Є.О. Севостьянов

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МІРИ ТА ІНТЕГРАЛА

Навчально-методичний посібник

Міністерство освіти і науки України
Житомирський державний університет імені Івана Франка

Є.О. Севостьянов

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МІРИ ТА ІНТЕГРАЛА

Навчально-методичний посібник

Житомир
Вид-во ЖДУ ім. І. Франка
2015

УДК 517.518.112, 517.518.124, 517.518.24
ББК 22.161.5
В22

Рекомендовано до друку вченою радою Житомирського державного університету імені Івана Франка (протокол № 11 від 26.06.2015 р.)

Рецензенти:

Ю.Б. Зелінський – професор, доктор фіз.-мат. наук, професор, завідувач відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України;

С.І. Скуратівський - кандидат фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри фізики і вищої математики Житомирського державного технологічного університету.

Севостьянов Є. О.

В-22 Елементи теорії міри і інтеграла : Навчально-методичний посібник. / Севостьянов Є.О. – Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2015.– 46 с.

ISBN 978-966-485-196-8

Навчальний посібник містить елементи впровадження до теорії міри та інтеграла Лебега, ураховуючи розглядання інших важливих розділів математичного аналізу, таких як функції обмеженої варіації, абсолютно неперервні функції та інтеграл Рімана-Стильтьєса. Елементи теорії суміщаються з наведенням задач для самостійного розгляду, а також елементарними прикладами їх розв'язку.

Для студентів фізико-математичного факультету усіх форм навчання.

УДК 517.518.112, 517.518.124, 517.518.24
ББК 22.161.5

ISBN 978-966-485-196-8

ЗМІСТ

1 Деякі загальні питання аналізу

1.1 Функції обмеженої варіації

Дамо означення.

Означення 1.1.1. Нехай $[a, b]$ – відрізок прямої $\mathbb{R}^1$. Функція $f : [a, b] \to \mathbb{R}^1$ називається *функцією обмеженої варіації*, пишуть $f \in V_{[a,b]}$, якщо існує стала $C > 0$ така, що для будь-якого розбиття $\pi = \{a = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_{n-1} \leq t_n\}$ виконано нерівність

$$\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \leq C\,.$$

В цьому випадку величина

$$\bigvee_a^b (f) := \sup_\pi \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| < \infty$$

називається *варіацією функції f на відрізку* $[a, b]$.

Зауважимо, що неперервна функція може мати необмежену варіацію і навпаки, розривна функція може бути обмеженої варіації, тобто

$$\boxed{V_{[a,b]} \not\subset C_{[a,b]}\,, \quad C_{[a,b]} \not\subset V_{[a,b]}}\,.$$

Деякі властивості функцій обмеженої варіації:

1) *Функції обмеженої варіації є обмеженими на відрізку* $[a, b]$ (це випливає з нерівності трикутника і означення функцій обмеженої варіації). Обернене твердження невірне (приклад – функція Діріхлє

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

– доведіть це !).

2) *Монотонні функції, визначені на відрізку* $[a, b]$, *мають обмежену варіацію.* Дійсно, нехай, наприклад, f монотонно зростає, тоді

$$\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| = f(t_1) - f(t_0) + f(t_2) - f(t_1) + \cdots + f(t_n) - f(t_{n-1}) =$$

$$= f(t_n) - f(t_0) = f(b) - f(a) < \infty\,.$$

□

3) Якщо $f, g \in V_{[a,b]}$, то $\lambda f + \mu g \in V_{[a,b]}$ и $f \cdot g \in V_{[a,b]}$.

4) *Нехай функція f диференційовна на відрізку $[a, b]$ (включаючи односторонні похідні у кінцевих точках), причому $|f'(x)| \leq C$ для деякої сталої $C > 0$. Тоді f має обмежену варіацію.* Дійсно, на кожному інтервалі $[t_{i-1}, t_i]$ застосуємо для відображення f теорему Лагранжа, тоді для деякої точки $\xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$ маємо: $|f(t_i) - f(t_{i-1})| = |f'(\xi_i)| \cdot |t_i - t_{i-1}| \leq C \cdot (t_i - t_{i-1})$. Тоді

$$\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \leq C \cdot \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) = C(b - a)\,.$$

□

5) **Теорема Жордана.** *Функція f має обмежену варіацію на $[a, b]$ тоді і тільки тоді, коли вона може бути представлена у вигляді $f = f_1 - f_2$, де f_1 і f_2 – монотонно зростаючі функції на $[a, b]$. Зокрема, якщо $f \in V_{[a,b]}$, то f майже всюди диференційовна на $[a, b]$.* (Без доведення. Доведення може бути знайдено, наприклад, в [3, §2, гл. VI]).

Приклад 1.1.1. *З'ясувати, чи буде мати обмежену варіацію функція f на відрізку $[0, 1]$, якщо*

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0\,. \end{cases}$$

Розв'язок. Покажемо, що функція f має необмежену варіацію на відрізку $[0, 1]$, тобто $f \notin V_{[0,1]}$. Для цього спочатку знайдемо всі точки $x \in [0, 1]$ такі, що $\sin \frac{1}{x} = \pm 1$. Маємо:

$$\left|\sin \frac{1}{x}\right| = 1 \quad \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{N} \Rightarrow x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi k} = \frac{2}{\pi + 2\pi k}\,, k \in \mathbb{N}\,.$$

Розглянемо тепер розбиття π_n відрізку $[0, 1]$ наступного вигляду:

$$\pi_n = \left\{ x_0 < x_1 = \frac{2}{\pi + 2\pi n} \leq x_2 = \frac{2}{\pi + 2\pi(n-1)} \leq \ldots \leq x_{n-1} = \frac{2}{\pi} \leq x_n = 1 \right\}\,.$$

Тепер маємо:

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \left| \pm \frac{2}{\pi + 2\pi n} - 0 \right| + \left| \pm \frac{2}{\pi + 2\pi n} \pm \frac{2}{\pi + 2\pi(n-1)} \right| +$$

$$+\left|\pm\frac{2}{\pi+2\pi(n-1)}\pm\frac{2}{\pi+2\pi(n-2)}\right|+\cdots+\left|\frac{2}{3\pi}+\frac{2}{\pi}\right|+\left|\sin 1-\frac{2}{\pi}\right|=$$

$$=\left|\sin 1-\frac{2}{\pi}\right|+\frac{2}{\pi}+2\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{\pi+2\pi i}\,. \tag{1.1.1}$$

Загальновідомо, що ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{2}{\pi+2\pi i}$ розбігається, тому вираз у (1.1.1) прямує до ∞ при $n\to\infty$. Отже, по обраній послідовності розбить π_n маємо: $\sup\limits_{\pi_n}\sum\limits_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|=\infty$. $\Box$

Приклад 1.1.2. *З'ясувати, чи буде мати обмежену варіацію функція f на відрізку $[0,1]$, якщо*

$$f(x)\;=\;\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\,.\end{cases}$$

Розв'язок. Доведемо, що f має обмежену варіацію на $[0,1]$. Для цього знайдемо похідну функції f і покажемо, що ця похідна є обмеженою. Функція f є диференційовною в усіх точках півінтервалу $(0,1]$ як добуток диференційовних функцій $f_1=x^2$ і $f_2=\sin\frac{1}{x}$. Маємо:

$$f'(x)=2x\cdot\sin\frac{1}{x}+x^2\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=2x\cdot\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\,. \tag{1.1.2}$$

Оскільки $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\le 1$ і $\left|\cos\frac{1}{x}\right|\le 1$ для всіх $x\in[0,1]$, з (1.1.2) отримаємо:

$$|f'(x)|\le\left|2x\cdot\sin\frac{1}{x}\right|+\left|\cos\frac{1}{x}\right|\le 2\cdot 1+1=3\,.$$

Доведемо також, що правобічна похідна функції f в точці $x_0=0$ існує і дорівнює нулю. Для цього порахуємо похідну в нулі за означенням. Маємо:

$$f'(0)=\lim_{x\to+0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to+0}x^2\cdot\sin\frac{1}{x}=$$

$$=\lim_{x\to+0}x\cdot\sin\frac{1}{x}=0\,,$$

оскільки функція $x\sin\frac{1}{x}$ є добутком обмеженої функції $f_1(x)=\sin\frac{1}{x}$ на нескінченно малу функцію $f_2(x)=x$ і отже, є нескінченно малою функцією при $x\to+0$ (тому і $\lim\limits_{x\to+0}x\cdot\sin\frac{1}{x}=0$ за означенням нескінченно малої функції).

Висновок: функція f має в усіх точках відрізка $[0,1]$, включаючи кінцеві точки, обмежену похідну, тому $f \in V_{[0,1]}$ за властивістю 4) функцій обмеженої варіації (див с. 6). $\square$

1.2 Завдання для самостійної роботи № 1

Задача 1. *Користуючись методикою, розглянутою в прикладах 1.1.1–1.1.2, з'ясувати, чи буде функція f, $f(0) = 0$, на відрізку $[0,1]$ мати обмежену варіацію для кожного з варіантів.*

Номер варіанту	**Відображення**	**Номер варіанту**	**Відображення**
1	$f(x) = x^3 \sin \frac{1}{x}$	16	$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^3}$
2	$f(x) = x^4 \sin \frac{1}{x}$	17	$f(x) = x^3 \sin \frac{1}{x^3}$
3	$f(x) = x^5 \sin \frac{1}{x}$	18	$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^4}$
4	$f(x) = x^6 \sin \frac{1}{x}$	19	$f(x) = x^3 \sin \frac{1}{x^4}$
5	$f(x) = x^7 \sin \frac{1}{x}$	20	$f(x) = x^4 \sin \frac{1}{x^4}$
6	$f(x) = x^8 \sin \frac{1}{x}$	21	$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^5}$
7	$f(x) = x^9 \sin \frac{1}{x}$	22	$f(x) = x^3 \sin \frac{1}{x^5}$
8	$f(x) = x^{10} \sin \frac{1}{x}$	23	$f(x) = x^4 \sin \frac{1}{x^5}$
9	$f(x) = x^3 \sin \frac{1}{x^{1/2}}$	24	$f(x) = x^5 \sin \frac{1}{x^5}$
10	$f(x) = x^4 \sin \frac{1}{x^{1/2}}$	25	$f(x) = x^6 \sin \frac{1}{x^5}$
11	$f(x) = x^5 \sin \frac{1}{x^{1/2}}$	26	$f(x) = x^7 \sin \frac{1}{x^5}$
12	$f(x) = x^6 \sin \frac{1}{x^{1/2}}$	27	$f(x) = x^8 \sin \frac{1}{x^5}$
13	$f(x) = x^7 \sin \frac{1}{x^{1/2}}$	28	$f(x) = x^9 \sin \frac{1}{x^5}$
14	$f(x) = x^8 \sin \frac{1}{x^{1/2}}$	29	$f(x) = x^{10} \sin \frac{1}{x^5}$
15	$f(x) = x^9 \sin \frac{1}{x^{1/2}}$	30	$f(x) = x^{10} \sin \frac{1}{x^{10}}$

Задача 2. *З'ясувати, чи буде функція f, $f(0) = 0$, на відрізку $[0, 1]$ мати обмежену варіацію для кожного з варіантів ($[x]$, як звично, позначає цілу частку числа x).*

Номер варіанту	**Відображення**	**Номер варіанту**	**Відображення**
1	$f(x) = \cos(\ln x)$	16	$f(x) = \ln(\sin x)$
2	$f(x) = \sin(\ln x)$	17	$f(x) = \ln(\cos \frac{x}{2})$
3	$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{m\to\infty} \cos^m(n!\pi x)$	18	$f(x) = \ln(\tan x)$
4	$f(x) = x \ln x$	19	$f(x) = x \cos \frac{1}{x}$
5	$f(x) = x^2 \ln x$	20	$f(x) = \cos(\frac{1}{x-2})$
6	$f(x) = x^3 \ln x$	21	$f(x) = \cos(\frac{1}{x+2})$
7	$f(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t} dt$	22	$f(x) = \cos^2(\frac{1}{x-2})$
8	$f(x) = \int\limits_0^x \frac{\tan t}{t} dt$	23	$f(x) = \cos(\ln^2 x)$
9	$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \cos^{2n} \frac{1}{x}$	24	$f(x) = \cos(\ln^3 x)$
10	$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin^{2n} \frac{1}{x}$	25	$f(x) = \sin(\ln^2 x)$
11	$f(x) = \sin[x]$	26	$f(x) = \sin(\ln^3 x)$
12	$f(x) = \cos[x]$	27	$f(x) = \sin(\sin \frac{1}{x})$
13	$f(x) = \tan[x]$	28	$f(x) = \sin(\cos \frac{1}{x})$
14	$f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-4x+4}$	29	$f(x) = \cos(\sin \frac{1}{x})$
15	$f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-6x+9}$	30	$f(x) = \cos \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$

1.3 Завдання для самоконтролю

1. Нехай дві функції f, g мають обмежену варіацію. Чи буде їх суперпозиція $h = f \circ g$ також мати обмежену варіацію ?

