Житомирський державний університет
імені Івана Франка

Теоретико-методичні аспекти навчання математичних дисциплін

Монографія

До 70-річчя кафедри

Житомир

2018

УДК 378.147:51
ББК 74.580

Рекомендовано до друку вченою радою
Житомирського державного університету імені Івана Франка
від 27.02.2018, протокол № 11

РЕЦЕНЗЕНТИ:

Москвін П. П. – завідувач кафедри фізики та вищої математики Житомирського державного технологічного університету, доктор фізико-математичних наук, професор.

Копетчук В. А. – кандидат педагогічних наук, доцент кафедри природничих та суспільно-гуманітарних дисциплін Житомирського медичного інституту.

Дубасенюк О. А. – доктор педагогічних наук, професор, професор кафедри педагогіки Житомирського державного університету імені Івана Франка.

Теоретико-методичні аспекти навчання математичних дисциплін / за ред. доц. А.В.Прус. – Житомир : Вид-во, 2018. – 395 с.

У монографії визначено й обґрунтовано теоретико-методологічні засади новітніх підходів у професійній підготовці майбутніх вчителів математики.

Монографію адресовано широкому загалу освітян, науковцям, викладачам, докторантам, аспірантам, студентам вищих навчальних закладів.

УДК 378.147:51
ББК 74.580

ЗМІСТ

Франовський А.Ц.
декан фізико-математичного факультету,
кандидат фізико-математичних наук, доцент

КАФЕДРА АЛГЕБРИ ТА ГЕОМЕТРІЇ У СТРУКТУРІ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНОГО ФАКУЛЬТЕТУ ЖИТОМИРСЬКОГО ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА: СЬОГОДЕННЯ ТА ПЕРСПЕКТИВИ

У світлі євроінтеграційних процесів, а також на шляху інформатизації суспільства система вищої освіти в Україні зазнає суттєвих змін: вищі навчальні заклади модернізуються, відбувається реорганізація їх структурних підрозділів. Це призводить до створення нових навчально-наукових інститутів, факультетів, кафедр, метою діяльності яких є підготовка та виховання спеціалістів нової генерації, здатних до професійного зростання та творчого розвитку.

Фізико-математичний факультет – один з восьми структурних підрозділів Житомирського державного університету імені Івана Франка. У складі факультету функціонує кафедра алгебри та геометрії, яка забезпечує високоякісну підготовку вчителів математики, фізики та інформатики.

Протягом років існування кафедра, відповідно до реорганізаційних змін в університеті, декілька разів змінювала свою назву і склад. Спочатку в Житомирському педагогічному інституті ім. Івана Франка (колишня назва Житомирського державного університету імені Івана Франка) існувала лише одна кафедра – кафедра математики. ***Кафедра математики*** була створена ***1 вересня 1948 року***. Персональний склад кафедри (згідно наказу № 201 по Житомирському педагогічному інституту ім. Ів. Франка від 1.09.1948): Хацет Борис Ісаакович (посада – старший викладач), Дорфман Абрам Григорович (асистент), Костарчук Віктор Михайлович (асистент). Протягом наступних місяців на кафедрі почали працювати Дубосарська Розалія Абрамівна та Майстер Яків Йосипович. Зазначимо, що згодом В. М. Костарчук обіймав посаду старшого викладача, а потім – декана фізико-математичного факультету (у 1954 р. Віктор Миколайович захистив кандидатську дисертацію, а вже у 1955 р. його призначають ректором Чернігівського державного педагогічного інституту). ***Першим завідувачем*** кафедри математики був призначений ***Хацет Борис Ісаакович***.

1 вересня 1953 року кафедра математики була розділена на дві: ***кафедру математичного аналізу і алгебри; кафедру геометрії і елементарної математики*** (наказ № 76 від 19.02.1953). Відомості про склад кафедр та їх завідуючих, на жаль, в архівних документах не збереглись.

Однак відомо, що у ***жовтні 1954 року*** на базі цих кафедр створюється дві інші: ***вищої математики*** (завідувач ***Хацет Борис Ісаакович***) та ***елементарної математики і методики математики*** (завідувач ***Білоус Тамара Іванівна***). Як згадувала Тамара Іванівна, обов'язки завідуючого кафедри вона виконувала до 1958 року, а потім із 1961 року по 1962 рік.

Склад кафедри елементарної математики і методики математики (наказ № 339-а від 11.1958): завідувач кафедри Хайдуков Юрій Іванович; старші викладачі Білоус Тамара Іванівна, Добосарська Розалія Абрамівна; асистенти Уставщикова Олександра Ониківна, Демченко Антоніна Яківна. ***Хайдуков Юрій Іванович*** завідував кафедрою з 1958 до 1961 року. ***Бобровник Михайло Петрович*** завідував кафедрою до 1970 року.

У 1970 році в інституті (наказ № 67-к від 15.04.1970) на базі двох існуючих математичних кафедр створюються ***кафедра математики та кафедра математичного аналізу.*** Тоді ж було оголошено конкурс на заміщення посад завідувачів кафедр. Склад кафедри математики: доцент Бобровник Михайло Петрович; старші викладачі Нестерчук Анатолій Васильович, Боравльов Анатолій Пилипович, Богдан Антоніна Яківна, Дворська Марія Григорівна; асистенти Волянський Володимир Station Станіславович, Зелінська Галина Олександрівна, Кржемінська Галина Карлівна, Гризлова Л. С. Згодом (наказ № 194 від 25 серпня 1970 року), склад кафедри дещо змінився, зокрема, на посаду асистента кафедри була прийнята Баранівська Антоніна Федорівна. Завідувачем кафедри математики було призначено ***Нестерчука Анатолія***

Васильовича. Склад кафедри математичного аналізу: завідувач кафедри Кисилевський Генріх Едмундович; доцент Мартинюк Антон Євгенович; старші викладачі Мержеєвський Арнольд Володимирович, Таргонський Леонід Пилипович, Дубосарська Розалія Абрамівна; асистенти Коломійцев Олег Петрович, Яковенко Любов Федорівна. У 1971 – 1973 роках після закінчення аспірантури повернулися Андрощук Олександр Олександрович, Осадчий Микола Мефодійович, Дідківська Тетяна Вікторівна. Варто зазначити, що кафедра математичного аналізу у складі фізико-математичного факультету існує й донині. Протягом 1976–1985 років завідувачем цієї кафедри був Леонід Пилипович Таргонський, кандидат фізико-математичних наук, доцент, відмінник народної освіти. З 1985 року й по цей час кафедрою завідує Олег Федорович Герус, кандидат фізико-математичних наук, доцент.

Справжнім скарбом для нас є стаття Т. В. Дідківської (Тетяна Вікторівна працює в нашому університеті від 1963 року, тобто 55 років!) про видатних особистостей, які працювали на кафедрі в той час (матеріали розміщені у цій же монографії).

Із ***1982 року*** до ***2007 року*** (чверть століття!) кафедру математики очолював ***Ленчук Іван Григорович.*** Іван Григорович, на наше прохання, поділився спогадами про ті часи, про себе, про неординарних викладачів нашого фізико-математичного факультету (див. статтю в монографії).

Ленчук Іван Григорович, доктор педагогічних наук, кандидат технічних наук, професор, народився 18 червня 1942 року в с. Сингаївка Бердичівського р-ну Житомирської обл. У 1963 році закінчив Житомирський державний педагогічний інститут ім. І. Франка за спеціальністю «Математика і фізика». У 1979 році завершив навчання в аспірантурі Національного технічного університету України «КПІ» ім. І. Сікорського за напрямом «Прикладна геометрія та інженерна графіка». У цьому ж році захистив кандидатську дисертацію на тему: «Алгоритмізація технологічного процесу підготовки геометричної інформації для автоматизованих систем управління розкроюванням матеріалів». У 2013 році в спеціалізованій вченій раді

Національного педагогічного університету ім. М. П. Драгоманова відбувся захист докторської дисертації на тему: «Теоретико-методична система навчання евклідової геометрії майбутніх учителів математики на основі конструктивного підходу». Рішенням Атестаційної колегії МОН України від 23 вересня 2014 року Ленчуку І. Г. присвоєно вчене звання професора кафедри методики навчання математики, фізики та інформатики.

За сумлінну багаторічну працю, особистий внесок у підготовку висококваліфікованих педагогічних кадрів І. Г. Ленчук нагороджений грамотою Міністерства освіти України, грамотами Управління освіти і науки Житомирської обласної державної адміністрації, почесними грамотами Житомирського державного університету імені І. Франка. Іван Григорович бере активну участь у Міжнародних та Всеукраїнських науково-практичних і науково-методичних конференціях. Опублікував понад 140 наукових і навчально-методичних праць. Під науковим керівництвом І. Г. Ленчука у 2015 р. захищено дві кандидатські дисертації (Фонарюк Олена Василівна, Мосіюк Олександр Олександрович). Професор І. Г. Ленчук здійснював експертизу, згідно наказу МОН України від 30.12.2016, електронної версії проекту підручника: «Геометрія для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики», підручник для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів (авт. А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір). І. Г. Ленчук був призначений офіційним опонентом трьох докторських (О. І. Матяш, О. В. Школьний, Д. І. Ткач) і двох кандидатських дисертацій (Т. М. Махомета , Л. В. Швець).

Із ***1982 року*** до червня ***1998 року*** кафедра мала назву ***«кафедра математики»***. До складу кафедри математики у 1982 році входили: завідувач кафедри Ленчук Іван Григорович; доценти Нестерчук Анатолій Васильович, Боравльов Анатолій Пилипович, Дідківська Тетяна Вікторівна, Кржемінська Галина Карлівна, Ляшенко Борис Миколайович; старші викладачі Богдан Антоніна Яківна, Дворська Марія Григорівна, Коломійцев Олег Петрович;

асистенти Волянський Володимир Станіславович, Зелінська Галина Олександрівна, Мукосій Ольга Петрівна, Орлюк Михайло Дмитрович.

Мукосій Ольга Петрівна перевіряє письмові роботи

З ***1998*** до ***2003*** року кафедра носила назву «***кафедра математики та інформатики».*** Виникла потреба у викладачах інформатики. Серед них був Спірін Олег Михайлович, який згодом став доктором педагогічних наук, професором.

У відповідності з рішенням вченої ради університету від **3.03.2003** (наказ № 69) кафедру математики та інформатики розділили на дві: ***кафедру математики*** та ***кафедру інформатики***. Кафедрою математики продовжував завідувати І. Г. Ленчук, Зазначимо, що у 2005 році на кафедру прийшов працювати досвідчений викладач Лисенко Микола Петрович.

Кафедру інформатики, яку було згодом перейменовано на кафедру прикладної математики та інформатики, очолив відмінник освіти України, доктор фізико-математичних наук, професор, член науково-технічної ради з інформатики та кібернетики і науково-методичної ради з прикладної математики та інформатики при МОН України Борис Миколайович Ляшенко.

З ***2007 року*** до ***2016 року*** кафедрою математики завідував ***Семенець Сергій Петрович.***

Семенець Сергій Петрович народився 3 жовтня 1968 року в с. Пиків Калинівського району, Вінницької області. Після закінчення школи у 1985 році вступив до Житомирського державного педагогічного інституту імені Івана Франка на фізико-математичний факультет. Через два роки навчання був призваний до лав Радянської армії і проходив службу у військах «Залізної дивізії» Прикарпатського військового округу (місто Яворів Львівської області). У 1989 році продовжив навчання в інституті, його закінчив з відзнакою в 1992 році, отримавши кваліфікацію вчителя математики і фізики. Після закінчення інституту працював учителем математики в Бердичівській ЗОШ № 11. У 1994 році був запрошений на посаду асистента кафедри математики та інформатики Житомирського державного педагогічного інституту імені Івана Франка. У 1998 році, поєднуючи роботу асистента кафедри й навчання в заочній аспірантурі НПУ ім. М. П. Драгоманова, захистив кандидатську дисертацію «Розвиток продуктивного мислення учнів при вивченні алгебри і початків аналізу» (спеціальність 13.00.02 – теорія та методика навчання математики, керівник – доктор педагогічних наук, професор Зінаїда Іванівна Слєпкань). Упродовж 1999-2003 років виконував обов’язки заступника декана фізико-математичного факультету. У 2001 році присвоєно вчене звання доцента кафедри математики та інформатики. У 2011 році в спеціалізованій вченій раді ЖДУ імені Івана Франка успішно захистив докторську дисертацію «Теорія і практика розвивального навчання в системі методичної підготовки майбутніх учителів математики» (спеціальність 13.00.04 – теорія і методика професійної освіти, консультант – д-р пед. наук, професор З. І. Слєпкань). За два роки по тому отримав вчене звання професора кафедри математики. Науково-методичний доробок складає понад 130 праць. Наукові інтереси: теорія й методика особистісно-розвивального навчання математики, система методичної підготовки майбутніх учителів математики.

Із 2007 року обіймав посаду завідувача кафедри математики, а з 2013 року – завідувача кафедри методики навчання математики, фізики та інформатики. За період керівництва було захищено дві докторські й чотири кандидатські дисертації, якісний склад кафедри становив 22% докторів наук і 67% кандидатів наук. Ключовими завданнями професорсько-викладацького складу кафедри було забезпечення якісної методичної підготовки вчителів і викладачів математики, фізики та інформатики, а також розробка й упровадження інноваційних методик і технологій навчання. Колективом кафедри підготовлено спеціальні курси «Теорія і методика особистісно-розвивального навчання математики» (професор С. П. Семенець), «Додаткові розділи геометрії» (професор І. Г. Ленчук), «Прикладні задачі з параметрами» (доцент А. В. Прус), «Використання обчислювальної техніки в навчальному процесі та наукових дослідженнях» (доцент В. В. Міхеєв), «Вибрані питання тригонометрії» (старший викладач З. П. Поліщук), «Лабораторний практикум з фізики» (старший викладач М. В. Федьович), «Використання педагогічних програмних засобів у професійній діяльності майбутніх учителів інформатики» (старший викладач Д. С. Вербівський), «Професійне становлення майбутнього вчителя математики» (асистент О. А. Ковальчук), «Розв’язування прикладних геометричних задач засобами педагогічних комп’ютерних технологій» (асистент О. О. Мосіюк).

С. П. Семенець, М. П. Лисенко, І. Г. Ленчук, А. Ц. Франовський
(в 219 аудиторії перед засіданням кафедри, 2010 рік)

На кафедрі систематично проводилися науково-методичні семінари, організовувалася профорієнтаційна робота зі старшокласниками міста й області, планово проходили попередні захисти курсових, дипломних і магістерських робіт студентів. Кафедра вирізнялася гарними традиціями славетного колективу, серед яких систематичні виїзні засідання культурно-просвітницького спрямування.

У 2016 році в зв'язку із реорганізацією кафедри Сергій Петрович обраний на посаду професора кафедри математичного аналізу, при якій було відкрито аспірантуру зі спеціальності «014 Середня освіта», спеціалізації «теорія і методика навчання (математика)». Є керівником наукового Центру університету «Теорія і методика особистісно-розвивального навчання математики», член спеціалізованої вченої ради, член редакційної колегії науково-методичного журналу «Креативна педагогіка» (Житомир), дійсний член Академії міжнародного співробітництва з креативної педагогіки «Полісся». За сумлінну працю нагороджений грамотами Міністерства освіти і науки України, обласної та міської адміністрацій і адміністрації університету.

У ***2013 році*** кафедра математики, із врахуванням освітніх потреб та внутрішніх змін в університеті, була розділена на ***кафедру методики навчання математики, фізики та інформатики*** (продовжував керувати С. П. Семенець) і ***кафедру алгебри та геометрії*** (очолив доктор фізико-математичних наук, професор ***Михайленко Василь Васильович***). Склад кафедри методики навчання математики, фізики та інформатики: завідувач кафедри, професор Семенець Сергій Петрович, професор Ленчук Іван Григорович, доценти Прус Алла Володимирівна, Міхеєв Віктор Васильович; старші викладачі Орел Лілія Олександрівна, Поліщук Зоя Петрівна, Федьович Микола Васильович, асистент Ковальчук Олена Антонівна, лаборант Бойко Анна Миколаївна.

Склад кафедри алгебри та геометрії: завідувач кафедри, професор Михайленко Василь Васильович; доценти Франовський Анатолій Цезарович, Королюк Олена Миколаївна, Дідківська Тетяна Вікторівна, Сверчевська Ірина Анатоліївна, Клімова Інна Миколаївна, Чемерис Ольга Анатоліївна; асистент

Фонарюк Олена Василівна, лаборанти Ященко Наталія Вікторівна та Словінська Юлія Анатоліївна.

Кафедри методики навчання математики, фізики та інформатики
Зліва направо: М. В. Федьович, Д. С. Вербівський, В. В. Міхеєв, А. М. Бойко, І. Г. Ленчук, С. П. Семенець, О. О. Мосіюк, Л. О. Орел, О. А. Ковальчук, А. В. Прус

Кафедра алгебри та геометрії
Другий ряд, зліва направо: Н. В. Ященко, А. Ц. Франовський, О. А. Чемерис, В. В. Михайленко, Ю. А. Словінська
Перший ряд, зліва направо: І. А. Сверчевська, Т. В. Дідківська, О. В. Фонарюк, О. М. Королюк

1 вересня 2016 року кафедра отримала свою остаточну назву – ***кафедра алгебри та геометрії.*** Сьогодні кафедра алгебри та геометрії є однією з основних фундаментальних кафедр фізико-математичного факультету, її очолює доктор фізико-математичних наук, професор ***Василь Васильович Михайленко***.

Призначення завідувачем кафедри алгебри та геометрії саме В. В. Михайленка було невипадковим, оскільки за своєю освітою він повністю відповідає напряму кафедри, закінчивши у 1982 році механіко-математичний факультет Київського ордена Леніна державного університету імені Т. Г. Шевченка за спеціальністю "Математика" та отримавши кваліфікацію "математик, викладач". У 1998 році Василь Васильович Михайленко успішно захистив докторську дисертацію на тему "Резонансні коливання і дисипативний розігрів неоднорідних в'язкопружних п'єзоелектричних тіл" за спеціальністю 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла. Професор Михайленко відіграє провідну роль як у забезпеченні якісної математичної підготовки майбутнім фахівцям, так і в організаційних справах кафедри й факультету.

У результаті конкурсного відбору, кадрову основу нової кафедри склали досвідчені й талановиті науковці-педагоги: професор Михайленко Василь Васильович, професор Ленчук Іван Григорович, доцент Франовський Анатолій Цезарович, доцент Королюк Олена Миколаївна, доцент Прус Алла Володимирівна, доцент Сверчевська Ірина Анатоліївна, доцент Чемерис Ольга Анатоліївна, доцент Фонарюк Олена Василівна, старший викладач Поліщук Зоя Петрівна, старший викладач Толстова Ольга Вікторівна та старший лаборант Бенедисюк Марія Миколаївна.

З гордістю зауважимо, що більшість викладачів кафедри є випускниками фізико-математичного факультету, які успішно захистили дисертаційні дослідження і продовжують свої наукові пошуки.

За роки свого існування кафедра готувала бакалаврів, випускала студентів магістратури, тобто відповідала усім вимогам найвищого четвертого рівня акредитації. У 2016 році, як випускова, кафедра пройшла процедуру ліцензування спеціальності «Середня освіта (Математика)» та «Математика» освітнього ступеня «Магістр», а також приймала активну участь у започаткуванні нових спеціальностей фізико-математичного факультету. Так, за рахунок кадрового потенціалу кафедри алгебри та геометрії були ліцензовані спеціальності «Статистика» й «Професійна освіта (Комп'ютерні технології)» освітнього ступеня «Бакалавр».

Професорсько-викладацький склад кафедри завжди намагається прищепити любов студентській молоді до природничо-математичних наук. Серед випускників факультету є як педагогічні працівники, так і науковці у галузі педагогічних та фізико-математичних наук (І. Г.Ленчук , О. М. Королюк, А. В. Прус, І. А. Сверчевська, О. А. Чемерис, О. В. Фонарюк, З. П. Поліщук, О. В. Толстова, Н. А. Сейко, Н. Г. Сидорчук, В. О. Климчук, О. М. Спірін, О. Ф. Герус, М. М. Осадчий, О. А. Сарана, А. Л. Таргонський , С. П. Семенець, Л. О. Орел, С. А. Плакса, В. С. Шпаківський, М. В. Ткачук, Д. А. Мержеєвський, С В. Грищук, С. І. Скуратівський, М. В. Стьопочкіна, І. В. Денега, Р. П. Пухнаєвич та інші).

Випускники кафедри є конкурентоспроможними на ринку праці і готові для професійної роботи на підприємствах, в установах та організаціях сфери економічної, фінансової, виробничої, торгівельної, оборонної, освітянської, дослідницької діяльностей різних форм власності; у різних галузях промислового виробництва, торгівлі, в банківсько-фінансовій системі, у наукових та навчальних закладах, контрольно-ревізійних установах центральних і місцевих органів влади та управління, проектних організаціях, тощо. Викладачі та співробітники кафедри алгебри та геометрії постійно дбають про зворотній зв'язок із випускниками та їх замовниками.

Викладачі кафедри проходять стажування у провідних навчальних та науково-дослідних установах, викладачі і студенти беруть участь у спільних наукових семінарах; бакалаври і магістри проходять педагогічну практику в навчальних закладах м. Житомира і регіону, здійснюють активну профорієнтаційну роботу серед випускників шкіл.

Усі викладачі активно приймають участь у наукових конференціях та семінарах. Результати наукових досліджень опубліковані в різних наукових виданнях нашої держави й закордоном, зокрема у виданнях, які індексуються міжнародними наукометричними базами Scopus та Web of Science.

Новим поштовхом для розвитку кафедри стало поліпшення її якісного професорсько-викладацького складу за рахунок успішних захистів дисертаційних досліджень (О. В. Толстова, О. В. Фонарюк).

Кафедра алгебри та геометрії має міцні й дружні стосунки з фаховими кафедрами провідних університетів нашої держави, серед яких Київський національний університет ім. Т. Г. Шевченка, Львівський національний університет імені Івана Франка, Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка, Житомирський державний технологічний університет тощо. Крім того, кафедра тісно співпрацює з Інститутом механіки НАН України. Результатом є спільні фахові публікації та участь у науково-практичних конференціях.

На особливу увагу заслуговує діяльність кафедри щодо участі у проведенні Всеукраїнських учнівських олімпіад з математики (ІІ та ІІІ етапи), а також Всеукраїнського конкурсу-захисту науково-дослідницьких робіт учнів-членів Малої академії наук України. З метою активізації науково-дослідної діяльності студентської молоді на кафедрі створено студентський науковий гурток та діють студентські проблемні групи, результати діяльності яких висвітлюються у студентських наукових публікації та доповідаються на конференціях різного рівня, а також на науково-методичних семінарах кафедри та факультету. За останні чотири роки побачили світ майже вісімдесят студентських статей під керівництвом викладачів кафедри алгебри та геометрії. Важливим здобутком кафедри алгебри та геометрії є щорічна організація та проведення науково-практичної конференції студентів, магістрантів та викладачів «Науковий пошук молодих дослідників». Наукові доробки учасників публікуються у збірці наукових праць, редактором якої є доцент кафедри алгебри та геометрії О. М. Королюк. Варто відзначити виховну роботу, яку проводять викладачі кафедри зі студентською молоддю. Більшість членів кафедри є наставниками (кураторами) академічних груп фізико-математичного факультету. Перспективними напрямами розвитку кафедри алгебри та геометрії є постійне професійне зростання, підвищення якості професорсько-викладацького складу (О. М. Королюк працює над докторською, М. М. Бенидисюк завершує кандидатську дисертацію); оновлення навчально-методичного забезпечення, зміцнення матеріально-технічної бази; відкриття нової спеціальності «Середня освіта (Математика)», спеціалізація: іноземна мова (англійська); розробка нових наукових проектів та участь у грантах; активізація студентської наукової роботи; участь у виховних заходах факультету та університету; здійснення міжнародного обміну з метою підвищення кваліфікації та стажування викладачів; щорічне проведення науково-практичних конференцій та семінарів, присвячених актуальним проблемам у галузі фізико-математичних наук.

Можна й далі продовжувати перераховувати здобутки й досягнення кафедри алгебри та геометрії, адже нам є чим пишатися!

Кафедра алгебри та геометрії

Другий ряд, зліва направо: В. В. Михайленко, О. А. Чемерис, М. М. Бенедисюк, І. Г. Ленчук, З. П. Поліщук, О. В. Фонарюк

Перший ряд, зліва направо: І. А. Сверчевська, О. М. Королюк, А. Ц. Франовський, А. В. Прус, О. В. Толстова.

Дідківська Т. В.
кандидат фізико-математичних наук, доцент

ІСТОРІЯ СТВОРЕННЯ І СТАНОВЛЕННЯ КАФЕДРИ МАТЕМАТИКИ

У серпні 1948 року здійснено перший післявоєнний набір на фізико-математичний факультет Житомирського державного педагогічного інституту імені Івана Франка (50 студентів). Це було поновлення роботи цього факультету, бо в 1919 – 1932 роках при інституті працював фізико-математичний факультет, але зважаючи на те, що під час війни була знищена вся його матеріально-технічна база, книжковий фонд, не було жодного викладача фізико-математичних дисциплін, можна говорити про створення факультету заново.

У 1948 р. на факультеті розпочали роботу дві кафедри: математики і фізики. Кафедру фізики очолив *Карасек Євген Порфирович*. Молодий викладач, енергійна людина, яка багато зробила по створенню лабораторій, організації навчальної роботи з курсу фізики. Завідувачем кафедрою математики в липні 1948 р., десь через місяць після закінчення аспірантури при Київському університеті й захисту кандидатської дисертації був призначений *Хацет Борис Ісакович* (йому було лише 26 років). Він їхав з наміром відслужити 2 – 3 роки і повернутися до Києва та продовжити наукові дослідження під керівництвом М. М. Боголюбова. Але початок його роботи співпав зі створенням нового факультету. З першого дня виникло багато складних проблем. Б. І. Хацет згадував: "Романтика цих труднощів поглинула всі мої думки і всю енергію". Після 16 років роботи він усе-таки виїхав до Києва, але вважав створення чудового колективу кафедри однією з небагатьох добрих справ, які вдалося здійснити в житті. Пізніше неодноразово жалкував, що переїхав до Києва, а також шкодував, що залишив Україну…

У серпні 1948 р. на кафедрі математики було 5 чоловік: Хацет Б. І. та 4 члени кафедри.

Костарчук Віктор Миколайович, який закінчив математичне відділення Харківського університету в 1941 році і з перших до останніх днів війни був бійцем Червоної Армії. Він скоро став провідним викладачем факультету і його деканом. Як говорив Віктор Миколайович: "Мабуть лише тому, що був серед викладачів найстаршим (мені було вже 30 років)". У 1954 р., коли Віктор Миколайович був уже кандидатом фізмат наук, він був призначений ректором Чернігівського педінституту.

Дубосарська Розалія Абрамівна, яка стала прикладом високої сумлінності, відповідальності, безкомпромісності. Будучи залученою до виховної роботи в ролі "агітатора" студентської групи, часто допомагала студентам вирішувати їх численні проблеми, за що студенти її поважали і любили.

Майстер Яків Йосипович – один з організаторів і довічних хазяїв кабінету математики. Разом з Хацетом Б. І. вони перевозили в мішках поїздом з Києва фізико-математичну літературу, яку вдавалося "вибити" в бібліотеці Міністерства освіти УРСР. Відсутність підручників і посібників була гострою проблемою для нового факультету.

Б. І. Хацет

В. М. Костарчук

Р. А. Дубосарська

Був ще один молодий викладач геометр, але за своїми людськими якостями не зміг стати членом колективу і переїхав до іншого міста. За спогадами Б. І. Хацета, він укріпив переконання, що при формуванні колективу головними критеріями повинні бути справжня порядність, загальна культура, здатність працювати в колективі з відкритою душею.

