо $l(\alpha) < \infty$.

Наведене означення дуже стисло пов'язано з наступним.

Означення 3.4.2. Нехай $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ – спрямлювана крива. Зафіксуємо параметр $t \in [a, b]$ і позначимо через $s(t)$ довжину кривої $\alpha : [a, t] \to \mathbb{R}^n$. Функція $s(t)$ називається *функцією довжини* кривої α.

Має місце наступна теорема ([10, теорема 1.3]).

Теорема 3.4.1. *Функція $s(t) : [a, b] \to \mathbb{R}^1$ має наступні властивості:*

(1) для будь-яких $a \le t_1 \le t_2 \le b$ маємо: $s(t_2) - s(t_1) \ge |\alpha(t_2) - \alpha(t_1)|$.

(2) функція $s(t)$ є зростаючою.

(3) функція $s(t)$ неперервна.

(4) функція $s(t)$ абсолютно неперервна тоді і тільки тоді, коли $\alpha(t)$ абсолютно неперервна.

(5) похідні $s'(t)$ і $\alpha'(t)$ існують майже всюди і $s'(t) = |\alpha'(t)|$ майже всюди.

(6) якщо $l(\alpha)$ – довжина кривої α, то $l(\alpha) \ge \int\limits_a^b s'(t)dt = \int\limits_a^b |\alpha'(t)|dt$, причому рівність має місце тоді і тільки тоді, коли $\alpha(t)$ абсолютно неперервна.

3.5 Заміна параметра на кривих. Натуральна параметризація. Лінійний інтеграли

Ми наближаємося до означення модуля сімей кривих – одного з найважливіших означень курсу. Щоб його надати, нам потрібно мати початкове уявлення про так звану *натуральну параметризацію* кривої – параметризацію кривої за допомогою параметра довжини $s = s(t)$. Також, щоб визначити лінійний інтеграл від функції по кривій (що також є необхідним для нашої мети), треба, щоб функція була "не зовсім поганою". Це вимагає від нас знати означення *борелевої функції.* Переходимо до означень.

Означення 3.5.1. Нехай $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ – спрямлювана крива. Кажуть, що крива α виходить з кривої $\beta : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ *зростаючою заміною* *параметра*, якщо існує зростаюча функція $h : [a,b] \to [c,d]$ така, що $\alpha(t) = \beta \circ h(t)$.

Криві, що виходять одна з іншої за допомогою заміни параметра, мають однаковий образ (носій) і, також, однакові довжини. Наступна теорема є ключовою.

Теорема 3.5.1. *Для будь-якої спрямлюваної кривої* $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *існує єдина спрямлювана крива* $\alpha^0 : [0,c] \to \mathbb{R}^n$ *з наступними властивостями:*

(1) α *виходить з* α^0 *за допомогою зростаючої заміни параметра.*

(2) Якщо $l(\alpha^0|[0,t])$ *позначає довжину кривої* α^0 *на відрізку* $[0,t]$, *то* $l(\alpha^0|[0,t]) = t$ *для будь-якого* $t \in [0,c]$. *Більше того,* $c = l(\alpha)$ *і* $\alpha(t) = \alpha^0 \circ s_\alpha(t)$ *(*$s_\alpha(t)$ *– функція довжини кривої* α*.)*

Вказана параметризація кривої α^0 називається *нормальною параметризацією кривої* α, а параметр $s \in [0, l(\alpha)]$ – *натуральним параметром.* Криву α^0 називають ще *нормальним зображенням кривої* α.

Наступні означення достатньо сприймати суто формально, але вони все ж таки необхідні нам для подальшого викладення.

Означення 3.5.2. *Кільцем множин* називається система множин, замкнена стосовно операцій об'єднання, перетину, віднімання та симетричної різниці. Довільне кільце множин містить і порожню множину.

Означення 3.5.3. *Одиницею кільця множин* $\mathfrak{B}$ називається множина E, що належить до $\mathfrak{B}$ і для довільної множини $A \in \mathfrak{B}$ виконується: $A \cap E = A$.