2. Функція $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ називається *неперервною за Гельдером порядку* α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, якщо $|f(x) - f(y)| \leqslant C \cdot |x - y|^\alpha$ для всіх $x, y \in [a, b]$ і деякої сталої $C > 0$. Чи буде функція неперервна за Гельдером з показником $\alpha < 1$ мати обмежену варіацію ? Відповідь обґрунтуйте.

3. Функція $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ називається *ліпшицевою,* якщо вона є неперервною за Гельдером порядку $\alpha = 1$. Доведіть, що f має обмежену варіацію.

4. Наведіть приклад функції обмеженої варіації на відрізку $[0, 1]$, яка не є ліпшицевою.

5. Чи буде функція $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, що має обмежену варіацію на відрізку $[a, b]$, гельдеровою з деяким показником $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$? Доведіть це, або вкажіть контрприклад.

6. Нехай функція $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ є *непрерервною за Гельдером порядку* α, $\alpha > 1$. Доведіть, що $f \equiv const$.

7. Нехай функція $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ диференційовна в усіх точках відрізку $[a, b]$. Чи буде f мати обмежену варіацію ?

8. Нехай $\mathbb{Q}$, як звично, множина раціональних чисел. Розглянемо функцію Рімана

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n} \in [0,1], m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, \\ 0, & x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1]. \end{cases}$$

З'ясувати, чи має функція f обмежену варіацію на $[0, 1]$.

9*. Розглянемо функцію

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n^2}, & x = \frac{m}{n} \in [0,1], m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, \\ 0, & x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1]. \end{cases}$$

З'ясувати, чи має функція f обмежену варіацію на $[0, 1]$.

Вказівка. Розглянути розбиття відрізку $[0, 1]$ за допомогою простих чисел і скористатися тим, що ряд $\sum\limits_p \frac{1}{p}$, де сумування йде по усіх простих числах p, розбігається.

10. Нехай функція $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ має обмежену варіацію і має похідну в усіх точках відрізку $[a, b]$. Чи обмежена f' на $[0, 1]$?

1.4 Функції позитивної, від'ємної та максимальної варіації. Розклад Жордана

Розглянемо функцію $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, що має обмежену варіацію на відрізку $[a, b]$. Функція

$$\boxed{V_f(x) := \bigvee_a^x (f)}$$

називається *функцією варіації функції f на відрізку* $[a, b]$.

Властивості функції варіації:

1) Монотонне зростання. Функція $V_f(x)$ зростає на відрізку $[a,b]$: для будь-яких $x_1, x_2 \in [a,b]$ таких, що $x_1 \geqslant x_2$, виконується нерівність: $V_f(x_1) \geqslant V_f(x_2)$.

2) «Лінійність». Якщо $f, g \in V_{[a,b]}$ і $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$, то $V_{\lambda f+\mu g}(x) \leq |\lambda| V_f(x) + |\mu| V_g(x)$ для будь-якого $x \in [a,b]$

4) Адитивність варіації. Якщо $f \in V_{[a,b]}$, то для будь-якого $x \in [a,b]$ виконується рівність: $V_f(b) = V_f(x) + \bigvee\limits_x^b(f)$ (у термінах варіації на відповідних відрізках можна також записати це як $\bigvee\limits_a^b(f) = \bigvee\limits_a^x(f) + \bigvee\limits_x^b(f)$).

Функції $V_f^{\pm}(x) := \frac{V_f(x) \pm f(x)}{2}$ називаються функціями *позитивної* та *від'ємної* варіації функції $f(x)$. *Канонічним розкладанням Жордану* називається розклад функції $f(x)$, що записується у вигляді:

$$\boxed{f(x) = V_f^+(x) - V_f^-(x)}.$$

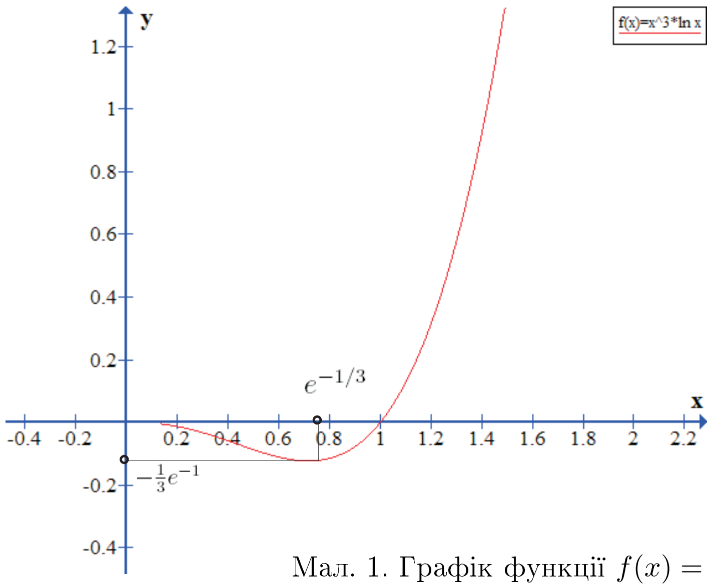
Приклад 1.4.1. *З'ясувати, чи буде мати обмежену варіацію функція f на відрізку $[e^{-2}, e^2]$, якщо $f(x) = x^3 \cdot \ln x$. Побудувати $V_f^+(x)$, $V_f^-(x)$, $V_f(x)$ і написати канонічний розклад Жордана.*

Розв'язок. Зауважимо, що функція $f(x)$ має неперервну похідну на відрізку $[e^{-2}, e^2]$ (перевірте самостійно !), отже, f має обмежену варіацію за властивістю 4) функцій обмеженої варіації (див с. 6).

Для знаходження $V_f^+(x)$, $V_f^-(x)$ і $V_f(x)$ побудуємо спочатку графік функції f. Маємо: $f'(x) = 3x^2 \ln x + x^2 = 0$, звідси $x = e^{-1/3}$. Легко бачити, що похідна змінює знак з «-» на «+» при переході через точку $x = e^{-1/3}$, отже, $x = e^{-1/3}$ – точка локального мінімуму для функції f (див. малюнок 1). Розглянемо тепер окремо інтервали $[e^{-2}, e^{-1/3}]$ і $[e^{-1/3}, e^2]$. На обох відрізках функція f є монотонною.

1) Нехай $x \in [e^{-2}, e^{-1/3}]$, тоді за властивістю монотонних функцій 2) на с. 6 маємо: $V_f(x) = |f(e^{-2}) - f(x)| = -2e^{-6} - x^3 \ln x$.

2) Нехай тепер $x \in [e^{-1/3}, e^2]$. Оскільки на цьому відрізку f монотонно зростає, а варіація є аддитивною (тобто, $V_f(x) = \bigvee\limits_{e^{-2}}^{x}(f) = \bigvee\limits_{e^{-2}}^{e^{-1/3}}(f) + \bigvee\limits_{e^{-1/3}}^{x}(f)$), то будемо мати: $\bigvee\limits_{e^{-2}}^{e^{-1/3}}(f) = f(e^{-2}) - f(e^{-1/3}) = -2e^{-6} + \frac{1}{3}e^{-1}$, $\bigvee\limits_{e^{-1/3}}^{x}(f) = f(x) - f(e^{-1/3}) = x^3 \ln x + \frac{1}{3}e^{-1}$ і, отже, $V_f(x) = -2e^{-6} + \frac{1}{3}e^{-1} + x^3 \ln x + \frac{1}{3}e^{-1} = x^3 \ln x + \frac{2}{3}e^{-1} - 2e^{-6}$.



Мал. 1. Графік функції $f(x) = x^3 \cdot \ln x$.

Отже,

$$V_f(x) = \begin{cases} -2e^{-6} - x^3 \ln x, & x \in [e^{-2}, e^{-1/3}], \\ x^3 \ln x + \frac{2}{3}e^{-1} - 2e^{-6}, & x \in [e^{-1/3}, e^2]. \end{cases}$$

Функції $V_f^+(x)$ та $V_f^-(x)$ обраховуються за правилами $V_f^{\pm}(x) := \frac{V_f(x) \pm f(x)}{2}$, де V_f знайдено вище. Розклад Жордану має вигляд $f(x) = V_f^+(x) - V_f^-(x)$, де $V_f^+(x)$ та $V_f^-(x)$ вказані вище. $\square$

1.5 Завдання для самостійної роботи № 2

Задача 3. *Довести, що функція f на відрізку $[-3,3]$ має обмежену варіацію для кожного з варіантів. Побудувати $V_f^+(x)$, $V_f^-(x)$, $V_f(x)$ і написати канонічний розклад Жордана.*

Номер варіанту	**Відображення**	**Номер варіанту**	**Відображення**
1	$f(x) = x^2 + 3x + 1$	16	$f(x) = x^2 + x - 6$
2	$f(x) = x^2 - 3x + 1$	17	$f(x) = x^2 + x - 7$
3	$f(x) = x^2 + 3x - 1$	18	$f(x) = x^2 + x - 8$
4	$f(x) = -x^2 + 3x + 1$	19	$f(x) = -3x^2 + x + 1$
5	$f(x) = -x^2 - 3x + 1$	20	$f(x) = -4x^2 + x + 1$
6	$f(x) = 2x^2 + 3x + 1$	21	$f(x) = -5x^2 + x + 1$
7	$f(x) = x^2 + 3x + 1$	22	$f(x) = -6x^2 + x + 1$
8	$f(x) = x^2 + 4x + 2$	23	$f(x) = x^2 + 2x - 6$
9	$f(x) = x^2 + 5x + 1$	24	$f(x) = x^2 + 2x - 7$
10	$f(x) = x^2 + 5x - 1$	25	$f(x) = -x^2 + x + 9$
11	$f(x) = x^2 + x - 1$	26	$f(x) = x^2 + x + 11$
12	$f(x) = x^2 + x - 2$	27	$f(x) = x^2 + x + 12$
13	$f(x) = x^2 + x - 3$	28	$f(x) = x^2 + 12x + 1$
14	$f(x) = x^2 + x - 4$	29	$f(x) = x^2 + 11x + 1$
15	$f(x) = x^2 + x - 5$	30	$f(x) = x^2 + 10x + 1$

1.6 Завдання для самоконтролю

1. Нехай функція f диференційовна в точці $x \in [a,b]$. Чи має бути $V_f(x)$ диференціойвною в точці x. А навпаки ?

Вказівка. Розгляньте функції $f(x) = |x|$ та $g(x) = x^2 \cos \frac{1}{x^\alpha}$, $1 < \alpha < 2$, $g(0) := 0$.

2. Навести приклад двох функцій $f, g \in V_{[a,b]}$ таких, що $\bigvee\limits_a^b (f+g) < \bigvee\limits_a^b (f) + \bigvee\limits_a^b (g)$.

3. Нехай $f \in C^1[a,b]$. Чи буде $\bigvee\limits_a^x (f) \in C^1_{[a,b]}$?

4. Порахуйте: а) $\bigvee\limits_1^{125} (\ln x)$; б) $\bigvee\limits_0^{20} (e^x)$.

1.7 Розклад функцій на дискретну і неперервну частини

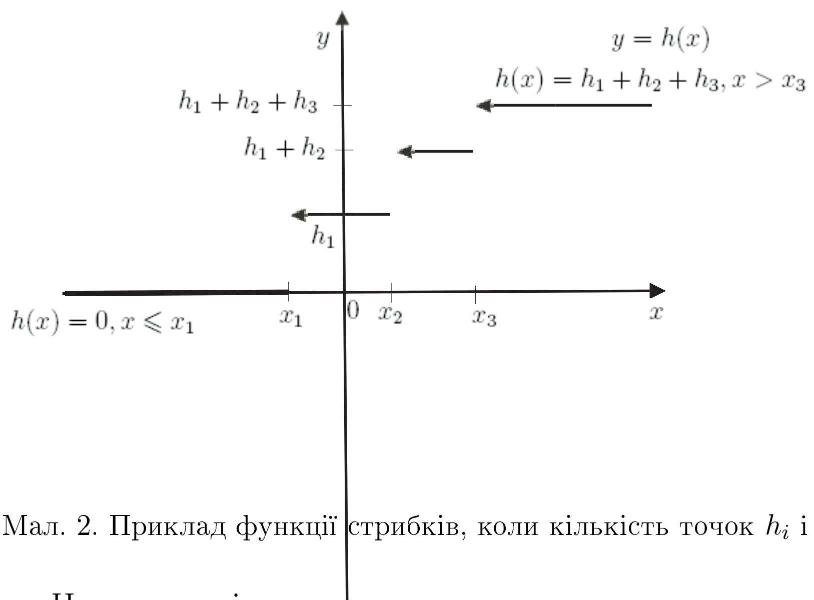
Звернемося до наступного означення.

Означення 1.7.1. Нехай $\{x_i\}_1^\infty$ – послідовність точок з відрізку $[a, b]$ і $h_i > 0$ такі, що $\sum\limits_{i=1}^{\infty} h_i < \infty$. Побудуємо функцію $h(x)$, визначену за рівністю

$$h(x) = \sum_{x_i < x} h_i, \quad x \in (a, b], \quad h(a) = 0 \,. \tag{1.7.1}$$

Функцію h називають *функцією стрибків,* побудовану за послідовностями $\{x_i\}$ і $\{h_i\}$.