У ті роки на кафедрах периферійних вишів майже не було кандидатів наук, оскільки випускники центральних вишів і аспірантури ухилялися від відряджень до провінційних міст. Потреба у кваліфікованих викладачах була особливо гострою, оскільки кількість студентів зростала і виникало багато нових спеціальних курсів. Тому перспективних, талановитих студентів почали залучати до роботи на кафедрі та після закінчення інституту зараховувати до штату. Надалі обговорювалися умови для підвищення наукової кваліфікації, захисту дисертацій. Це стало однією з традицій кафедри і факультету.

У 1949 – 1951 роках потрібно було залучати спеціалістів з інших місць. Так на кафедрі з’явилися молоді талановиті математики.

Кац Георгій Ісаакович почав працювати старшим викладачем кафедри математики у вересні 1949 року. За 2 роки роботи на кафедрі він встиг зробити багато корисного, читав основні курси. Скоро він став кандидатом фізико-математичних наук. Результати його наукових досліджень визнали у світі. Він створив поняття кільцевої групи, яке назвали "алгебри Каца" й якому присвячені публікації відомих вчених. Георгій Кац володів даром пояснювати важкі для розуміння питання просто і доступно. Його лекції перетворювалися в дружні бесіди, які поєднувалися з глибокою компетентністю і високою математичною культурою.

Польський Нафтул Йосипович працював старшим викладачем кафедри з 1951 року. Але через рік Міністерство вищої освіти відрядило його до Донецьку. Нафтул Йосипович був обдарованим популяризатором науки, вмів виразно пояснювати складні математичні ідеї. Про це свідчить його книжка "О различных геометриях".

З 1950 року провідну роль на кафедрі математики грали *Шмульян Юрій Львович* та *Боравльов Анатолій Пилипович*.

Шмульян Ю. Л. був направлений на роботу після закінчення Одеського університету. Мені пощастило слухати його лекції з курсу вищої алгебри. Вони були дуже чіткі, спокійні, глибоко наукові. Він встигав викласти багато математичних фактів, оскільки, все було наперед продумано та він починав лекцію з того питання, на якому зупинився минулий раз. Це допомагало студентам скласти хороші конспекти, які при підготовці до екзамену заміняли різні посібники і давали змогу дати відповідь на численні запитання "чому?" при доведенні тверджень з питань білету.

У 1956 році Юрій Львович захистив дисертацію і здобув науковий ступінь кандидата фізико-математичних наук, але несподівано був переведений на півставки на кафедру фізики "для очищення кафедри математики, перевантаженої особами єврейської національності". З цієї ж причини Вища атестаційна комісія в Москві не затвердила його докторську дисертацію, яку він успішно захистив в Інституті математики у Києві. Повернувшись до Одеси, він працював на кафедрі вищої математики інженерно-будівельного інституту.

Ю. Л. Шмульян

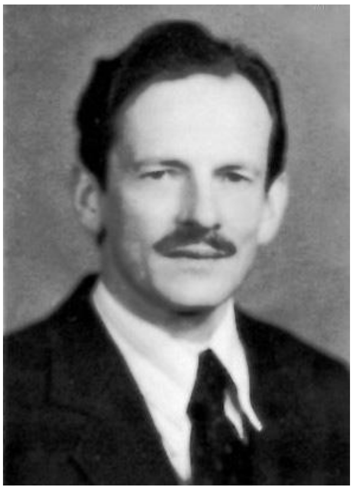
А. П. Боравльов

Боравльов Анатолій Пилипович з 1943 року воював на фронті, мав бойові нагороди. У 1950 році після закінчення з відзнакою Одеського педагогічного інституту був направлений на роботу до Житомирського педагогічного інституту. На кафедрі математики він викладав усі геометричні дисципліни. Він був закоханий у геометрію і досконало її знав. Цю любов намагався передати студентам, тому його лекції були цікавими і часто дуже емоційними. Це я відчула на собі, слухаючи його лекції. До студентів був вимогливим і доброзичливим, не жалкував доброго слова, щоб похвалити за гарну відповідь.

У 1969 році в Інституті математики у Києві захистив кандидатську дисертацію. Склалося так, що я була першою, кому він показав диплом кандидата фізико-математичних наук, оскільки зустріла його на Хрещатику. Він тільки що отримав диплом і похвалився своєю радістю. (Після закінчення ним аспірантури пройшло вже 9 років). Працював Анатолій Пилипович на кафедрі до 1998 року.

У 1953 році кафедра математики була розділена на дві: вищої математики та елементарної математики і методики викладання математики. Кафедру елементарної математики очолила *Білоус Тамара Іванівна*, яка була направлена на роботу в Житомир після закінчення з відзнакою Миколаївського педагогічного інституту. Згодом на цій кафедрі працювали *Дворська Марія Григорівна*, *Бобровник Михайло Петрович*. А також на початку 60-х років були запрошені кращі випускники фізмату: *Богдан Антоніна Яківна*, *Зелінська Галина Олександрівна*, *Кржемінська Галина Карлівна*.

У 50-ті роки кафедра вищої математики поповнилася молодими викладачами – випускниками фізмату, які замінили досвідчених викладачів, що виїхали з Житомира. Це *Киселевський Генріх Едмундович*, *Мержеєвський Арнольд Володимирович*, *Нестерчук Анатолій Васильович*. Вони були моїми викладачами, а згодом стали колегами.



Г. Е. Киселевський А. В. Мержеєвський А. В. Нестерчук

Киселевський Г. Е. читав на нашому курсі лекції з теорії функції дійсної змінної, Мержеєвський А. В. вів практичні заняття з математичного аналізу. У своїй подальшій роботі я багато в чому їх наслідувала. Практичні заняття Мержеєвського А. В. стали зразком у підходах до перевірки теорії, підбору системи прикладів. Пізніше, будучи асистентом я відвідала всі лекції Арнольда Володимировича, на яких він залучав студентів до активного сприйняття, обговорював нові ідеї. До цих дискусій я теж залучалася та вчилася у нього. Це був викладач-енциклопедист. До нього можна було звертатися з питаннями з різних розділів математики й одержати пораду.

Нестерчук Анатолій Васильович був однією з центральних фігур факультету і всього інституту. Після закінчення з відзнакою Житомирського педінституту в 1954 році працював вчителем, був призваний на військову службу і через рік був комісований через важку хворобу, яка виникла, як виявилось, через падіння на заняттях з фізкультури під час навчання в інституті. Йому прийшлося все життя переборювати цю недугу, залишаючись оптимістом і дуже активною людиною. В цьому велика заслуга його дружини Галини Йосипівни, яка на початку важкого перебігу хвороби (коли лікарі поставили на ньому хрест) буквально привозила на таксі його на роботу, допомагала зайти в деканат і приступити до роботи. Мені пощастило навчатися в Анатолія Васильовича на практичних заняттях з елементарної математики. Його принципом було залучати студентів на заняттях до самостійної роботи і зразу ж перевіряти та давати індивідуальні поради.

Після від'їзду Б. І. Хацета Анатолій Васильович виконував обов'язки завідувача кафедри. У 1967 – 1969 рр. був деканом фізмату, у 1970 – 1982 завідувачем кафедри математики. У 1969 році захистив дисертацію і здобув науковий ступінь кандидата фізико-математичних наук. Оскільки Вища Атестаційна Комісія мала проблеми з його науковим керівником, то Анатолій Васильович був затверджений у цьому званні тільки у 1973 році після того, як особисто поїхав до Москви у ВАК.

А. В. Нестерчук так умів подати матеріал на лекціях і практичних заняттях, що всі його добре розуміли. Студенти поважали і любили Анатолія Васильовича за його людські якості і доброзичливе ставлення. Його учні підтримували з ним зв'язок після закінчення інституту, направляли своїх кращих учнів навчатися на фізматі, а ті ставали вчителями та направляли на фізмат своїх учнів і дітей. Тепер у школах Житомира й області працюють такі "діти" й "онуки" Анатолія Васильовича.

А. В. Нестерчук приймає екзамен

Для створення наукових кадрів на кафедрі молодих викладачів направляли на стажування до Київського Інституту математики, а потім в цільову аспірантуру. Такий шлях пройшли і повернулися працювати на кафедрі *Таргонський Леонід Пилипович, Андрощук Олександр Олександрович, Кржемінська Галина Карлівна, Осадчий Микола Мефодійович, Дідківська Тетяна Вікторівна, Коломійцев Олег Петрович*. З цього часу кафедра математики і математичного аналізу неподільно пов'язані. Приходили нові викладачі, зберігали старі та створювали нові традиції фізмату. Проводилися конкурси з розв'язування математичних задач, студенти залучалися до самостійної роботи з методичною літературою в кабінеті математики, який перетворився у фізматовський читальний зал, проводилися математичні вечори на різні теми. Зокрема: "У світі математики", "Жар холодних чисел", "Подорож у світ гармонії і краси", "Природа говорить мовою математики", "Математика доводить, спростовує, передбачає". Гордістю фізмату була футбольна команда, фізматовський хор, клуб веселих і винахідливих, танцювальний і драматичний гуртки.

Т. В. Дідківська і Г. О. Зелінська в кабінеті математики

Викладачі завжди приділяли велику увагу організації "Дня відкритих дверей", ювілейних зустрічей випускників. Куратори груп допомагали в організації студентських будівельних загонів, зіркових походів, виїзних концертів художньої самодіяльності, групових дискотек. Підсумок навчання і роботи викладачів підводив "Останній дзвінок" 5-курсників. Окрасою традиційних тижнів факультету було нестандартне посвячення в студенти першокурсників та засідання "Академії веселих наук", де викладачі захищали "дисертації" і відповідали на непрості питання студентів-академіків. Теми "дисертацій" заздалегідь пропонувалися студентами, зокрема: "З якою швидкістю повинен обертатися студент, щоб не вилетіти з інституту", "Чому людина роздвоюється донизу?", "Де раки зимують?", "Як впливає кількість подружніх пар на успішність факультету" тощо.

Найважливішим досягненням викладачів кафедри завжди вважали успіхи випускників, які працюють вчителями шкіл, директорами, керівниками установ, викладачами навчальних закладів і з теплотою згадують своє студентське минуле, традиції фізмату. До минулого звертаються з різних причин. Лейбніц, наприклад, застерігав, "хто хоче обмежитися сучасним без знання минулого, той ніколи не зрозуміє сучасного".

ЛІТЕРАТУРА

1. Відомі педагоги Житомирщини. Нариси про значних діячів освітянської ниви. Науковий редактор М. І. Лавринович. – Житомир: "Полісся", 2003. – 700 с.
2. Карасек Є. П., Мамишева Т. Г., Хацет Б. І. 10 років фізико-математичному факультету. Житомирський державний педагогічний інститут. Наукові записки. Серія фізико-математична. Том IX, 1959. – С. 115 – 126.
3. Хацет Б. І. Віктор Миколайович Костарчук у моєму житті / У світі математики. – 2003, т. 9, вип. 1. – С. 72 – 80.
4. Хацет Б. И. Мой друг Георгий Кац. Из воспоминаний / У світі математики. – 2004, т. 10, вип. 2. – С. 70 – 76.

Дідківська Тетяна Вікторівна – доцент, кандидат фізико-математичних наук

Наукові інтереси: вдосконалення фахової підготовки студентів-математиків
Дисципліни, які викладає: лінійна алгебра, алгебра і теорія чисел, історія математики.

Ленчук І.Г.
доктор педагогічних наук, професор

СПОГАДИ...

Так сталося, що із січня 1964 р. (після служби в армії) мені довелося працювати в Житомирській філії Київського політехнічного інституту на кафедрі нарисної геометрії та інженерної графіки. Саме тому я й навчався в аспірантурі КПІ зі спеціальності 05.01.01 «Прикладна геометрія та інженерна графіка». Моїм науковим керівником був доктор технічних наук, професор Павлов Анатолій Володимирович – дорога мені (і не лише мені), чудова людини, кого я завжди згадуватиму з безмірною повагою і шануванням. За шість днів до закінчення аспірантури я захистив першу свою дисертацію на тему «Алгоритмізація технологічного процесу підготовки геометричної інформації для автоматизованих систем розкроювання матеріалів», до правди, за обставин, що тоді склалися, дещо з іншої (більш затребуваної) спеціальності – 05.13.12 «Системи автоматизованого проектування і автоматизація технологічної підготовки виробництва». Робота (з належним економічним ефектом) була впроваджена в авіаційній промисловості, в хімічному машинобудуванні та у швейному виробництві. Дослідження мали хорошу перспективу, Анатолій Володимирович говорив мені так (не дослівно): «Переходь на роботу до нас, у КПІ, і за два роки захистиш докторську». Проте, житлове питання, сімейні обставини …, якщо двома словами – «не вийшло»!

У 1980 р. завідувач кафедри математики Житомирського державного педагогічного інституту ім. І. Франка Нестерчук Анатолій Васильович, якось при зустрічі, запропонував мені роботу на кафедрі, якою він завідував у цьому (до речі, моїй альма матері) інституті. Я, обміркувавши пропозицію, погодився. Річ у тім, що Анатолій Васильович був моїм куратором на першому курсі у 1958-59 рр. Ми добре були знайомі, а тоді (у 1958 р.) усі студентки групи «закохалися» у ще молодого, заповзятого викладача. Пан Анатолій Нестерчук був надто життєлюбною людиною. Поважав колег, ніколи не дозволяв собі ображати чи зверхньо ставитися до членів кафедри, умів слухати людину і гарно, з гумором відповісти, мав вузьке коло найближчих друзів. Відверто скажу, за будь-яких поважних (і не зовсім) обставин ми збиралися у квартирі Анатолія Васильовича і за «чашкою чаю» думали, міркували і, навіть, розважалися різними іграми. Галина Йосипівна, дружина Анатолія Васильовича, розуміла пана Анатолія і вельми файно нас приймала. Наведу кілька прикладів (мій власний переказ). Каже Анатолій Васильович: «Хлопці, йду я сьогодні із онуком з вулиці і рахуємо сходини: один, два, три, чотири, …, а мій малий онук мене перебиває і голосно вигукує: «валет, дама, туз»! Або, коли Анатолій Васильович передавав мені керівництво кафедрою, він запитав мене з усмішкою на вустах: «Ваня, чи знаєш ти основну заповідь завідувача?». Я з подивом глянув на нього. «Так от, коли тобі прийде якась папера з деканату, ректорату тощо, не поспішай на неї відповідати, поклади в шухляду столу, хай вилежеться. Нагадають тобі чи надішлють повторно – тоді лише відповідай, але без поспіху».

У колі найближчих друзів Анатолія Васильовича Нестерчука були: світлої пам’яті Вещицький Панас Анатолійович, дуже добра, відповідальна людина. Він завжди допомагав тим, хто до нього звертався. Ляшенко Борис Миколайович, найкращий товариш і друг (нам довелося багато років дружити сім’ями). Фірчук Петро Якович, незамінний заступник декана факультету, заповзятий риболов і грибник, якого всі без винятку студенти обожнювали. Таргонський Леонід Пилипович, чесний, працелюбний, високо ерудований педагог. Боравльов Анатолій Пилипович (хоч вони й часто сперечалися), працеголік, геометр «від Бога». Висловлю думку: пераховані «аксакали», як ми їх називали, заслужили, щоб галереєю портретів (приміром, у бувшому кабінеті методики математики) пам'ять про них увіковічити.

Насмілююся до друзів Анатолія Васильовича зарахувати також Ткаченка Олександра Кириловича, якого ви всі знаєте, і вашого покірного слугу.
Відверто визнаю, якось у круговерті життя в той час (80-ті рр.) не гадалося, що варто думати про захист докторської дисертації, хоч одного разу Панас Анатолійович мене запитав: «Ваня, коли ти вже захистиш докторську?». На що

я відповів: «А вона в мене вже майже готова». ». І от, лише після передачі завідування кафедрою у 2007 р., якою довелося завідувати із березня 1982 р. 25,5 рр., я взявся за оформлення напрацьованих результатів. На це пішло 5 років, які у постійних клопотах «пролетіли» швидко, нібито в тумані – як сон.

У лютому 2013 р. я нарешті спромігся захистити докторську дисертацію на тему «Теоретико-методична система навчання евклідової геометрії майбутніх учителів на основі конструктивного підходу» зі спеціальності 13.00.02 – Теорія і методика навчання (математика). Це дійство трапилося у столиці України, в Національному педагогічному університеті ім. М.П. Драгоманова. Моїм науковим консультантом був директор фізико-математичного інституту, завідувач кафедри вищої математики, доктор фізико-математичних наук, професор Працьовитий Микола Вікторович. Микола Вікторович знаний в Україні та за її межами математик. Він високоерудована людина у багатьох галузях наук, чесний, відповідальний і принциповий товариш. Я йому безмежно вдячний. Зараз ми з паном Миколою намагаємося реалізувати спільні та надто важливі, як на нашу думку, проекти. Із Божою допомогою, ми це зробимо.

Хочу кілька добрих думок висловити стосовно доктора фізико-математичних наук, професора Михайленка Василя Васильовича, який сьогодні завідує кафедрою алгебри та геометрії, на якій маю честь працювати і я. Мені подобається стиль керівництва Василя Васильовича кафедрою, його людяність, дружня, сердечна повага до колег, колективізм у справах і життєвих відносинах.

Це коротенька історія творчого буття хлопчика, який народився у невеличкому селі Сингаївка (від слів «Синій гай» – гарна назва, чи не так?), Бердичівського району, і його незабутніх друзів і колег у спільній діяльності на благо нашої рідної України».

Додам, що без вчительської роботи я себе не уявляю! Щиро дякую.

РОЗДІЛ І. КЛАСИЧНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИКИ В СИСТЕМІ ПРОФЕСІЙНОЇ ПІДГОТОВКИ ВЧИТЕЛЯ

Михайленко В.В.
доктор фізико-математичних наук,
професор, завідувач кафедри алгебри та геометрії

ПРО КУБОВНІСТЬ ПРОСТОРОВИХ ФІГУР З ВІДОМИМИ ПЛОЩАМИ ПАРАЛЕЛЬНИХ ПЕРЕРІЗІВ

Тіла, до яких застосовується принцип Кавальєрі, апріорі вважається кубовними, тобто такими, що мають об'єм. Строге обґрунтування цього принципу стало можливим лише з появою інтегрального числення, зокрема, формули для об'єму за відомими площами паралельних перерізів. Разом з тим, доведення цієї формули, як, власне, і кубовності самого тіла, з моменту його появи і до теперішнього часу наводиться в навчальній літературі за умови, що ортогональні проекції двох довільних перерізів на одну й ту ж площину містять одна одну [1]. Будь-які спроби відмовитись від цієї умови автору не відомі.

Дана робота не претендує на статус наукової, хоча б тому, що матеріал подається за схемою «класичним проблемам – класичні методи розв'язування».

Написана робота, насамперед, для молодих людей, які не лише здобувають чи здобули математичну освіту, а й мають вроджену непереборну потребу у власних математичних пошуках.

Математика – це стиль життя.

§1. Вихідні означення та їхні наслідки

Під *просторовою фігурою* будемо розуміти всяку обмежену множину точок простору.

Многогранною фігурою (многогранником) назвемо просторову фігуру, яка є замкненою областю (можливо, й багатозв′язною) з межею, що міститься в скінченній кількості площин.

Будемо виходити з того, що всяка многогранна фігура має об'єм.

Позначимо довільну просторову фігуру через *Ф*. Будемо розглядати многогранники, які містять фігуру *Ф,* і які містяться в фігурі *Ф* (останні можуть і не існувати). Перші позначимо *G*, а їхні об'єми – *V(G)*. Другі позначимо g, а їхні об'єми $V(g)$. Многогранник *G* будемо називати описаним, а многогранник g – вписаним (якщо вписаних многогранників не існує, то за означенням візьмемо $(V(g)=0)$.

Означення 1. Фігуру Ф назвемо *кубовною* (тобто такою, що має об'єм), якщо існує така послідовність $\{G_n\}$ описаних многогранників і така послідовність $\{g_n\}$ вписаних многогранників, об′єми $V(G_n)$ і $V(g_n)$яких мають спільну границю

$$\lim_{n\to\infty} V(G_n) = \lim_{n\to\infty} V(g_n).$$

Цю спільну границю й назвемо об'ємом фігури Φ.

Зокрема, будемо казати, що фігура має нульовий об'єм, якщо її можна помістити у многогранну фігуру як завгодно малого об'єму.

Безпосередньо з означення 1 випливає така теорема.

Теорема 1. Нехай для просторової фігури Φ існують дві послідовності кубовних фігур $\{H_n\}$ і $\{h_n\}$, які задовольняють умови:

- кожна фігура H_n містить фігуру Φ ($H_n \supseteq \Phi$);
- кожна фігура h_n міститься у фігурі Φ ($h_n \subseteq \Phi$);
- об'єми $V\{H_n\}$ і $V\{h_n\}$ мають спільну границю

$$\lim_{n\to\infty} V(H_n) = \lim_{n\to\infty} V(h_n) = V.$$

Тоді фігура Ф – кубовна і $V -$ її об'єм.

Читач може легко довести цю теорему самостійно.

Нижче розглядатимемо просторові фігури Φ, які є замкненими областями простору (нагадаємо, що замкнену область дістаємо з деякої відкритої області шляхом приєднання до неї її межі).

Будемо називати такі фігури *тілами*. Межею тіла є деяка замкнена поверхня чи кілька таких поверхонь.

Відмітимо ряд тверджень, що випливають з означення кубовності фігур, і доведення яких можна знайти в [1].

Твердження 1. Для того щоб тіло Φ було кубовним, необхідно і достатньо, щоб поверхня, яка його обмежує, мала нульовий об'єм.

Твердження 2. Якщо поверхню можна описати явним рівнянням одного з трьох типів

$$z = f(x, y), y = g(z, x), x = h(y, z),$$

де f, g, h неперервні функції двох аргументів у деяких обмежених областях, то така поверхня має нульовий об'єм.

Твердження 3. Якщо поверхня, що обмежує тіло *Ф*, складається зі скінченної кількості поверхонь нульового об'єму (наприклад, із поверхонь твердження 2), то вона має нульовий об'єм.

Твердження 4 (адитивність об'єму). Якщо тіло *Ф* можна розбити на два тіла $Ф_1$ і $Ф_2$ без спільних внутрішніх точок, то із кубовності двох із цих трьох тіл випливає кубовність третього і $V(Ф) = V(Ф_1) + V(Ф_2)$.

Нижче мова йтиме про тіла з відомими площами паралельних перерізів. Самі перерізи інтерпретуємо скрізь як замкнені області у площині перерізу.

Нехай перерізи тіла *Ф* площинами, перпендикулярними осі *Ox*, квадровні, і площі їх відомі (рис. 1).

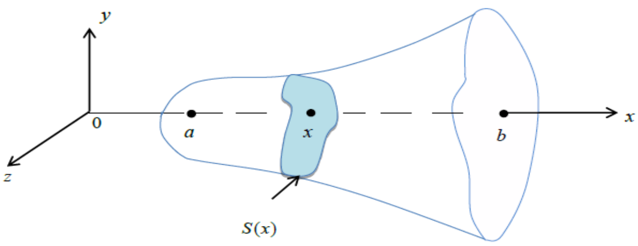


Рис. 1

Нижче називатимемо ці перерізи *поперечними*.

Площу перерізу, який відповідає абсцисі *x,* позначимо *S(x),* $x \in [a,b]$.

Відомо [1], що за умов:

a) $S(x) \in C_{[a,b]}$;

b) ортогональні проекції двох довільних перерізів на площину, перпендикулярну до осі *Ox,* містять одна одну (рис. 2)

Так Не так

Рис. 2

тіло Ф є кубовним, і його об'єм дорівнює

$$V = \int_a^b S(x)dx. \qquad (*)$$

Зокрема, умова b) виконується для тіл обертання.

У загальному випадку, коли умова b) не виконується, можна стверджувати лише таке: якщо відомо, що тіло Ф кубовне, то його об'єм виразиться формулою (*).

Нижче ми відмовляємося від умови b), тобто вважаємо взаємне розміщення проекцій будь-яких двох перерізів довільним.

Перерізи у точках x та $x+\Delta x$ позначимо $K[x]$ та $K[x+\Delta x]$ (рис. 3).

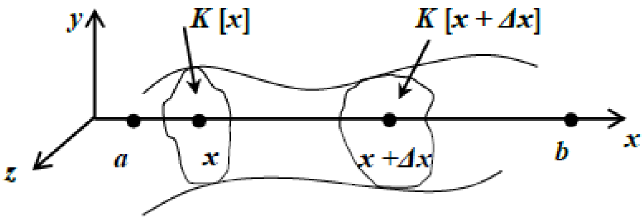


Рис. 3

Будемо проектувати їх ортогонально на площину, перпендикулярну до осі Ox. Для проекцій збережемо ті самі позначення (рис. 4).

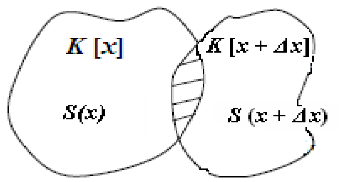


Рис.4

Не виключається випадок, коли крайні перерізи $K\ [a]$ та $K\ [b]$ вироджуються в лінію чи точку. Для об'єднання (суми) та перерізу (добутку) проекцій справедлива формула площ

$$S(K[x]+K[x+\Delta x])=S(x)+S(x+\Delta x)-S(K[x]\cdot K[x+\Delta x]), \qquad (1)$$

де $S(K[x])=S(x)$, $S(K[x+\Delta x])=S(x+\Delta x)$.

Означення 2. Будемо казати, що перерізи *накладаються* у точці *x,* якщо виконуються умови

$$\lim_{\Delta x\to 0} S(K[x]+K[x+\Delta x])=\lim_{\Delta\to 0} S(K[x]\cdot K[x+\Delta x])=S(x). \qquad (2)$$

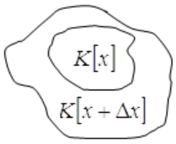
Із (1) випливає, що необхідною умовою накладання перерізів у точці x є неперервність функції площ $S(x)$:

$$S(x+\Delta x)\to S(x)\text{ при }\Delta x\to 0. \qquad (3)$$

Із накладання перерізів $\forall x\in[a,b]$ випливає

$$S(x)\in C_{[a,b]}.$$

Зауваження 1. Зокрема, якщо проекції перерізів містять одна одну [див. умову b)], то наприклад, $S(K[x]+K[x+\Delta x])=S(x+\Delta x)$, $S(K[x]\cdot K[x+\Delta x])=S(x)$, і неперервність функції $S(x)$ є не лише необхідною, а й достатньою умовою накладання перерізів.



Зауваження 2. Наочна інтерпретація означення 2 випливає з такого *твердження:* якщо обмежені множини A і B є замкненими областями на площині і квадровні, то

$$A=B\Leftrightarrow S(A+B)=S(A\cdot B). \qquad (4)$$

Нагадаємо, що $A+B=A\cup B$, $A\cdot B=A\cap B$.

Доведемо це твердження, скориставшись тим, що для будь-яких множин A і B

$A=B\Leftrightarrow A\cup B=A\cap B,$

і з квадровності множин A і B випливає квадровність множин $A\cup B$ та $A\cap B$.

Необхідність твердження (4) очевидна:

$A=B\Rightarrow A\cup B=A\cap B\Rightarrow S(A\cup B)=S(A\cap B)$.