Означення 3.5.4. σ*-кільцем множин* називається таке кільце множин, яке разом з кожною послідовністю множин $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ містить також їх об'єднання $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

Означення 3.5.5. σ*-алгеброю множин* називається σ-кільце множин з одиницею.

Означення 3.5.6. *Борелівська сигма-алгебра* -— це мінімальна сигма-алгебра, така, що містить всі відкриті підмножини $\mathbb{R}^n$. Множина $A \subset \mathbb{R}^n$ називається *борелевою*, якщо вона є множиною, що належить цій сигма-алгебрі. Зокрема, всі замкнені і всі відкриті множини $\mathbb{R}^n$ за означенням є борелевими. Будь-яке їх поєднання $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, або перетин $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ також будуть борелевими.

Означення 3.5.7. Функція $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (або $\rho : D \to \mathbb{R}$, де D – область в $\mathbb{R}^n$) називається *борелевою*, якщо точний прообраз $\rho^{-1}(E) =$

$\{x \in \mathbb{R}^n : \exists\, y \in E : f(x) = y\}$ (відповідно, $\rho^{-1}(E) = \{x \in D : \exists\, y \in E : f(x) = y\}$) є борелевою множиною, за умовою, що E – довільна борелева множина.

Тепер ми в змозі дати означення лінійного інтегралу від функції ρ по (локально спрямлюваній) кривій α. Тут і надалі крива $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ називається *локально спрямлюваною*, якщо звуження $\alpha|_{[a,b]}$ є спрямлюваною кривою для будь-якого замкненого підінтервалу $[a, b] \subset I$.

Означення 3.5.8. Нехай функція $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (або $\rho : D \to \mathbb{R}$, де D – область в $\mathbb{R}^n$) – борелева, а крива $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ є спрямлюваною, тоді покладемо:

$$\int\limits_{\alpha} \rho(x)|dx| := \int\limits_{0}^{l(\alpha)} \rho(\alpha^0(t))dt\,,$$

де α^0 – нормальне зображення кривої α, див. вище. Якщо α – абсолютно неперервна крива, можна довести, що

$$\int\limits_{\alpha} \rho(x)|dx| = \int\limits_{a}^{b} \rho(\alpha(t))|\alpha'(t)|\,dt$$

– відома з курсу математичного аналізу формула (див. [10, теорема 4.1]). Інтеграли по локально спрямлюваним кривим визначаються аналогічно.

3.6 Означення і найпростіші властивості модулів сімей кривих

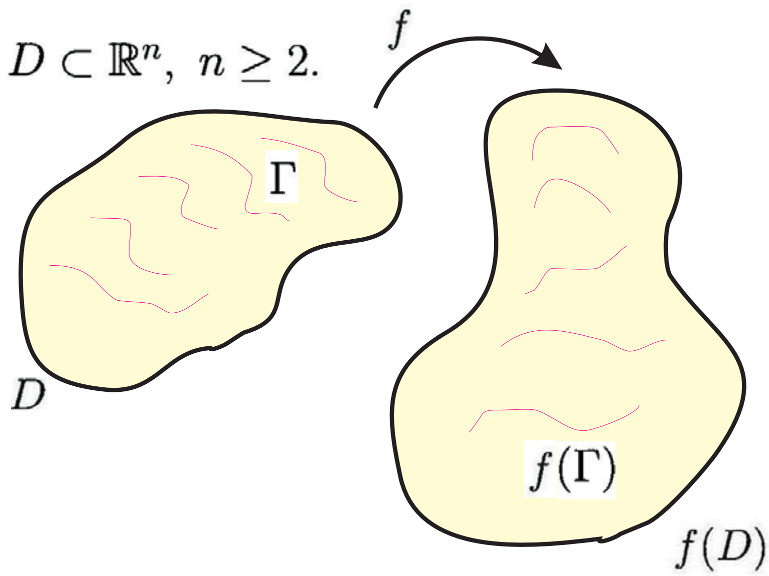
Як і вище *кривою* γ називаєтсья неперервне відображення відрізка $[a, b]$ (або відкритого чи напіввідкритого інтервалу (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$) у $\mathbb{R}^n$, $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Під сім'єю кривих Γ ми розуміємо деякий фіксований набір кривих γ, а

$$f(\Gamma) = \{f \circ \gamma | \gamma \in \Gamma\}\ ,$$

див. малюнок 8.