Для наглядності розглянемо графік такої функції, коли кількість точок h_i і x_i дорівнює 3 (див. малюнок 2).



Мал. 2. Приклад функції стрибків, коли кількість точок h_i і x_i дорівнює 3.

Незалежно від наведеного вище розглянемо також наступні означення. Нехай $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $x_0 \in [a, b]$, тоді границі зліва і справа від функції f в точці x_0 є наступні величини:

$$f(x_0 - 0) := \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \,, f(x_0 + 0) := \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \,.$$

Тут і надалі число $A := f(x_0 - 0)$ називається границею відображення f в точці x_0 зліва, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) : |f(x) - A| < \varepsilon$

для всіх $x \in (x_0 - \delta, x_0)$. Аналогічно визначається границя відображення f в точці x_0 справа. Функція f *неперервна зліва* в точці x_0, якщо $f(x_0) = f(x_0 - 0)$, і *неперервна справа*, якщо $f(x_0) = f(x_0 + 0)$.

Означення 1.7.2. *Стрибком* функції f в точці x_0 називається наступна величина:

$$w_f(x_0) := f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)\,.$$

Деякі властивості функції стрибків $h(x)$, визначеної в (1.7.1)

1) Функція $h(x)$ неперервна зліва в кожній точці $x \in [a, b]$.

2) Функція $h(x)$ – монотонно зростаюча.

3) Множина розривів функції $h(x)$ співпадає з множиною $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$.

4) Функція $h(x)$ неперервна справа для всіх $x \in [a, b] \setminus \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ і $w_h(x_i) = h_i$, $1 \leqslant i < \infty$.

Ключовою є наступна теорема.

Теорема 1.7.1. *Нехай функція $f(x)$ монотонна на відрізку $[a, b]$ і її точками розриву є послідовність $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$. Тоді f зображується в вигляді*

$$f(x) = f_d(x) + f_c(x)\,, \tag{1.7.2}$$

де

$$f_d(x) = f(a + 0) - f(a) + \sum_{x_i < x} w_f(x_i) + f(x) - f(x - 0) \tag{1.7.3}$$

– неперервна зліва на $[a, b]$, а $f_c := f(x) - f_d(x)$ – неперервна функція на відрізку $[a, b]$.

Зокрема, якщо функція f сама є неперервною зліва, то вона розкладається в суму функції стрибків $f_d(x) = \sum\limits_{x_i<x} w_f(x_i)$ та неперервної функції $f_c(x)$.

Рівність (1.7.2) називається *розкладанням функції f до дискретної і неперервної частини.*

Схема розкладу функції обмеженої варіації до дискретної і неперервної частини

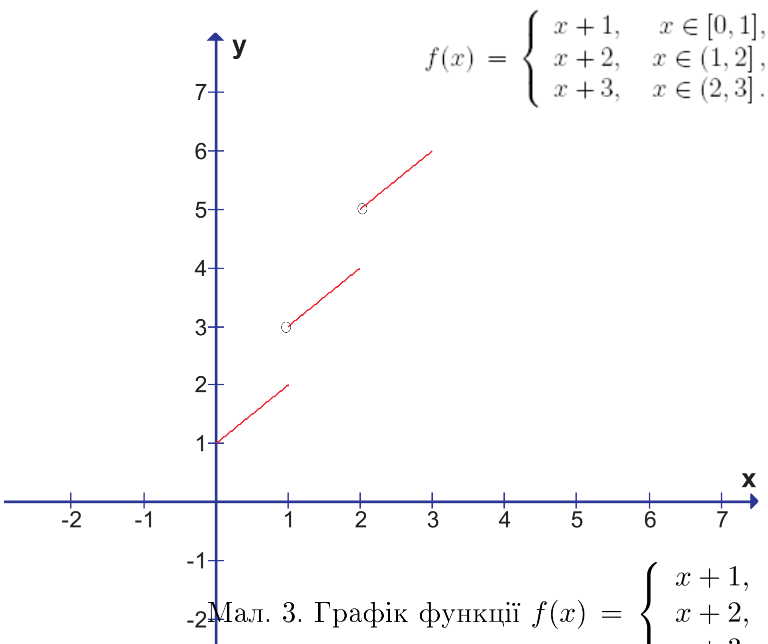
1) Нехай $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ – задана функція. Знаходимо її точки розриву $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ (їх може бути, зокрема, скінченна кількість $x_1, \dots, x_n$) і будуємо її функцію стрибків $h_f(x) := \sum\limits_{x_i < x} w_f(x)$.

2) На основі співвідношення (1.7.3) записуємо $f_d(x)$. Тоді $f_c(x) := f(x) - f_d(x)$, а $f(x) := f_c(x) + f_d(x)$ – бажаний розклад.

Приклад 1.7.1. *Розкласти функцію $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ на неперервну і дискретну частини, якщо*

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in [0,1], \\ x+2, & x \in (1,2]\,, \\ x+3, & x \in (2,3]\,. \end{cases}$$

Розв'язок. У функції f дві точки розриву – $x_1 = 1$ і $x_2 = 2$, див. малюнок 3.



Мал. 3. Графік функції $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in [0,1], \\ x+2, & x \in (1,2]\,, \\ x+3, & x \in (2,3]\,. \end{cases}$

Складаємо функцію стрибків $h_f(x) = \sum\limits_{x_i < x} w_f(x)$:

1) Нехай $x \in [0, 1]$. Оскільки точок розриву x_i функції f таких, що $x_i > x$ при зазначених x немає, то за означенням $h_f(x) = 0$ при $x \in [0, 1]$.

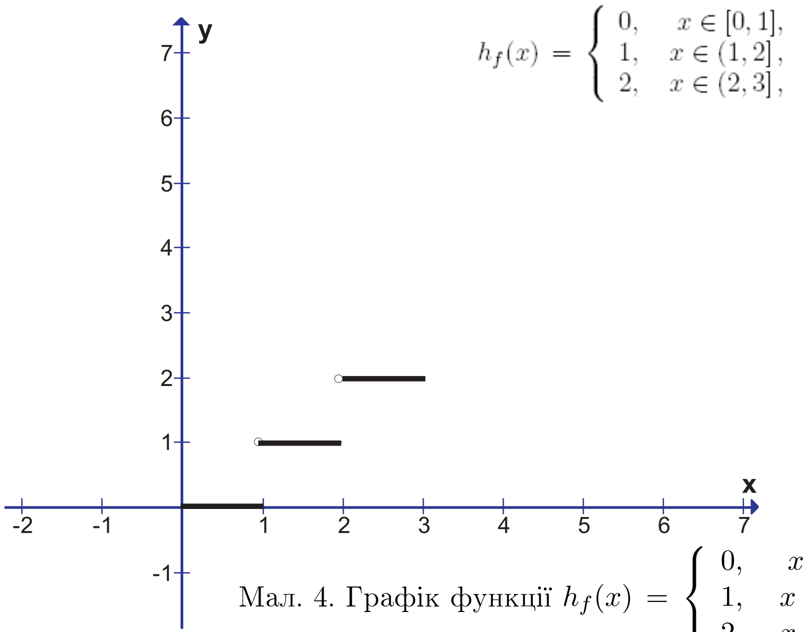
2) Нехай $x \in (1,2]$. При цих значеннях x функція f має лише одну точку розриву $x_1 = 1$, що задовольняє умову $x_1 > x$, а стрибок функції f в точці 1 дорівнює одиниці. Отже, $h_f(x) = w_f(x_1) = 1$ при $x \in (1,2]$.

3) Нехай $x \in (2,3]$. При цих значеннях x функція f має дві точки розриву $x_1 = 1$ і $x_2 = 2$, що задовольняють умову $x_i > x$, $i = 1,2$, а скачок функції f в точках 1 і 2 дорівнює одиниці. Отже, $h_f(x) = w_f(x_1) + w_f(x_2) = 1 + 1 = 2$ при $x \in (2,3]$.

Функція стрибків $h_f(x)$ має вигляд

$$h_f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1], \\ 1, & x \in (1,2], \\ 2, & x \in (2,3], \end{cases}$$

див. малюнок 4.



Мал. 4. Графік функції $h_f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1], \\ 1, & x \in (1,2], \\ 2, & x \in (2,3]. \end{cases}$

Вихідна функція f є неперервною в точці $a := 0$, тому $f(a+0) - f(a) = 0$. Крім того, функція є неперервною зліва (доведіть це !) і тому

$f(x) - f(x-0) = 0$. Отже, за співвідношенням (1.7.3)

$$f_d(x) = h_f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1], \\ 1, & x \in (1,2], \\ 2, & x \in (2,3]. \end{cases} \qquad (1.7.4)$$

Тепер порахуємо $f_c(x)$. Маємо:

1) при $x \in [0,1]$, $f_c(x) := f(x) - f_d(x) = x + 1 - 0 = x + 1$;

2) при $x \in (1,2]$, $f_c(x) := f(x) - f_d(x) = x + 2 - 1 = x + 1$;

3) при $x \in (2,3]$, $f_c(x) := f(x) - f_d(x) = x + 3 - 2 = x + 1$;

Отже, $f_c(x) = x + 1 \quad \forall\, x \in [0,3]$. Нарешті, $f(x) = f_d(x) + f_c(x)$, де $f_c(x) = x + 1$, а $f_d(x)$ визначається за формулою (1.7.4). $\square$

1.8 Завдання для самоконтролю

1*. Нехай $\mathbb{Q}$ – множина всіх раціональних чисел відрізку $[a,b]$, $\mathbb{Q} = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, h_k – деяка послідовність позитивних чисел $h_i > 0$ таких, що $\sum\limits_{i=1}^{\infty} h_i < \infty$, $h(x) = \sum\limits_{x_i < x} h_i, \quad x \in (a,b], \quad h(a) = 0$ -відповідна функція стрибків. Яку потужність має множина значень функції h – зчисленно, або континуум ?

Вказівка. Тут множиною потужності континуум називається множина, кількість елементів котрої дорівнює кількості елементів в $\mathbb{R}$, або, що є те ж саме, кількості елементів відрізку $[a,b]$. Доведіть, що функція h буде строго зростаючою, а за цим скористайтеся тим, що множина ірраціональних чисел відрізку $[a,b]$ має ту ж саму потужність, що і множина всіх точок відрізку $[a,b.]$

2. Нехай $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ – будь яка зчисленна множина. Чи можна визначити функцію, яка буде мати розриви у вказаних точках, і неперервною на решті множини ?

3. Нехай f – монотонна функція на відрізку $[a,b]$. Чи буде функція f_d, визначена рівністю (1.7.3) неперервною справа ? Зліва ? Відповідь обґрунтуйте (доведіть це, або наведіть відповідні приклади).

4. Нехай f – монотонна функція на відрізку $[a,b]$, а f_d – функція, визначена рівністю (1.7.3). Доведіть, що функція $f_c := f - f_d$ є неперервною на відрізку $[a,b]$.

5*. Нехай $\mathbb{Q}$ – множина всіх раціональних чисел відрізку $[0,1]$. Чи існує функція, що є неперервною в усіх точках множини $\mathbb{Q}$ і розривною в точках множини $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$?

Вказівка. Скористуйтеся теоремою Бера про категорії і принципом вкладених відрізків.