Достатність. Нехай

$$S(A\cup B)=S(A\cap B). \qquad (5)$$

Припустимо, що $A\neq B$. Тоді $A\cup B\neq A\cap B$, і з того, що $A\cap B\subset A\cup B$, випливає існування такої точки M, що $M\in A\cup B$ і $M\notin A\cap B$. Це означає, що

$$M\in A \text{ і } M\notin B \text{ або } M\in B \text{ і } M\notin A.$$

Розглянемо перший випадок: $M\in A$ і $M\notin B$. Другий розглядається аналогічно. Нехай M – внутрішня точка області A. Тоді знайдеться $\varepsilon-$ окіл $O(M,\varepsilon)$ цієї точки, який не містить жодної точки з B, проте цілком міститься в A. У противному разі точка M буде межовою для B і належатиме B, оскільки B – замкнена.

Якщо M – межова точка A, то для неї також знайдеться такий окіл, який не міститиме жодної точки з B. У цьому околі можна взяти точку, яка буде внутрішньою для A, оскільки A – область, і не належатиме до B. Дістаємо випадок вже розглянутий.

Отже, $\exists O(M,\varepsilon):O(M,\varepsilon)\subset A\cup B$ і $O(M,\varepsilon)\cap(A\cap B)=\varnothing.$

Тому $S(A\cup B)\geq S(A\cap B)+S(O(M,\varepsilon))>S(A\cap B)$, оскільки $S(O(M,\varepsilon) > 0$ (тут площу околу ми розуміємо як площу круга з радіусом ε).

Дістали протиріччя з (5). Тому припущення, що $A \neq B$, хибне. До аналогічного висновку приходимо й у разі $M \in B$ і $M \notin A$.

Твердження (4) доведено.

Оскільки перерізи та їхні проекції розглядаються нами як замкнені області, зі співвідношень (2) і (4) дістаємо таку інтерпретацію накладання перерізів: проекції нескінченно близьких перерізів рівні як множини у площині проектування.

§2. Лема про нульовий об'єм лінійчатих поверхонь

В основі подальших міркувань лежить наступна лема.

Лема 1. Всяка обмежена поверхня з рівнянням

$$\alpha(x)y + \beta(x)z + \gamma(x) = 0, \qquad (6)$$

де

$\alpha(x), \beta(x), \gamma(x) \in C_{[a,b]}$, $\alpha^2(x) + \beta^2(x) = 1$,

має нульовий об'єм.

<u>Доведення</u>. Розглядувана поверхня є лінійчатою з твірними, паралельними площині yOz. Обмеженість означає, що ми розглядаємо частину цієї поверхні, що міститься в деякій кулі.

Якщо на відрізку $[a,b]$ принаймні одна з функцій $\alpha(x)$ чи $\beta(x)$ відмінна від нуля, доведення очевидне (див. твердження 2).

Розглянемо загальний випадок, коли на відрізку $[a,b]$ функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ можуть набувати нульових значень яку завгодно кількість разів, не обов'язково скінченну.

Припустимо, що для всякого розбиття відрізка $[a,b]$, яким би малим не був його діаметр δ, існує такий відрізок $[c,d]$ цього розбиття, на якому і функція $\alpha(x)$, і функція $\beta(x)$ набувають нульових значень, тобто

$$\exists x_1 \in [c,d], \exists x_2 \in [c,d], x_1 \neq x_2 \colon \alpha(x_1) = 0, \beta(x_2) = 0.$$

Але тоді

$\beta(x_1) = 1,\ \alpha(x_2) = 1.$

Отже, для як завгодно малого $\delta > 0$ маємо такі дві точки x_1 і x_2, що $|x_1 - x_2| < \delta$, проте

$$|\alpha(x_2) - \alpha(x_1)| = 1 \text{ і } |\beta(x_2) - \beta(x_1)| = 1.$$

Це суперечить рівномірній неперервності функцій $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ (неперервні на $[a,b]$ функції є й рівномірно неперервними).

Одержане протиріччя доводить, що відрізок $[a,b]$ завжди можна розбити на скінченну кількість відрізків, на кожному з яких принаймні одна з функцій $\alpha(x)$ чи $\beta(x)$ не дорівнює нулю.

На кожному з цих відрізків рівняння (6) допускає явний вигляд і відповідна частина поверхні має нульовий об'єм.

Отже, вся поверхня складається зі скінченної кількості поверхонь нульового об'єму і тому має нульовий об'єм.

Лему доведено.

§3. Лема про кубовність тіла, паралельними перерізами якого є довільні трикутники, що накладаються в кожній точці

Лема 2. Нехай поперечними перерізами тіла є довільні трикутники, що накладаються в кожній точці $x \in [a,b]$, і площі цих трикутників описуються функцією *S(x)* (рис. 5).

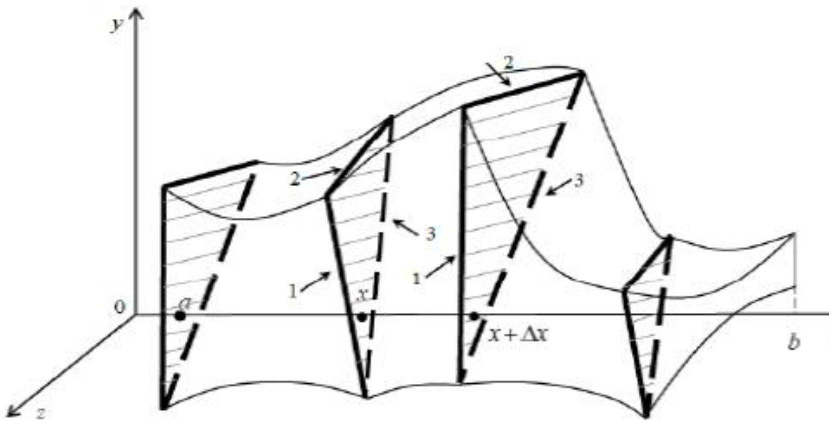


Рис. 5

Не виключається випадок, коли крайні перерізи, що відповідають абсцисам $x = a$, $x = b$ вироджуються у відрізок чи точку.

У такому разі тіло кубовне, і його об'єм виражається формулою (*).

Доведення. Довести потрібно, власне кубовність тіла. Насамперед, відмітимо, що трикутник, як і будь-який многокутник, є замкненою областю у площині перерізу (див. зауваження 2).

Нехай спочатку крайні перерізи також є трикутниками.

Покажемо, що розглядуване тіло обмежується лінійчатими поверхнями (6).

Розглянемо трикутник у перерізі $x = const$. Візьмемо яке-небудь його ребро (наприклад, ребро 1 на рис. 5) і опишемо це ребро прямою

$$\begin{cases} x = const, \\ \alpha_1(x)y + \beta_1(x)z + \gamma_1(x) = 0, \end{cases}$$

де коефіцієнти $\alpha_1(x), \beta_1(x), \gamma_1(x)$ визначимо однозначно умовою

$$\alpha_1^2(x) + \beta_1^2(x) = 1. \tag{7}$$

Зробивши те саме для всякого $x \in [a,b]$, ми опишемо вибір ребер трьома функціями

$$\alpha_1(x), \beta_1(x), \gamma_1(x), x \in [a,b] \tag{8}$$

за умови (7).

Розглянемо перерізи з абсцисами x та $x + \Delta x$. Проекції прямих, що містять взяті в цих перерізах ребра, на площину, перпендикулярну осі Ox, описуються рівняннями

$$\alpha_1(x)y + \beta_1(x)z + \gamma_1(x) = 0,$$

$$\alpha_1(x+\Delta x)y + \beta_1(x+\Delta x)z + \gamma_1(x+\Delta x) = 0 \tag{9}$$

відносно змінних y, z (рис. 6).

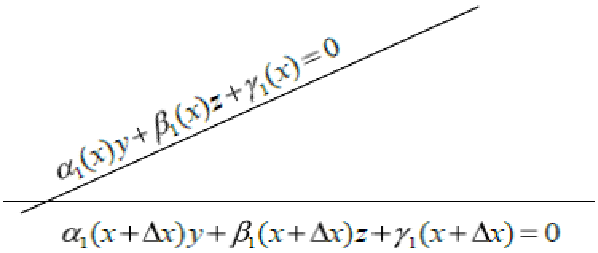


Рис. 6.

Поки що вибір ребер ми нічим не обмежували. Тепер, виходячи з умови накладання перерізів, вимагаємо, щоб прямі (9) при $\Delta x \to 0$ співпадали. Це можливо тоді і тільки тоді, коли

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha_1(x+\Delta x)=\alpha_1(x)$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\beta_1(x+\Delta x)=\beta_1(x)$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\gamma_1(x+\Delta x)=\gamma_1(x)$,

тобто функції (8) неперервні.

Отже, координати точок, що лежать на взятих нами ребрах, задовольняють рівняння

$$\alpha_1(x)y+\beta_1(x)z+\gamma_1(x)=0, \qquad (10)$$

де $\alpha_1(x),\beta_1(x),\gamma_1(x)\in C_{[a,b]}$, $\alpha_1^{\,2}(x)+\beta_1^{\,2}(x)=1$.

Іншими словами, цими ребрами утворюється лінійчата поверхня з леми 1.

Аналогічно дістаємо ще дві лінійчаті поверхні, які обмежують розглядуване тіло,

$$\alpha_i(x)y+\beta_i(x)z+\gamma_i(x)=0,\ i=2,3 \qquad (11)$$

де $\alpha_i(x)$, $\beta_i(x)$, $\gamma_i(x)\in C_{[a,b]}$, $\alpha_i^{\,2}(x)+\beta_i^{\,2}(x)=1$.

Як результат маємо: поверхня розглядуваного тіла складається з трьох лінійчатих поверхонь (10), (11) і площин $x=a$, $x=b$. Через обмеженість тіла всі поверхні обмежені. За лемою 1 поверхні (10), (11) мають нульовий об’єм. Нульовий об’єм мають і ті частини площин $x=a$, $x=b$, які обмежують тіло (див. твердження 2). Тому згідно з твердженням 3 наше тіло кубовне.

Ситуація, коли один чи обидва крайні перерізи вироджені (у відрізок чи точку), додаткових ускладнень не викликає.

Нехай, наприклад, вироджений правий крайній переріз (рис. 5).

Побудуємо для такого тіла послідовність вписаних $\{h_n\}$ і описаних $\{H_n\}$ фігур наступним чином.

Припустимо, що наше тіло «розрізане» на дві частини площиною

$x=b-\varepsilon_n$ (рис. 7), де

$\varepsilon_1>\varepsilon_2>\ldots>\varepsilon_n>\ldots$, $\varepsilon_n\to 0, n\to\infty$.

Частину ліворуч візьмемо за фігуру h_n. За доведеним вона кубовна.

За H_n візьмемо фігуру, що складається з h_n і прямого кругового циліндра висотою ε_n. Останній береться так, щоб його основа містила трикутник з перерізу $x=b-\varepsilon_n$, а сам циліндр – праву частину «розрізаного» тіла.

Очевидно, що такий циліндр завжди можна побудувати, взявши за його діаметр d, наприклад, діаметр описаної навколо всього тіла кулі, яка за умовою існує.

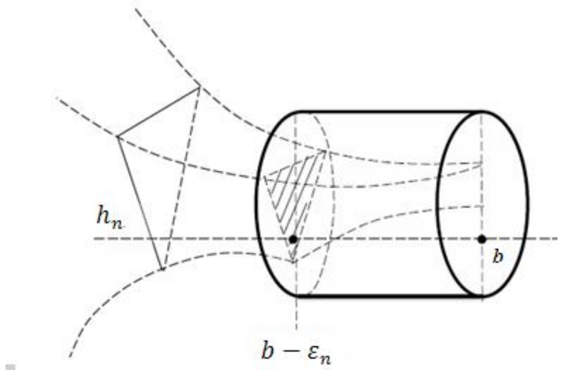


Рис. 7

Фігура H_n кубовна, оскільки складається з двох кубовних фігур. Отже, маємо послідовність вписаних $\{h_n\}$ і описаних $\{H_n\}$ кубовних фігур. Об’єми $V\{h_n\}$ і $V\{H_n\}$ цих фігур мають спільну границю, оскільки об’єм циліндра прямує до нуля зі збільшенням n. Це й доводить кубовність тіла з виродженим перерізом (теорема 1).

<u>Лему доведено.</u>

<u>Зауваження 3.</u> Прийом, яким ми щойно скористалися, і який ґрунтується на теоремі 1, назвемо <u>*методом відсікання*</u>.

<u>Зауваження 4</u> (до леми 2). Шляхом міркувань, цілком аналогічних наведеним, можна показати, що кубовним буде всяке тіло, поперечними перерізами якого є довільні n-кутники, що накладаються в кожній точці $x \in [a,b]$. Мається на увазі, що n однакове для всіх перерізів, за винятком, можливо, крайніх перерізів, які можуть вироджуватися у m-кутники ($m < n$), відрізок чи точку.

Разом з тим сформульоване твердження доводиться значно простіше, якщо скористатись лемою 2.

Дійсно, всякий n-кутник можна розбити діагоналями на n-2 трикутники. При цьому вершинами цих трикутників є лише вершини самого n-кутника.

Через накладання перерізів накладатимуться й відповідні трикутники розбиття цих перерізів.

У результаті наше тіло можна розглядати як таке, що складається з n-2 тіл із леми 2. Тому внаслідок адитивності об’єму – воно кубовне.

У разі вироджених крайніх перерізів основного тіла виродженими будуть і крайні перерізи частини тих тіл, з яких воно складається. Щоб не обтяжувати себе додатковими міркуваннями з цим пов’язаними, тут також можна спочатку розглянути тіло з невиродженими крайніми перерізами, а потім скористатись методом відсікання.

Оскільки виродженість крайніх перерізів на кубовність не впливає і завжди може бути врахована методом відсікання, у подальшому ми її не розглядаємо.

§4. Лема про кубовність тіла, паралельними перерізами якого є довільні трикутники і чотирикутники, що накладаються в кожній точці

Наступна лема не є обов’язковою. У подальшому нам знадобиться лише схема її доведення.

Лема 3. Тіло *Ф*, поперечні перерізи якого накладаються в кожній точці $x \in [a,b]$, і кожен переріз є трикутником або чотирикутником, кубовне.

Доведення. Якщо всі перерізи чотирикутні, твердження справедливе (див. зауваження 4 до леми 2).

Точку $x \in [a,b]$, якій відповідає трикутний переріз, будемо називати точкою трикутного перерізу (аналогічно, для точки чотирикутного перерізу).

Не порушуючи загальності міркувань, візьмемо точку $x = a$ за точку трикутного перерізу. Можливий фрагмент тіла *Ф* показано на рисунку 8.

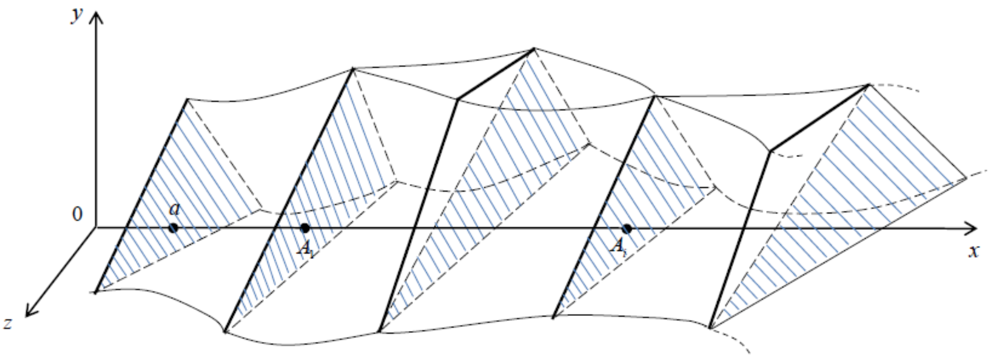


Рис. 8

У такому разі тіло *Ф* можна розглянути як складене з таких тіл:

а) тіла, перерізами якого є трикутники, що накладаються в кожній точці $x \in [a,b]$ (для зручності назвемо це тіло основою);

б) додаткових тіл, перерізи яких також трикутники, що накладаються, і один чи обидва крайні перерізи вироджуються у відрізок. Кожне з додаткових тіл має вигляд, зображений на рис. 9.

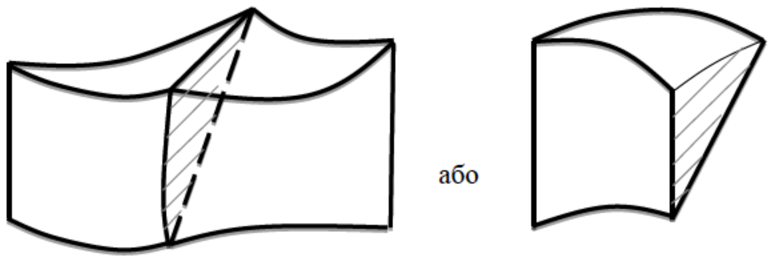


Рис. 9

Додаткове тіло з'являється всякий раз з появою точки, в якій трикутний переріз змінюється чотирикутним. На рис. 8 це точки A_1, A_i. Назвемо ці точки точками типу *А*. Дамо строге означення:

точка трикутного перерізу $x \in [a,b]$ є точкою типу *А*, якщо існує інтервал $(x, x+\varepsilon), \varepsilon > 0$, кожна точка якого є точкою чотирикутного перерізу.

Із означення випливає, що множина точок типу *А* не більш як зліченна.

Накладання перерізів для тіл а), б) забезпечується накладанням перерізів тіла Ф.

Кубовність тіл а), б) доведена в лемі 2.

Кількість додаткових тіл б) дорівнює кількості точок типу *А*. Якщо ця кількість скінченна, кубовність тіла *Ф* є наслідком адитивності об'єму.

Нескінченну кількість точок типу *А* врахуємо в кілька етапів.

I. Розглянемо спочатку тіло, для якого множина точок типу *А* є збіжною послідовністю.

Нехай, наприклад, ця послідовність збігається до точки одного з крайніх перерізів (зазначимо, що в такому разі цей переріз не може бути чотирикутним, оскільки для всякої точки чотирикутного перерізу існує окіл, у якому всі перерізи також чотирикутні).

Цікаво, що розглядуване тіло є замкненою областю, хоча й специфічного виду (побудувати таку область ми не можемо).

Кубовність розглядуваного тіла доводиться методом відсікання. «Розріжемо» тіло площиною, перпендикулярною осі Ох, в одній із точок типу *А*. Тоді одна із частин тіла міститиме скінченну кількість точок типу *А* і буде кубовною. Ту частину, яка містить нескінченну кількість таких точок, можна зробити як завгодно малою. Побудова послідовностей вписаних $\{h_n\}$ і описаних $\{H_n\}$ кубовних фігур є очевидною.

Випадок, коли гранична точка не є точкою крайнього перерізу, зводиться до розглянутого (для цього тіло в цій граничній точці потрібно «розрізати» на дві частини).

Уведемо ще один тип точок:

точку $x \in [a,b]$ назвемо точкою типу *B*, якщо для всякого $\varepsilon > 0$ принаймні один з інтервалів $(x-\varepsilon, x)$ або $(x, x+\varepsilon)$ містить як трикутні, так і чотирикутні перерізи.

Гранична точка, про яку йшлося вище, є точкою типу *B*. Точка типу *B* може бути точкою типу *A*, а може й не бути. У всякому разі вона ніколи не є точкою чотирикутного перерізу.

II. Перейдемо до тіла з довільною множиною точок типу *A*. Оскільки ця множина обмежена, з неї завжди можна виділити послідовність, що збігається до деякої точки з $[a,b]$. Ця точка є точкою типу *B*. У зв'язку з цим розглянемо наше тіло як таке, що складається з тіл п. I.

Якщо кількість останніх скінченна (іншими словами, скінченна кількість точок типу *B*), тіло кубовне.

Нескінченну множину точок типу *B* спочатку також урахуємо в разі, коли вона є збіжною послідовністю (гранична точка й тут не може бути точкою чотирикутного перерізу). Кубовність тіла й у цьому разі доводимо методом відсікання.

Можна ввести новий тип точок:

Точку $x \in [a,b]$ назвемо точкою типу C, якщо вона є границею деякої послідовності точок типу *B*,

і взяти тіло як таке, що складається з тіл щойно розглянутих. У разі скінченної кількості точок типу *C* тіло кубовне і т. д. Разом з тим продовжувати описаний процес немає потреби, оскільки кожна точка типу C є точкою типу B, й інших типів точок не існує.

Лему доведено.

Зауваження 5 (до леми 3). Лему 3 можна легко узагальнити на випадок тіла, поперечні перерізи якого накладаються в кожній точці $x \in [a, b]$, і кожен переріз є k-кутником або l-кутником ($3 \leq k < l, l > 3$).

Тут також, не порушуючи загальності міркувань, можна взяти точку $x=a$ за точку k-кутного перерізу і розглянути тіло як складене з основи і додаткових тіл.

Основою є тіло з поперечними перерізами у вигляді k-кутника.

Поперечними перерізами додаткових тіл є ($l - k+2$)-кутники з виродженими одним чи двома крайніми перерізами. Додаткове тіло з’являється всякий раз з появою точки, в якій k-кутний переріз змінюється l-кутним.

Як основа, так і додаткові тіла кубовні (див. зауваження 4 до леми 2).

У всьому іншому доведення нічим не відрізняється від доведення леми 3, якщо трикутні перерізи замінити на k-кутні, а чотирикутні – на l-кутні.

§ 5. Теорема про кубовність тіла, паралельними перерізами якого є довільні многокутники, що накладаються в кожній точці

Перейдемо до тіл, поперечними перерізами яких є довільні многокутники, що накладаються в кожній точці $x \in [a, b]$.

Нехай є переріз у вигляді M-кутника, і немає перерізів з кількістю кутів, більшою за M, тобто M – максимальна кількість кутів у перерізах. Нижче позначатимемо таке тіло Φ_M.

Мінімальну кількість кутів у перерізах тіла Φ_M позначимо m

($3 \leq m \leq M$).

Насамперед, зазначимо, що з накладання перерізів випливає таке твердження: для всякої точки k-кутного перерізу ($m \leq k \leq M$) існує окіл, у якому немає перерізів з кількістю кутів, меншою за k.

Довести це твердження радимо самостійно.

Зокрема, для всякої точки M-кутного перерізу тіла Φ_M існує окіл, у якому всі перерізи також M-кутні.

У разі $M = 4$ на це зверталась увага в доведенні леми 3.

Теорема 2. Тіло Φ_M кубовне для всіх $M \geq 3$.

Доведення (за індукцією). Якщо $M = 3$, тіло кубовне (лема 2).

Припустимо кубовність тіл у разі максимальної кількості кутів у перерізах $M - 1$ і перейдемо до тіла Φ_M.

Не порушуючи загальності міркувань, будемо вважати лівий крайній переріз тіла Φ_M m-кутним.

Кожен М-кутний переріз допускає розбиття діагоналлю на ($M - 1$)-кутник і трикутник так, що накладатимуться не лише самі перерізи, а й відповідні ($M - 1$)-кутники і трикутники.

Якщо замість M-кутних перерізів взяти їхні (M–1)-кутні частини, то з тіла Φ_M дістанемо тіло, максимальна кількість кутів у перерізах якого дорівнює $M - 1$. За припущенням це тіло кубовне.

Візьмемо його за основу, а саме тіло Φ_M розглянемо як складене з основи і додаткових тіл.

Додаткове тіло з'являється всякий раз з появою:

- точки переходу m-кутного перерізу в M-кутний (точки типу $A^{(m)}$);
- точки переходу ($m+1$)-кутного перерізу в M-кутний (точки типу $A^{(m+1)}$);
- ……
- точки переходу (M-1)-кутного перерізу в M-кутний (точки типу $A^{(M-1)}$).

Точка m-кутного перерізу $x \in [a,b]$ є точкою типу $A^{(m)}$, якщо існує інтервал $(x, x+\varepsilon), \varepsilon > 0$ кожна точка якого є точкою M-кутного перерізу.

Аналогічно означуються інші типи точок.

Деяких типів точок може й не бути.

Перерізи всіх додаткових тіл трикутні, а тому ці тіла кубовні. Кількість додаткових тіл дорівнює сумарній кількості точок різних типів. Врахуємо їх послідовно.

1) Розглянемо спочатку випадок, коли є лише точки типу $A^{(m)}$, тобто M-кутні перерізи з'являються лише після m – кутних.

Якщо кількість таких точок скінченна, тіло кубовне.

Доведення кубовності в разі нескінченної кількості точок типу $A^{(m)}$ аналогічне доведенню з леми 3, де трикутні перерізи слід замінити на m – кутні, а чотирикутні – на М-кутні.

Зазначимо лише, що точки типу $B^{(m)}$ і $C^{(m)}$ (аналоги точок типу B і C з доведення леми 3) є точками m – кутних перерізів (див. твердження перед теоремою 2).

2) Розглянемо тепер випадок, коли є точки типу $A^{(m)},\ A^{(m+1)}$.

За основу візьмемо тіло, кубовність якого щойно доведена (тобто точки типу $A^{(m)}$ вже враховані). Додаткове тіло з'являється всякий раз із появою точки типу $A^{(m+1)}$. Якщо таких точок скінченна кількість, тіло кубовне.

Доведення кубовності тіла в разі нескінченної кількості точок типу $A^{(m+1)}$ знову проводимо за схемою доведення леми 3. Тут точки типу $B^{(m+1)}$ і $C^{(m+1)}$ не можуть бути точками перерізів із кількістю кутів, більшою за $m+1$. Проте ці точки можуть бути точками не лише $(m+1)$ – кутних, а й m – кутних перерізів. Не виключається випадок, коли точка типу $B^{(m+1)}$ є одночасно й точкою типу $B^{(m)}$.

Повторюємо процес, беручи на кожному кроці за основу тіло, кубовність якого доводиться на попередньому кроці.

3) На останньому кроці враховуємо точки типу $A^{(\mathrm{M}-1)}$. Тут точки типу $B^{(\mathrm{M}-1)}$ і $C^{(\mathrm{M}-1)}$ не можуть бути лише точками $\mathrm{M}-$ кутних перерізів. При цьому точка типу $B^{(\mathrm{M}-1)}$ одночасно може бути точкою кожного з типів $B^{(m)}$, $B^{(m+1)}$,…, $B^{(\mathrm{M}-2)}$ або деякої їх частини. Інакшими словами, в околі точки типу $B^{(\mathrm{M}-1)}$ може бути нескінченна кількість не лише точок типу $A^{(\mathrm{M}-1)}$, а точок типів $A^{(m)}$, $A^{(m+1)}$,…, $A^{(\mathrm{M}-2)}$. Теорему доведено.

Зауваження 6. Із теореми 2 і адитивності об’єму випливає, що кубовним є всяке тіло з паралельними перерізами у вигляді замкнених багатозв’язних областей (рис. 10), межа яких складається зі скінченної кількості простих замкнених ламаних. Єдина умова – це накладання цих перерізів.

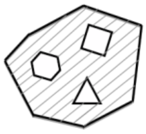


Рис. 10

§6. Теорема про кубовність тіл, паралельні перерізи яких квадровні і накладаються в кожній точці

Нехай тепер *Φ* – довільне тіло, паралельні перерізи якого є замкненими квадровними областями (спочатку вважатимемо ці області однозв’язними).

Як і раніше, візьмемо перерізи перпендикулярними осі *Ox* і називатимемо їх поперечними.

Нехай площі перерізів описуються функцією $S(x)$, $x \in [a,b]$.

Сформулюємо основну теорему нашої роботи.

Теорема 3. Накладання перерізів у кожній точці $x \in [a,b]$ гарантує кубовність тіла *Φ*, і його об’єм дорівнює

$$V = \int_a^b S(x)dx. \qquad (12)$$

Доведення. Із накладання перерізів випливає, що $S(x) \in C_{[a,b]}$, і інтеграл (12) існує.