Означення 3.6.1. Борелева функція $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ зветься *допустимою* щодо сім'ї Γ кривих γ у $\mathbb{R}^n$, якщо криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_{\gamma} \rho(x) \quad |dx|$ по кривій γ задовольняє умову

$$\int\limits_{\gamma} \rho(x) \quad |dx| \geq 1 \tag{3.6.1}$$



Малюнок 8. Сім'ї кривих в $\mathbb{R}^n$ і відображення.

для всіх (локально спрямованих) кривих $\gamma \in \Gamma$. У цьому випадку ми пишемо: $\rho \in \operatorname{adm} \Gamma$.

"Допустимість", що визначена вище в (3.6.1), з геометричної точки зору означає, що довільна крива γ сім'ї Γ має довжину, не меншу, ніж 1 у "метриці" ρ. Наступне означення, як вважається, вперше з'явилося в роботах Л. Альфорса і А. Берлінга, див., напр., [1] і [2] а також О. Лехто і К. Вертанена, див. [5].

Означення 3.6.2. *Модулем* сім'ї кривих Γ зветься величина

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm} \Gamma} \int\limits_D \rho^n(x) \ \ dm(x)\,. \tag{3.6.2}$$

Властивості модуля M у певній мірі є аналогічними до властивостей міри Лебега m у $\mathbb{R}^n$. Саме, модуль порожньої сім'ї кривих дорівнює нулю, $M(\varnothing) = 0$, має властивість монотонності щодо сімей кривих Γ_1 і Γ_2 :

$$\Gamma_1 \subset \Gamma_2 \quad \Rightarrow \quad M(\Gamma_1) \leq M(\Gamma_2)\,, \tag{3.6.3}$$

а також властивість напівадитивності

$$M\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} M(\Gamma_i)\,, \tag{3.6.4}$$

див. теорему 6.2 [10]. Говорять, що сім'я кривих Γ_1 *мінорується* сім'єю Γ_2, пишемо $\Gamma_1 > \Gamma_2$, якщо для кожної кривої $\gamma \in \Gamma_1$ існує підкрива, що належить до сім'ї Γ_2. Зауважимо, що

$$\Gamma_1 > \Gamma_2 \quad \Rightarrow \quad M(\Gamma_1) \le M(\Gamma_2)\,, \tag{3.6.5}$$

див. теорему 6.4 [10].

Модуль сімей кривих є чудовим з тієї точки зору, що за його допомогою може бути визначено довільне квазіконформне відображення. У роботі [3], див. розд. 13, Ф. Герінг визначив K–квазіконформне відображення як гомеоморфізм, що змінює модуль кільцевої області не більше, ніж у K разів. Має місце наступна

Теорема 3.6.1. *Гомеоморфізм $f : D \to \mathbb{R}^n$ називається квазіконформним відображенням, якщо існує стала $K'' < \infty$ така, що для будь–якої сім'ї Γ кривих γ, що лежить в області D, виконано нерівність*

$$\boxed{(1/K'') \cdot M(\Gamma) \le M(f(\Gamma)) \le K'' \cdot M(\Gamma)\,.} \tag{3.6.6}$$