1.9 Завдання для самостійної роботи № 3

Задача 4. *Розкласти функцію f на відрізку $[0,3]$ до неперервної і дискретної частини (варіанти 23–30 див. на наступній сторінці).*

№	Відображення	№	Відображення
1	$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \in [0,1], \\ x^2+2x, & x \in (1,2], \\ x+3, & x \in (2,3]. \end{cases}$	12	$f(x) = \begin{cases} x^3+1, & x \in [0,1], \\ x^3-1, & x \in (1,2], \\ x^5, & x \in (2,3]. \end{cases}$
2	$f(x) = \begin{cases} 5x+1, & x \in [0,1], \\ 7x+2, & x \in (1,2], \\ 8x+3, & x \in (2,3]. \end{cases}$	13	$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \in [0,1], \\ x^2+3x, & x \in (1,2], \\ x+4, & x \in (2,3]. \end{cases}$
3	$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \in [0,1], \\ x+2, & x \in (1,2], \\ x^2, & x \in (2,3]. \end{cases}$	14	$f(x) = \begin{cases} x^6+1, & x \in [0,1], \\ 2x, & x \in (1,2], \\ x+3, & x \in (2,3]. \end{cases}$
4	$f(x) = \begin{cases} x+2/3, & x \in [0,1], \\ x^2, & x \in (1,2], \\ x^3, & x \in (2,3]. \end{cases}$	15	$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [0,1], \\ x^2+2x, & x \in (1,2], \\ x+3, & x \in (2,3]. \end{cases}$
5	$f(x) = \begin{cases} x+4, & x \in [0,1], \\ x-8, & x \in (1,2], \\ 3x+1, & x \in (2,3]. \end{cases}$	16	$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \in [0,1], \\ \cos x, & x \in (1,2], \\ x+3, & x \in (2,3]. \end{cases}$
6	$f(x) = \begin{cases} 7x-2, & x \in [0,1], \\ (x+2)^2, & x \in (1,2], \\ x, & x \in (2,3]. \end{cases}$	17	$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \in [0,1], \\ \ln x, & x \in (1,2], \\ x+3, & x \in (2,3]. \end{cases}$
7	$f(x) = \begin{cases} x-6, & x \in [0,1], \\ (x-1)^2, & x \in (1,2], \\ 8, & x \in (2,3]. \end{cases}$	18	$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1], \\ \ln x, & x \in (1,2], \\ x+3, & x \in (2,3]. \end{cases}$
8	$f(x) = \begin{cases} 9x-9, & x \in [0,1], \\ x^3, & x \in (1,2], \\ x^4-10, & x \in (2,3]. \end{cases}$	19	$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \in [0,1], \\ x^2+2, & x \in (1,2], \\ \sin x, & x \in (2,3]. \end{cases}$
9	$f(x) = \begin{cases} x-15, & x \in [0,1], \\ x^2+2x+2, & x \in (1,2], \\ x^2+2x+3, & x \in (2,3]. \end{cases}$	20	$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [0,1], \\ \cos x, & x \in (1,2], \\ \sin x, & x \in (2,3]. \end{cases}$
10	$f(x) = \begin{cases} x-4, & x \in [0,1], \\ 2x^3-4, & x \in (1,2], \\ 2x^2-1, & x \in (2,3]. \end{cases}$	21	$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in [0,1], \\ \sin x, & x \in (1,2], \\ x+3, & x \in (2,3]. \end{cases}$
11	$f(x) = \begin{cases} 5x+x^3, & x \in [0,1], \\ 7x+2, & x \in (1,2], \\ 7x, & x \in (2,3]. \end{cases}$	22	$f(x) = \begin{cases} x^{10}, & x \in [0,1], \\ x^2, & x \in (1,2], \\ \sin x, & x \in (2,3]. \end{cases}$

№	Відображення	№	Відображення
23	$f(x) = [x]$	27	$f(x) = [x^2]$
24	$f(x) = x - [x]$	28	$f(x) = x + [x]$
25	$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \in [0,1], \\ [x], & x \in (1,2], \\ x+1, & x \in (2,3]. \end{cases}$	29	$f(x) = \begin{cases} [x^6], & x \in [0,1], \\ [x^6]+x, & x \in (1,2], \\ [x^6]+x^2, & x \in (2,3]. \end{cases}$
26	$f(x) = \begin{cases} [x+2]/3, & x \in [0,1], \\ x^2, & x \in (1,2], \\ [x^3]+x, & x \in (2,3]. \end{cases}$	30	$f(x) = \begin{cases} [\sin x], & x \in [0,1], \\ [x^2+2x], & x \in (1,2], \\ [x]+3, & x \in (2,3]. \end{cases}$

1.10 Інтеграл Стільтьєса

Наступним поняттям, що має бути вивченим протягом нашого курсу, є інтеграл Стільтьєса (в інших джерелах – Рімана–Стільтьєса), що узагальнює добре відомий визначний інтеграл Рімана на прямій. Розглянемо наступне означення.

Означення 1.10.1. Нехай $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ і $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ – дві функції, задані на відрізку $[a,b]$ і $\pi = \{a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_{n-1} \leq x_n = b\}$ – деяке розбиття відрізку $[a,b]$. Сума вигляду

$$S(f,g,\pi,\xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(g(x_k) - g(x_{k-1})) \tag{1.10.1}$$

називається *інтегральною суммою Стільтьєса*, побудованою за функціями f і g (тут $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$). Якщо існує границя інтегральних сум вигляду (1.10.1), коли діаметр $d(\pi)$ розбиття π збігається до нуля (тут $d(\pi) := \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k - x_{k-1}|$), і ця границя не залежить від обрання розбиття π та системи середніх точок ξ_k, то ця границя називається *інтегралом Стильтьеса* від функції f відносно g.

Позначення:

$$\boxed{\int_a^b f dg\,.}$$

Деякі властивості інтеграла Стільтьєса

1) Лінійність:

$$\int_a^b (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) f dg = \lambda_1 \int_a^b f_1 dg + \lambda_2 \int_a^b f_2 dg \,.$$

2)

$$\int_a^b f d(g_1 + g_2) = \int_a^b f dg_1 + \int_a^b f dg_2 \,.$$

3) Адитивність: Якщо $c \in (a, b)$ і інтеграл $\int_a^b f dg$ існує, то існують також інтеграли $\int_a^c f dg$, $\int_c^b f dg$, причому

$$\int_a^b f dg = \int_a^c f dg + \int_c^b f dg \,.$$

Умови існування. Інтеграл Стільтьєса $\int_a^b f dg$ існує принаймні у випадку, коли $f \in C_{[a,b]}$ і $g \in V_{[a,b]}$. В цьому випадку $\int_a^b f dg \leqslant M \cdot \bigvee_a^b (g)$, де $M := \sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$.

Правила обрахування.

1) *Інтегрування по частинах.* Нехай f, g – дві функції, задані на відрізку $[a, b]$. Тоді інтеграли

$$\int_a^b f dg, \qquad \int_a^b g df$$

існують або не існують одночасно і справедлива рівність

$$\int_a^b f dg = f(x) g(x) |_a^b - \int_a^b g df \,, \tag{1.10.2}$$

де, як звично, $f(x)g(x)|_a^b := f(b)g(b) - f(a)g(a)$.

2) *Зведення до інтегралу Рімана.* Нехай $f \in C_{[a,b]}$, а g диференційовна в усіх точках відрізку $[a,b]$, причому g' інтегровна поРіману на цьому відрізку. Тоді

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)dx\,, \tag{1.10.3}$$

де справа в (1.10.3) – звичайний інтеграл Рімана.

3) *Основна формула для обчислення.* Нехай $f \in C_{[a,b]}$, $g \in V_{[a,b]}$ і $g = g_c + g_d$ – розклад функції g на неперервну і дискретну частини,

$$g_d(x) = g(a+0) - g(a) + \sum_{x_i<x} w_g(x_i) + g(x) - g(x-0)\,,$$

$$g_c(x) = g(x) - g_d(x)\,.$$

Тоді

$$\boxed{\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)dg_c(x) + \int_a^b f(x)dg_d(x)\,,} \tag{1.10.4}$$

причому

$$\int_a^b f(x)dg_d(x) = f(a)(g(a+0) - g(a)) + \sum_{k=1}^{\infty} f(x_k)(g(x_k+0) - g(x_k-0)) + \tag{1.10.5}$$
$$+ f(b)(g(b) - g(b-0))\,.$$

Приклад 1.10.1. *Порахувати інтеграл Стільтьєса* $\int\limits_0^3 g(x)df(x)$, *де*

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in [0,1], \\ x+2, & x \in (1,2]\,, \\ x+3, & x \in (2,3]\,, \end{cases} \quad g(x) = x.$$

Розв'язок.

Перший спосіб – за допомогою інтегрування по частинах. Оскільки за співвідношенням (1.10.2) $\int\limits_0^3 gdf = f(x)g(x)|_0^3 - \int\limits_0^3 fdg$, то будемо мати: $f(x)g(x)|_0^3 = f(3)g(3) - f(0)g(0) = 6 \cdot 3 - 1 \cdot 0 = 18$; $\int\limits_0^3 fdg =$

$\int\limits_0^3 f dx = \int\limits_0^1 (x+1)dx + \int\limits_1^2 (x+2)dx + \int\limits_2^3 (x+3)dx = \int\limits_0^3 xdx + \int\limits_0^1 dx + 2\int\limits_1^2 dx + 3\int\limits_2^3 dx =$ $\frac{x^2}{2}|_0^3 + 6 = \frac{9}{2} + 6 = \frac{21}{2}$. Отже, $\int\limits_0^3 gdf = 18 - \frac{21}{2} = \frac{15}{2}$.

Другий спосіб – за допомогою розкладу на неперервну і дискретну частини. Скористаємося результатом прикладу 1.7.1. Ми вже з'ясували, що

$$f_d(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1], \\ 1, & x \in (1,2]\,, \\ 2, & x \in (2,3]\,, \end{cases}$$

див. співвідношення (1.7.4), і що $f_c(x) = x + 1$, а $f = f_c + f_d$. Отже, за співвідношенням (1.10.5)

$$\int\limits_0^3 g(x)df_d(x) = g(0)(f(a+0) - f(a)) + \sum_{k=1}^{2} g(x_k)(f(x_k+0) - f(x_k-0)) +$$

$$+g(3)(f(3) - f(3-0))\,.$$

Будемо мати:

$$\int\limits_0^3 g(x)df_d(x) = 0 \cdot 0 + g(1)(f(1+0) - f(1-0)) + g(2)(f(2+0) - f(2-0)) +$$

$$+3 \cdot 0 =$$

$$= 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 3\,.$$

Далі, $\int\limits_0^3 g(x)df_c(x) = \int\limits_0^3 xd(x+1) = \int\limits_0^3 xdx = \frac{x^2}{2}|_0^3 = \frac{9}{2}$. Тоді згідно формули (1.10.4) $\int\limits_0^3 g(x)df(x) = \int\limits_0^3 g(x)df_d(x) + \int\limits_0^3 g(x)df_c(x) = \frac{9}{2} + 3 = \frac{15}{2}$. □

1.11 Завдання для самоконтролю

1. Нехай інтеграли $\int\limits_a^b fdg$ і $\int\limits_b^c fdg$ існують для деяких функцій f, g, що задані на відрізку $[a, c]$, $a < b < c$. Чи існує інтеграл $\int\limits_a^c fdg$?

2. Нехай $f \in V_{[a,b]}$ і $g \in C_{[a,b]}$. Чи існує $\int\limits_a^b fdg$?

3. Нехай функція f неперервна в усіх точках відрізку $[a, b]$ за виключенням скінченної кількості точок, а $g \in V_{[a,b]}$. Чи існує $\int\limits_a^b f dg$?

4. Чи зміниться відповідь на запитання 3, якщо вважати, що f є обмеженою ?

1.12 Завдання для самостійної роботи № 4

Задача 5. *Порахувати інтеграл Стільтьєса* $\int\limits_0^3 g(x) df(x)$ *обидвома способами (за допомогою інтегрування по частинах та за допомогою розкладу функції на неперервну і дискретну частину), якщо функція* $g(x) = x$, *а функція* f *береться із задачі 4 для кожного з варіантів.*

1.13 Абсолютно неперервні функції

Неперервні функції є, в деякому сенсі, не досить «досконалим» об'єктом. Наприклад, як ми вже бачили при розгляданні прикладу 1.1.1, неперервна функція не зобов'язана мати обмежену варіацію; можуть бути побудовані приклади неперервних функцій, що не мають похідної в жодній точці області визначення.

Наступний клас функцій дещо звужує означення неперервності і «виключає» виникнення зазначених ситуацій. Розглянемо наступне означення.

Означення 1.13.1. Функція $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ називається *абсолютно неперервною*, пишуть $f \in \mathrm{AC}_{[a,b]}$ якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon)$: для будь якої системи непересічних інтервалів (a_i, b_i), $i = 1, 2, \ldots, n$ такої, що $\sum\limits_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \delta$, виконано умову: $\sum\limits_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$.

Деякі властивості абсолютно неперервних функцій

1) Сума, різниця, добуток абсолютно неперервних функцій та помноження абсолютно неперервної функції на число є знову абсолютно неперервною функцією.

2) Якщо функція абсолютно неперервна на відрізку, то вона неперервна, рівномірно неперервна і має обмежену варіацію.

3) Абсолютно неперервні функції і тільки вони відновлюються від своєї похідної за операцією інтегрування з точністю до постійного доданку: $\int\limits_a^x f'(t) dt = f(x) - f(a)$.

Нескладно побудувати приклад неперервної функції, яка не є абсолютно неперервною. Наприклад, підійде функція з прикладу 1.1.1: оскільки вона має необмежену варіацію, то за властивістю 2) вона не є й абсолютно неперервною. Значно складніше побудувати **неперервну функцію обмеженої варіації, яка не є абсолютно неперервною** (так звані **Канторові сходи**).

1.14 Завдання для самоконтролю

1. Побудувати приклад абсолютно неперервної функції, що не є ліпшецевою.

2. Довести, що якщо в означенні абсолютно неперервних функцій зняти вимогу, що інтервали (a_i, b_i) не перетинаються, то така функція буде навіть ліпшицевою.

3. Навести приклад абсолютно неперервної функції, яка має точку недиференційовності.

4. Довести, що якщо $f \in \mathrm{AC}_{[a,b]}$, то також і $V_f(x) \in \mathrm{AC}_{[a,b]}$.

1.15 Завдання для самостійної роботи № 5

Задача 6. *З'ясувати, чи буде функція f із задачі 1 абсолютно неперервною для кожного з варіантів.*

2 Міра та інтеграл Лебега

2.1 Борелеві і вимірні множини

Почнемо з наступних означень.