Оскільки перерізи квадровні, то для кожного з них існують послідовності вписаних $\{k_n[x]\}$ і описаних $\{K_n[x]\}$ многокутників відповідно з площами $\{\underline{S}_n(x)\}$ і $\{\overline{S}_n(x)\}$, що мають спільну границю

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}_n(x) = \lim_{n\to\infty} \overline{S}_n(x) = S(x), \ \forall x \in [a,b].$$

Детально зупинимось на вписаних многокутниках. Для описаних многокутників міркування аналогічні. Отже, для кожного $x \in [a,b]$ маємо послідовність вписаних многокутників $\{k_n[x]\}$.

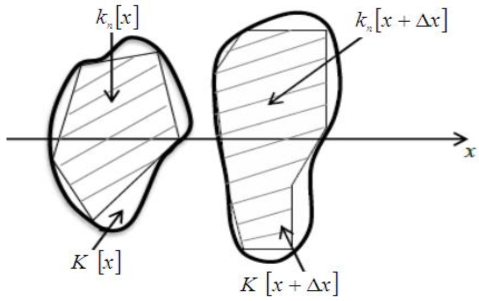


Рис. 11

Накладання перерізів дозволяє розглянути вписані в них многокутники, що мають однаковий номер *n*, як такі, що накладаються в кожній точці $x \in [a,b]$ (у зв'язку з цим див. рис. 11 і зауваження 2), тобто для всякого $n \geq 1$

$$\lim_{\Delta x \to 0} S(k_n[x] + k_n[x+\Delta x]) = \lim_{\Delta x \to 0} S(k_n[x] \cdot k_n[x+\Delta x]) = \underline{S}_n(x),$$

$$x \in [a,b]. \tag{13}$$

Із (13) дістаємо, що $\underline{S}_n(x) \in C_{[a,b]}$ і для кожного $n \geq 1$ існує інтеграл

$$\int_a^b \underline{S}_n(x)dx.$$

Отже, маємо:

1) $\forall n \geq 1 \ \exists \int_a^b \underline{S}_n(x)dx;$

2) $\exists \int_a^b S(x)dx;$

3) має місце поточкова збіжність

$\forall x \in [a,b] \ \underline{S}_n(x) \to S(x)$ при $n \to \infty;$

4) має місце обмеженість

$\exists c > 0, \forall x \in [a,b], \forall n \geq 1 : \underline{S}_n(x) < c$

(наприклад, $c = \pi R^2$, де *R* – радіус кулі, що обмежує тіло *Φ*).

Тому за теоремою про граничний перехід у визначеному інтегралі [2]

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b \underline{S}_n(x)dx = \int_a^b S_n(x)dx \tag{14}$$

Аналогічно, у разі описаних многокутників дістаємо

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \overline{S}_n(x)dx = \int_a^b S_n(x)dx \qquad (15)$$

Функція $\underline{S}_n(x)$ є функцією площ поперечних перерізів тіла, яке позначимо h_n, і яке, очевидно, міститься в тілі *Ф*. Дійсно, якщо точка $M \in h_n$, то вона належить деякому многокутнику, а тому й деякого перерізу тіла *Ф*, а отже, є точкою цього тіла.

Аналогічно, функція $\overline{S}_n(x)$ є функцією площ поперечних перерізів тіла, яке позначимо H_n, і яке містить тіло *Ф*.

За теоремою 2 тіла h_n і H_n кубовні. Тому їхні об'єми дорівнюють

$$V(h_n) = \int_a^b \underline{S}_n(x)dx; \ V(H_n) = \int_a^b \overline{S}_n(x)dx$$

Із останніх рівностей і співвідношень (14), (15) дістаємо

$$\lim_{n\to\infty} V(h_n) = \lim_{n\to\infty} V(H_n) = \int_a^b S(x)dx,$$

що згідно з теоремою 1 й означає кубовність тіла *Ф*.

Теорему доведено.

Зауваження 7. Із теореми 3 і адитивності об'єму випливає, що кубовним є всяке тіло з паралельними перерізами у вигляді замкнених багатозв'язних квадровних областей (рис. 12), межа яких складається зі скінченної кількості замкнених ліній. Єдиною умовою є накладання цих перерізів.

Рис. 12

Тіла, які передбачає теорема 3, можуть бути достатньо складними і не піддаватися побудові.

Приклад 1. Розглянемо просторову фігуру, перерізами $x = const$ якої є круги одиничного радіуса з центрами, що лежать на кривій $y = x\sin\frac{1}{x}, 0 < x \le \frac{2}{\pi}$ у площині *xOy*. У площині *x=0* до фігури віднесемо круг $y^2 + z^2 \le 1$.

Розглянута фігура є замкненою областю (тілом). Перерізи накладаються у кожній точці $x \in \left[0; \frac{2}{\pi}\right]$. Згідно з теоремою 3 наше тіло кубовне, і його об'єм дорівнює 2 куб. од., тобто об'єму кругового циліндра $y^2 + z^2 = 1,\ 0 \le x \le \frac{2}{\pi}$.

§7. Урахування точок, у яких накладання перерізів порушується

Поки що мова йшла про тіла, паралельні перерізи яких накладаються у кожній точці. Проте кубовністю тіла не виключаються випадки, коли в деяких точках накладання перерізів порушується. Наприклад, тіло, утворене торцьовим з'єднанням двох прямих кругових циліндрів різних радіусів, кубовне, і в площині з'єднання $x = x_0$ накладання перерізів немає.

Приклад 2. Звернемось до прикладу 1, де криву центрів замінимо кривою $y = sin\frac{1}{x},\ 0 < x \le \frac{2}{\pi}$. У площині $x = 0$ до фігури віднесемо замкнену множину точок, кожна з яких є точкою деякого круга $(y - \alpha)^2 + z^2 \le 1,\ -1 \le \alpha \le 1$, і ортогональна проекція всякого перерізу $x = const$ на площину $x = 0$ міститься в цій множині. Просторова фігура і в цьому разі є замкненою областю. Проте накладання перерізів у точці $x = 0$ немає.

Нехай у точці $x_0 \in [a; b]$ накладання перерізів порушується, проте існують інтервали $(x_0 - \varepsilon, x_0)$, $(x_0, x_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ (чи один з них, якщо x_0 – точка крайнього перерізу), в яких перерізи накладаються. У такому разі назвемо *точку* x_0 *точкою типу А*. У наведених щойно прикладах йшлося саме про такі точки.

Теорема 4. Нехай паралельні перерізи тіла Φ є замкненими квадровними областями (не обов'язково однозв'язними) і накладаються за винятком, можливо, скінченної кількості точок типу *А*.

Тоді тіло Φ кубовне.

<u>Доведення.</u> Якщо в точках, у яких накладання перерізів порушується, «розрізати» тіло площинами, перпендикулярними осі *Ox* (тут, як і раніше,

вважаємо перерізи перпендикулярними осі Ox), дістанемо скінченну кількість кубовних тіл. Кубовність тіла Φ є наслідком адитивності об’єму.

У разі, якщо накладання перерізів немає у крайній точці (див. приклад 2), слід скористатись методом відсікання.

Теорему доведено.

Відмітимо, що в прикладі 2 маємо той самий об’єм, що й у прикладі 1.

Множина точок типу A може бути й нескінченною, проте за означенням вона не більш як зліченна. Спочатку урахуємо це наступною теоремою. При цьому наголошувати на тому, що область не обов’язково однозв’язна, нижче не будемо.

Теорема 5. Нехай паралельні перерізи тіла Φ є замкненими квадровними областями і накладаються за винятком множини точок типу A, яка є збіжною послідовністю. Тоді тіло Φ кубовне.

Доведення. Візьмемо послідовність точок, в яких накладання перерізів порушується, такою, що збігається до точки одного з крайніх перерізів, і скористаємось методом відсікання.

«Розріжемо» тіло Φ площиною перпендикулярною осі Ox в одній із точок взятої послідовності.

Тоді одна з частин тіла міститиме скінченну кількість точок цієї послідовності і буде кубовною (теорема 4). Ту частину тіла, яка містить нескінченну кількість точок послідовності, можна зробити як завгодно малою. Побудова послідовностей вписаних $\{h_n\}$ і описаних $\{H_n\}$ кубовних фігур є очевидною.

Випадок, коли гранична точка не є точкою крайнього перерізу, зводиться до розглянутого (для цього тіло в цій граничній точці треба «розрізати» на дві частини).

Теорему доведено.

Гранична точка, про яку йшлося в теоремі 5, може бути як точкою накладання перерізів, так і точкою, в якій накладання перерізів немає. Проте вона не може бути точкою типу A.

Уведемо ще один тип точок: точку $x \in [a, b]$ назвемо *точкою типу* B, якщо для всякого $\varepsilon > 0$ принаймні один з інтервалів $(x - \varepsilon, x)$ чи $(x, x + \varepsilon)$ містить точку типу A. Очевидно, що він містить і точки, в яких перерізи накладаються.

Гранична точка з теореми 5 є точкою типу B.

Перейдемо до загального випадку зліченної множини точок, у яких накладання перерізів порушується.

Теорема 6. Якщо паралельні перерізи тіла Φ є замкненими квадровними областями і накладаються за винятком зліченної множини точок, то тіло Φ кубовне.

Доведення. Розглянемо тіло Φ як таке, що складається з тіл теореми 5. Якщо кількість останніх скінченна (іншими словами, скінченна кількість точок типу B), тіло кубовне.

Нескінченну множину точок типу B спочатку також урахуємо у випадку, коли вона є збіжною послідовністю. Кубовність тіла й у цьому разі доводимо методом відсікання.

Можна ввести новий тип точок: точку $x \in [a, b]$ назвемо *точкою типу* C, якщо вони є границею послідовності точок типу В. Потім взяти тіло як таке, що складається з тіл щойно розглянутих. У разі скінченної кількості останніх (скінченної кількості точок типу C) тіло кубовне і т.д.

Разом з тим, продовжувати описаний процес немає потреби, оскільки кожна точка типу C є точкою типу B, й інших типів точок не існує.

Теорему доведено.

Оскільки неперервність функції площ $S(x)$ у точці $x \in [a, b]$ у загальному випадку є лише необхідною умовою накладання перерізів у цій точці (див. §1), то в разі зліченної множини точок, у яких накладання перерізів немає, множина точок розриву функції $S(x)$ є не більш як зліченною.

Якщо кількість точок розриву функції $S(x)$ скінченна (нагадаємо, що функція $S(x)$ – обмежена), інтеграл (12) існує.

У разі зліченної множини точок розриву функції $S(x)$ доповнимо теорему 6 наступним твердженням (див. [2], ст. 120, приклад 20*), яке приймемо без доведення:

якщо функція $S(x)$ обмежена на відрізку $[a,b]$ і за винятком зліченної множини точок неперервна на $[a,b]$, то інтеграл (12) існує.

Висновок. Викладений у даній роботі матеріал слід трактувати як формування достатньої умови кубовності у вигляді:

якщо для тіла існує система квадровних паралельних перерізів, що накладаються за винятком, можливо, не більш як зліченного набору точок, то тіло кубовне. За відомої функції площ об'єм тіла можна знайти за формулою (12).

На закінчення хочу відмітити, що робота виконувалась за участі лаборанта кафедри Бойко Анни.

ЛІТЕРАТУРА

1. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 2 / [Г. М. Фихтенгольц] ; Пред. и прим. А. А. Флоринского. – 8–е узд. – М.:ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 864 с.
2. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз: Підручник: У двох частинах. Частина 1 / [А. Я. Дороговцев]. – К. : Либідь, 1993. – 320 с.

Михайленко Василь Васильович – завідувач кафедри, професор, доктор фізико-математичних наук

Наукові інтереси: нелінійна термомеханіка п'єзоелектричних тіл
Дисципліни, які викладає: рівняння математичної фізики, основи тензорного числення, теорія ймовірностей і математична статистика.

Ленчук І.Г.
доктор педагогічних наук, професор

ПЕРЕТВОРЕННЯ ФІГУР У ПРОСТОРІ

У передмові до трактату (у 2-х кн.), присвяченому виключно елементарній евклідовій геометрії, читаємо таке: «… більшість теорем елементарної геометрії, котрі виходять за межі шкільного курсу, лише потішні, але непотрібні й лежать далеко у стороні від основної лінії розвитку математичної науки. Проте, окрім конкретних теорем, елементарна геометрія вміщує ще дві *великі загальні ідеї*, які лягли в основу всього подальшого розвитку геометрії і значення яких далеко виходить навіть за ці достатньо широкі рамки. Мова йде про *дедуктивний* метод і *аксіоматичне* обґрунтування геометрії, по-перше, і про *геометричні перетворення* та *теоретико-групове обґрунтування геометрії*, по-друге. Ці ідеї вельми змістовні та плодотворні, оскільки вони у своєму безпосередньому розвитку приводять до неевклідових геометрій» [3, с. 4].

За Ф. Клейном, «*Геометрія є наука, яка вивчає властивості фігур, що не змінюються при перетвореннях деякої групи перетворень*».

Перетворення в евклідовій геометрії є не лише розділом курсу, поцінованим у творчому особистісному розвитку, це – ***інструмент***, ***засіб*** розбудови найпершої з наук, ефективний ***апарат*** педагогічно й методично виваженого виконання супутніх уявлюваних і зображальних операцій з її фігурами. Процес вирішення не простих, різнохарактерних геометричних пропозицій відчутно пришвидшується, оптимізується за умов умілого, ефективного застосування перетворень. Перетворення використовуються художниками для правильної побудови композиції картини, хіміками – у дослідженні структури кристалів тощо. Здобутки вчених у вивченні перетворень склали математичну основу для розвитку багатьох галузей сучасної науки і техніки.

1. РУХ У ПРОСТОРІ. ВЛАСТИВОСТІ РУХУ

Як і на площині, просторове перетворення однієї фігури в іншу називається ***рухом***, якщо воно зберігає відстані між точками, тобто переводить будь-які дві точки X і Y фігури-прообразу в точки X' і Y' фігури-образу так, що $\boldsymbol{X'Y' = XY}$.

Новою просторовою властивістю руху є те, що *рух переводить площину у площину*.

Доведемо цю властивість.

Нехай Σ будь-яка площина простору. Візьмемо у цій площині три довільні точки A, B, C, які не лежать на одній прямій (рис. 1). Вони рухом будуть переведені в точки A', B', C', які також не лежатимуть на одній прямій, адже за означенням руху $A'B' = AB$, $B'C' = BC$ і $A'C' = AC$. Проведемо через точки A', B', C' площину Σ'.

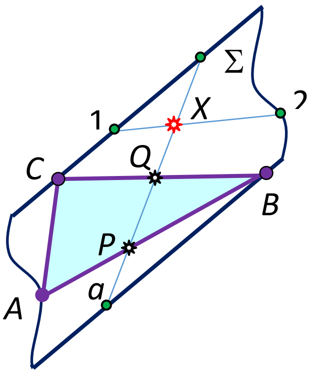


Рис. 1

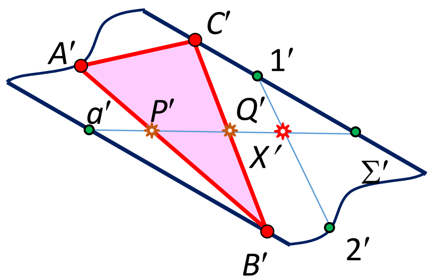


Рис. 2

На деякій прямій 1-2 площини Σ візьмемо довільну точку X ($X \in \Sigma$). Проведемо через точку X будь-яку пряму a так, щоб вона перетинала сторони трикутника ABC у точках P і Q. Відомо, що рух пряму a переведе у пряму a'. При цьому точки P і Q прямої a перейдуть у точки P' і Q' прямої a', які належать відповідним сторонам трикутника $A'B'C'$, а тому й площині Σ' (рис. 2).

Таким чином, пряма a' належить площині Σ'. Точка X прямої a під час руху перейшла у точку X' прямої a'. Отже, за першою ознакою належності прямої площині точка X' належить площині Σ' ($X' \in \Sigma'$). Твердження доведено.

Тепер перерахуємо властивості руху фігур у просторі.

1. *Два рухи, виконані послідовно, дають знову рух*.

2. *Перетворення, обернене до руху, теж є рухом*.

3. *Точки, що лежать на прямій, під час руху переходять у точки, які лежать на прямій, і зберігається порядок їх взаємного розміщення*.

Таким чином, під час руху *прямі переходять у прямі, промені – у промені, відрізки – у відрізки, площини – у площини*.

4. *Під час руху зберігається міра кутів*.

Отже, рух *три точки*, які не лежать на одній прямій, *переводить у три точки*, що теж не лежать на одній прямій, а перпендикулярні прямі й площини – у перпендикулярні прямі й площини.

5. *Рух зберігає паралельність прямих*.

6. *Рух зберігає відношення відрізків на прямій*.

У просторі, так само як і на площині, *дві фігури називаються рівними*, якщо вони суміщаються рухом.

2. ПАРАЛЕЛЬНЕ ПЕРЕНЕСЕННЯ У ПРОСТОРІ

Означення паралельного перенесення у просторі в жодному разі не відрізняється від планіметричного. Паралельним перенесенням, як динамічною операцією, ***всі точки*** заданої фігури F (а отже, й фігура в цілому) ***одночасно*** переміщуються в одному і тому ж напрямі на одну і ту саму відстань: траєкторією руху точок є *паралельні прямі*, а шлях зсуву у просторі встановлюється ***відрізком і напрямом*** (прямолінійним вектором). Таким чином, паралельне перенесення ототожнюється з поняттям вектора: одне означається через інше. Саме цей зв'язок зручний при розв’язуванні задач.

Як і на площині, неважко довести властивості паралельного перенесення.

Нехай паралельне перенесення задано вектором $\vec{p}$ (рис. 3). Візьмемо яку-небудь фігуру F, зокрема точку (F – прообраз). Нехай перенесення $\vec{p}$ переводить фігуру F у фігуру F′ (образ фігури F). Записують так: $F' = \vec{p}(F)$.

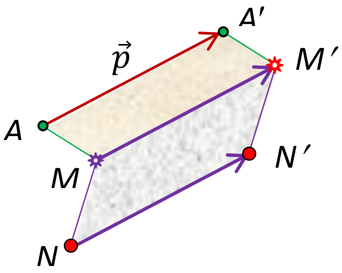


Рис. 3

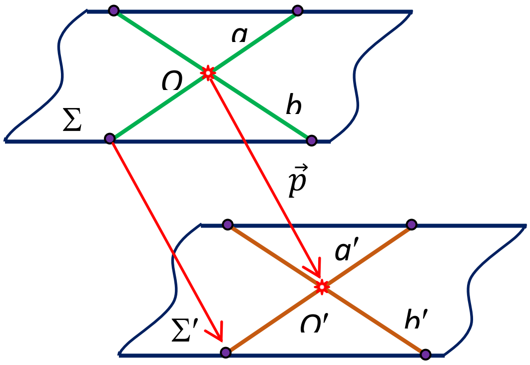


Рис. 4

Позначимо початок і кінець вектора $\vec{p}$ точками A та A'. Якщо M – довільна точка простору й $M' = \vec{p}(M)$, то фігура $AA'M'M$ – паралелограм за ознакою ($AA' = MM'$ і $AA' \parallel MM'$). І навпаки: будь-яка задана пара точок M і M' цілком визначає паралельне перенесення – ***зсув*** усякої фігури F у фігуру F′ за напрямом $M \to M'$ на відстань, рівну довжині відрізка MM'. Це можна записати так: $\overrightarrow{MM'} = \vec{p}$. Зокрема, $\overrightarrow{AA'} = \vec{p}$ (тут $A' = \vec{p}(A)$).

Якщо $M' = \vec{p}(M)$ і $N' = \vec{p}(N)$, то чотирикутник $MM'N'N$ теж буде паралелограмом (обернене твердження не обов'язково правильне, але якщо тільки $MM'N'N$ – паралелограм і $M' = \vec{p}(M)$, то й $N' = \vec{p}(N)$).

Отже, які б не були точки A й A' (вектор $\overrightarrow{AA'}$), існує єдине паралельне перенесення у просторі, яке переводить точку A в точку A'. Звідси також прямо випливає, що паралельне перенесення є рухом ($M'N' = MN$), а кожна пряма цим перетворенням переходить у паралельну їй пряму ($MN \to M'N'$ і $M'N' \parallel MN$).

Новою для паралельного перенесення у просторі є така властивість:

У результаті просторового паралельного перенесення кожна площина переходить або в себе, або у паралельну їй площину.

Справді, нехай Σ – будь-яка площина (рис. 4). Візьмемо в цій площині дві довільні прямі a і b, що перетинаються. В результаті паралельного перенесення на вектор $\vec{p}$ прямі a і b переходять або в себе ($\vec{p} = \vec{0}$), або у паралельні їм прямі a' і b' ($\vec{p} \neq \vec{0}$). Площина Σ перейде в деяку площину Σ′, яка однозначно визначена прямими a' і b'. Якщо площина Σ′ не збігається із площиною Σ, то за ознакою паралельності площин вона паралельна Σ, що й потрібно було довести.

Задача 1. *Доведіть* ***методом паралельного перенесення****, що кут між двома площинами не залежить від вибору місця січної площини, котра перпендикулярна до лінії перетину площин.*

Розв'язання. Отже, через точку A' прямої c, по якій перетинаються площини Σ і Λ, проведемо площину Δ', перпендикулярну c (рис. 5). Нехай a' і b' – прямі перетину цієї площини із площинами Σ і Λ.

Виконаємо паралельне перенесення на вектор $\overrightarrow{AA'}$, при якому точка A перетину площини Δ із прямою c перейде у точку A' перетину площини Δ' з цією ж прямою c. У результаті за властивостями паралельного перенесення прямі a і b перейдуть у паралельні їм прямі a' і b' *із збереженням міри кутів між ними*, що й вимагалося довести.

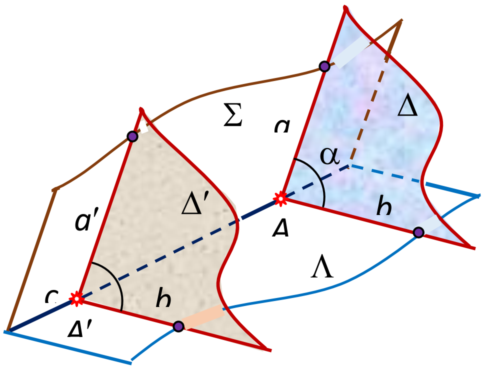


Рис. 5

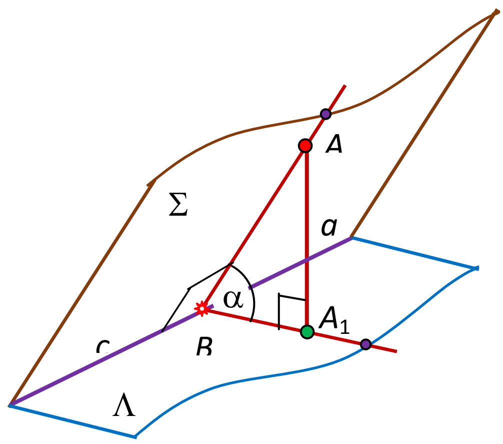


Рис. 6

Задача 2. *Дві площини перетинаються під кутом* 60°. *Точка A, яка належить одній із цих площин, віддалена від другої площини на відстань a. Знайдіть відстань від цієї точки до прямої перетину площин.*

Розв'язання. Нехай Σ і Λ – задані площини й A – точка, яка належить площині Σ (рис. 6). Опустимо перпендикуляр AA_1 на площину Λ і перпендикуляр AB на пряму c, яка є лінією перетину заданих площин. За теоремою про три перпендикуляри $A_1B \perp c$. Площина трикутника ABA_1 перпендикулярна до прямої c і тому кут при вершині B прямокутного трикутника ABA_1 дорівнює 60°. Отже, остаточно маємо: $AB = \dfrac{AA_1}{\sin 60^0} = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

3. ПЕРЕТВОРЕННЯ ПОВОРОТУ НАВКОЛО ПРЯМОЇ

У планіметрії паралельне перенесення і поворот навколо точки на заданий кут вважають спорідненими. В останньому з них крім центра задається градусна міра кута і напрям повороту (кутовий вектор). Проте у просторі через усяку точку можна провести безліч (в'язку) площин. Через що зникає визначеність перетворення – кожна із площин даватиме лише їй притаманний результат дії.

Однак, відкриваючи дверці шафи чи перегортаючи сторінки зошита, ви всі точки площини водночас переміщуєте в одному й тому напрямі на один і той самий визначений кут. Цікаво, що тут замість центра повороту (точки) з'являється вісь повороту (пряма). Тому таке перетворення у просторі називають *поворотом навколо прямої*.

Отже, поворот навколо прямої (осі) слід задавати самою *віссю*, *кутом* і тим чи іншим *напрямом* повороту (за годинниковою стрілкою чи проти неї).

При цьому кожна окремо взята точка A заданої фігури F буде описувати дугу кола у своїй власній площині Σ, перпендикулярній до осі i (рис. 7). На вісь повороту накладається додаткова умова: вона має бути зарання зорієнтована (наприклад, щоб усякий сторонній спостерігач бачив вісь проекціювальною на площину Σ зверху).

Для кожної точки вирізняють характеристичні об'єкти перетворення: 1) Σ – площина обертання; 2) O – центр повороту; 3) $OA = OA' = R$ – радіус обертання.

Поворотом *навколо прямої* (осі) у просторі будемо називати таке перетворення фігури F у фігуру F′, при якому кожна точка фігури F описує у своїй власній площині, перпендикулярній до осі обертання, зорієнтовану дугу кола з однією і тією ж градусною (радіанною) мірою центрального кута.

Таким чином, насправді точки фігури F переміщуються у просторі за правилами вже відомого із планіметрії повороту навколо точки на заданий кут, але кожна в окремо взятій площині, перпендикулярній до осі повороту i.

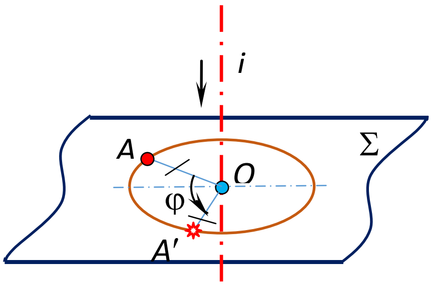


Рис. 7

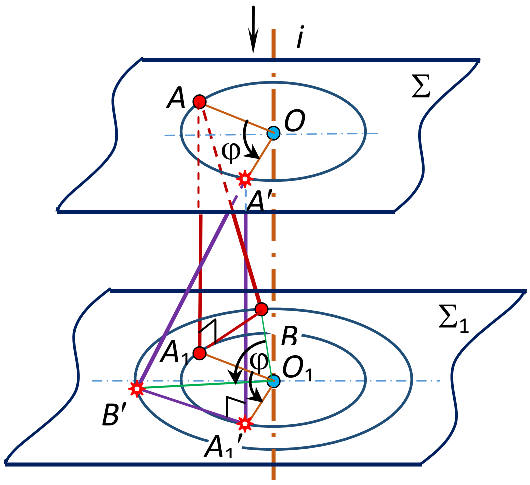


Рис. 8

Теорема 6.1. ***Поворот навколо прямої у просторі є рух***.

Дано: Вісь повороту i; кут повороту φ; відрізок AB;

$A'B'$ – результат повороту відрізка AB на кут φ навколо осі i.

Довести: $A'B' = AB$.

Доведення. Нехай відрізок AB займає загальне розташування відносно площин обертання Σ і Σ_1 й мимобіжний із віссю обертання i (рис. 8). Унаслідок повороту на кут φ точка A у площині Σ перейде в точку A', а точка B у площині Σ_1 – у точку B'.