Тут і далі модуль сімей кривих M є визначеним за співвідношенням (3.6.2). При цьому, для квазіконформності f достатньо виконання лише правої частини в нерівності (3.6.6), тобто, нерівності

$$\boxed{M(f(\Gamma)) \le K' \cdot M(\Gamma)\,,} \tag{3.6.7}$$

див., напр., [10, теорема 34.3], тому що ліва частина (3.6.6) в цьому випадку виконується автоматично при певній сталій. Іноді, в означеннях, наведених вище, замість розгляду умови $f : D \to \mathbb{R}^n$, припускають, що $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, де $\overline{\mathbb{R}^n} := \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, що, мабуть, не є надто важливим. Зокрема, кожне конформне відображення $f : D \to \mathbb{R}^n$, визначене в області $D \subset \mathbb{R}^n$, задовольняє умову $M(f(\Gamma)) = M(\Gamma)$ для довільної сім'ї кривих Γ в області D, див., напр., [10, теорему 8.1]; звідси випливає, що будь–яке конформне відображення задовольняє умову (3.6.6) за $K'' = 1$.

Справедливим є наступне твердження (див. [10, теорема 15.1]).

Теорема 3.6.2. *Якщо $f : D \to \mathbb{R}^n$ – квазіконформне відображення, то f задовольняє умову (3.6.7) при $K' = \sup\limits_{x\in D} K_I(x, f)$, де функцію $K_I(x, f)$ визначено за допомогою співвідношення (2.2.1).*

3.7 Завдання для самостійної роботи

Задача 6. *Для кожного з варіантів довести, що* f *– квазіконформне відображення* $f : D \to \mathbb{R}^3$, $D = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x - e| < 1\} \subset \mathbb{R}^3$, $e = (2, 2, 2)$, *і визначити для нього сталу* K' *з нерівності (3.6.7), користуючись твердженням теореми 3.6.2.*

Номер варіанту	**Відображення**	**Номер варіанту**	**Відображення**
1	$f(x) = (x_1, 3x_2, 5x_3)$	16	$f(x) = (x_1^4, 3x_2^4, 5x_3^4)$
2	$f(x) = (-x_1, 3x_2, 5x_3)$	17	$f(x) = (-x_1^4, 3x_2^4, 5x_3^4)$
3	$f(x) = (x_1, -3x_2, 5x_3)$	18	$f(x) = (-x_1^4, -3x_2^4, 5x_3^4)$
4	$f(x) = (x_1, 3x_2, -5x_3)$	19	$f(x) = (-x_1^4, -3x_2^4, -5x_3^4)$
5	$f(x) = (x_1^2, 3x_2^2, 5x_3^2)$	20	$f(x) = (x_1^4, 3x_2^4, -5x_3^4)$
6	$f(x) = (-x_1^2, 3x_2^2, 5x_3^2)$	21	$f(x) = (x_1^5, 2x_2^5, 2x_3^5)$
7	$f(x) = (x_1^2, -3x_2^2, 5x_3^2)$	22	$f(x) = (-x_1^5, 2x_2^5, 2x_3^5)$
8	$f(x) = (x_1^2, 3x_2^2, -5x_3^2)$	23	$f(x) = (x_1^5, -2x_2^5, 2x_3^5)$
9	$f(x) = (-x_1^2, -3x_2^2, 5x_3^2)$	24	$f(x) = (x_1^5, 2x_2^5, -2x_3^5)$
10	$f(x) = (-x_1^2, -3x_2^2, -5x_3^2)$	25	$f(x) = (-x_1^5, -2x_2^5, -2x_3^5)$
11	$f(x) = (x_1^3, 3x_2^3, 5x_3^3)$	26	$f(x) = (x_1^6, 2x_2^6, 2x_3^6)$
12	$f(x) = (-x_1^3, 3x_2^3, 5x_3^3)$	27	$f(x) = (-x_1^6, 2x_2^6, 2x_3^6)$
13	$f(x) = (x_1^3, -3x_2^3, 5x_3^3)$	28	$f(x) = (x_1^6, -2x_2^6, 2x_3^6)$
14	$f(x) = (x_1^3, 3x_2^3, -5x_3^3)$	29	$f(x) = (x_1^6, 2x_2^6, -2x_3^6)$
15	$f(x) = (-x_1^3, -3x_2^3, -5x_3^3)$	30	$f(x) = (-x_1^6, -2x_2^6, -2x_3^6)$

Приклад 3.7.1. *Довести, що* f *– квазіконформне відображення,* $f : D \to \mathbb{R}^3$, $D = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x - e| < 1\} \subset \mathbb{R}^3$, $e = (2, 2, 2)$, *і визначити для нього сталу* K' *з нерівності (3.6.7), користуючись твердженням теореми 3.6.2, якщо* $f(x) = (x_1^2, 2x_2^2, 3x_3^2)$.