Означення 2.1.1. Сукупність множин $\mathfrak{R}$ називається *кільцем* якщо: 1) $A \cup B \in \mathfrak{R}$ для всіх $A, B \in \mathfrak{R}$; 2) $A \setminus B \in \mathfrak{R}$ для всіх $A, B \in \mathfrak{R}$.

Оскільки $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$, то операція $<< \bigcap >>$ також не виводить за межі кільця. Таким чином, кільце – це система множин, замкнена відносно операцій об'єднання, різності і перетину. З означенням 2.1.1 стисло пов'язане наступне.

Означення 2.1.2. Сукупність множин $\mathfrak{R}$ називається σ-кільцем якщо: 1) $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \subset \mathfrak{R}$ як тільки $A_i \in \mathfrak{R} \quad \forall i = 1, 2, \ldots, ;$ 2) $A \setminus B \in \mathfrak{R}$ для всіх $A, B \in \mathfrak{R}$.

Зауважимо, що операція зчисленного поєднання множин не виводить за межі σ-кільця, бо $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \setminus \bigcup\limits_{i=2}^{\infty} (A_1 \setminus A_i)$ (перевірте це !). Таким чином, кільце – це система множин, замкнена відносно операцій зчисленного об'єднання, різності і зчисленного перетину. За означенням, будь-яке σ-кільце є кільцем, але не навпаки (наведіть приклад !).

Означення 2.1.3. Множина називається *борелевою*, якщо вона належить найменшому σ-кільцю, що містить усі відкриті і замкнені множини. Це σ-кільце називається *σ-кільцем борелевих множин.*

Окремим прикладом борелевських множин є всі замкнені і відкриті множини, а також ще два вида множин, означення яких наведено нижче.

Означення 2.1.4. Множина A називається *множиною типу* F_σ, якщо $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} F_i$, де F_i – замкнені.

Означення 2.1.5. Множина A називається *множиною типу* G_δ, якщо $A = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} G_i$, де G_i – відкриті.

Множини типу F_σ можуть бути замкненими, але не обов'язково. Так само, множини типу G_δ можуть виявитися відкритими, але не завжди це так. Покажемо це на конкретних прикладах.

Приклади множин різних типів

1) Одноточкова множина $\{a\}$ є замкненою і, отже, борелева.

2) Множина $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ є відкритою як додаток до замкненої множини $\{a\}$. Також відкритими є $\mathbb{R}$, (a,b) і $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)$.

3) Множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$ не замкнена (доведіть це !), але вона є множиною типу F_σ, бо $\mathbb{Q}$ є зчисленною, отже, $\mathbb{Q} = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\{x_i\}$, де $\{x_i\}$ – одноточкова і отже, замкнена множина. Таим чином, $\mathbb{Q}$ – борелева множина.

4) Множина ірраціональних чисел $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ не замкнена (доведіть це !), але вона є множиною типу G_δ, оскільки, за відомими правилами де-Моргана

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty}\{x_i\} = \bigcap_{i=1}^{\infty}(\mathbb{R} \setminus \{x_i\})\,,$$

а кожна множина $\mathbb{R}\setminus\{x_i\}$ є відкритою як додаток до замкненої множини $\{x_i\}$. Отже, множина ірраціональних чисел – борелева.

5) Множина $A = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ не є замкненою: її гранична точка $x_0 = 0$ не належить A. Однак, A – типу F_σ, оскільки A є поєднанням одноточкових множин, що є замкненими. Зауважимо, що $A' = A \cup \{0\}$ є замкненою множиною.

Тепер більш детально про міру і вимірні множини. Всюду нижче мається на увазі міра Лебега в $\mathbb{R}^n$. Почнемо з означення.

Означення 2.1.6. *Основним прямокутником в* $\mathbb{R}^n$ називається множина виду $P_n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \leqslant x_i \leqslant b_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$. (Тут нерівності можуть бути як строгими, так і ні). *Міра Лебега* основного прямокутника P_n визначається як

$$m(P_n) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)\,.$$

Означення 2.1.7. *Елементарною множиною в* $\mathbb{R}^n$ називається будь-яке скінченне поєднання попарно неперетинних основних прямокутників. Сукупність усіх елементарних множин позначається $\mathcal{E}$.

Легко бачити, що сукупність основних прямокутників формує кільце множин (доведіть !). Якщо $E \subset \mathcal{E}$, то $E = \bigcup\limits_{i=1}^{k} P_i$, де P_i - основні прямокутники, $P_i \cap P_j = \varnothing$ при $i \neq j$. В цьому випадку покладемо

$$m(E) = \sum_{i=1}^{k} m(P_i)\,.$$

Наступне означення треба для того, щоб перенести поняття міри для широких класів множин, а не тільки прямокутників і елементарних множин.

Означення 2.1.8. Для будь-якої множини $A \subset \mathbb{R}^n$ визначимо *зовнішню міру* Лебега множини A як

$$m^*(A) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) : A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \right\}$$

де $A_n \in \mathcal{E}$ і A_n відкриті для будь-якого $n \in \mathbb{N}$.

Можна показати, що для елементарних множин $E \subset \mathcal{E}$ виконується рівність $m(E) = m^*(E)$, тобто, функція m^* є продовженням функції m на більший клас множин. Нарешті, множина A називається *вимірною за Лебегом*, якщо $\forall \varepsilon > 0$ існують замкнена множина $F_\varepsilon \subset A$ і відкрита множина $G_\varepsilon \supset A$ такі, що

$$m^*(A \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon \qquad \text{і} \qquad m^*(G_\varepsilon \setminus A) < \varepsilon\,. \tag{2.1.1}$$

Якщо множина A є вимірною, то покладають $m(A) := m^*(A)$ и в цьому випадку число $m(A)$ називають *мірою Лебега множини* A.

Зауважимо, що всі борелеві множини є вимірними, і що існують невимірні множини. На практиці користуватися формулою (2.1.1) не завжди доцільно, оскільки міра Лебега є не більш - не менш, як довжина множини в $\mathbb{R}^n$ при $n = 1$, площа при $n = 2$ і об'єм при $n = 3$. Ці величини іноді зрозумілі інтуітивно і можуть бути полічені безпосередньо у багатьох випадках.

Міра Лебега має наступні властивості:

Теорема 2.1.1.

1) Скінченні та зчисленні множини мають міру нуль (доведіть) !
2) $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$.
3) $m\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} m(A_i)$.
4) $m\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} m(A_i)$ *як тільки* $A_i \cap A_j = \varnothing$ *при* $i \neq j$.

5) Якщо $A_1 \subset A_2 \subset ...$ – зростаюча послідовність множин і $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, то $m(A) = \lim\limits_{n\to\infty} m(A_n)$.

6) Якщо $A_1 \supset A_2 \supset ...$ – спадна послідовність множин і $A = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, то $m(A) = \lim\limits_{n\to\infty} m(A_n)$.

7) Якщо $A \subset B$, то $m(B \setminus A) = m(B) - m(A)$.

Приклад 2.1.1. *Довести, що множина A є борелевою і порахувати міру Лебега множини A в $\mathbb{R}^1$, якщо $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (-10, \arctan n) \setminus \mathbb{Q}$.*

Розв'язок. Зауважимо, що $A = B \setminus C$, де $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (-10, \arctan n)$ і $C := \mathbb{Q}$. Множини B і C є борелевими, оскільки B є зчисленним поєднанням відкритих множин $(-10, \arctan n)$ і, отже, відкрите, а C (як було доведено вище) є множиною типу F_σ і отже, борелеве. Тоді A є різністю двох борелевих множин і тому також є борелевою множиною.

Залишається порахувати $m_1(A)$ – одновимірну міру Лебега множини A. Зауважимо, що Q має міру нуль і тому $m(A) = m(B)$. Скористаємося властивістю 5) з теореми 2.1.1. Оскільки послідовність множин $A_n := (-10, \arctan n)$ є зростаючою (перевірте !), маємо: $m(A) = \lim\limits_{n\to\infty} m(A_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (10 + \arctan n) = \frac{\pi}{2} + 10$. $\square$

Приклад 2.1.2. *Нехай A – підмножина відрізку $[0, 1]$, що складається з чисел, десятковий розклад котрих можно записати без числа 5. Довести, що A – борелева множина і порахувати його лінійну міру Лебега.*

Розв'язок. Позначимо $a = 0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$. Нехай A_1 – множина таких чисел, перша цифра десяткового розкладу котрих має бути 5. Тоді A_1 – інтервал $(0,5; 0,6)$ (зауважимо, що $0,5 = 0,49999\dots$, так що можна вважати, що $0,5 \notin A_1$). Маємо: $m_1(A_1) = 0,6 - 0,5 = \frac{1}{10}$. Далі, нехай A_2 – множина таких чисел, друга цифра десяткового розкладу котрих має бути 5. Зауважимо, що $A_2 = (0,05; 0,06) \cup (0,15; 0,16) \cup \dots \cup (0,95; 0,96)$. Таких інтервалів всього 9 і їх загальна довжина становить $\frac{9}{100}$. І так далі. Нехай A_n – множина таких чисел, n-та цифра десяткового розкладу котрих має бути 5. Зауважимо, що $A_n = \left(0,0\dots0\underbrace{5}_{n}; 0,00\dots0\underbrace{6}_{n}\right) \cup$

$$\left(0,010\ldots0\underbrace{\;5\;}_{n};0,010\ldots0\underbrace{\;6\;}_{n}\right)\cup$$

$$\ldots\cup\left(0,99\ldots1\underbrace{\;5\;}_{n};0,99\ldots1\underbrace{\;6\;}_{n}\right).$$

Таких інтервалів всього 9^{n-1} і їх загальна довжина становить $\frac{9^{n-1}}{10^n}$. Тепер маємо:

$$m\left(\bigcup_{i=n}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}m(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^{n-1}}{10^n}=\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{9}{10}}=1\,.$$

Зауважимо, що $A=[0,1]\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$, так що $m(A)=m([0,1])-m\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\right)=1-1=0$. Отже, A має міру нуль. Множина A є замкненою як доповнення до відкритої множини, і тому є борелевою. $\square$

2.2 Завдання для самостійної роботи № 6

Задача 7. *Довести, що дана множина є борелевою і порахувати її одновимірну міру Лебега для кожного з варіантів.*

№	Множина	№	Множина
1	$A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left(n - \frac{1}{2^n}, n + \frac{1}{2^n}\right)$	16	$A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left[n - \frac{1}{3^n}, n + \frac{1}{3^n}\right)$
2	$A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left(n - \frac{1}{2^n}, n + \frac{1}{4^n}\right]$	17	$A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left[n - \frac{1}{5^n}, n + \frac{1}{5^n}\right]$
3	$A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left(n - \frac{1}{3^n}, n + \frac{1}{4^n}\right)$	18	$A = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} [n - e^{-n}, n + 4^{-n}])$
4	$A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \left(n - \frac{1}{2^n}, n + \frac{1}{2^n}\right)$	19	$A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$
5	$A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$	20	$A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n+1)^2}, \frac{1}{n^2}\right)$
6	$A = [a, +\infty)$	21	$A = (-\infty, -b]$
7	$A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left[n^3 - 5^{-n}, n^3 + 5^{-n}\right)$	22	$A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left[n^2 - 5^{-n}, n^3 + 5^{-2n}\right)$
8	$A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \left[n^3 - 5^{-n}, n^3 + 5^{-n}\right)$	23	$A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \left[n^3 - 5^{-n}, n^4 + 5^{-n}\right)$
9	$A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [\ln n, \ln(n+1)] \setminus \mathbb{Z}$	24	$A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [\ln n, \ln(n+1)] \setminus \mathbb{Z}$
10	$A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left[\ln n, \ln(n+1)^2\right]$	25	$A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [\ln n, e^n] \setminus \mathbb{N}$
11	$A = \{x \in \mathbb{R} : \sin x \in \mathbb{Q}\}$	26	$A = \{x \in \mathbb{R} : e^x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$
12	$A = \{x \in \mathbb{R} : \sin x < 1/2\}$	27	$A = \{x \in \mathbb{R} : \sin x = \sin x^2\}$
13	$A = \{x \in \mathbb{R} : \sin x < \cos x\}$	28	$A = \{x \in \mathbb{R} : \sin x > \cos x\}$
14	$A = \{x \in \mathbb{R} : x^5 \in \mathbb{Q}$	29	$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 3 > 3x\}$
15	$A = \{x \in \mathbb{R} : x^3 + x^2 + x + 1 \geqslant 0\}$	30	$A = \{x \in \mathbb{R} : \arctan x > \frac{\pi}{4}\}$

Задача 8. *Нехай A – підмножина відрізку $[0,1]$, що складається з чисел, десятковий розклад котрих можно записати без чисел, що вказані в таблиці для кожного з варіантів. Довести, що A – борелева множина і порахувати його лінійну міру Лебега.*

№	**Числа**	**№**	**Числа**
1	1	16	1 і 2
2	2	17	2 і 3
3	3	18	3 і 4
4	4	19	4 і 5
5	6	20	5 і 6
6	7	21	7 і 8
7	8	22	8 і 9
8	9	23	9 і 1
9	6 і 1	24	2 і 4
10	2 і 5	25	2 і 6
11	2 і 7	26	2 і 8
12	2 і 9	27	3 і 5
13	3 і 6	28	3 і 7
14	4 і 6	29	4 і 7
15	5 і 8	30	5 і 9

2.3 Завдання для самоконтролю

1. Нехай A – підмножина відрізку $[0,1]$, що складається з чисел, десятковий розклад котрих містить всі цифри від 0 до 9. Довести, що A – борелева множина і порахувати його лінійну міру Лебега.