Щоб довести, що відрізки AB і $A'B'$ рівні, сумістимо площини Σ й Σ_1 паралельним перенесенням площини Σ на вектор $\overrightarrow{OO_1}$. Таке паралельне перенесення можна розглядати як ортогональне проекціювання однієї площини на іншу. При цьому точки A і A' займуть місце своїх ортогональних проекцій A_1 і A'_1 відповідно. Звідси отримаємо два прямокутні трикутники AA_1B та $A'A_1'B'$. У першого з них $\angle A_1 = 90°$ і AB є його гіпотенузою, а у другого $\angle A_1' = 90°$ й $A'B'$ – його гіпотенуза. До того ж, у них катети AA_1 і $A'A_1'$ рівні, адже відомо, що паралельне перенесення зсовує точки уздовж паралельних прямих на одну й ту саму відстань. Тут: $A \to A_1$, $A' \to A_1'$.

У свою чергу, поворот точок A_1 і B навколо спільного центра O_1 по концентричним колам на кут φ у площині Σ_1 засвідчує, що відрізки A_1B і $A_1'B'$

також рівні, оскільки площинний поворот є рухом і він зберігає відстані між точками.

Отже, ми отримали, що $\Delta\ AA_1B = \Delta\ A'A_1'B'$. Звідси маємо: $AB = A'B'$. Теорему доведено.

Наслідок. *Поворот навколо прямої на кут* 180° *є перетворенням осьової симетрії у просторі.*

У повороті навколо прямої *i* біжуча точка *X* відрізка *AB* описує дугу кола, градусна міра якої задана (φ = 180°). При цьому площина обертання точки перетинає вісь i в центрі такого кола. Отже, точки X і X' – діаметрально протилежні відносно точки перетину осі із площиною обертання, а $X' \in A'B'$.

Зараз розглянуто просторове перетворення, яке інколи ще називають *обертанням навколо проекціювальної прямої*. Справді, вісь обертання *i* перпендикулярна до площини проекцій Σ. Проте у стереометрії, окрім обертання навколо прямої в поданій інтерпретації, надто часто виникає потреба скористатися обертанням навколо *прямої рівня* або, навіть, *нульового рівня*, для ***суміщення*** плоскої фігури із площиною проекцій.

Перш ніж перейти до задач метричного характеру, які розв'язують цим методом, слід довести одну із властивостей паралельних проекцій.

Паралельною проекцією (*зображенням*) *усякого трикутника загального розташування є будь-який трикутник.*

Нагадаємо спочатку, що в побудові зображень фігур стереометрії надто важливо дотримуватися всіх без винятку властивостей паралельного проекціювання, а лінійні розміри вже готової проекції можна із тим чи іншим коефіцієнтом пропорційності збільшувати або зменшувати, тобто піддавати площинному перетворенню подібності.

Накреслимо на площині П довільний трикутник *ABC* (рис. 9), а заданий у просторі трикутник $A'B'C'$ перемістимо так, щоб одна його сторона (наприклад, $A'B'$) «лягла» на картинну площину П. Побудуємо в цій площині трикутник $A'B'C_0$, подібний (за двома кутами) трикутнику ABC. Коли вектор $\overrightarrow{C'C_0}$ обрати за напрям паралельного проекціювання площини П′ на картинну площину П, то проекцією заданого трикутника $A'B'C'$ матимемо трикутник $A_0B_0C_0$. Тут A' проекціюється в A_0 ($A' \equiv A_0$), B' – у B_0 ($B' \equiv B_0$) і C' – у C_0. Отже, трикутник ABC є фігура, подібна до паралельної проекції трикутника $A'B'C'$. Тобто, трикутник ABC істинно є зображенням трикутника $A'B'C'$.

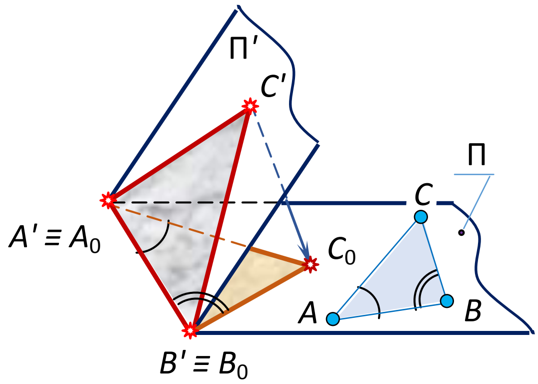


Рис. 9

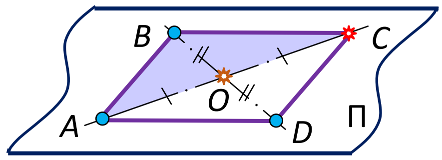


Рис. 10

Таким чином, *усякий трикутник ABC, накреслений на картинній площині, можна вважати рисунковою моделлю чи то правильного, чи рівнобедреного, чи прямокутного, чи якого-небудь іншого* (різностороннього) *трикутника*.

Безспірний *факт – вихідний, базовий* в методології зображень плоских фігур загального розташування. Він допускає та, поряд із цим, чітко обмежує свавілля в побудовах: лише *трійку неколінеарних точок* усякої плоскої фігури можна зображати на картинній площині *трійкою неколінеарних точок* за вибором виконавця проекційного рисунка.

Як наслідок, із на перший погляд елементарної, однак вельми вагомої властивості паралельних проекцій випливає, що *який-завгодно паралелограм на картинній площині можна обирати зображенням паралелограма будь-якої форми* (рис. 10).

Справді, розіб’ємо (в уявленнях) оригінальний паралелограм $A'B'C'D'$ діагоналлю $A'C'$ на два рівні трикутники $A'B'C'$ і $A'C'D'$. За щойно доведеною властивістю зображенням трикутника $A'B'C'$ буде довільний трикутник ABC. Через точку O на AC таку, що $AO = OC$, проведемо промінь BO і від точки O у сторону, протилежну OB, відкладемо відрізок OD, рівний відрізку OB. Оскільки паралельне проекціювання зберігає належність точок і прямих та відношення відрізків на прямій, то точка D є зображенням точки D'. У чотирикутнику $ABCD$ діагоналі перетинаються і точкою перетину діляться навпіл, а тому, згідно із відповідною ознакою, цей чотирикутник також є паралелограмом.

Отже, *всякий паралелограм на картинній площині можна вважати зображенням прямокутника або ромба, або квадрата, або будь-якого іншого паралелограма.*

Не вдаючись у деталі, до цього додамо таке. В метричній геометрії розрізняють два поняття: «метрично визначене» і «метрично розмірне» зображення. Щоб зображення будь-якої плоскої фігури було метрично визначеним, на нього потрібно затратити два метричні параметри, а на метрично розмірне – три. Наприклад, якщо зображення ABC трикутника $A'B'C'$ доповнити відношенням сторін $A'B'$ і $B'C'$ й кутом між ними, то цієї інформації цілком достатньо для встановлення форми оригінального трикутника. Третім параметром може бути довжина однієї із сторін трикутника ($A'C' = p$ (см)). За таких умов із зображення можна отримати повну інформацію про трикутник, у тому числі, лінійні розміри усіх його елементів.

Задача 3. *Дано зображення ABC рівностороннього трикутника, а також прямої p і точки P, які лежать у площині цього трикутника. Опустіть на зображенні перпендикуляр із точки P на пряму p.*

Помічаємо, що задача сформульована коректно, оскільки площина $\Sigma(ABC)$ **метрично визначена** двома умовами, накладеними на трикутник-оригінал: $A'B' = B'C'$ і $B'C' = C'A'$ (або, по іншому, $A'B' = B'C'$ і $\angle A'B'C' = 60°$). Урахування заданих умовою метричних взаємних залежностей між елементами трикутника гарантує отримання єдиного графічного розв’язку на картинній площині.

1-*й* *спосіб розв’язання.* Тепер уявимо собі, що: 1) у площині трикутника $\Sigma'(A'B'C')$ виконано з деяким (загалом нам невідомім) коефіцієнтом k перетворення подібності так, щоб $A'C' = AC$; 2) рухом (добутком (композицією) кількох рухів) трикутник $A'B'C'$ переміщено у просторі так, що його сторона $A'C'$ «лягла» на сторону AC заданого трикутника-зображення ABC.

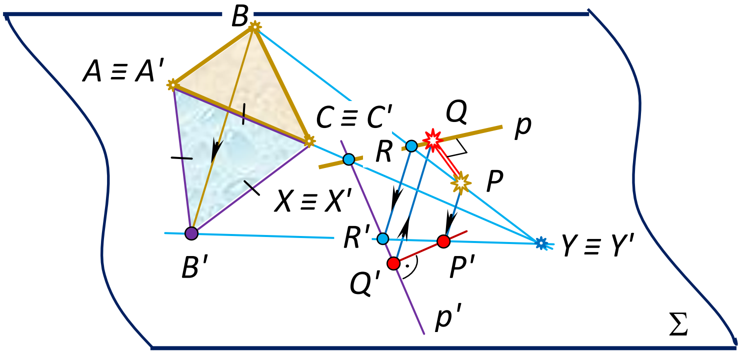


Рис. 11

Згідно з умовою задачі (рис. 11), трикутник ABC в оригіналі є рівностороннім. Побудувавши на будь-якій його стороні, наприклад на $AC \equiv A'C'$, рівносторонній трикутник ACB', одержимо істинну форму заданого трикутника $A'B'C'$. Ця елементарна операція забезпечує, фактично, поворот всієї площини $\Sigma'(A'B'C')$ навколо прямої $AC \equiv A'C'$ до суміщення її з картинною площиною Σ.

Зокрема, разом із точкою B' обертаються навколо нерухомої осі обертання $AC \equiv A'C'$ й інші, задані умовою геометричні об'єкти площини Σ', – точка P' і пряма p'. При цьому будь-яка пряма BY на кресленні, яка перетинає вісь обертання в її подвійній точці $Y \equiv Y'$, займе нове розташування $B'Y'$, а точка P, яка належить прямій BY, – місце точки P' на прямій $B'Y'$ так, що $PP' \parallel BB'$. Останній факт пояснюється дуже просто – відношення відрізків на цій прямій $\left(\dfrac{BP}{PY} = \dfrac{B'P'}{P'Y'}\right)$ є інваріантом не лише паралельного проекціювання і перетворення подібності, а й якого завгодно іншого переміщення у просторі, зокрема й обертання навколо прямої $A'C' \equiv AC$. Пряма $p'(p)$ теж у цьому русі має з віссю обертання одну спільну (подвійну) нерухому точку $X \equiv X'$, а інша її точка $R'(R)$ нехай належить, наприклад, тій самій прямій $B'Y'(BY)$. Дві точки X' і R' однозначно встановлюють розташування на моделі прямої p'. Завершивши в моделюванні поворот даної площини Σ' до нульового рівня, опускаємо звичним прийомом (як у планіметрії) із точки P' перпендикуляр $P'Q'$ на пряму p' і, провівши $Q'Q \parallel B'B$ до перетину в точці Q із прямою p, одержимо зображення шуканого перпендикуляра PQ.

Задача 4. *На проекційному кресленні задано зображення трикутника ABC і точки P, яка є зображенням його ортоцентра* (*точки перетину висот*). *Знайдіть істинну форму оригінального трикутника.*

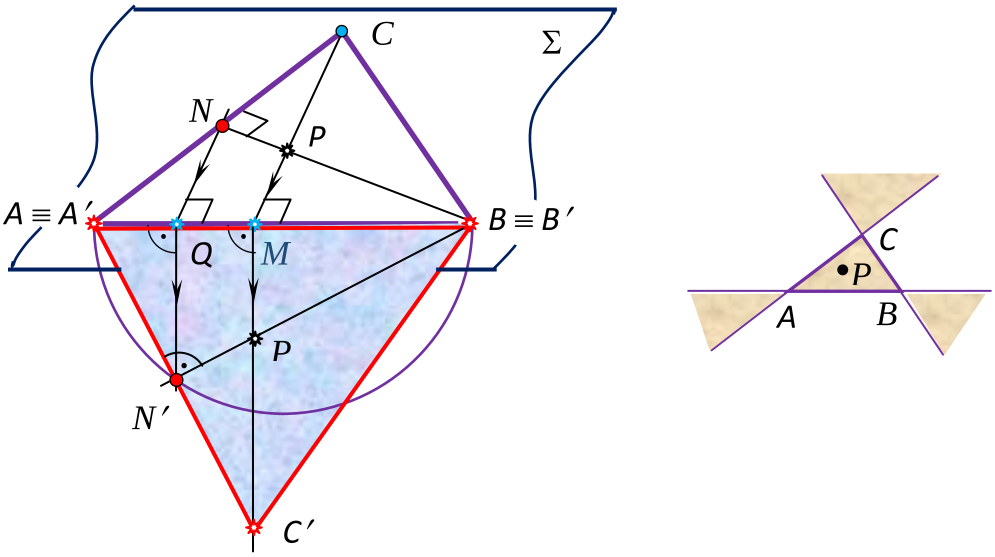


Рис. 12

Нехай на картинній площині справжньою довжиною відрізка $A'B'$ буде довжина його проекції AB. Змоделюємо оригінальну форму трикутника $A'B'C'$ методом його суміщення (повороту навколо прямої $AB \equiv A'B'$) із площиною проекцій (рис. 12). На зображенні пари точок A і A', B і B' зливаються ($A' \equiv A$, $B' \equiv B$), а тому залишається знайти суміщення C' лише третьої вершини C трикутника-зображення.

Відомо, що в конструктивній геометрії точка задається або власним зображенням у визначеному місці поля креслення, або шляхом візуального відшукання її місця розміщення на картинній площині в перетині побудованих зумовленим способом найпростіших ліній: двох прямих, прямої і кола, двох кіл.

Отже, щоб установити на рисунку розміщення точки $C'(C)$ після суміщення, потрібно дати кваліфіковану оцінку конструктивних можливостей двох первісно заданих метричних параметрів уявлюваної в русі плоскої фігури та, скориставшись доречними геометричними фактами, які прямо випливають з умови, накреслити ці дві визначальні для точки C' лінії.

Мислимо просто. Основа M висоти CM трикутника-зображення буде одночасно основою висоти оригінального трикутника ($M \equiv M'$). Тому пряма MC', перпендикулярна $A'B'$, є однією із двох визначальних у пошуку вказаних ліній. Крім того, помічаємо, що точка C' належить також променю $A'N'$. Отже, побудова точки C' зводиться тепер до побудови суміщення N' точки N, яка є вершиною прямого кута трикутника $A'N'B'$ (за умовою). Знайти справжню форму трикутника ANB, прямокутного в оригіналі, зовсім нескладно, адже, по-перше, з точки N' його гіпотенузу $A'B'$ видно під прямим кутом і, по-друге, висота $N'Q'$ цього трикутника, проведена з вершини прямого кута N' на гіпотенузу $A'B'$, паралельна висоті $C'M'$ трикутника $A'B'C'$. Тобто, точку N' слід шукати в перетині променя, що виходить із точки $Q \equiv Q'$ під кутом 90° до $A'B'$, та півкола, побудованого на $A'B'$ як на діаметрі. Провівши промінь $A'N'$ до перетину з MC', знайдемо точку C'.

Отже, справжню форму трикутника ABC ($A'B'C'$) на картинній площині встановлює закономірно змодельований трикутник ABC', кути якого вимірюються в натуральну величину, а сторони – з точністю до подібності.

Примітка. Задача має єдиний розв’язок, причому точка P', що зображає ортоцентр оригінального трикутника, має лежати всередині власної «області існування». Зокрема, вона може вибиратися будь-де всередині трикутника ABC.

Задача 5. *На проекційному кресленні трикутника ABC точка P є зображенням центра описаного навколо нього кола. Знайдіть істинну форму оригінального трикутника.*

Центр P' кола, описаного навколо трикутника $A'B'C'$, за наслідком із ***властивості*** кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною, є водночас ортоцентром трикутника $A_0'B_0'C_0'$, сторони якого – середні лінії трикутника $A'B'C'$ (рис. 13). Справді, на зображенні оригінального трикутника (рис. 13, *б*) серединні перпендикуляри сторін трикутника $A'B'C'$ – висоти трикутника $A_0'B_0'C_0'$. Тут: $P'A_0' \perp B_0'C_0'$ ($B_0'C_0' \parallel B'C'$); $P'B_0' \perp A_0'C_0'$ ($A_0'C_0' \parallel C'A'$); $P'C_0' \perp A_0'B_0'$ ($A_0'B_0' \parallel B'A'$). Звідси отримуємо, що для встановлення форми трикутника ABC достатньо сумістити відомим прийомом (задача 4) із площиною зображень трикутник $A_0B_0C_0$, адже $\Delta\ A'B'C' \backsim \Delta\ A'_0B'_0C'_0$, що безсумнівно.

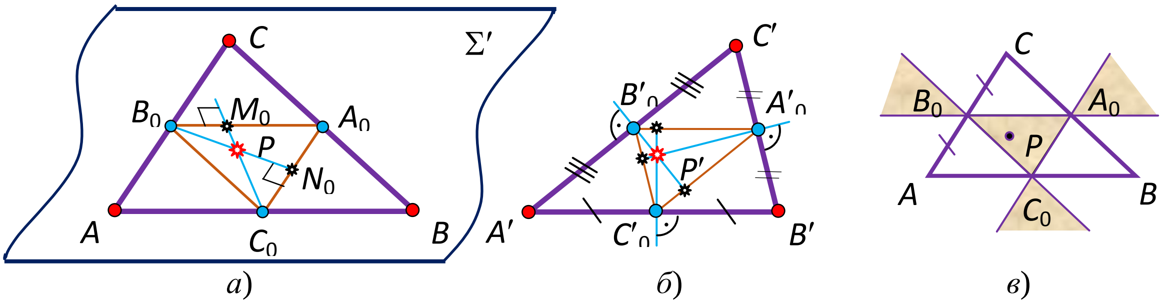


Рис. 13

Примітка. Область існування зображень P центра P' описаного навколо трикутника $A'B'C'$ кола є, разом із тим, областю існування зображень ортоцентрів трикутника $A'_0B'_0C'_0$.

Тепер повернемося до з а д а ч і 3.

2-*й* *спосіб розв'язання.* Було б помилкою знехтувати фактом, що процес суміщення геометричних фігур із картинною площиною передбачає щоразу чітко алгоритмізовану послідовність певних конструктивних кроків, властивих, очевидно, кожній метричній задачі, яка розв'язується цим методом.

Так, зрештою, можна встати на формальний шлях пошуку розв'язань багатьох цікавих задач, до чого не варто надміру заохочувати учнів. Тому поставимо запитання: «Чи не можна розв'язати цю задачу іншим, лише їй притаманним методом, в якому були б використані не формальні (хоч і обґрунтовані теоретично) прийоми операцій, а винятково помічені своєчасно внутрішні геометричні взаємозв'язки і співвідношення між заданими і шуканими геометричними фігурами?» Адже вміння оцінити просторову ситуацію, що склалася на ***умовному*** кресленні комплексу геометричних фігур, «побачити» й виділити в пошуку розв'язання серед інших визначальні зв'язки між фігурами чи їх елементами, якраз і можна назвати високою кваліфікацією виконавця побудов.

Хорошим орієнтиром (евристичним прийомом) у графічному пошуку перпендикуляра, опущеного з точки P' на пряму p', є гіпотетична можливість залучити у схему операцій із заданими найпростішими геометричними об'єктами площини Σ' елементи деякого трикутника, висоти якого можна побудувати, спираючись на метричну визначеність трикутника-зображення ABC, а отже, на метричну визначеність всієї площини зображень Σ.

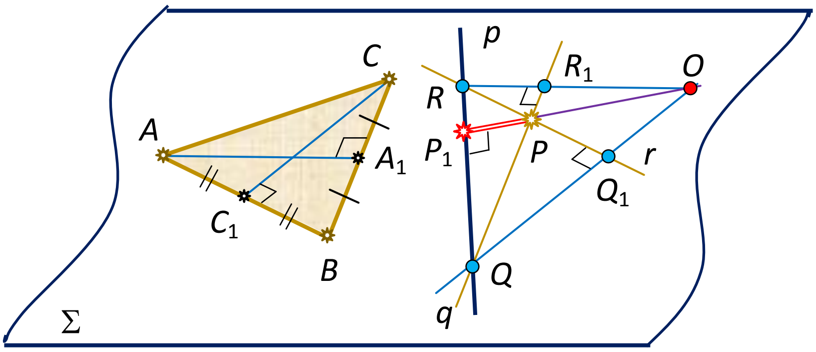


Рис. 14

Справді, оскільки трикутник ABC (рис. 14) в оригіналі рівносторонній, то його висоти є одночасно і медіанами, проведення яких просте. Отже, поділивши навпіл, приміром, сторони AB і BC, одержимо на зображені дві пари спряжених (взаємно перпендикулярних у просторі) напрямів: AA_1 і BC, CC_1 і AB. Проведемо тепер через точку P дві прямі q і r, паралельні відповідно BC і AB, та зафіксуємо точки перетину останніх із заданою прямою p: $Q = q \cap p$; $R = r \cap p$. Завершити побудову неважко, адже дві висоти трикутника PQR уже позиційно визначені на кресленні заданими спряженими напрямами: $QQ_1 \parallel CC_1$ і $RR_1 \parallel AA_1$. Далі шукаємо точку O перетину щойно проведених висот QQ_1 і RR_1 трикутника PQR та з'єднуємо її (як ортоцентр цього трикутника) прямою з точкою P до перетину із заданою прямою p у точці P_1. Відрізок PP_1 й буде шуканим перпендикуляром.

3-й *спосіб розв'язання*. Ідея даного прийому вирішення задачі полягає в попередньому моделюванні перпендикуляра з будь-якої вершини трикутника ABC (рис. 15) на довільну пряму, паралельну заданій прямій p й таку, яка перетинає сторони трикутника (нехай, для визначеності, це будуть точка A і пряма p_1, що містить вершину B). Якщо D – точка перетину p_1 зі стороною AC, то задача тепер уже зводиться до побудови висот трикутника ABD, що зробити зовсім неважко, оскільки ABC в оригіналі є рівностороннім трикутником.

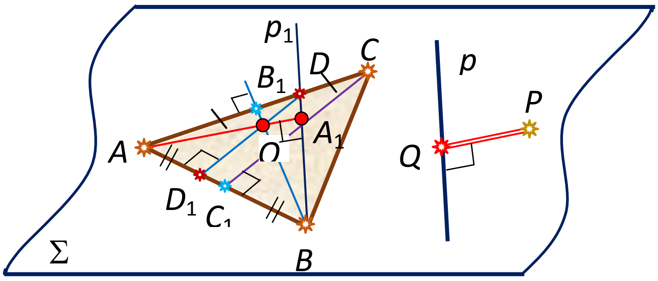


Рис. 15

Справді, BB_1 ($AB_1 = B_1C$) є одночасно висотою обох трикутників (ABC і ABD), а DD_1 – паралельною CC_1 ($AC_1 = C_1B$) за наслідком із властивості кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною. Через точку O перетину BB_1 і CC_1 проводимо третю висоту AA_1 трикутника ABD. Завершуємо задачу проведенням із точки P шуканого перпендикуляра PQ, який буде паралельним AA_1. Задачу розв’язано повністю.

Зауважимо таке. На наочних зображеннях тіл і їх комбінацій, без яких у стереометрії обійтися ніяк неможливо, деякі геометричні побудови, як-от: проведення перпендикулярних прямих і площин, вимірювання відстаней і градусної міри кутів, побудова багатокутників і кіл за відомими розмірами, розгортання поверхонь і т. ін., можна безпосередньо виконувати лише тоді, коли проекції цих фігур зображені на картинній площині без спотворення. За інших розташувань геометричних об’єктів указані побудови стають невиконуваними, тому застосовують допоміжні прийоми. Одним із ефективних засобів вирішення цієї проблеми є *просторове перетворення*, яке суміщає фігуру з картиною площиною, із наступним поверненням результату графічних дій у вихідне розміщення. Це перетворення, як ви розумієте, називають *поворотом навколо прямої*.

З а д а ч а 6. *Площина загального розташування задана рівнобедреним трикутником* ABC ($AC = BC$) *із кутом при вершині* C, *рівним* 120°. *Точку* M *узято на перпендикулярі до площини трикутника, проведеному у вершині* A. *Опустіть із точки* M *перпендикуляр на бічну сторону* BC *трикутника*.

1-й *спосіб розв'язання*. Аналізуючи умову задачі й рисунок до неї, бачимо, що шуканий перпендикуляр *MQ* до прямої *BC* є похилою до площини трикутника *ABC*. За теоремою про три перпендикуляри її проекція *AQ* теж розташовується перпендикулярно до *BC*. Тож задача зводиться до проведення у площині загального розташування висоти трикутника з вершини *A* на протилежну їй сторону *BC*. Очевидно, що точка *Q* (основа висоти) лежатиме на промені *BC* за межами відрізка, оскільки $\angle C = 120°$ – тупий (рис. 16).

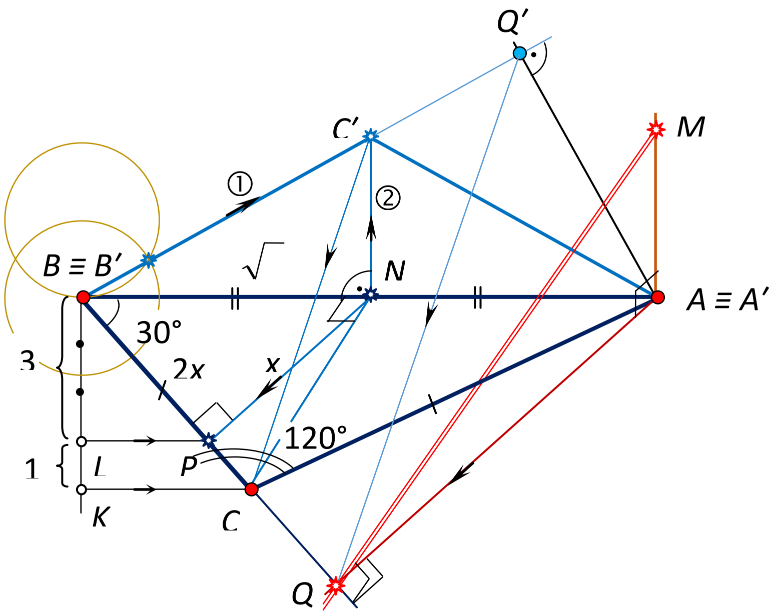


Рис. 16

Найбільш досвідчений учень передусім зверне увагу на трикутник *AQC*. Адже він прямокутний ($\angle Q = 90°$), а $\angle ACQ = 180° - \angle ACB = 60°$, тому $\angle CAQ = 30°$. Отже, оскільки катет прямокутного трикутника *CQ* лежить проти кута 30°, то він у два рази менший за його гіпотенузу *AC*. Матимемо $CQ = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}BC$. Залишається, пославшись на властивості паралельних проекцій, лише розділити навпіл відрізок *BC* і від точки *C* впродовж однойменного променя відкласти відрізок $CQ = \frac{1}{2}BC$.

2-й *спосіб розв'язання*. Однак у розділі «Стереометрія» часто користуються таким «неписаним» правилом: щоб змоделювати перпендикуляр із точки на пряму (чи на площину), досить обґрунтовано і просто зобразити інший перпендикуляр *із вдало обраної точки* на ту ж саму пряму (чи площину). Потім через задану точку провести пряму, паралельну побудованому перпендикуляру.

У нашому випадку надто зручно опустити перпендикуляр на сторону AC трикутника ABC наприклад із точки N, яка є серединою його основи AB. Справді, $\angle A = \angle B = 30°$, а CN – медіана, бісектриса і висота заданого трикутника. Скориставшись фактом, що у прямокутному трикутнику CNB ($\angle N = 90°$) кожен із його катетів є середнім геометричним між гіпотенузою і власною проекцією на гіпотенузу, одержимо: $BN^2 : NC^2 = BP : PC$. Звідси, позначивши $CN = x$, матимемо: $BC = 2x$, $BN = x\sqrt{3}$ і $BP : PC = (x\sqrt{3})^2 : x^2 = 3 : 1$.