Розв'язок. Маємо $f_1(x) = x_1^2$, $f_2(x) = 2x_2^2$, $f_3(x) = 3x_3^3$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 2x_1$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 4x_2$, $\frac{\partial f_3}{\partial x_3} = 6x_3$, $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = 0$ при $i \neq j$,

$$f'(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 4x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 6x_3 \end{pmatrix}.$$

Звідси $|J(x, f)| = 48|x_1x_2x_3|$ і $l(f'(x)) = \min\limits_{x \in D, x=(x_1,x_2,x_3)} \{2|x_1|, 4|x_2|, 6|x_3|\}$. Оцінимо знизу величину $l(f'(x))$, а $J(x, f)$ – зверху. Для будь-якого $i =$

$1, 2, 3$ маємо:

$$|x_i - 2| < |x - (2,2,2)| < 1\,,$$

звідки за нерівністю трикутника

$$-1 < x_i - 2 < 1, \quad 1 < x_i < 3, \quad 1 < |x_i| < 3\,.$$

Звідси $J(x, f) \leq 48 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 432$, $l(f'(x)) \geq \min\{(2 \cdot 1), (4 \cdot 1), (6 \cdot 1)\} = \min\{2, 4, 6\} = 2$.

Зауважимо, що всі частинні похідні відображення f існують і неперервні, отже, $f \in C^1 \subset W^{1,3}_{loc}(D)$. Доведемо, що f – гомеоморфізм. Беремо довільні $a = (a_1, a_2, a_3) \in D$ і $b = (b_1, b_2, b_3)$. Ми маємо довести, що рівність $f(a) = f(b)$ тягне $a = b$. Маємо $f(a) = f(b) \Rightarrow (a_1^2, 2a_2^2, 3a_3^2) = (b_1^2, 2b_2^2, 3b_3^2) \Rightarrow |a_1| = |b_1|$, $|a_2| = |b_2|$, $|a_3| = |b_3| \Rightarrow a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$, оскільки за доведеним вище $1 < a_i < 3$, $1 < b_i < 3$, $i = 1, 2, 3 \Rightarrow a = b \Rightarrow f$ – гомеоморфізм.

За означенням і отриманими вище оцінками для $|J(x, f)|$ і $l(f'(x))$, маємо

$$K_I(x, f) = \frac{|J(x, f)|}{(l(f'(x)))^3} \leq \frac{432}{2^3} = 54\,. \tag{3.7.1}$$

Відображення f є квазіконформним, що випливає наприклад, з означення 2.2.1: f – квазіконформне, оскільки f – гомеоморфізм класу $W^{1,3}_{loc}(D)$ і, крім того, $K_I(x, f)$ обмежена – це випливає з нерівності (і, отже, обмеженою є і величина $K_O(x, f)$, що випливає з другої нерівності у (2.2.3)). Замість сталої K' з нерівності (3.6.7) можна взяти будь-яку $C \geq 54$. $\Box$

3.8 Фізичний сенс модуля сімей кривих

У подальшому нам знадобляться означення конденсатора і ємності конденсатора, див., напр., § 5 в [6] або п. 10 розд. II в [9].