2. Нехай $\{A_n, n \geqslant 1\}$ - деяка сукупність вимірних множин, $A_i \cap Aj = \varnothing$ при $i \neq j$. Обрахувати $m\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right)$, якщо $m(A_n) = \frac{1}{(2n-1)!}$.

3. Нехай $\{A_n, n \geqslant 1\}$ - деяка сукупність вимірних множин. Довести, що $m(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n) = 0$, якщо $m(A_n) = \ln^2(1 + 1/n)$.

4. Побудувати послідовність борелевих множин $\{A_n, n \geqslant 1\}$ в $\mathbb{R}^2$ таких, що $m_2(A_n) = +\infty$, $n \geqslant 1$, $A_n \supset A_{n+1}$, $m_2\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$ (тут m_2 – міра Лебега в $\mathbb{R}^2$).

5. Довести, що A – борелева і знайти плоску міру Лебега $m_2(A)$, якщо
$$A = \left\{(x, y) : 0 \leqslant |y| \leq \frac{1}{1+x^2}, \frac{1}{\sqrt{3}} \leqslant x \leqslant \sqrt{3}\right\}.$$

6. Довести, що A – борелева і знайти плоску міру Лебега $m_2(A)$, $m_2(A)$, $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, якщо

$$A_n = \left\{(x, y) : \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}} \leqslant y \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{(n+1)^2}}}\right\},$$

$x \in [1, 2]$.

7. Навести приклад вимірної множини, що має тип F_σ та не є множиною типу G_δ.

8. Навести приклад вимірної множини, що має тип G_δ та не є множиною типу F_σ.

9. Навести приклад вимірної множини, що не є множиною жодного з типів F_σ та G_δ.

2.4 Вимірні і борелеви функції

В цій секції ми дотримуємося викладення теорії міри в абстрактному просторі, що включає до себе окремий випадок міри Лебега в $\mathbb{R}^n$. Почнемо з означень.

Означення 2.4.1. Функцією, заданою на кільці множин $\mathfrak{R}$, називається функція $\varphi : \mathfrak{R} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Функція називається *аддитивною*, якщо $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B) \quad \forall\ A, B \in \mathfrak{R}$, і *$\sigma$-аддитивною*, якщо $\varphi\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \varphi(A_i) \quad \forall\ A_i \in \mathfrak{R}$, $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$. *Мірою* називається у подальшому будь-яка невід'ємна σ-аддитивна функція множин.

Означення 2.4.2. Кільце $\mathfrak{R}$ підмножин називається *алгеброю*, якщо в ньому міститься одиниця відносно операції перетину, тобто така множина E, що $A \cap E = A$ для будь якого $A \in \mathfrak{R}$. Довільна множина Ω називається *вимірним простором*, якщо в ньому виділено σ-алгебру множин, що називаються *вимірними*. *σ-алгеброю* називається σ-кільце з одиницею.

Означення 2.4.3. *Простором з мірою* називають вимірний простір (Ω, σ), на σ-алгебрі котрого задано невід'ємну зчисленно-адитивну функцію множин (її називають *мірою*).

Означення 2.4.4. Нехай $\{\Omega, \sigma, \mu\}$ – простір з мірою. Функція $f : \Omega \to \mathbb{R}$ називається *вимірною*, якщо для будь-якого $c \in \mathbb{R}$ множина $A_c = \{x \in \Omega : f(x) < c\}$ є вимірною. Еквівалентне означення: функція $f : \Omega \to \mathbb{R}$ називається *вимірною*, якщо повний прообраз $f^{-1}(B)$ довільної борелевої множини $B \subset \mathbb{R}$ є вимірною множиною в Ω. Функція $f : \Omega \to \mathbb{R}$ називається *борелевою*, якщо повний прообраз $f^{-1}(B)$ довільної борелевої множини $B \subset \mathbb{R}$ є борелевою множиною в Ω. Існують вимірні, але не борелеві функції.

Деякі типові властивості вимірних функцій

1) Якщо f та g – вимірні функції, то їх сума, різниця, множення на число, добуток, частка (якщо знаменник не обертається в нуль) є вимірною функцією.

2) Якщо f – борелева, а g – вимірна функція, то $f \circ g$ – вимірна функція.

3) Якщо $f_n(x)$ – послідовність вимірних функцій, то $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ і $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ – вимірні функції

Говорять, що деяку властивість A виконано *μ-майже всюди* (або просто – *майже всюди*), якщо множина тих $x \in \Omega$, для яких A не виконується, має μ-міру нуль. Коротко замість «майже всюди» пишуть: «м.в.»

4) Якщо $f_n(x) \to f(x)$ майже всюди і $f_n(x)$ – вимірні функції для всіх $n \geqslant 1$, то і $f(x)$ – вимірна функція.

В теорії вимірних функцій дві найважливіші теореми – це теореми Лузіна та Єгорова.

Теорема 2.4.1. *(Теорема Лузіна). Нехай E – вимірна підмножина $\mathbb{R}^n$ зі скінченною мірою і f – вимірна функція на E. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує замкнена множина $K = K_\varepsilon$ з наступними властивостями: 1) $\mu(E \setminus K_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$; 2) звуження f на множину K_ε є неперервним.*

Теорема Лузіна має фундаментальне значення: вона показує, що будь-яка вимірна функція скільки завгодно мало відрізняється від неперервної.

Теорема 2.4.2. *(Теорема Єгорова). Нехай E – вимірна підмножина $\mathbb{R}^n$ зі скінченною мірою і f – вимірна функція на E. Тоді якщо послі-*

довність μ-вимірних функцій $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ збігається μ-майже всюди на E, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує вимірна множина $K = K_\varepsilon$ з наступними властивостями: 1) $\mu(E \setminus K_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$; 2) f_n рівномірно збігається на K_ε.

Приклад 2.4.1. *Довести, що функція $f(x)$ є вимірною на $[0,1]$, якщо*

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x - [x]), & \text{якщо } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ \ln \sin x, & \text{якщо } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Розв'язок. Будемо доводити, користуючись означенням 2.4.4 вимірних функцій. Нехай B – довільна борелева множина в $\mathbb{R}$. Треба довести, що множина $f^{-1}(B)$ – вимірна за Лебегом. Позначимо для зручності $f_1(x) := \sin(x - [x])$, $f_2(x) = \ln \sin x$. Тоді, за властивостями прообразу функції f, маємо: $f^{-1}(B) = f^{-1}(B) \cap (\mathbb{Q} \cap [0,1]) \cup f^{-1}(B) \cap ([0,1] \setminus \mathbb{Q})$. Для нашої мети цілком достатньо довести, що кожна з множин $A := f^{-1}(B) \cap (\mathbb{Q} \cap [0,1])$ і $C := f^{-1}(B) \cap ([0,1] \setminus \mathbb{Q})$ є вимірною за Лебегом; оскільки вимірні множини формують σ-алгебру, то їх поєднання $A \cup C = f^{-1}(B)$ також є вимірною за Лебегом множиною. Доведемо це.

Розглянемо $A := f^{-1}(B) \cap (\mathbb{Q} \cap [0,1]) = f_1^{-1}(B) \cap (\mathbb{Q} \cap [0,1])$. Зауважимо, що A має міру нуль, оскільки A є деякою підмножиною раціональних чисел, яке саме має міру нуль. Отже, A – вимірна множина.

Розглянемо $C := f^{-1}(B) \cap ([0,1] \setminus \mathbb{Q}) = f_2^{-1}(B) \cap ([0,1] \setminus \mathbb{Q})$. Зауважимо, що функція $f_2(x) = \ln \sin x$ є неперервною, отже, вимірною (навіть борелевою !). Отже, C – борелеве, а $A \cup C = f^{-1}(B)$ є вимірною множиною як поєднання двох вимірних множин. Ми довели, що $f^{-1}(B)$ – вимірна множина, якою б не була борелева множина $B \subset \mathbb{R}$. $\square$

Приклад 2.4.2. *Довести, що функція $f(x)$ є вимірною на $[0,1]$, якщо*

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x - [x]), & \text{якщо } x \in (\{0\} \cup [0,1]) \setminus \mathbb{Q}, \\ \ln \sin x, & \text{якщо } x \in ([0,1] \cap \mathbb{Q}) \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Розв'язок. Можна міркувати схожими методами, як у прикладі 2.4.1. Будемо доводити, користуючись означенням 2.4.4 вимірних функцій. Нехай B – довільна борелева множина в $\mathbb{R}$. Треба довести, що множина $f^{-1}(B)$ – вимірна за Лебегом. Позначимо для зручності $f_1(x) := \sin(x - [x])$, $f_2(x) = \ln \sin x$. Тоді, за властивостями прообразу функції f, маємо: $f^{-1}(B) = f^{-1}(B) \cap (\mathbb{Q} \cap [0,1] \setminus \{0\}) \cup f^{-1}(B) \cap (\{0\} \cup ([0,1] \setminus \mathbb{Q}))$. Для нашої мети цілком достатньо довести, що кожна з множин $A := f^{-1}(B) \cap (\mathbb{Q} \cap [0,1] \setminus \{0\})$ і $C := f^{-1}(B) \cap (\{0\} \cup ([0,1] \setminus \mathbb{Q}))$ є вимірною за Лебегом;

оскільки вимірні множини формують σ-алгебру, то їх поєднання $A \cup C = f^{-1}(B)$ також є вимірною за Лебегом множиною. Доведемо це.

Зауважимо, що A має міру нуль, оскільки A є деякою підмножиною раціональних чисел, яке саме має міру нуль. Отже, A – вимірна множина.

Розглянемо $C := f^{-1}(B) \cap (\{0\} \cup ([0,1] \setminus \mathbb{Q})) = f_1^{-1}(B) \cap (\{0\} \cup ([0,1] \setminus \mathbb{Q}))$. Зауважимо, що функція $f_1(x) := \sin(x - [x])$ є вимірною (навіть, борелевою !). Дійсно, функції x і $[x]$ зростають і, отже, борелеві. Їх різниця також є борелевою як різниця борелевих функцій. Функція $\sin x$ є борелевою, оскільки вона неперервна. Тоді f_1 є борелевою функцією (тим більше вимірною), як композиція двох борелевих $f_1 = g_1 \circ g_2$, де $g_2 := x - [x]$ і $g_1 := \sin x$. Отже, $f_1^{-1}(B)$ – борелева множина. Зауважимо, що $\{0\} \cup ([0,1] \setminus \mathbb{Q})$ – борелева множина (доведіть !) і, отже, $C := f^{-1}(B) \cap (\{0\} \cup ([0,1] \setminus \mathbb{Q}))$ є борелевою множиною як перетин двох борелевих; тим більше, вона є вимірною множиною. Нарешті, $A := f^{-1}(B) \cap (\mathbb{Q} \cap [0,1] \setminus \{0\})$ – вимірна множина як поєднання двох вимірних множин, що і треба було довести. $\square$

Приклад 2.4.3. *Нехай $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \geqslant 1$. Визначити функцію $g \in C(\mathbb{R})$, для котрої $f_n \to g$ майже всюди, якщо $f_n(x) = \sin^n 3x$, $x \in \mathbb{R}$.*

Розв'язок. Зауважимо, що

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sin^n 3x = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\frac{\pi}{2}+n\pi}{3} \right\}, \\ 1, & x = \frac{\frac{\pi}{2}+2n\pi}{3}, \\ \nexists, & x = \frac{\frac{3\pi}{2}+2n\pi}{3}, \end{cases}$$

$n \in \mathbb{Z}$. Отже, $f_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$ всюди, крім зчисленної множини. $\square$

2.5 Завдання для самостійної роботи № 7

Задача 9. *Довести, що* $f(x)$ *є вимірною функцією на відрізку* $[0,1]$ *для кожного з варіантів (як завжди, «*$[x]$*» позначає цілу частку числа* x*).*