Завершуємо розв'язання задачі в суто конструктивному стилі. Спочатку, пославшись на узагальнену теорему про пропорційні відрізки, розділимо сторону трикутника BC точкою P у відношенні 3 : 1 (від точки B). Далі з'єднаємо точки N і P відрізком, перпендикулярним BC. Та, врешті, через точку A паралельно NP проведемо проекцію похилої AQ, а потім й саму шукану похилу MQ.

Зараз задачу на побудову розв'язано ***графоаналітичним*** методом: 1) *формально-логічно* розраховано розташування на прямій BC основи P перпендикуляра NP до неї; 2) знайдений на цьому кроці результат дозволив *графічно* змоделювати зображенням проекцію похилої AQ за вже відомим її напрямом у площині трикутника ($AQ \parallel NP$); 3) нарешті, з'єднавши точки M і Q, одержано візуальний розв'язок задачі.

Неважко помітити, що з точки зору пошуку ***оптимального*** алгоритму дій на шляху до результату, надто важливо ретельно провести аналіз умови геометричної задачі та правильно виконаного наочного рисунка до неї та, за потреби, здійснити доречні добудови.

3-й *спосіб розв'язання*. А зараз скористаємося ***рухами***, дійдемо до результату виключно ***графічним*** методом – суто геометрично.

Отож уявимо собі, що тримаючи в руках трикутник ABC ми будь-як переміщуємо його у просторі й «кладемо» на площину зображень стороною AB ($A'B' \equiv AB$). Тепер обертанням точки $C \equiv C'$ навколо прямої $A'B'$ суміщаємо останню із площиною зображень. Побудувати точку C' циркулем і лінійкою у два кроки просто, якщо взяти до уваги, що в оригіналі $\angle A' = \angle B' = 30°$ (див. рис.). Далі як на площині реально опускаємо з точки A' на пряму $B'C'$ перпендикуляр $A'Q'$. Точка Q' розділяє відрізок $B'C'$ зовнішнім чином у тому ж відношенні, в якому точка Q ділить відрізок BC (відомо, що рухи зберігають відношення відрізків на прямій). Таким чином, й тут відшукання точки Q здійснюємо скориставшись узагальненою теоремою про пропорційні відрізки. Завершуючи побудову, сполучаємо точку Q із точками A і M й отримуємо шукані перпендикулярні до сторони трикутника BC похилу MQ та її ортогональну проекцію AQ.

Задачу розв'язано через обчислення, графоаналітично і графічно.

Ще в 40-х роках минулого століття проф. Четверухін М.Ф. наголошував: «Недоліком сучасного викладання є *надлишкова штамповка обчислювальних задач*, переважання у виборі таких задач, в яких розв'язання зводиться до підстановки у завчену формулу числових даних і до підрахунку результату. Схожі задачі мало дають учням у розумінні їх геометричного розвитку. Тож ці задачі, швидше за все, варто вважати арифметичними. *Отже, в області обчислювальної геометрії потрібно переглянути питання про підбір задач із тим, щоб підсилити їх геометричний зміст*».

4. ПЕРЕТВОРЕННЯ СИМЕТРІЇ У ПРОСТОРІ

У планіметрії розрізняють два різновиди перетворення симетрії. Проте на площині симетрію відносно точки, яку називають центральною, зручно трактувати як поворот навколо точки-центру на кут 180°. Оскільки у просторі перетворення повороту навколо точки відсутнє, центральна симетрія набуває цілковитої самодостатності.

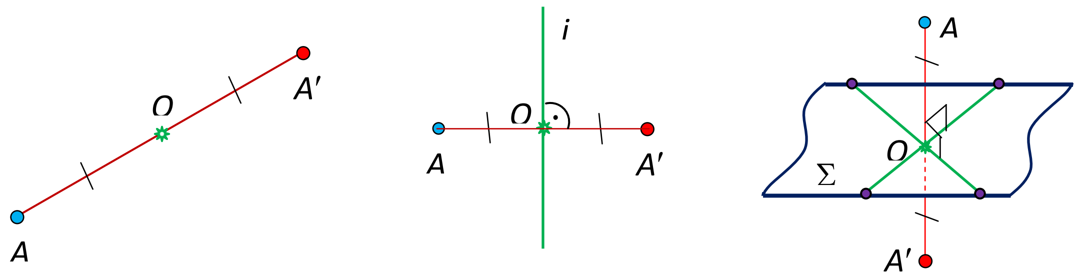
Що стосується симетрії відносно прямої, то це перетворення у просторі, що нами вже з'ясовано вище, є частинним випадком повороту навколо прямої та, знову ж таки, на кут 180°.

Однак, як і на площині, означають одне й інше перетворення у суто конструктивному стилі точнісінько так само.

1. Точки *A* і *A′* називаються ***симетричними відносно точки O***, якщо точка *O* ділить відрізок *AA′* навпіл (рис. 17, *а*). Тут точка *O* називається *центром симетрії*.

2. Точки *A* і *A′* називаються ***симетричними відносно прямої i***, якщо відрізок *AA′* перпендикулярний до прямої *i* й ділиться нею навпіл (рис. 17, *б*). Тут пряма *i* називається *віссю симетрії*.

Користуючись даними означеннями, зовсім неважко для кожного з цих перетворень скласти алгоритмічні схеми графічного моделювання фігур, симетричних заданим.



а) *б*) *в*)

Рис. 17

У просторі існує ще й 3-й різновид симетрії. Тож розглянемо його детальніше.

Нехай задано деяку площину Σ і точку *A*, яка не належить цій площині (рис. 17, *в*). Із точки *A* опустимо перпендикуляр *AO* на площину Σ і на його продовженні від точки *O* відкладемо відрізок *OA′*, який дорівнює *OA*. Точка *A′* називається ***симетричною*** точці *A* відносно площини Σ, а перетворення, яке кожну точку фігури F переводить у симетричну їй точку фігури F′, називається ***перетворенням симетрії*** *відносно площини* Σ. При цьому фігури F і F′ називаються *симетричними* відносно площини Σ.

Якщо точка *A* лежить у площині симетрії, то вважають, що вона у перетворенні переходить сама в себе. Коли перетворення симетрії відносно площини Σ переводить фігуру в себе, то фігура називається *симетричною відносно площини* Σ, а площина називається *площиною симетрії* цієї фігури.

Візуально продемонструвати перетворення симетрії відносно площини можна за допомогою дзеркала чи будь-якої іншої плоскої дзеркально-гладкої поверхні (рис. 18-20). Саме тому цей різновид симетрії ще називають ***дзеркальним відбиттям***.

Теорема 6.2. ***Просторова симетрія відносно площини є рух***.

Дано: Площину симетрії Σ; відрізок AB загального розташування;

$A'B'$ – результат перетворення відрізка AB.

Довести: $A'B' = AB$.

Доведення. Нехай Σ – площина симетрії, а точки A і B, які є кінцями відрізка AB загального розташування відносно цієї ж площини, у перетворенні симетрії переходять відповідно у точки A' і B' (рис. 21). Нехай також точка A більш віддалена від площини Σ, ніж точка B.

Тут площина $(AA'B'B)$ проекціювальна для відрізка AB. Його ортогональною проекцією на площину Σ буде відрізок O_1O_2. Тому, коли у площині $(AA'B'B)$ із точок B і B' опустити перпендикуляри BC і $B'C'$ на промінь AA' (провести прямі, паралельні O_1O_2), то чотирикутник $BCB'C'$ буде прямокутником, в якого протилежні сторони рівні: $BC = B'C'$ і $BB' = CC'$. За означенням симетрії $AO_1 = A'O_1$ і $BO_2 = B'O_2$. Звідси випливає, що різниці відстаней кінців відрізків AB і $A'B'$ до площини Σ теж рівні: $AC = A'C'$. Отже, ми отримали два прямокутні трикутники ABC і $A'B'C'$, які рівні за двома катетами. Звідси маємо, що $A'B' = AB$. Теорему доведено.

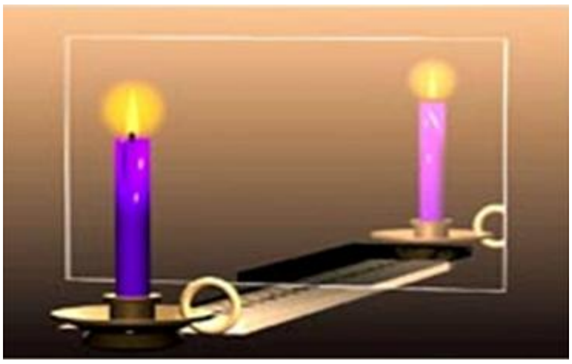


Рис. 18

Рис. 19

Рис. 20

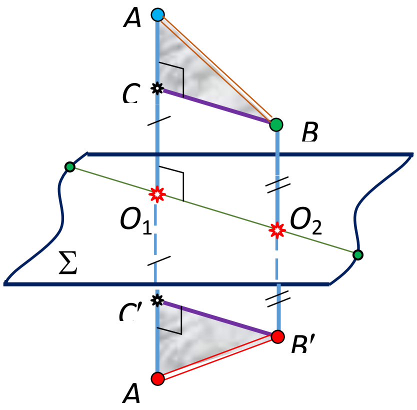


Рис. 21

Задача 7. *У прямокутній декартовій системі координат задано точки* $A(1; 2; 3)$, $B(0; –1; 2)$, $C(1; 0; –3)$. *Знайдіть точки, симетричні заданим відносно координатних площин.*

Розв’язання. Точка A', симетрична точці $A(1; 2; 3)$, лежить на прямій, перпендикулярній до площини xOy (паралельній осі Oz). Тому вона має ті самі координати x і y: $x = 1$, $y = 2$. Симетрична точка розташована на однаковій відстані від площини xOy, але з іншого боку від неї. Через що її координата z відрізняється лише знаком, тобто $z = –3$. Отже, точка A', симетрична точці A відносно площини xOy, матиме координати 1, 2, –3.

Для інших точок і решти координатних площин розв’язання аналогічне.

Прояви різновидів симетрії можна спостерігати в живій і неживій природі: у формі квітів й листків рослин, органів тварин, кристалічних тіл. Симетрію використовує людина у власній творчо матеріалізованій діяльності, зокрема, в будівництві та архітектурі, мистецтві, техніці тощо (рис. 22-23). «Симетрія є тією ідеєю, за допомогою якої людина впродовж століть намагалася осягнути і створити порядок, красу і досконалість» (Г. Вейль).

Рис. 22

Рис. 23

5. ПОДІБНІСТЬ ПРОСТОРОВИХ ФІГУР

Перетворення подібності у просторі має таке ж означення, як і на площині. А саме: перетворення фігури F у фігуру F′ називається ***перетворенням подібності***, якщо при такому перетворенні відстані між точками збільшуються або зменшуються в одне й те саме число раз. Це означає, що для будь-яких точок A і B фігури F й точок A' і B' фігури F′, в які переходять точки A і B, справедлива рівність: $A'B' = k{\cdot}AB$, де $k > 0$ – коефіцієнт подібності. Якщо $0 < k < 1$, то $A'B' < AB$, якщо ж $k > 1$ – $A'B' > AB$; у випадку $k = 1$ отримуємо ***рух***, який є *частинним випадком подібності*.

Як і на площині можна довести, що перетворення подібності переводить прямі у прямі, промені – у промені, відрізки – у відрізки та зберігає міру кутів між прямими. Такими самими міркуваннями, як і у пункті 2, можна довести, що перетворення подібності переводить площину у площину. Аналогічно, як на площині, фігура F називається ***подібною*** фігурі F′, якщо вони переходять одна в іншу перетворенням подібності.

Потрібно вирізняти такі властивостях подібності. Перетворення подібності:

1. *Рефлексивне*: усяка фігура подібна сама собі, тобто $F \backsim F$.

2. *Симетричне*: якщо $F_1 \backsim F_2$, то $F_2 \backsim F_1$.

3. *Транзитивне*: якщо $F_1 \backsim F_2$, а $F_2 \backsim F_3$, то $F_1 \backsim F_3$.

Ще одним частинним випадком подібності є ***гомотетія***. Як і на площині, гомотетія відносно центра O з коефіцієнтом гомотетії k – це перетворення, яке переводить довільну точку простору X у таку точку X', яка лежить на промені OX, що $\overrightarrow{OX'} = k{\cdot}\overrightarrow{OX}$, де $k \neq 0$ – коефіцієнт гомотетії. Розрізняють додатну ($k > 0$) і від’ємну ($k < 0$) гомотетії.

Як і на площині, перетворення гомотетії переводить пряму у паралельну їй пряму, промінь – у промінь, відрізок – у відрізок, зберігає відношення відрізків на прямій, а три точки, які не лежать на одній прямій, – у три точки, що не лежать на одній прямій, кут переводить у рівний йому кут (перпендикулярні прямі – в перпендикулярні прямі).

До того ж, ***перетворення гомотетії у просторі переводить довільну площину, яка не проходить через центр гомотетії, у паралельну площину*** (*або в себе, коли* $k = 1$).

Нехай O – центр гомотетії, а Σ – площина, яка не проходить через точку O (рис. 24). Візьмемо довільну пряму AB у площині Σ. Перетворення гомотетії переводить точку A в точку A' на промені OA, а точку B – у точку B' на промені OB, причому $\frac{OA'}{OA} = k$, $\frac{OB'}{OB} = k$, де k – коефіцієнт гомотетії. Звідси випливає подібність трикутників AOB і $A'OB'$. У подібних трикутників відповідні кути рівні: $\angle OBA = \angle OB'A'$, а отже, за ознакою паралельних прямих $AB \parallel A'B'$.

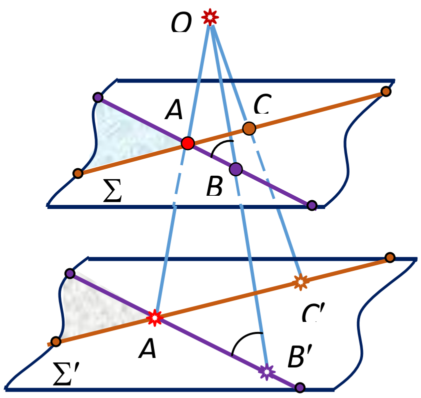


Рис. 24

Візьмемо тепер іншу пряму AC у площині Σ. Вона з тієї ж причини в результаті гомотетії перейде у пряму $A'C' \parallel AC$. Тому площина Σ у цій гомотетії переходить у площину Σ'. Оскільки дві прямі, що перетинаються у площині $\Sigma(AB \cap AC)$ паралельні двом прямим, які також перетинаються у площині $\Sigma'(A'B' \cap A'C')$, то за ознакою паралельності площин ці площини паралельні, що й потрібно було довести.

6. ВНУТРІШНЄ ПРОЕКЦІЮВАННЯ У ПРОСТОРІ

Доводячи теореми стереометрії, розв'язуючи задачі обчислювального характеру досить часто випадає будувати перерізи тривимірних тіл площиною загального (або частинного) розташування. Такими тілами є переважно піраміди і призми.

Суть постановки змістово значущої задачі на перерізи полягає в тому, щоб *побудувати зображення фігури перерізу*, маючи зображення самого багатогранника й умови, які встановлюють (задають) на проекційному кресленні січну площину. Висновком задачі може бути вимога обчислити або площу вказаного перерізу, або відношення, в якому січна площина розділяє об'єм (поверхню) багатогранника, або відстань від деякої його точки (вершини) до площини перерізу тощо. Тут накреслення фігури перерізу буде проміжним, допоміжним етапом дій. Для досягнення кінцевої мети істотно мислено «бачити», уявляти достовірну форму фігури перерізу та її розташування відносно визначальних елементів багатогранника, а тому процес пошуку розв'язання задачі як на конструктивному, так і на обчислювальному етапах має бути глибоко обміркованим.

Уявимо деякий опуклий багатогранник – піраміду або призму – і яку-небудь площину. Не секрет, що при будь-якому взаємному розташуванні у просторі цих фігур *перерізом* (якщо такий існує) *матимемо плоский, опуклий і замкнений багатокутник*. Його вершинами є точки перетину січної площини з ребрами багатогранника, а сторонами – відрізки перетину площини із гранями багатогранника. Отже, в побудові перерізу, незалежно від змістовних логічно незаперечних пояснень дій виконавця, випадає шукати визначене число раз або вершини шуканого багатокутника, або його сторони. Проте названі задачі в геометрії якраз і є **основними позиційними**.

Уже на цьому етапі міркувань доречно чітко вирізняти два методи розв'язування задачі на переріз багатогранника площиною: **1) метод ребер**, *коли будують вершини шуканого багатокутника як точки перетину ребер багатогранника із заданою площиною*; **2) метод граней**, *коли будують сторони цього ж багатокутника як лінії перетину граней багатогранника із заданою площиною.* На практиці більш зручно користуватися ***змішаним методом***, який з урахуванням умов задавання січної площини певною мірою спрощує перебіг графічних операцій і пришвидшує результат.

Розв'язуючи на проекційному кресленні позиційну задачу на побудову перерізу, користуються *внутрішнім центральним* чи *паралельним проекціюванням* на основну площину. Нагадаємо, в найпростішому випадку точка простору A' на картинній площині вважається позиційно визначеною, якщо задано зображення не лише самої точки (A), а й її проекції на основну площину (A_1), які пов'язані між собою променем AA_1 (шпицею) внутрішнього проекціювання. Якщо ж на картинній площині вже наявне зображення піраміди чи призми, то за основну, як правило, вибирають площину основи багатогранника. Тоді бічні ребра і грані стереометричного тіла обов'язково будуть проекціювальними у внутрішньому проекціюванні на площину основи. За цих умов, для задавання точки на поверхні просторової фігури, достатньо задати зображення точки і вказати словесно (символічно) ребро (грань) її розміщення. Далі, щоб подати зображення основи точки, потрібно лише пригадати збиральну властивість слід-проекцій проекціювальних прямих і площин (ребер і граней) та скористатися відповідною шпицею.

Продемонструємо методи ребер і граней прикладами задач, акцентувавши увагу на їх внутрішню спорідненість, адекватність логіки міркувань у діях, інваріантність підходів у досягненні результатів.

Задача 8. *Виконайте зріз трикутної піраміди $SA_1B_1C_1$ площиною, яка проходить через задані точки L і M, що лежать на двох бічних гранях піраміди, та точку N, котра належить площині її основи.*

На картинній площині (рис. 25) апарат внутрішнього центрального проекціювання цілком визначено точкою S, площиною основи $A_1B_1C_1$ і в'язкою променів (шпиць), які виходять із точки S. Тут LMN називають інколи трикутником, яким задається площина перерізу, а $L_1M_1N_1$ – його основою. Основи L_1, M_1, N_1 точок L, M, N є відповідно точками перетину із площиною основи променів внутрішнього проекціювання (шпиць) SL, SM і SN ($L_1 \in A_1B_1$, $M_1 \in B_1C_1$, $N \equiv N_1$).

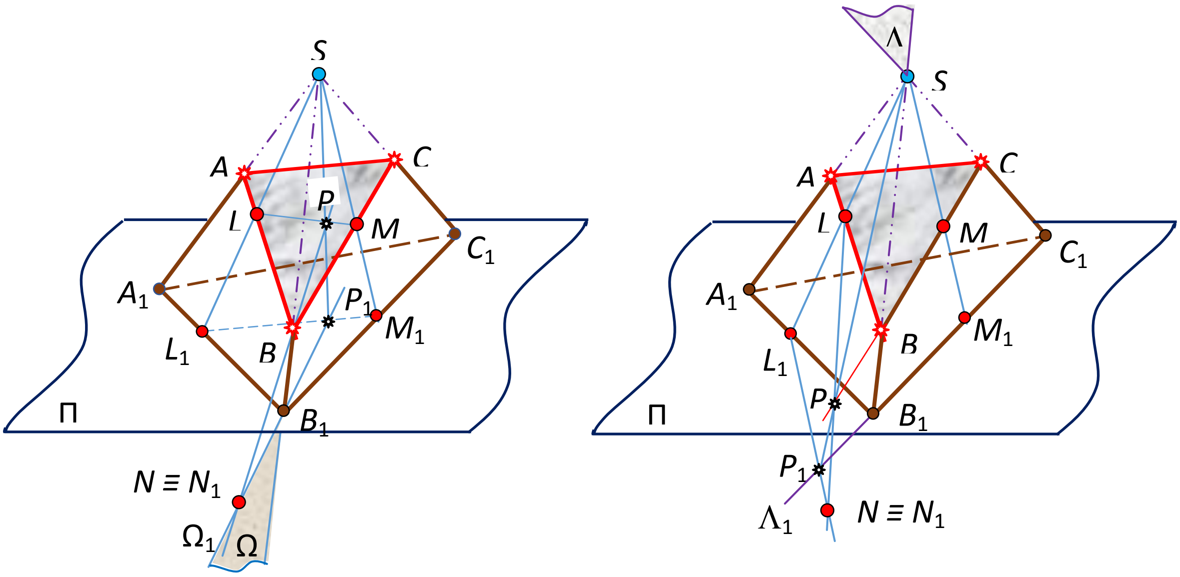
Залежно від можливого розташування вершин трикутника, яким задано переріз, січна площина $\Sigma(LMN)$ могла б бути паралельною тій чи іншій грані піраміди або ж паралельною лише одному її ребру, а також такою, яка перетинає площину основи або ж не перетинає її. Найпростішим є той випадок, коли всі бічні ребра мають із площиною перерізу спільні точки, тобто коли шукана фігура перерізу в межах зображення багатогранника розташовується вище основи.

На початку наголошуємо, *що в* **методології** *навчання конструктивної стереометрії важливі* **не тільки** *і* **не стільки** *навички механічного виконання операцій креслярськими інструментами на площині зображень, скільки* **розуміння** *геометричної суті визначеної умовою конструкції*, **усвідомлення *конкретної просторової ситуації*** *і, як наслідок,* **уміння** *правильно та змістовно* **обґрунтувати** *кожний крок у сконструйованому ланцюжку дій і обов'язкових просторових перетворень.*

Розпочнемо відшукання зумовленого перерізу, наприклад, **методом ребер** (рис. 25, *а*). Аналізуючи, оцінюючи мислено просторову ситуацію, помічаємо, що фігура перерізу виявиться цілком визначеною, якщо на проекційному кресленні буде знайдено точку B перетину проекціювального ребра піраміди SB_1 із січною площиною $\Sigma(LMN)$.

Отож, діємо так: **1)** через ребро SB_1 проведемо проекціювальну площину-посередник $\Omega(SB_1, N \equiv N_1)$; **2)** побудуємо пряму $PN(P_1N_1)$ перетину площин Σ і Ω (тут другу спільну точку $P(P_1)$ названих площин знаходимо в перетині прямої $LM(L_1M_1)$ площини Σ із площиною-посередником $\Omega(\Omega_1)$); **3)** зафіксуємо точку $B(B_1)$ як спільну точку прямих SB_1 і PN. Нарешті, провівши промені BL і BM відповідно у гранях SA_1B_1 і SB_1C_1, знайдемо дві інші вершини трикутника перерізу ABC: $A = BL \cap SA_1$, $C = BM \cap SC_1$.

Цього ж результату можна досягти **методом граней** (рис. 25, *б*). Тож знайдемо, приміром, лінію перетину грані SB_1C_1 із площиною $\Sigma(LMN)$. Оскільки одну спільну точку $M(M_1)$ площин $\Sigma(LMN)$ і $\Lambda(SB_1C_1)$ визначено умовою, а площина Λ – проекціювальна, то скориставшись збиральною властивістю її слід-проекції $\Lambda_1 \equiv B_1C_1$, легко знаходимо ще одну спільну точку $P(P_1)$ цих площин, а отже їх лінію перетину $PM(P_1M_1)$: **1)** $P_1 = L_1N_1 \cap \Lambda_1$; **2)** SP_1; **3)** $P = SP_1 \cap LN$. Пряма PM визначає відразу дві вершини B і C шуканого трикутника перерізу, а третю вершину A знаходимо як у попередньому випадку: $A = SA_1 \cap BL$.



а) *б)*

Рис. 25

Зауважимо, що було б не зовсім коректно стверджувати, нібито в першому варіанті розв'язання задачі побудову виконано строго методом ребер. Адже шукані вершини A і C одержано як інциденції (відповідно ребер піраміди SA_1 і SB_1) уже визначених точкою B прямих (BL і BM) перетину площини $\Sigma(LMN)$ із гранями SA_1B_1 і SB_1C_1 цієї ж піраміди. Аналогічно, у другому варіанті, є сумнівною строгість методу граней, бо алгоритм дій у тому самому (до дрібниць) графічному представленні можна було б перефразувати і так: **1)** через ребра SB_1 і SC_1 (одночасно) проведемо проекціювальну площину-посередник $\Lambda(SB_1C_1)$; **2)** побудуємо пряму $MP(M_1P_1)$ перетину площин $\Sigma(LMN)$ і $\Lambda(SB_1C_1)$; **3)** знайдемо точки $B(B_1)$ і $C(C_1)$ перетину прямої MP із ребрами SB_1 і SC_1 відповідно. Наведеною щойно процедурною схемою, як неважко здогадатися, індукується метод ребер.

Таким чином, у виборі методу розв'язання задачі багато чого залежить від постановки питання виконавцем побудови, і тут не суть важливо, що буде покладено в основу конструкції – задачу на перетин прямої із площиною чи задачу на перетин двох площин, – результат буде той самий, оскільки основні позиційні задачі тісно переплетені між собою, нероздільно пов'язані єдиним методом – посередників.

Задача 9. *Побудуйте багатокутник перерізу правильної чотирикутної призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через точку M на бічному ребрі BB_1 паралельно діагоналі основи AC та мимобіжній із нею діагоналі призми BD_1.*

Згідно з ознакою паралельності прямої та площини, визначену умовою задачі січну площину Σ (рис. 26) потрібно перезадати на проекційному кресленні двома прямими, які перетинаються. При тому одну із прямих, наприклад пряму m, розташуємо паралельно діагоналі призми BD_1, а іншу n – паралельно діагоналі $AC(A_1C_1)$ її верхньої (нижньої) грані. Отже, проведемо в діагональному перерізі призми BB_1D_1D через точку M пряму m, паралельну BD_1, і відмітимо точку $N \equiv N_1$ її перетину з B_1D_1; через точку $N \equiv N_1$ у площині нижньої основи призми проведемо пряму n, паралельну A_1C_1.

Пряма n є слідом площини $\Sigma(m \cap n)$ на площині основи $\Pi(A_1B_1C_1D_1)$, а точки Q і R її перетину з ребрами A_1D_1 і D_1C_1 – двійкою вершин багатокутника перерізу. Оскільки точка M на ребрі BB_1 відома з самого початку, залишається відшукати на зображенні точки P і T перетину ребер AA_1 і CC_1 із площиною Σ. З тим, щоб шлях побудов був якомога коротким, скористаємося у внутрішньому проекціюванні площиною-посередником $\Omega(\Omega_1)$, яка вміщує обидва ребра AA_1 і CC_1 й задається ними. Пряма $MN(M_1N_1)$ площини Σ перетинає площину $\Omega(\Omega_1)$ у точці $K(K_1 \equiv O_1)$, а пряма k $(k_1 \equiv A_1C_1)$, яка проходить через точку K паралельно QR, є лінією перетину площин Σ і Ω, а отже, належить площині Σ і висікає на ребрах AA_1 та CC_1 останні дві вершини P і T багатокутника перерізу $MPQRT$.