Означення 3.8.1. *Конденсатором* називають пару $E = (A, C)$, де A – відкрита множина в $\mathbb{R}^n$, а C – компактна підмножина A. *Ємністю* конденсатора E зветься наступна величина:

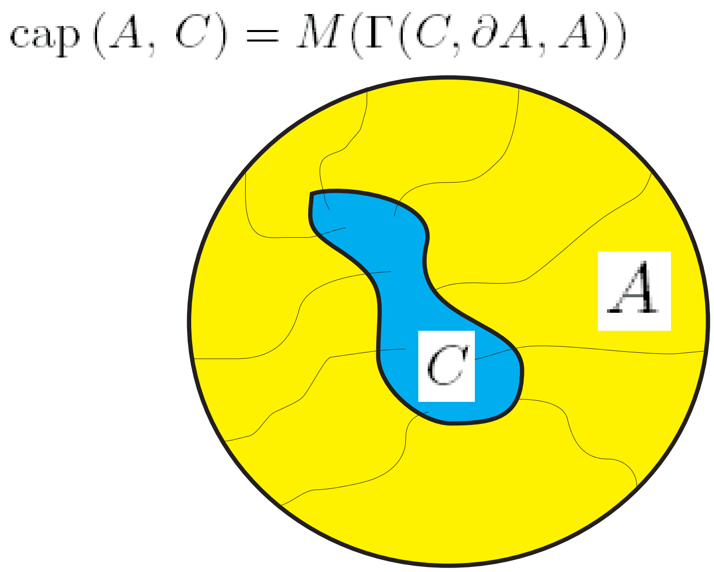
$$\operatorname{cap} E \quad = \quad \operatorname{cap}\,(A,\, C) \quad = \quad \inf_{u\, \in\, C_0^\infty(E)} \quad \int\limits_A |\nabla u|^n \; dm(x)\,, \tag{3.8.2}$$

де $C_0^\infty(E) = C_0^\infty\,(A,\, C)$ – сім'я невід'ємних неперервних функцій $u : A \to \mathbb{R}$ з компактним носієм в A таких, що $u(x) \geq 1$ при $x \in C$ і $u \in C^\infty(A)$.

У формулі вище, як завжди, $|\nabla u| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} (\partial_i u)^2\right)^{1/2}$.

Надалі для замкненої кривої $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ символ $|\gamma|$ позначає носій γ, тобто $|\gamma| = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists\, t \in [a, b] : \gamma(t) = x\}$. Аналогічно можна визначити носій довільної кривої, не обов'язково замкненої.

Теорема 3.8.1. *Нехай $E = (A, C)$ – довільний конденсатор у $\mathbb{R}^n$ і нехай Γ_E – сім'я всіх кривих типу $\gamma : [a, b) \to A$ з $\gamma(a) \in C$ і $|\gamma| \cap (A \setminus F) \neq \varnothing$ для довільного компакта $F \subset A$. Тоді $\operatorname{cap} E = M(\Gamma_E)$, див. [9, твердження 10.2, розд. II] та малюнок 9.*



Малюнок 9. Зв'язок між модулем сімей кривих та ємністю конденсатора.

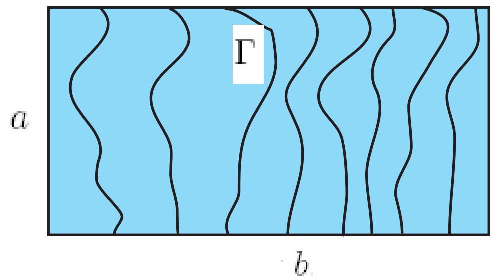
Іншими словами, для конденсатора $E = (A, C)$ сім'я Γ_E складається з тих і тільки тих кривих, що мають початок у C, лежать у A і, в той же час, цілком не лежать ні в одному фіксованому компакті всередині A. У випадку обмеженої множини A такі криві повинні "підходити" до межі A.

3.9 Обрахування модулів сімей кривих у деяких випадках

Модуль сімей кривих у більшості випадків в явному вигляді не обраховується. Зазвичай його можна лише оцінити зверху або знизу, зокрема, можна знайти оцінку модуля сімей кривих через міру і діаметр. Однак, в деяких окремих ситуаціях модуль може бути обрахований явно. Розглянемо дві такі ситуації.

1. Модуль прямокутника

Нехай Γ – сім'я кривих, що з'єднують протилежні сторони прямокутника Π на площині $\mathbb{R}^2$, які мають довжину b, а інша сторона прямокутника має сторону a (див. малюнок 10).