№	Функція	№	Функція
1	$f(x) = \begin{cases} \cos(x^5 - [5x]), x \in \mathbb{Q}, \\ [x] - \left[5x^3\right], x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$	16	$f(x) = \begin{cases} \cos(x^3 - [5x]), x \in \mathbb{Q}, \\ \sin[1/x], x \in [0,1] \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$
2	$f(x) = \begin{cases} x - [6x], x \in \mathbb{Q}, \\ \ln\sin[1/x], x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$	17	$f(x) = \begin{cases} \arctan(x - [5x]), x \in \mathbb{Q}, \\ \cos[5\sin x], x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$
3	$f(x) = \begin{cases} \arctan(x - [3x]), x \in \mathbb{Q}, \\ \cos[5x], x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$	18	$f(x) = \begin{cases} [x^2 - x + 3], x \in \mathbb{Q}, \\ \cos[8x^4 + x^2], x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$
4	$f(x) = \begin{cases} \arctan(x - [5x]), x \in \mathbb{Q}, \\ \int\limits_0^x \cos t dt, x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$	19	$f(x) = \begin{cases} \arctan(x - [5x]), x \in \mathbb{Q}, \\ \int\limits_x^{x^2} \sin t\, dt, x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$
5	$f(x) = \begin{cases} \cos(\sin x), x \in \mathbb{Q}, \\ \int\limits_0^{\sin x} \cos t dt, x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$	20	$f(x) = \begin{cases} [\cos(\sin x)], x \in \mathbb{Q}, \\ \int\limits_0^{\sin^2 x} e^t dt, x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$
6	$f(x) = \begin{cases} \sin(\cos(\sin x)), x \in \mathbb{Q}, \\ \int\limits_0^{\tan x/2} \cos t dt, x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$	21	$f(x) = \begin{cases} 5, x \in \mathbb{Q}, \\ \left[1/x^2\right], x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$
7	$f(x) = \begin{cases} 6, x \in \mathbb{Q}, \\ \int\limits_0^{\cos(x^2)} (t^2 + t) dt, x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$	22	$f(x) = \begin{cases} 6, x \in \mathbb{Q}, \\ \left[\int\limits_0^{\cos(x^2)} (t^2 + t) dt\right], x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$
8	$f(x) = \begin{cases} 7x^2, x \in \mathbb{Q}, \\ \cos(\sin(1/x)), x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$	23	$f(x) = \begin{cases} 6x^3 - 7, x \in \mathbb{Q}, \\ (\cos(\sin(1/x)))^2, x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$
9	$f(x) = \begin{cases} 8x^3 - 8, x \in \mathbb{Q}, \\ \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{x}{n^2}, x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$	24	$f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lvert x\rvert + n}$
10	$f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n[x]^4)}{n\sqrt{n}}$	25	$f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{\sqrt[3]{n^4 + [n^4]}}$
11	$f(x) = e^x - [6x]$	26	$f(x) = \ln\ln(x+1)$
12	$f(x) = [e^x - [5x]]$	27	$f(x) = 5\ln\ln(x+1)$
13	$f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{[x+1]^k!}$	28	$f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{[x+k]^k!}$
14	$f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{[x+1]^k}$	29	$f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k^2}}{[x+1]^k!}$
15	$f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k^3}}{[x+1]^k!}$	30	$f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k - 1}{[x+2]^k!}$

Задача 10. *Нехай* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \geqslant 1$. *Визначити функцію* $g \in C(\mathbb{R})$, *для котрої* $f_n \to g$ *майже всюди, якщо* $f_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$, *задано для кожного з варіантів.*

№	Послідовність	№	Послідовність
1	$f_n(x) = \cos^n(5x)$	16	$f_n(x) = x^3 \sin^n(x^3)$
2	$f_n(x) = (\frac{2}{\pi} \arctan x)^n + \sin^n x$	17	$f_n(x) = \frac{n^2 \cos^3 x}{1+n^2 \cos^3 x}$
3	$f_n(x) = \sin^n \frac{1}{4x}, f_n(0) = 0$	18	$f_n(x) = e^{-n\|x^2-1\|}$
4	$f_n(x) = e^{-n \sin^{4n} \frac{1}{x}},\ f_n(0) = 0$	19	$f_n(x) = \cos^{n^2}(6x) + 1$
5	$f_n(x) = x^4 \cos^n(x^9)$	20	$f_n(x) = (\frac{2}{\pi} \arctan x)^{n^2} + \cos^n(6x)$
6	$f_n(x) = \frac{n^3 \tan^3 x}{1+n^3 \tan^3 x}$	21	$f_n(x) = \cos^n \frac{1}{10x^2}, f_n(0) = 0$
7	$f_n(x) = e^{-n^2\|x^4-1\|}$	22	$f_n(x) = \cos^n(\sin x)$
8	$f_n(x) = \cos^n(\tan x)$	23	$f_n(x) = x^{10} \|\sin(x^5)\|^{\sqrt{n}}$
9	$f_n(x) = (\frac{2}{\pi} \arctan x/3)^{3n} + \frac{\sin^n x}{3}$	24	$f_n(x) = \frac{n^5(e^{3x}-1)}{1+n^5(e^{3x}-1)}$
10	$f_n(x) = \cos(\sin^n \frac{1}{4x}), f_n(0) = 0$	25	$f_n(x) = \sin(\sin^n \frac{1}{4x}), f_n(0) = 0$
11	$f_n(x) = \cos^{n^2}(\cos x) + 1$	26	$f_n(x) = \sin^{n^2}(\sin(6x)) + 1$
12	$f_n(x) = e^{-e^n\|x^7-1\|}$	27	$f_n(x) = (\frac{2}{\pi} \arctan x)^{n^8} + \cos^n(9x)$
13	$f_n(x) = \frac{\sqrt{n} \ln(5\|x\|)}{1+\sqrt{n} \ln(5\|x\|)},\ f_n(0) = 0$	28	$f_n(x) = \sin^n \frac{1}{13x}, f_n(0) = 0$
14	$f_n(x) = \sin^n \frac{1}{12x}, f_n(0) = 0$	29	$f_n(x) = \frac{2}{\pi} \arctan 3x + \cos^n(3x)$
15	$f_n(x) = \frac{n^5 \cos^4 x}{1+n^5 \cos^4 x}$	30	$f_n(x) = \frac{n^4 \cos^5 x}{1+n^4 \cos^5 x}$

2.6 Завдання для самоконтролю

1.* Нехай функція f є монотонною і неперервною на відрізку $[a, b]$ і диференційовна всюди в точках цього відрізку. Чи можна стверджувати, що $f'(x) \neq 0$ майже всюди ?

Вказівка. Розглянути множину канторовського типу K на відрізку $[0, 1]$ позитивної міри і запровадити функцію $f(x) = \int\limits_0^x \psi(t)dt$, де $\psi(t) := \inf\limits_{y \in K} |t - y|$.

2. Чи будуть вимірними: а) функція обмеженої варіації; б) функція, інтегровна за Ріманом на відрізку; 3) функція стрибків; 4) характеристична функція вимірної множини $E \subset \mathbb{R}^n$; 5) характеристична функція невимірної множини $E \subset \mathbb{R}^n$?

Вказівка. В пункті б) треба скористуватися відомим критерієм інтегровності за Ріманом на відрізку $[a, b]$: *функція* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *інтегровна за Ріманом на відрізку*

$[a,b]$ тоді і тільки тоді, коли f є обмеженою на цьому відрізку, крім того, множина її точок розриву має міру Лебега нуль.

2.7 Інтеграл Лебега. Граничні теореми

Інтеграл Лебега – суть і центр лебеговської теорії міри. Інтеграл Лебега – це певне узагальнення інтеграла Рімана на прямій і у просторі, яке завдяки своїй конструкції дозволяє визначати це поняття для більш широких класів функцій у порівнянні з тими, що інтегровні за Ріманом. Наприклад, для функції Діріхле інтеграл Рімана не існує, хоча інтеграл Лебега є визначеним і легко обраховується. Одним з найголовніших ефектів впровадження інтеграла Лебега є можливість застосування до нього так званих граничних теорем – теорем про граничний перехід під знаком інтеграла.

Означення інтеграла Лебега, як правило, надається в декілька етапів: спочатку визначається інтеграл від так званих *простих функцій*, а потім за допомогою *апроксимаційного підходу* (тобто, підходу за допомогою наближення вимірних функцій простими) інтеграл Лебега можно визначити для довільної невід'ємної вимірної функції.

Означення 2.7.1. Нехай $\{\Omega, \sigma, \mu\}$ – вимірний простір. Функція $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}$, де $\chi_{E_k} = \begin{cases} 1, & x \in E_k, \\ 0, & x \notin E_k, \end{cases}$ називається *простою*, якщо $\{E_k\}_{k=1}^{n}$ формує вимірне розбиття множини Ω. Це означає, що множини E_k вимірні (тобто, $E_k \in \sigma$), $E_k \cap E_j = \varnothing$ при $i \neq j$ і $\bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k = \Omega$.

Подальша конструкція інтеграла Лебега стає можливою завдяки наступній теоремі.

Теорема 2.7.1. *Нехай $f(x)$ – вимірна, невід'ємна і μ-майже всюди скінченна функція на вимірному просторі $\{\Omega, \sigma, \mu\}$, тоді існує невід'ємна і монотонно зростаюча послідовність $S_n(x)$ простих функцій, що збігається поточково до $f(x)$.*

Означення 2.7.2. Нехай $\{\Omega, \sigma, \mu\}$ – вимірний простір, $s(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}$ – проста функція, $E_k \in \sigma$, $E_k \cap E_j = \varnothing$ при $i \neq j$ і $\bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k = \Omega$. Нехай також A – вимірна множина. *Інтегралом Лебега по множині A від функції*

$s(x)$ *називається наступна величина:*

$$\boxed{\int\limits_A s(x)d\mu(x) := \sum_{k=1}^{n} c_k \mu(E_k \cap A)\,.}$$

Означення 2.7.3. Нехай $\{\Omega, \sigma, \mu\}$ – вимірний простір, $f(x)$ – вимірна, невід'ємна і μ-майже всюди скінченна функція. Тоді за теоремою 2.7.1 існує монотонно зростаюча послідовність простих функцій $s_n(x)$, що поточково збігається до f. В цьому випадку, покладемо:

$$\boxed{\int\limits_A f(x)d\mu(x) := \lim_{n\to\infty} \int\limits_A s_n(x)d\mu(x)\,.}$$

Функція $f \geqslant 0$ називається *інтегровною за Лебегом,* або *сумовною,* якщо $\int\limits_A f(x)d\mu(x) < \infty$. **Інтеграл Лебега від невід'ємної вимірної функції існує завжди, але може бути нескінченним**.

Запис: f *інтегровна за Лебегом* $\Longleftrightarrow f \in L(\mu)$

$f \in L(A, \mu) \Leftrightarrow f$ інтегровна за Лебегом на множині A відносно міри μ

Означення 2.7.4. Нехай f – вимірна функція, що може приймати значення різних знаків. Покладемо $f_{\pm}(x) := \frac{|f(x)| \pm f(x)}{2}$. Тоді інтегралом Лебега від функції $f(x)$ називається величина

$$\int\limits_A f(x)d\mu(x) := \int\limits_A f_+(x)d\mu(x) - \int\limits_A f_-(x)d\mu(x)$$

за умовою, що хоча б один з інтегралів в правій частині є скінченним. **Інтеграл Лебега від довільної вимірної функції існує не завжди**, як показує приклад функції $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(0) = 0$, на $\mathbb{R}$.

Деякі властивості інтеграла Лебега

1) Якщо $f, g \in L(\mu)$ і $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то $\alpha f + \mu g \in L(\mu)$ і

$$\int\limits_A (\alpha f(x) + \beta g(x))d\mu(x) = \alpha \int\limits_A f(x)d\mu(x) + \beta \int\limits_A g(x)d\mu(x)\,.$$

2) Якщо f інтегровна за Ріманом на відрізку $[a, b]$, то вона також інтеровна і за Лебегом і їх інтеграли співпадають між собою.

3) Якщо $f(x) = g(x)$ майже всюди на A, то $\int\limits_A f(x)d\mu(x) = \int\limits_A g(x)d\mu(x)$, причому інтегровність за Лебегом функції f тягне за собою інтегровність за Лебегом функції g і навпаки.

4) Якщо $m \leqslant f(x) \leqslant M$ для вимірної функції f майже всюди на множині A, то

$$m \cdot \mu(A) \leqslant \int\limits_A f(x)d\mu(x) \leqslant M \cdot \mu(A)\,.$$

5) Якщо $f(x) \leqslant g(x)$ майже всюди, то і $\int\limits_A f(x)d\mu(x) \leqslant \int\limits_A g(x)d\mu(x)$.

6) *Зчисленна адитивність інтеграла Лебега.* Нехай A – вимірна множина, причому $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, A_i – вимірні, $A_i \cap A_j = \varnothing$. Якщо $f \in L(A, \mu)$, то $\int\limits_A f(x)d\mu(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \int\limits_{A_i} f(x)d\mu(x)$.

7) *Абсолютна неперервність інтеграла Лебега.* Якщо $f \in L(A, \mu)$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta = \delta(\varepsilon) : \int\limits_E f(x)d\mu(x) < \varepsilon$, як тільки вимірна множина $E \subset A$ задовольняє умову: $\mu(E) < \delta$. *Сенс абсолютної неперервності інтеграла Лебега полягає в тому, що інтеграл від сумовної функції по маленькій множині є маленьким.*

Наступна властивість істотно відрізняє інтеграл Лебега від інтеграла Римана.