Привертаємо увагу до факту, що наведені міркування більше притаманні методу ребер, адже ввівши в розгляд проекціювальну площину-посередник $\Omega(AA_1 \parallel CC_1;\ A_1C_1 \equiv \Omega_1)$, ми скористалися ОПЗ-1 стосовно вказаних ребер призми. Так само успішно можна було б розпочати побудову з відшукання лінії перетину січної площини Σ і, скажімо, грані AA_1D_1D (чи DD_1C_1C), яка вже має із Σ одну спільну точку $Q \equiv Q_1$ $(R \equiv R_1)$ за побудовою. Оскільки площина

$\Lambda(AA_1D_1D)$ – проекціювальна ($\Lambda_1 \equiv A_1D_1$), для відшукання ще однієї точки $G(G_1)$, що належить площинам Σ і Λ, зручно у площині Σ рисунково вдало ввести допоміжну пряму, наприклад $MF(M_1F_1)$, де $F(F_1) \in QR(Q_1R_1)$, і побудувати її перетин із проекціювальною площиною Λ. Пряма QG на прямих AA_1 і DD_1 висіче відповідно точки $P(P_1 \equiv A_1)$ і $H(H_1 \equiv D_1)$, що й призведе до остаточної побудови багатокутника перерізу $MPQRT$.[1]

Очевидно, що такий хід міркувань у розв'язанні задачі властивий методу граней, адже побудова лінії перетину площини лівої грані паралелепіпеда із січною площиною цілком позиційно визначає на кресленні шуканий багатокутник перерізу $MPQRT$. Той факт, що задача на перетин двох площин Σ і Λ включає в себе задачу на перетин прямої $MF(M_1F_1)$ із площиною Λ, на такому рівні розуміння суті питання вже варто вважати природним явищем.

Зауважимо, розв'язану задачу на побудову можна легко переформулювати в задачу на обчислення (наприклад: « … обчисліть площу фігури перерізу … »), додавши в умові такі метричні параметри: ребро в основі призми рівне a, бічне ребро – $1{,}5a$, а $BM : MB_1 = 1 : 4$.

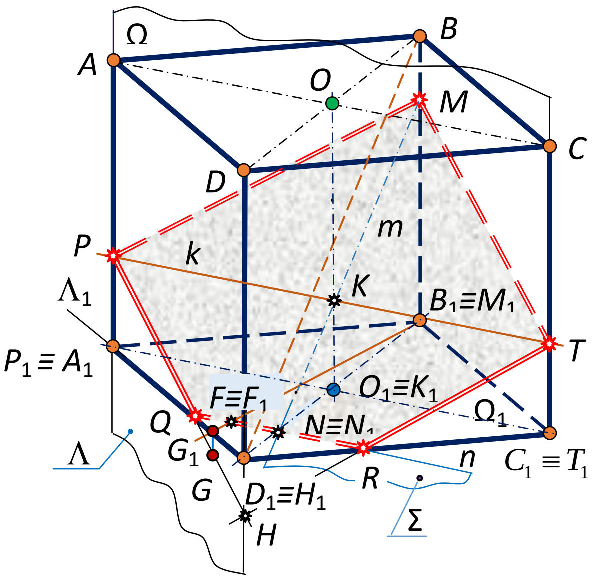


Рис. 26

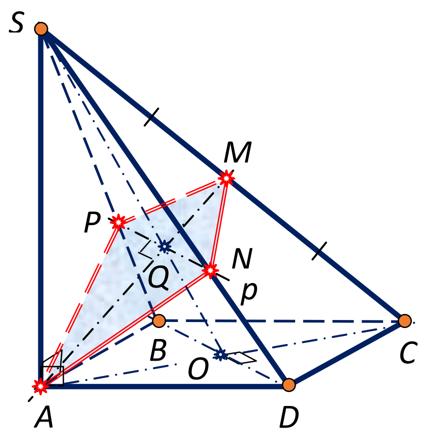


Рис. 27

А зараз розв'яжемо задачу на обчислення, яка за своїми геометричними формами і змістом не може бути названа оригінальною чи, навіть, «із

[1] Як спростити побудову, врахувавши, що діагональний переріз BB_1D_1D призми є її площиною симетрії? Дослідіть форму фігури перерізу, змінюючи місце точки M на ребрі BB_1.

родзинкою»; це – задача, на вістрі якої є лише переріз тіла нестандартно заданою площиною (як і у щойно розв'язаній задачі).

Задача 10. *Основою піраміди SABCD є ромб ABCD, в якому AC = a, BD = = b. Бічне ребро SA перпендикулярне площині основи. Через точку A і середину ребра SC проведено площину, паралельну діагоналі BD. Знайдіть площу фігури перерізу, якщо* $SA : AC = 2\sqrt{2} : 1$.

Нехай *SABCD* – задана піраміда (рис. 27). Площина перерізу Σ визначається двома точками (прямою *AM*) та зумовленим розташуванням відносно прямої *BD*. Якщо *M* **–** середина ребра *SC*, то *AM* – медіана трикутника *SAC*. Ще одна його медіана *SO* – відрізок, спільний для перерізів піраміди *SAC* і *SBD*, – перетинає *AM* у точці *Q* і $SQ = \frac{2}{3}SO$. Проведемо через точку *Q* пряму *p*, паралельну *BD*, чим **перезадамо** площину Σ двома прямими, які перетинаються: $\Sigma(p \cap AM)$. За другою ознакою належності прямої площині пряма *p* лежить у площині трикутника *SBD* і перетинає ребра піраміди *SB* і *SD* в точках *P* і *N*, які разом із точками *A* і *M* є вершинами фігури перерізу *APMN*.

У наведених умовиводах метод посередників нібито не простежується. Проте залучення до справи відрізка *SO* має в цьому сенсі своє тлумачення. Адже можливий ще й такий варіант міркувань у поясненнях. У трикутних пластинок *SAC* і *SBD* уже є одна спільна точка *S*. Ще одну таку ж точку *O* знайдемо за допомогою площини-посередника Λ(*ABCD*), яка в перетині із пластинками визначає відповідно відрізки *AC* і *BD*. Останні у власному перетині дають точку *O*. Тут ми посилаємося до ОПЗ-2 (метод граней). Можна було б також говорити про точку *Q*, що є перетином прямої *AM* із площиною трикутника *SBD*. Такий підхід до відшукання точки *Q* передбачає задіяння в ролі посередника площини трикутника *SAC*, яка в перетині із площиною трикутника *SBD* висікає пряму *SO*. Тут уже спрацьовує алгоритм ОПЗ-1 (метод ребер). Таким чином, хочемо ми скористатися усталеним підходом в обґрунтуваннях рисункової діяльності, чи ні, все ж *природна сутність методу посередників у позиційних задачах на побудову* спільних елементів (*інциденцій*) фігур незаперечна.

Аналізуючи далі, помічаємо, що $AM \perp PN$ (спрацьовує обернена теорема про проекціювання прямого кута: $PN \parallel BD$, AO – проекція AM на площину основи піраміди), MO – середня лінія трикутника SAC, а $\Delta SPN \backsim \Delta SBD$. Але ж $AO = \frac{a}{2}$ і $SA = 2\sqrt{2}\,a$. Тому, по-перше, $MO = \frac{1}{2}SA = \sqrt{2}a$, а $AM = \sqrt{AO^2 + MO^2} = \frac{3}{2}a$ (цього ж самого результату дійдемо взявши до уваги, що у прямокутному трикутнику SAC $AM = \frac{1}{2}SC$). І, по-друге, $\frac{PN}{BD} = \frac{SQ}{SO} \Rightarrow$ $\Rightarrow PN = \frac{BD \cdot SQ}{SO} = \frac{2}{3}b$. Остаточно матимемо: $S = \frac{1}{2}AM \cdot PN = \frac{ab}{2}$.

Алгоритмічна схема

$$S = \frac{1}{2}AM \cdot PN \leftrightarrow \begin{cases} AM = \sqrt{AO^2 + MO^2} \leftrightarrow \begin{cases} AO = \dfrac{AC}{2} \leftrightarrow AC = a, \\ MO = \dfrac{SA}{2} \leftrightarrow SA = 2\sqrt{2}AC \leftrightarrow AC = a; \end{cases} \\ PN = \dfrac{BD \cdot SQ}{SO}\ (\Delta SPN \backsim \Delta SBD) \leftrightarrow \begin{cases} BD = b, \\ SQ = \dfrac{2}{3}SO\ (Q = SO \cap AM). \end{cases} \end{cases}$$

Задача 11. *Задано паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте його переріз площиною Σ, яка проходить через точки X, Y і Z, що належать лівій, передній і нижній граням паралелепіпеда відповідно.*

З аналізу умови задачі (рис. 28) робимо висновок, що ключем до її розв’язання може бути встановлення на зображенні точки перетину із січною площиною Σ прямої BB_1, яка вміщує однойменне ребро багатогранника $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Справді, точки $X(X_1)$ і $Y(Y_1)$, які є вершинами трикутника XYZ січної площини Σ, належать суміжним граням паралелепіпеда AA_1B_1B і BB_1C_1C зі спільним ребром BB_1. Отже, якщо уявити собі, що в перетині BB_1 і Σ буде знайдена їх спільна точка M, то провівши прямі MX і MY у вказаних гранях, відразу одержимо чотири вершини K, L і P, Q багатокутника перерізу. Кожен знає, що протилежні грані паралелепіпеда попарно паралельні, тому за 1-ю властивістю паралельних площин матимуть місце такі розташування решти сторін багатокутника перерізу: $KT \parallel PQ$, $QR \parallel LK$ і $LP \parallel TR$.

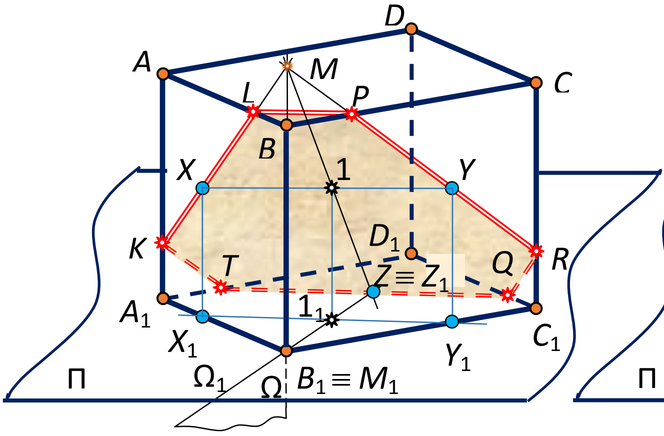


Рис. 28

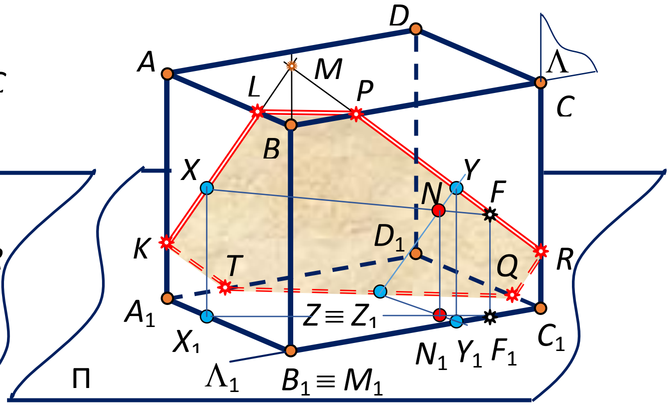


Рис. 29

Залишається шляхом логічних міркувань з'ясувати покроковий перелік закономірних операцій, з яких складається правило-орієнтир побудови точки M.

Оскільки пряма BB_1 проекціювальна, то її слід-проекція має збиральну властивість і основою точки M буде точка B_1 ($B_1 \equiv M_1$). Проведемо через шукану точку M у площині Σ деяку (загалом, будь-яку) пряму MZ, розпочавши дії моделювання з основи паралелепіпеда, отже, M_1Z_1 – основа MZ. Далі скористаємося поняттям «належності» найпростіших геометричних фігур. Пряма належить площині, коли дві її точки належать цій площині. Точку $Z \equiv Z_1$, яка є однією із визначальних для площини перерізу, ми завідомо обрали точкою прямої MZ; за допомогою проекціювального променя ($1_1 \rightarrow 1$) на прямій $XY(X_1Y_1)$, яка теж належить площині Σ, фіксуємо іншу із двох шуканих точок $1(1_1)$. Нарешті, в перетині прямих BB_1 і $Z1$ знаходимо точку M.

Зауважимо, що зараз у наведеній схемі виконання конструктивних операцій знову задіяно ОПЗ-1, точніше – їй властивий алгоритм дій у три кроки. Тут $\Omega(BB_1 \cap B_1Z_1)$ виконує роль площини-посередникам, а $Z1$– пряма перетину Ω із заданою січною площиною.

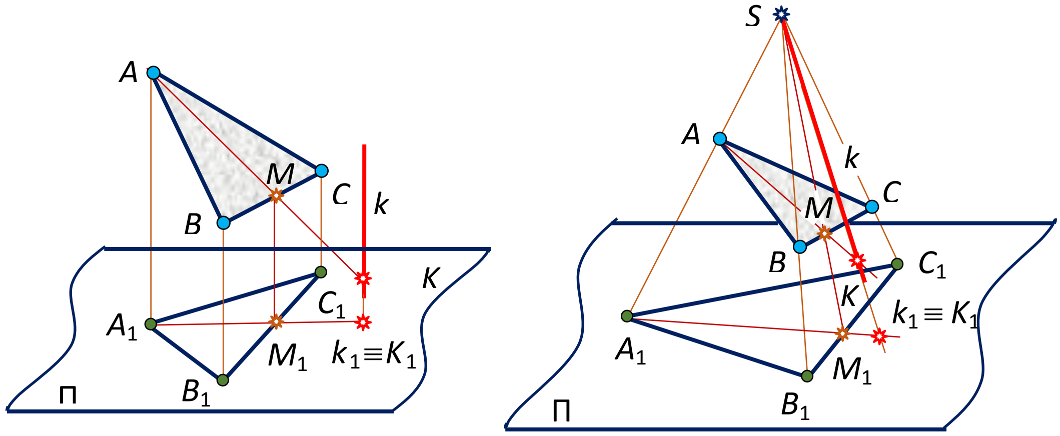
Так само успішно можна було б розпочати побудову з відшукання лінії перетину січної площини Σ і, скажімо, грані BB_1C_1C, яка вже має із Σ одну спільну точку $Y(Y_1)$ за умовою (рис. 29). У цій ситуації площина грані $\Lambda(BB_1C_1C)$ – проекціювальна, а збиральною властивістю володіє її вироджена проекція $\Lambda_1 \equiv B_1C_1$. Тому, для побудови ще однієї спільної точки F площин Σ і Λ, зручно у площині Σ рисунково вдало обрати деяку пряму, наприклад $XN(X_1N_1)$, де $N(N_1) \in YZ(Y_1Z_1)$, а потім побудувати перетин цієї прямої із проекціювальною площиною Λ: $F(F_1) = XN(X_1N_1) \cap \Lambda(\Lambda_1)$. Пряма $YF(Y_1F_1)$ висікає на прямій BB_1 ту саму точку $M(M_1)$. Завершувати побудову багатокутника перерізу *KLPQRT* слушно за описаним вище сценарієм.

6.1. Побудовна оптимізація методу внутрішнього проекціювання

Знайомство через задачі із просторовим перетворенням «внутрішнє проекціювання за напрямом бічних ребер» уже відбулося. Будуючи перерізи тіл площиною із застосуванням цього перетворення, в якості базової обов'язково обирають одну із двох ОПЗ. Ці задачі тісно споріднені, кожна з них уміщує в собі іншу. Причому, в ОПЗ-1 пряма займає не будь-яке, а пріоритетно частинне розташування, а саме, вона з поважних причин проекціювальна на обрану площину основи стереометричного тіла. Отже, метод в його класичному поданні обов'язково передбачає наявність скінченого числа прямих k, які належать пучку променів (шпиць) внутрішнього проекціювання, що визначається на площині зображень або вершиною піраміди (конуса), або напрямом бічних ребер (твірних) призми (циліндра).

Нехай *площина загального розташування* Λ *зображена на проекційному кресленні трьома точками* $A(A_1)$, $B(B_1)$ *і* $C(C_1)$. *Проекціювальна пряма* k, *як відомо, цілком визначається своєю виродженою проекцією* k_1. *Потрібно побудувати точку* $K(K_1)$ *перетину прямої* $k(k_1)$ *із площиною* $\Lambda(ABC(A_1B_1C_1))$.

Шлях до розв'язання цієї простої задачі має варіації в поясненнях. Зокрема, оскільки основа K_1 шуканої точки K відома (накреслена) – вона, завдяки збиральній властивості слід-проекції k_1 проекціювальної прямої, збігається зі слід-проекцією прямої ($K_1 \equiv k_1$), то зваживши, що три задані (A, B і C) та одна шукана (K) точки належать одній і тій самій площині $\Lambda(ABC)$, зведемо задачу до відшукання точки M перетину, скажімо, прямих BC і AK. Основа M_1 узятої точки легко будується: $M_1 = B_1C_1 \cap A_1K_1$. За цим дійством, провівши проекціювальний промінь (шпицю) $M_1M \parallel A_1A$ (рис. 30, *а*) чи SM_1 (рис. 30, *б*), знаходимо точку M: $M = BC \cap M_1M$ ($M = BC \cap SM_1$). Нарешті, точку K фіксуємо в перетині прямої k із прямою AM : $K = k \cap AM$.



а) *б)*

Рис. 30

Та все таки, у практичному застосуванні до конкретного стереометричного тіла вже в цьому дослідженні ми користувалися дещо переформульованим (помітно простішим у розумінні) правилом-орієнтиром достовірно обґрунтованої побудови точки K: **1**) через шукану точку $K(K_1)$ у заданій січній площині проводили будь-яку, але розсудливо обрану, раціонально розташовану на проекційному кресленні пряму лінію (наприклад AM); **2**) як результат, знаходили точку перетину задіяної прямої з визначеним в умові ребром k: $K = k \cap AM$. Здавалося б, як можна провести деяку пряму через ще не побудовану (і тому не накреслену) точку K у площині Λ? Виявляється, що можна, оскільки зображення і площини, і проекціювальної прямої на картинній площині позиційно визначені: площина Λ визначається трійкою неколінеарних точок $A(A_1)$, $B(B_1)$ і $C(C_1)$, а ребро k – своєю виродженою проекцією k_1, яка містить основу K_1 шуканої точки K. Тому A_1K_1 – основу прямої, про яку йдеться в першому пункті, провести нескладно, а AK будується за умови, що пряма належить площині тоді, коли дві її точки належать цій площині.

Так елементарно, не апелюючи явно до методу посередників, трактується й подається ОПЗ-1 в частинному задаванні прямої *k* і, на цій основі, – **геометрична суть методу внутрішнього проекціювання** в цілому.

Проте на практиці, як з'ясувалося, лише одного вміння будувати точку перетину бічного ребра (твірної) стереометричного тіла із площиною перерізу недостатньо для *конструктивно мало затратного, ефективного* виконання графічних операцій в комплексі, тому ми ставимо завдання суттєво *скоригувати і систематизувати процес роботи над кресленням*, прискорити, оптимізувати його у випадку, коли для досягнення кінцевого результату потрібно чималенько раз розв'язувати розглядувану зараз базову задачу.

З тим, щоб краще змоделювати процес і оформити його у вигляді простого за змістом правила-орієнтиру дій, свідомо вдамося до **узагальнюючого** методу посередників, яким він, звісно, є не тільки для методу внутрішнього проекціювання, а й для його особливого частинного випадку – методу слідів.

Усі площини-посередники вибірково названих в аналізі проекціювальних бічних ребер, які братимуть активну участь у планових побудовах вершин багатокутника перерізу, обов'язково будемо задавати в кожному окремому випадку однією і тією ж самою точкою площини перерізу і, почергово, відповідним фіксованим бічним ребром багатогранника. Таким чином, на другому етапі реалізації алгоритму дій «у три кроки», в побудові прямої перетину двох площин, одна спільна точка даної січної площини і площини-посередника, що вводиться, дотепно вибирається виконавцем. Іншу (другу) – потрібно знайти. Тепер уже, цю останню шукатимемо в перетині деякої раціонально обраної прямої із площини перерізу з кожною із площин-посередників. Тут щоразу будимо розв'язувати задачу на перетин прямої загального розташування із площиною, яка завідомо є проекціювальною, тобто графічне вирішення останньої очевидне в розумінні, а також просте на моделі – в її рисунковій реалізації.

Отже, **сутність *реконструйованого* методу внутрішнього проекціювання** *в наочно-образному вираженні полягає в тому, що відшукання вершин* *багатокутника перерізу зводиться до розв'язання певного числа раз задачі на побудову точки перетину однієї і тієї ж* (*як правило*) *прямої заданої площини перерізу з кожною із площин-посередників, які послідовно перебирають усі визначені* («*активні*») *бічні ребра, обертаючись навколо проекціювальної прямої* (шпиці), *яка містить фіксовану точку заданої площини*.

Підсумовуючи, констатуємо: сформований і відпрацьований комплексний, системний підхід у вирішенні важливої технологічної проблеми *оптимізації в побудові багатокутника перерізу стереометричного тіла площиною стає можливим у реалізації завдяки наступним двом чітко змодельованим і зримо контрольованим чинникам:* **1)** ***перетином січної площини з визначеною сукупністю*** **(*пучком*)** ***площин-посередників є пучок прямих, які виходять з одного центра*** **– точки площини перерізу,** *визначеної виконавцем*; **2)** ***сукупність «других» точок ліній перетину заданої площини і площин-посередників належить одній і тій самій*** **прямій січної площини*, яка, знову ж таки,*** *вибирається виконавцем побудови.*

Це у значній мірі ***звільняє*** *метод внутрішнього проекціювання від одного з найбільш помітних його недоліків, а саме* **– кардинально зменшує** на рисунку-моделі **число ліній побудови,** а отже, **оптимізує метод.**

Переконатися в істинності такого висновку, додати певності у використанні методу внутрішнього проекціювання до задач на перерізи, глибше усвідомити зміст запропонованої оптимізаційної схеми конструктивних дій потрібно лише шляхом вирішення реальних стереометричних пропозицій.

З а д а ч а 12. *Побудувати багатокутник перерізу заданої шестикутної призми* $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ *площиною* $\Sigma(KLM)$, *якщо точка К належить ребру* AA_1, *точка L – грані* CC_1D_1D, *а точка M – ребру EF*.

Аналізуючи умову задачі за рисунком до неї, здійснюючи візуально в обраному напрямі (скажімо, за годинниковою стрілкою) обхід бічної поверхні стереометричного тіла, розпочинаючи від ребра AA_1, на якому розташована одна з вершин (*К*) фігури перерізу (рис. 31), неважко помітити, що для досягнення кінцевої мети досить знайти точки перетину із січною площиною

(Σ) лише трьох (активних) бічних ребер FF_1, DD_1 і BB_1.

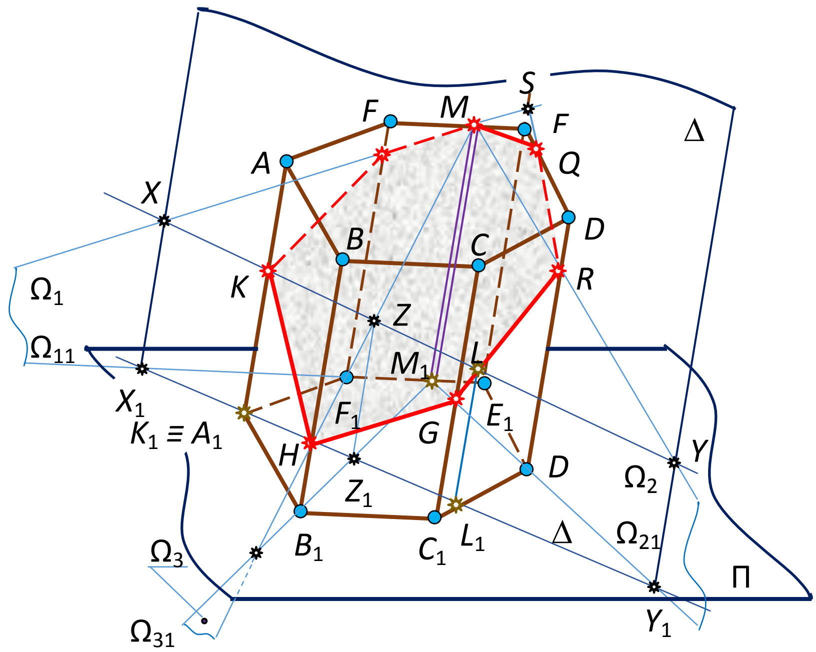


Рис. 31

Решту вершин шуканого багатокутника в перетині Σ із двома іншими (пасивними) бічними ребрами (EE_1 і CC_1) одержимо в результаті послідовного проведення сторін фігури перерізу, які вже будуть визначені у кожній із гранях FF_1E_1E і DD_1C_1C двома своїми точками (враховуючи ті, що задані умовою).

Точку P на ребрі FF_1, як одну з вершин багатокутника перерізу, краще всього шукати в перетині січної площини $\Sigma(KLM)$ із площиною-посередником Ω_1 грані багатогранника FF_1E_1E, оскільки на спільній прямій цих двох площин буде знайдено по ходу справи ще одну вершину S, яка лежить на ребрі EE_1. Річ у тому, що за умовою точка $M(M_1)$ уже належить цим двом площинам. Іншу, ще одну їх спільну точку $X(X_1)$, шукаємо за відомим алгоритмом як точку перетину прямої $KL(K_1L_1)$ площини Σ із проекціювальною площиною Ω_1. Очевидно, що при цьому отримаємо: $(P, S) = MX \cap (FF_1, EE_1)$.

Такого самого результату можна досягти, спираючись на інше словесне оформлення базової задачі методу посередників (ОПЗ-1). Отже, щоб побудувати точку P ($P_1 \equiv F_1$) перетину проекціювального ребра FF_1 із площиною загального розташування Σ (KLM), потрібно: **1)** провести через шукану точку P у площині Σ пряму $MX(M_1X_1)$ (тут точка $M(M_1)$ – одна з визначальних точок площини Σ, а $X(X_1) = KL(K_1L_1) \cap MP(M_1P_1)$); **2**) знайти точку P перетину прямої MX і ребра FF_1, яка буде вершиною багатокутника перерізу. Променями внутрішнього проекціювання, задіяними в цій операції, є $FF_1 \equiv PP_1$, MM_1 і XX_1. Побудову точки $S(S_1 \equiv E_1)$ обґрунтовуємо аналогічно. Таким же прийомом змоделюємо решту вершин шуканого багатокутника перерізу: $R(R_1 \equiv D_1)$ на ребрі DD_1 і $H(H_1 \equiv B_1)$ на ребрі BB_1.

Зараз, порівнюючи, привертаємо увагу до сконструйованого оптимізаційного правила-орієнтира дій, який забезпечить **обґрунтованість**, **упорядкованість** і **системність** графічних операцій в розв'язанні задачі в цілому (див. рис. 31, на якому порівняно мало ліній побудови). Практичні апробування засвідчують, що у процесі комплексної алгоритмізованої роботи над моделлю фактично відсутні хаотичні, випадкові дії виконавця, адже все, що зображується, строго програмовано і передбачено зарання чітко визначеною послідовністю кроків. Пояснення принциповим пріоритетам результативної діяльності потрібно давати перефразувавши щойно описаний алгоритм на мову пучка площин-посередників. При цьому, узагальнюючи, матимемо таку структуру перетворень: **1**) через бічні ребра FF_1 і EE_1 проведемо проекціювальну площину-посередник $\Omega_1(FF_1M_1M)$, через ребро DD_1 – $\Omega_2(DD_1M_1M)$, а через ребро BB_1 – $\Omega_3(BB_1M_1M)$; **2**) за допомогою ще однієї проекціювальної площини $\Delta(KK_1L_1L)$, яка містить пряму $KL(K_1L_1)$ із площини $\Sigma(KLM)$, шукаємо точки зустрічі $X(X_1)$, $Y(Y_1)$ і $Z(Z_1)$ узятої прямої із площинами Ω_1, Ω_2 і Ω_3 відповідно та проводимо прямі MX, MY і MZ перетину площини Σ з кожною із площин-посередників; **3**) фіксуємо точки перетину побудованих прямих із відповідними бічними ребрами призми: $(P, S) = MX \cap (FF_1, EE_1)$, $R = MY \cap DD_1$ і $H = MZ \cap BB_1$. Багатокутник $KPMQRGH$ – шуканий.