Малюнок 10. Модуль сімей кривих, що з'єднують протилежні сторони прямокутника.

Беремо будь-яку функцію $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$. За нерівністю Гельдера, оскільки $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$, маємо $\int\limits_0^a \rho^2(x,y)dy \geq \frac{1}{a} \cdot \int\limits_0^a \rho(x,y)dy = \frac{1}{a}$ і, отже, за теоремою Фубіні

$$\int\limits_{\Pi} \rho^2(x,y)dxdy \geq \int\limits_0^b \left(\int\limits_0^a \rho^2(x,y)dy\right) dx \geq \frac{b}{a} \Rightarrow M(\Gamma) \geq \frac{b}{a}\,. \qquad (3.9.3)$$

З іншого боку, нехай $\rho(x) = 1/a$ при $x \in \Pi$ і $\rho(x) = 0$ при $x \notin \Pi$. Тоді для будь-якій кривій $\gamma \in \Gamma$ маємо $\int\limits_{\gamma} \rho(x)|dx| \geq \frac{1}{a} \cdot a = 1 \Rightarrow \rho \in \operatorname{adm}\Gamma \Rightarrow$

$$M(\Gamma) \leq \frac{1}{a^2} \cdot a \cdot b = \frac{b}{a}\,. \qquad (3.9.4)$$

З (3.9.3) і (3.9.4) випливає, що

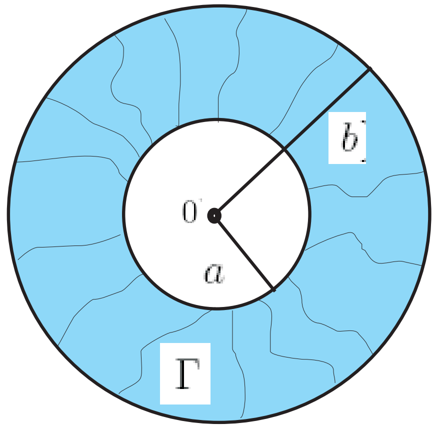
$$\boxed{M(\Gamma) = \frac{b}{a}\,.} \qquad (3.9.5)$$

2. Модуль сферичного кільця.

Порахуємо модуль сімей кривих, що з'єднують обкладинки сферичного кільця

$$A(a,b,0) = \{x \in \mathbb{R}^n : a < |x| < b\}\,,$$

див. малюнок 11. Нехай $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$. Для кожного $y \in \mathbb{S}^{n-1} = \{y \in \mathbb{R}^n :$



Малюнок 11. Модуль сімей кривих, що з'єднують обкладинки сферичного кільця.

$|y|=1\}$ покладемо $\gamma_y(t)=ty$. Тоді за нерівністю Гельдера

$$1\leq\left(\int\limits_{\gamma_y}\rho(x)|dx|\right)^n\leq\int\limits_a^b\rho^n(ty)t^{n-1}dt\cdot\left(\int\limits_a^b t^{-1}dt\right)^{n-1}=$$

$$=\left(\log\frac{b}{a}\right)^{n-1}\cdot\int\limits_a^b\rho^n(ty)t^{n-1}dt\,.$$

Інтегруючи тут по усіх $y\in\mathbb{S}^{n-1}$ і застосовуючи теорему Фубіні, отримаємо:

$$\omega_{n-1}\leq\left(\log\frac{b}{a}\right)^{n-1}\cdot M(\Gamma),\quad M(\Gamma)\geq\frac{\omega_{n-1}}{\log^{n-1}\frac{b}{a}}\,,\tag{3.9.6}$$

де ω_{n-1} – площа одиничної сфери $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$. З іншого боку, покладемо $\rho(x)=\frac{1}{|x|}\log\frac{b}{a}$ при $x\in A(a,b,0)$ і $\rho(x)=0$ при $x\notin A(a,b,0)$. Маємо $\rho(x)\in\operatorname{adm}\Gamma$ і

$$M(\Gamma)\leq\int\limits_{A(a,b,0)}\rho^n(x)dm(x)\leq\frac{\omega_{n-1}}{\log^{n-1}\frac{b}{a}}\,.\tag{3.9.7}$$

З (3.9.6) та (3.9.7) випливає, що

$$\boxed{M(\Gamma)=\frac{\omega_{n-1}}{\log^{n-1}\frac{b}{a}}\,,}\tag{3.9.8}$$

де ω_{n-1} – площа одиничної сфери $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$.