8) Вимірна функція f інтегровна за Лебегом тоді і тільки тоді, коли функція $|f|$ інтегровна за Лебегом.

9) Якщо $\mu(A) = 0$, то $\int\limits_A f(x)d\mu(x) = 0$ для будь-якої вимірної функції f.

Теореми про граничний перехід під знаком інтеграла Лебега

Теорема 2.7.2. *(Теорема Лебега про монотонну збіжність). Нехай $\{\Omega, \sigma, \mu\}$ – простір з мірою, $A \in \sigma$ і f_n – послідовність вимірних невід'ємних функцій, що монотонно збігається до f. Тоді*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_A f_n(x)d\mu(x) = \int\limits_A f(x)d\mu(x)\,. \tag{2.7.1}$$

Теорема 2.7.3. *(Теорема Беппо Леві). Нехай $\{\Omega, \sigma, \mu\}$ – простір з мірою і f_n – послідовність вимірних функцій, що задовольняє наступні умови:*

1) $f_n \in L(A, \mu)$;

2) $f_n(x)$ монотонно зростає: $f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \ldots \leqslant f_n(x) \ldots$;

3) $\sup\limits_{n\geqslant 1} \int\limits_A f_n(x) d\mu(x) = k < \infty$.

Тоді існує $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, $f \in L(A, \mu)$ і виконано умову (2.7.1).

Теорема 2.7.4. *(Теорема Фату). Нехай $\{\Omega, \sigma, \mu\}$ – простір з мірою і f_n – послідовність вимірних невід'ємних функцій на вимірній множині $A \in \sigma$. Тоді*

$$\liminf_{n\to\infty} \int\limits_A f_n(x) d\mu(x) \geqslant \int\limits_A \liminf_{n\to\infty} f_n(x) d\mu(x)\,, \tag{2.7.2}$$

причому в (2.7.2) не можна замінити «$\liminf$» на «$\limsup$».

Теорема 2.7.5. *(Друга форма теореми Фату). Нехай $\{\Omega, \sigma, \mu\}$ – простір з мірою і f_n – послідовність вимірних невід'ємних функцій на вимірній множині $A \in \sigma$. Нехай $f_n(x) \to f(x)$ майже всюди на A і $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_A f_n(x) d\mu(x) = k < \infty$. Тоді $f \in L(A, \mu)$ і $\int\limits_A f(x) d\mu(x) \leqslant k$.*

Теорема 2.7.6. *(Теорема Лебега про мажорантну збіжність). Нехай $\{\Omega, \sigma, \mu\}$ – простір з мірою і f_n – послідовність вимірних функцій на вимірній множині $A \in \sigma$. Нехай $f_n(x) \to f(x)$ майже всюди на A і $|f_n(x)| \leqslant g(x)$, де «мажоранта» $g(x)$ інтегровна за Лебегом на A. Тоді має місце (2.7.1).*

Приклад 2.7.1. *Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^\pi f_n(x) d\mu(x)$, якщо $f_n(x) = \sin^{2n} x$.*

Розв'язок. Хотілося б використати рівність

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^\pi f_n(x) d\mu(x) = \int\limits_0^\pi \lim_{n\to\infty} f_n(x) d\mu(x)\,,$$

але для цього треба спочатку перевірити умови однієї з теорем про граничний перехід під знаком інтеграла Лебега.

Найпростіше і зручніше за все скористатися останньою теоремою – теоремою 2.7.6 про мажорантну збіжність. Отже, наша послідовність

$f_n(x) = \sin^{2n} x$ майже всюди збігається до нуля (крім точки $\pi/2$, де вона тотожно дорівнює 1). Крім того, $|f_n(x)| \leqslant 1 := g(x) \in L([0,\pi])$. Висновок – можна застосувати теорему 2.7.6. Тоді маємо:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^\pi f_n(x) d\mu(x) = \int\limits_0^\pi \lim_{n\to\infty} f_n(x) d\mu(x) = \int\limits_0^\pi 0 \cdot d\mu(x) = 0\,.\square$$

Приклад 2.7.2. *Порахувати інтеграл Лебега* $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$.

Розв'язок. По можливості в таких випадках ми намагаємося звести обрахування інтеграла Лебега до інтеграла Рімана: нагадаємо, що якщо інтеграл Рімана від функції існує, то існує інтеграл Лебега і вони дорівнюють один одному. На жаль, одразу скористатися цим ми не можемо: підінтегральна функція $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$ не обмежена на $[1,2]$ і тому вона не може бути інтегровна за Ріманом на цьому відрізку. Тому ми спочатку апроксимуємо функцію f наступним чином:

$$f_n(x) \;=\; \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}, & x \in [1+\frac{1}{n}, 2], \\ 0, & x \in [1, 1+\frac{1}{n})\,. \end{cases}$$

Зауважимо, що послідовність f_n має наступні властивості: 1) $f_n(x)$ поточково збігається до функції $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$ на відрізку $[1,2]$ всюди, крім точки 1; 2) послідовність $f_n(x)$ є монотонно неспадною, оскільки $f_k(x) \leqslant f_{k+1}(x)$ за побудовою. Тоді можна застосувати теорему 2.7.2 про монотонну збіжність. Згідно цієї теореми

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_1^2 f_n(x) dx = \int\limits_1^2 \lim_{n\to\infty} f_n(x) dx\,. \tag{2.7.3}$$

Порахуємо інтеграл зліва в (2.7.3): $\int\limits_1^2 f_n(x)dx = \int\limits_{1+1/n}^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}dx$. Останній інтеграл вже існує як інтеграл Рімана, оскільки підінтегральна функція є неперервною (отже, інтеграл Рімана існує). Цей інтеграл обраховуємо стандартно через первісну. Маємо:

$$\int\limits_{1+1/n}^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}dx = \frac{3}{2}(x-1)^{2/3}\,\Big|_{1+1/n}^2 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^{2/3}.$$

Нарешті, застосовуючи рівність (2.7.3), отримаємо:

$$\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{n} \right)^{2/3} \right\} = \frac{3}{2} \,. \square$$

2.8 Завдання для самостійної роботи № 8

Задача 11. *Порахувати границю для кожного з варіантів.*

№	Границя	№	Границя
1	$\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 e^{-nx^2}dx$	16	$\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 e^{-\frac{x^2}{n}}dx$
2	$\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\sin^n x}{1+x^2}dx$	17	$\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^\pi e^{-\cos^n x}dx$
3	$\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^\infty n(e^{-\frac{x}{n}}-1)\frac{dx}{1+x^4}$	18	$\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 e^{-nx^3}dx$
4	$\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 e^{-\frac{x^2}{n^2}}dx$	19	$\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\cos^n x}{1+x^4}dx$
5	$\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^\pi e^{-\sin^n(5x)}dx$	20	$\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^\infty n^2(e^{-\frac{x}{n^2}}-1)\frac{dx}{1+x^4}$
6	$\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 e^{-\frac{x^8}{n^4}}dx$	21	$\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\sin^{n^2}(10x)}{1+x^{10}}dx$
7	$\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^{4\pi} e^{-\cos^{4n} x}dx$	22	$\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^\infty n^3(e^{-\frac{x}{n^3}}-1)\frac{dx}{1+x^4}$
8	$\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 e^{-n^2x^3}dx$	23	$\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\sin^n x}{1+x^6}dx$
9	$\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^{5\pi} e^{-\cos^{n^3} x}dx$	24	$\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 e^{-nx^5}dx$
10	$\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^\infty n^5(e^{-\frac{x}{n^5}}-1)\frac{dx}{1+x^4}$	25	$\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 e^{-n^4x^5}dx$
11	$\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\sin^n x}{1+x^8}dx$	26	$\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 e^{-nx^6}dx$
12	$\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^{8\pi} e^{-\cos^{n^4} x}dx$	27	$\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^\infty n^6(e^{-\frac{x}{n^6}}-1)\frac{dx}{1+x^4}$
13	$\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 e^{-n^5x^6}dx$	28	$\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\sin^n x}{1+x^{10}}dx$
14	$\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 e^{-nx^7}dx$	29	$\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^{\pi/2} e^{-\frac{\cos^n x}{2}}dx$
15	$\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^\infty n^7(e^{-\frac{x}{n^7}}-1)\frac{dx}{1+x^4}$	30	$\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 e^{-n^6x^7}dx$

Задача 12. *Порахувати інтеграл Лебега для кожного з варіантів.*

№	Інтеграл	№	Інтеграл
1	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$	16	$\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}}$
2	$\int_3^4 \frac{dx}{\sqrt[4]{x-3}}$	17	$\int_4^5 \frac{dx}{\sqrt[4]{x-4}}$
3	$\int_5^6 \frac{dx}{\sqrt[5]{x-5}}$	18	$\int_6^7 \frac{dx}{\sqrt[6]{x-6}}$
4	$\int_0^1 \frac{dx}{x}$	19	$\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$
5	$\int_0^1 \frac{dx}{x^3}$	20	$\int_0^1 \sin x \chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x)dx$
6	$\int_0^1 \cos x \chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x)dx$	21	$\int_0^1 e^x \chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x)dx$
7	$\int_0^1 (x^2+5x+6)\chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x)dx$	22	$\int_0^1 \ln x \chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x)dx$
8	$\int_0^1 \tan x \chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x)dx$	23	$\int_0^1 \sin^2 x \chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x)dx$
9	$\int_3^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}}$	24	$\int_4^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}}$
10	$\int_3^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}}$	25	$\int_0^1 \frac{dx}{x^4}$
11	$\int_0^1 \frac{dx}{x^5}$	26	$\int_0^1 \frac{dx}{x^6}$
12	$\int_0^1 f(x)dx,$ $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \\ \sin x, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$	27	$\int_0^1 f(x)dx,$ $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \\ 2^x, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$
13	$\int_0^1 f(x)dx,$ $f(x) = \begin{cases} 3^x, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \\ \cos x, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$	28	$\int_0^1 f(x)dx,$ $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \\ \sin x, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$
14	$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{\lvert x-2\rvert}}$	29	$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{\lvert x\rvert}}$
15	$\int_5^7 \frac{dx}{\sqrt[6]{\lvert x-6\rvert}}$	30	$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$

2.9 Завдання для самоконтролю

1. Нехай $\int\limits_0^1 f(x)dx$ існує як невласний інтеграл Рімана, причому нехай цей інтеграл збігається лише умовно (не абсолютно). Що можна сказати про існування інтеграла Лебега $\int\limits_0^1 f(x)dx$?

2. Нехай $f(x)$ інтегровна за Лебегом на відрізку $[0,1]$. Чи буде $f^2(x)$ інтегровна за Лебегом на цьому ж відрізку ?

3. Нехай $f(x)$ і $g(x)$ інтегровні за Лебегом на відрізку $[0,1]$. Чи буде функція $F(x) := f(x) \cdot g(x)$ інтегровна за Лебегом на цьому ж відрізку ?

4. Нехай $f(x)$ і $g(x)$ інтегровні за Лебегом на відрізку $[0,1]$. Чи буде функція $G(x) := f(x) \circ g(x)$ інтегровна за Лебегом на цьому ж відрізку ?

5. Нехай $f(x) \geqslant 0$ інтегровна за Лебегом на відрізку $[0,1]$. Чи буде функція $\varphi(x) := \sqrt{f(x)}$ інтегровна за Лебегом на цьому ж відрізку ?

6. Нехай $f(x)$ -функція обмеженої варіації на відрізку $[0,1]$. Чи буде ця функція інтегровна за Лебегом на цьому відрізку ?

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Березанский Ю.М. *Функциональный анализ* / Ю.М. Березанский, Г.Ф. Ус, З.Г. Шефтель. – К.: Выща шк., 1990.

[2] Городецкий В.В. *Методы решения задач по функциональному анализу* / В.В. Городецкий, Н.И. Нагнибеда, П.П. Настасиев. – К.: Выща шк., 1990.

[3] Колмогоров А.Н. *Элементы теории функций и функционального анализа* / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – Москва: Наука, 1976. – 531 с.

[4] Люстерник Л.А. *Элементы функционального анализа* / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М.: Наука, 1965.

[5] Шилов Г. Е. *Математический анализ. Специальный курс.* / Г.Е. Шилов. – М.: Физматгиз, 1961.

Навчальне видання

СЕВОСТЬЯНОВ Євген Олександрович

Елементи теорії міри та інтеграла

Навчально-методичний посібник

Дизайн обкладинки І. Клімової
Редактори: А.Черняк, Р. Ступницький
Комп'ютерне верстання С. Б. Іванова

Надруковано з оригінал-макета автора

Підписано до друку 12.08.15. Формат 60х90/16. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman. Друк різографічний.
Ум. друк. арк. 2.7. Обл. вид. арк. 2.2. Наклад 300. Зам. 121.

Видавець і виготовлювач
Видавництво Житомирського державного університету імені Івана Франка
м. Житомир. вул. Велика Бердичівська, 40
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
серія ЖТ №10 від 07.12.04 р.
електронна пошта (E-mail): zu@zu.edu.ua