Вправа 3.9.1. *Користуючись співвідношенням (3.9.8), доведіть, що модуль сімей кривих, що проходить через фіксовану точку, дорівнює нулю.*

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Ahlfors L. Conformal invariants and function–theoretic null-sets / L. Ahlfors, A. Beurling // Acta Math. – 1950. – V. 83. – P. 101–129.

[2] Альфорс Л. Лекции по квазиконформным отображениям / Л. Альфорс. – Москва: Мир, 1969. – 133 с.

[3] Gehring F.W. Rings and quasiconformal mappings in space / F.W. Gehring // Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. – V. 103. – P. 353–393.

[4] Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – Москва: Наука, 1976. – 531 с.

[5] Lehto O. Quasiconformal Mappings in the Plane / O. Lehto, K. Virtanen. – New York etc.: Springer, 1973. – 258 p.

[6] Martio O. Definitions for quasiregular mappings / O. Martio, S. Rickman, J. Väisälä // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. – 1969. – V. 448. – P. 1–40.

[7] Мазья В.Г. Пространства Соболева / В.Г. Мазья. – Ленинград: Издательство ленинградского университета, 1985. – 416 с.

[8] Решетняк Ю.Г. Пространственные отображения с ограниченным искажением / Ю.Г. Решетняк. – Новосибирск: Наука, 1982. – 285 с.

[9] Rickman S. Quasiregular mappings / S. Rickman. – Berlin etc. Springer-Verlag, 1993. – 213 p. – (Results in Mathematic and Related Areas (3), 26).

[10] Väisälä J. Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings / Väisälä J. – Berlin etc.: Springer–Verlag, 1971, 144 p. – (Lecture Notes in Math., V. 229).

Перелік додаткової рекомендованої літератури

[1] The Beltrami Equation: A Geometric Approach / [Gutlyanskii V. Ya., Ryazanov V. I., Srebro U., Yakubov E.] – Developments in Mathematics, vol. 26. New York etc.: Springer, 2012.

[2] Ковтонюк Д. К теории отображений классов Соболева и Орлича-Соболева / Д. Ковтонюк, Р. Салимов, Е. Севостьянов. – Киев: Наукова думка, 2013.

[3] Moduli in modern mapping theory / [Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.]. – New York: Springer Science + Business Media, LLC, 2009. – 367 p. – (Springer Monographs in Mathematics).

[4] Севостьянов Е. Исследование пространственных отображений геометрическим методом / Е. Севостьянов. – Киев: Наукова думка, 2014.

[5] Сычёв А.В. Модули и пространственные квазиконформные отображения / А.В. Сычёв. – Новосибирск: Наука, 1983.

Навчальне видання

СЕВОСТЬЯНОВ Євген Олександрович

Модулі сімей кривих і квазіконформні відображення

Навчально-методичний посібник

Дизайн обкладинки І. Клімової
Редактори: А.Черняк, Р. Ступницький
Комп'ютерне верстання С. Б. Іванова

Надруковано з оригінал-макета автора

Підписано до друку 06.04.15. Формат 60x90/16. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman. Друк різографічний.
Ум. друк. арк. 3.0. Обл. вид. арк. 2.3. Наклад 300. Зам. 56.

Видавець і виготовлювач
Видавництво Житомирського державного університету імені Івана Франка
м. Житомир, вул. Велика Бердичівська, 40
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
серія ЖТ №10 від 07.12.04 р.
електронна пошта (E-mail): zu@zu.edu.ua

ISBN 978-966-485-188-3