Зримо констатуємо, що площина $\Delta(\Delta_1)$ висікає в перетині з уявно рухомим у просторі пучком площин-посередників $\Omega_1(\Omega_{11})$, $\Omega_2(\Omega_{21})$, $\Omega_3(\Omega_{31})$, … відповідно пучок паралельних променів внутрішнього проекціювання, оскільки всі ці площини проекціювальні на площину основи стереометричного тіла.

Наголошуємо, що нібито різні в поясненнях схеми побудов, компактно подані з метою практичної реалізації методу внутрішнього проекціювання, індукують одну й ту саму графічну конструкцію. Це підтверджує думку, що розглядуваний метод є лише спрощеною, зручною у словесному оформленні та реальному користуванні інтерпретацією методу посередників, як, до речі, і його частинний випадок – метод слідів. У свою чергу, ці ж самі об’єктивні міркування переконливо свідчать, що без введення поняття «перетворення внутрішнього проекціювання» всередині стереометричного тіла і без його уявлення та належного, усвідомленого геометричного тлумачення метод посередників на позиційно визначених кресленнях був би просто немислимим.

6.2. Умоглядна та змістова функції сліду площини на повному проекційному кресленні стереометричного тіла

Традиційно у ШКГ переважають задачі на обчислення, в яких формальна складова розв’язання займає особливе, привілейоване місце. Але ж і в цих задачах досить часто випадає осмислено строго будувати переріз того чи іншого тіла площиною, оскільки в переважній більшості ситуацій чіткі уявлення місця положення фігури перерізу, її форми та, навіть, розмірів окремих елементів є визначальними факторами у правильному формуванні правила-орієнтиру алгебричних (тригонометричних) перетворень і виражень та, врешті-решт, замовлених умовою обчислень.

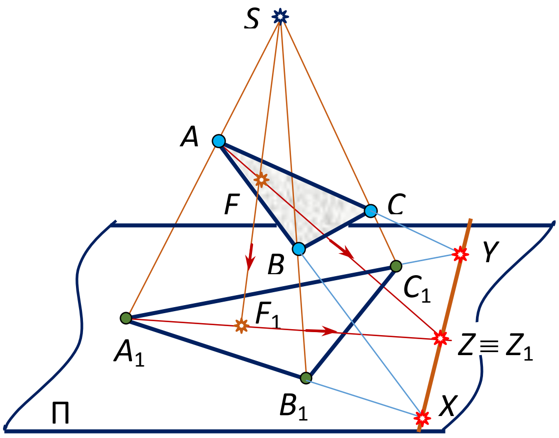
Очевидно, що коли йдеться персонально про метод слідів, то першим у порядку слідування, обов’язковим і змістовим компонентом дій у графічному моделюванні фігури перерізу, потрібно вважати побудову сліду – прямої перетину січної площини із площиною основи тіла, якщо, звичайно, слід не є на зображенні одним із визначальних елементів у задаванні площини перерізу, тобто коли слід ще не накреслено відповідно до умови задачі. Слід площини на грані тривимірного тіла переважно будують шляхом відшукання слідів двох різних прямих, що лежать у січній площині, а за тим, з’єднавши знайдені точки, одержують слід самої площини (задача на перетин прямої із площиною чи двох площин у частинному випадку розташування).

Навмисна, взагалі кажучи, додаткова й непередбачувана загальною схемою дій побудова сліду площини перерізу на основній площині може (за певної ситуації) допомогти зримо відкинути ребра і грані тіла, які не мають реальних перетинів із січною площиною, й цим спростити рисункове розв'язання позиційної задачі на проекційному кресленні. Особливо це доречно робити у випадках, коли є нагальна потреба багаторазового звертання до першої чи другої ОПЗ, наприклад, у побудові фігури перерізу тіла обертання площиною загального розташування [1, с. 198-214].

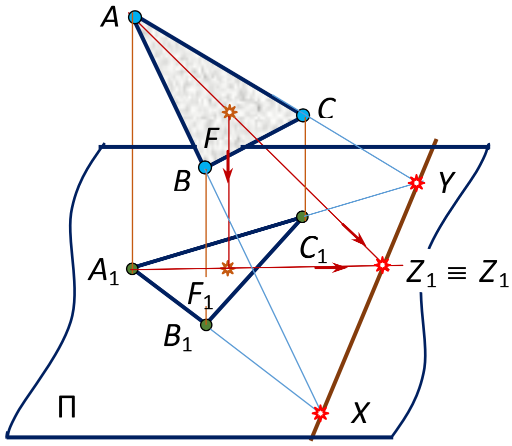
Щоб остаточно сформувати довершений алгоритм використання методу слідів на позиційно визначеному проекційному кресленні, ще раз повернемося до обґрунтованого задавання площини загального розташування, приміром, трикутником. Відомо, що сам трикутник ABC і його основа $A_1B_1C_1$ (рис. 32) позиційно цілком визначають площину Σ, а слід площини XY будується елементарно в кілька кроків.

У нашій ситуації, коли слід XY уже побудовано (задано умовою), суттєво вміти розумно скористатися ним для накреслення в заданій площині довільної точки $F(F_1)$. Тут потрібно: **1**) через точку F площини Σ, розташовану всередині, на стороні чи зовні трикутника ABC ($A_1B_1C_1$), провести будь-яку пряму, окрім паралельної основній площині П (прямій XY), наприклад, нехай це буде пряма, яка проходить через точку A; **2**) у перетині цієї прямої зі слідом XY зафіксувати ще одну спільну для прямої і площини трикутника точку $Z \equiv Z_1$ і провести основу прямої A_1Z_1; **3**) з точки F за напрямом внутрішнього проекціювання опустити на площину основи шпицю, чим визначитися на A_1Z_1 із точкою F_1.

З позицій позиційної визначеності зображення, суть справи обґрунтовується дуже просто. Адже *пряма XY у ролі сліду заданої площини* Σ *на площині основи* П *є одночасно ще й носієм подвійних точок цих двох площин у внутрішньому проекціюванні* (напр., $Z \equiv Z_1$). Отже, пряма XY – суть всі без винятку перетини нескінченної множини прямих площини Σ із площиною П в точках, які є також своїми ж внутрішніми проекціями (основами) на основній площині. Іншими словами, якщо на позиційно визначеному кресленні вже задано площину $\Sigma(ABC(A_1B_1C_1))$ і побудовано її слід XY на площині основи П, то між точками цих площин *встановлено взаємнооднозначну відповідність*, яка у випадку піраміди (конуса, рис. 32, *а*) називається ***перспективною***, а у випадку призми (циліндра, рис. 32, *б*) – ***перспективно-афінною***.



а)



б)

Рис. 32

Тут *слід площини XY виконує роль* осі відповідності, а її *напрям зливається з напрямом внутрішнього проекціювання.* У побудові пар відповідних точок площин Σ і П (F і F_1) особливо важливо виділити дві характеристичні властивості цієї відповідності: **1)** *будь-яка пара відповідних точок розташовується на прямій, яка має напрям відповідності, тобто належить променю внутрішнього проекціювання* (шпиці); **2)** *яка завгодно пара відповідних прямих перетинаються на осі відповідності, яка й є слідом XY.* Саме ці два правила є найважливіші у графічному відтворенні схеми розв'язання методом слідів будь-якої задачі на переріз стереометричного тіла площиною, в них концентрується суть методу **слідів**, який ще називають методом *взаємнооднозначної відповідності*.

Задача 13. *Побудуйте переріз правильної чотирикутної піраміди площиною Σ, що задається на зображенні трьома точками* $M(M_1)$, $N(N_1)$, $P \equiv P_1$, *жодна з яких не належить поверхні піраміди.*

Акцентуємо увагу на тому факті, що у цій задачі піраміда *SABCD* і січна площина $\Sigma(MNP(M_1N_1P_1))$ позиційно визначені у внутрішньому **паралельному** проекціюванні *за напрямом висоти піраміди* SO_1 ($S_1 \equiv O_1$) (рис. 33).

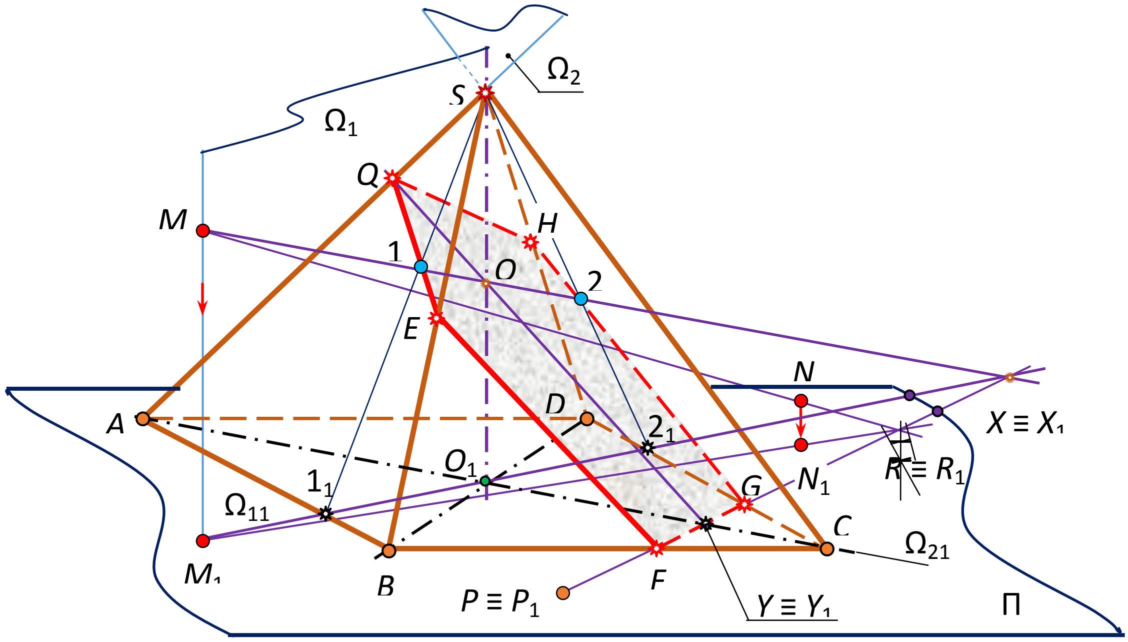


Рис. 33

Оскільки за умовою точка $P \equiv P_1$ лежить на площині основи піраміди, слідом січної площини буде пряма $PR(P_1R_1)$, яка легко будується шляхом відшукання ще однієї точки сліду $R(R_1) = MN(M_1N_1) \cap \Pi$, в якій пряма $MN(M_1N_1)$ перетинає площину $\Pi(ABCD)$.

Візуально фіксуємо точки F і G перетину прямої $PR(P_1R_1)$ із ребрами в основі піраміди BC і CD відповідно – це дві вершини багатокутника перерізу. Звідси прямо випливає, що в межах зображення піраміди ребро SC немає перетину із площиною Σ.

У реалізації схеми методу внутрішнього проекціювання із залученням сліду і пучка площин-посередників Ω_i ($i = 1,2, \ldots, n$), найбільш зручно за вісь пучка взяти пряму SO_1, оскільки кожна з указаних допоміжних площин матиме в перетині з пірамідою власний трикутник, який в уявленнях обертається навколо осі піраміди – спільної висоти цих трикутників. Перша із площин Ω_1**(**Ω_{11}**)**, що визначена точкою $M(M_1)$ і прямою SO_1, шляхом доречного залучення точки $X \equiv X_1$, яка належить на сліду $PR(P_1R_1)$, дозволяє одночасно побудувати на прямій $MX(M_1X_1)$ не лише точки контуру фігури перерізу $1(1_1)$,

$2(2_1)$, що лежать у граням SAB і SCD, але й точку $O(O_1) = SO_1 \cap \Sigma$, яка є фіксованою – однією із двох кардинальних точок у перетині площин Ω_i із площиною Σ (незалежно від числа бічних ребер піраміди). Іншу з них треба вибирати так, щоб вона належала сліду. Наприклад, точку Q на ребрі SA знаходимо в перетині цього ребра із прямою $Y(Y_1)O$: $Q = Y(Y_1)O \cap SA$, де $Y \equiv Y_1$ – спільна точка площини посередника $\Omega_2\,(\Omega_{21})$ та сліду $PR(P_1R_1)$. Із проекційного рисунка випливає, що шуканий багатокутник перерізу *EFGHQ* так знайденими точками визначається однозначно.

Тим, хто зацікавився конструктивною геометрією, не варто забувати, що площина перерізу має спільну пряму із площиною кожної грані багатогранника, якій вона не паралельна, тобто січна площина має стільки слідів, скільки граней вона перетинає. Все ж, у більшості випадків шукають той слід, який лежить у площині нижньої основи багатогранника. Тому й користуватися цим методом доцільно і зручно тоді, коли січна площина перетинає площину основи вздовж прямої, розташованої в межах картинної площини, на якій здійснюються відповідні конструктивні дії, і тоді, коли площина перерізу в умові задачі визначена так, що цей варіант задавання припускає доречне залучення її сліду з метою оптимізації процесу візуальних графічних побудов.

Отже, як з’ясувалося, **існує єдиний природний метод** побудовного подання популярної в геометрії позиційної задачі – **метод внутрішнього проекціювання** *за напрямом бічних ребер*, назва якого відображає єство однойменного динамічного ***перетворення*** всередині стереометричного тіла й геометричну сутність уявних рисункових дій. Взаємно однозначна відповідність між точками січної площини та площини основи тіла навіч проглядається в методі, однак лише «між рядками» логіки міркувань, в якості цікавого результативного компоненту операції внутрішнього проекціювання, а слід січної площини є одним із визначальних елементів такої відповідності двох площин, котрий в багатьох випадках просто нереально зобразити на моделі, оскільки цілком можливо, що він за даними умови задачі розташовується поза межами формату дошки чи аркуша паперу.

Потрібно розуміти, що логічний ланцюжок проекційно-закономірного представлення вказаної відповідності припускає варіації, як-от: два трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, кожен з яких визначає одну із площин Σ і Σ_1, розташовують у просторі будь-як, але з безперечним дотриманням вимоги, щоб прямі AA_1, BB_1 і CC_1 перетиналися в одній-єдиній точці S, зокрема, – у віднесеній в нескінченність (призма, циліндр). Однак така обставина гарантовано забезпечує одноосібне внутрішнє проекціювання однієї площини на іншу, а подвійна пряма s цього дійства (слід) лише **навпісля** строго встановлюється перетином прямих, які вміщують відповідні сторони трикутників (див. рис. 32).

Отже, *метод слідів принципово немислимий у графічній реалізації без свідомого залучення методу внутрішнього проекціювання*, а слід є лише окремим допоміжним робочим інструментом конструктивних пошуків перерізу. І навпаки, **метод внутрішнього проекціювання цілком автономний і самодостатній**, для його застосування слід категорично необов'язковий. Іншими словами, *метод слідів* (*чи відповідності*) *є лише частинним випадком методу внутрішнього проекціювання*, хоч інколи вже заданий (або ж, просто побудований) слід на проекційному рисунку виявляється ефективним посередником у графічному вирішенні серйозних питань конструктивної (і прикладної) стереометрії. **Метод внутрішнього проекціювання** *охоплює, включає в себе метод слідів, тобто точкова взаємно однозначна відповідність площини перерізу і площини основи тіла об'єктивно* ***індукована природою й операцією внутрішнього проекціювання*** *за напрямом бічних ребер* багатогранника.

У стереометрії часто трапляються задачі на обчислення з обов'язковим зображенням перерізу тіла площиною, де немає особливої потреби звертатися до методу внутрішнього проекціювання. Потрібно лише акуратно виконати рисунок, уважно провести аналіз умови задачі й «побачити» зумовлене місце розташування елементів перерізу. Продемонструємо це прикладом.

З а д а ч а 14. *Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює* 2, *а* *сторона основи* 1*. Через середину бічного ребра і мимобіжну з ним сторону основи проведено переріз. Знайти відстань від вершини піраміди до площини цього перерізу.*

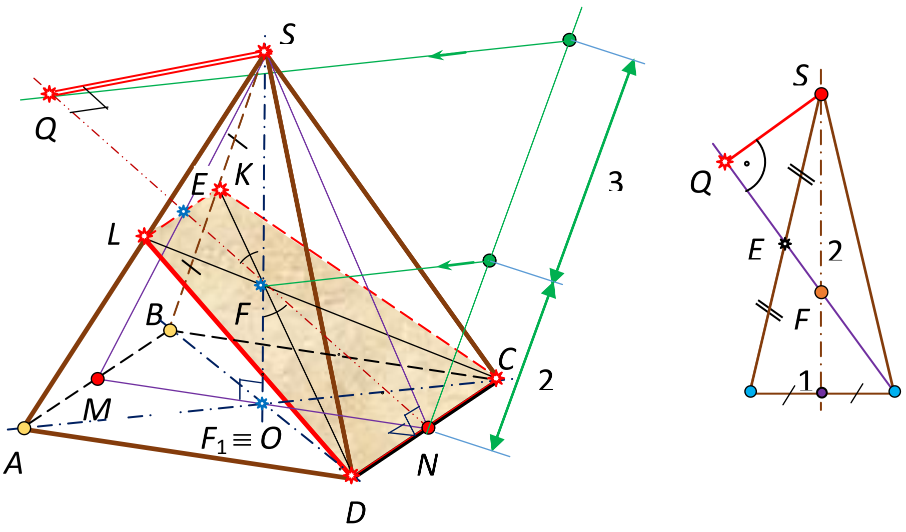
Неважко зрозуміти, що це звичайна стереометрична задача на обчислення, хоч її й можна (умовно) віднести до середньої категорії складності. Для цілковитого усвідомлення внутрішніх взаємозалежностей в піраміді, які наштовхнули б на правильний шлях до результату, потрібне кваліфіковане виконання перерізу піраміди визначеною площиною, тобто переконливо обґрунтоване графічне розв'язання простої позиційної задачі. Отже, **задача на обчислення включає в себе графічну задачу на переріз.**

Нехай (рис. 34) площина Σ перерізу піраміди задана на проекційному кресленні точкою *К*, яка ділить бічне ребро *SB* навпіл, та прямою (ребром в основі) *CD*. Щоб правильно побудувати фігуру перерізу, запропонуємо кілька алгоритмічних схем, в основу яких покладемо логіку усталених закономірних міркувань.

З одного боку, скориставшись відомим правилом-орієнтиром дій у три кроки, можна дуже швидко знайти точку $F(F_1)$ перетину висоти піраміди *SO* із січною площиною та, прийнявши цю точку до уваги, відразу побудувати фігуру перерізу. Отож: 1) вводимо в розгляд площину-посередник Ω, визначену точкою *К* і прямою *SO*; 2) площини Σ і Ω мають задані умовою дві спільні точки *К* і *D*, отже їх перетином є пряма *KD*; 3) спільною для прямих *SO* і *KD* буде точка $F(F_1)$; 4) оскільки точки *C, F* і ребро *SA* лежать в одній і тій самій площині осьового перерізу піраміди *SAC*, а $C \in \Sigma$, то точка *L* у перетині прямих *CF* і *SA* також належить фігурі перерізу. Чотирикутник *LKCD* – шуканий. З іншого боку, можна міркувати ще й так[2]. Шуканий відрізок *KL* у грані *SAB* буде паралельним стороні основи *AB*. Пояснення тут таке. Площина перерізу Σ має з нижньою гранню піраміди спільне ребро *CD*, але *CD* ǁ *AB*, а *AB* – ребро перетину нижньої грані з лівою гранню. Тож відрізок *KL* лівої грані *SAB* теж

[2] Для учнів це більш звичний спосіб міркування, хоч він й потребує знань, навичок і досвіду в розв'язуванні схожих стереометричних задач.

паралельний *CD*, бо у противному випадку площина Σ матиме із площиною основи три спільні точки (*C*, *D* і $X = KL \cap AB$), тобто площини Σ і (*ABCD*) зіллються, що неможливо. Отже, $KL \parallel AB$ є відрізком перетину грані *SAB* із площиною Σ.



а) *б)*

Рис. 34

Чотирикутних *LKCD* – рівнобічна трапеція, тому що $LK \parallel DC$ і $LD = KC$, оскільки $\Delta\, LAD = \Delta\, KBC$ за двома сторонами і кутом між ними, що очевидно.

Нарешті, скориставшись ОПЗ-1 можна у три кроки побудувати точку *L* перетину ребра *SA* із січною площиною Σ(*KDC*(*BDC*)): 1) $SA \subset \Delta(SAC)$; 2) $FC(F_1C) = \Delta \cap \Sigma$; 3) $L = FC \cap SA$.

Неважко на рисунку інтуїтивно підмітити визначальний факт: шуканий відрізок *SQ* перпендикуляра, опущеного з точки *S* на площину Σ, розташовується у площині симетрії (*SNM*) заданих піраміди *SABCD* та її перерізу *LKCD*; основа *Q* цього перпендикуляра належить прямій *NE*, яка є віссю симетрії трапеції. Це, до речі, випливає із взаємної перпендикулярності згаданої площини симетрії (*SNM*) і площини Σ. Справді, відрізок *LK*, який належить площині перерізу Σ, перпендикулярний одночасно двом прямим *EN* і *SM*, що перетинаються і лежать у площині симетрії піраміди (*SNM*). Тут $LK \perp EN$ саме тому, що *EN* – вісь симетрії трапеції *LKCD*, і $LK \perp SM$ тому, що $LK \parallel AB$ за побудовою, а $AB \perp SM$, оскільки *SM* є апофемою бічної грані *SAB* правильної чотирикутної піраміди.

Такий детальний аналіз умови задачі і рисунка до неї (через закономірну побудову останнього) дозволяє чітко сформулювати правило-орієнтир наступних аналітичних виражень і числових розрахунків.

Отже, тимчасово призупинивши виконання точних побудов, знайдемо такі внутрішні взаємозв'язки між елементами піраміди у визначеній площині її симетрії (*SNM*), які призведуть до обчислення довжини відрізка *SQ*.

Нехай точка *Q*, узята будь-де на промені *NE*, разом із точкою *S* визначають шуканий відрізок. Помічаємо, що *SQ* є катетом прямокутного трикутника *SQF*, гіпотенуза якого *SF* належить висоті піраміди. Якби довжину відрізка *SF* вдалося знайти ($SO = 2$ за умовою) і можна було ввести в розгляд ще й деякий метрично розмірний трикутник, подібний трикутнику *SQF*, то задача була б розв'язана. У зв'язку з цим привертає до себе увагу трикутник *FON*. Він прямокутний ($\angle O = 90°$), у нього один із катетів відомий ($ON = \frac{1}{2}MN = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}$), а інший *FO* є доповненням відрізка *SF* до висоти піраміди *SO*, що принципово важливо. До того ж, у прямокутних трикутників *SFQ* і *NFO* гострі кути *SFQ* і *NFO* рівні, як вертикальні. Отже, ці трикутники подібні. Запишемо пропорцію: $\frac{SF}{NF} = \frac{SQ}{NO}$ (*). Задача звелася до відшукання відрізків *SF* і *NF*. Неважко помітити, що у трикутнику *SNM* відрізки *SO* і *NE* є його медіанами, які точкою перетину *F* діляться у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини. Саме тому $SF = \frac{2}{3}SO = \frac{4}{3}$, а $FO = \frac{1}{3}SO = \frac{2}{3}$. За теоремою Піфагора (коли відомі катети) знаходимо гіпотенузу трикутника *NFO*: $NF = \sqrt{FO^2 + ON^2} = \frac{5}{6}$.Повернувшись до пропорції (*), остаточно отримаємо: $SQ = \frac{4}{5}$. Таким чином, обчислювальний етап задачі за якісно виконаним проекційним кресленням (рис. 34, *а*) *проведено як за кресленням-картиною,* оскільки точка *Q*, яка належить променю *NE*, вибиралася нами довільно. Усе ж таки, це креслення *можна легко зробити кресленням-моделлю*, адже точка Q може бути побудована, причому досить просто, як ***графічним***, так і ***графоаналітичним*** методами. У першому випадку достатньо виконати таке: 1) побудувати на вільному місці поля зображень винесене креслення – будь-який рівнобедрений трикутник SMN (рис. 34, *б*), основа якого MN у два рази менша його висоти SO; 2) на бічному ребрі SM знайти точку E таку, що $SE = EM$, і провести промінь NE; 3) опустити перпендикуляр із точки S на промінь NE; 4) за узагальненою теоремою про пропорційні відрізки зовнішнім чином розділити точкою Q відрізок FN на рисунку 34, *а* у відношенні, в якому однойменна точка розділяє однойменний відрізок на рисунку 34, *б*; 5) з'єднати відрізком точки S і Q. Суть графоаналітичного методу полягає в тому, що розташування точки Q на рисунку можна розрахувати – знайти через елементарні формальні вираження. Отже, з попереднього відомо, що $FO = \frac{2}{3}SF = \frac{4}{3}$, а $NF = \frac{5}{6}$. Тому матимемо таке: 1) $\frac{SF}{NF} = \frac{FQ}{FO}$, звідки $FQ = \frac{16}{15}$; 2) $NF : FQ = 25 : 32$. Залишилося лише графічно (рис. 34, *а*) розділити відрізок NF точкою Q у знайденому відношенні та провести шуканий перпендикуляр SQ.

Графоаналітичний метод має помітне застосування в науці і техніці (в лінійному програмуванні та теорії оптимізації, у прикладній геометрії) – всюди, де засобами досліджень є сучасні комп'ютерні технології.

У стереометрії це суттєво зменшує кількість побудовних ліній на зображеннях і, як результат, вони краще прочитуються стороннім спостерігачем. У задачах ШКГ (на обчислення чи на доведення) майже відсутні складні позиційні побудови на проекційних кресленнях, які виконуються спеціально за умовою кожної з них.

Однак це в жодному разі не збіднює геометричну сутність і не применшує значущість методу посередників.

Навпаки, якщо ви кваліфіковано володієте цим методом, обов'язково матимете стабільні навички мислення просторовими образами, навчитеся оперувати уявними об’єктами у просторі та на проекційних кресленнях й обґрунтовувати власноруч виконані графічні операції. Ви звикнете діяти в режимі **конструктивного** пошуку розв’язку задачі й завжди будете спроможні знайти правильний результат.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ленчук І.Г. Конструктивна стереометрія в задачах [Навчальний посібник для студентів математичних спеціальностей ВПНЗ] / І.Г. Ленчук. – Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2010. – 368 с.

2. Погорєлов О.В. Геометрія: Стереометрія [Підручник для 10-11 класів середніх шкіл] / О.В. Погорєлов. – К.: Освіта, 1998. – 128 с.

3. Яглом И.М. Геометрические преобразования. Кн. 1. Движения и преобразования подобия: [Библиотека математического кружка, выпуск 7] / И.М. Яглом. – М.: Госиздат ТТЛ, 1955. – 282 с.

Ленчук Іван Григорович –
професор, доктор педагогічних наук, кандидат технічних наук.

Наукові інтереси: системи автоматизованого проектування, прикладна і конструктивна геометрія.

Дисципліни, які викладає: аналітична геометрія, конструктивна планіметрія, вибрані питання геометрії, методика навчання математики.

РОЗДІЛ ІІ. МЕТОДИЧНІ АСПЕКТИ РОЗБУДОВИ СУЧАСНОЇ ШКІЛЬНОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ ОСВІТИ

Бенедисюк М.М.
асистент

ЗАДАЧІ З ФІЗИЧНИМ ЗМІСТОМ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ ЯК МОЖЛИВІСТЬ ІНТЕГРАЦІЇ ШКІЛЬНИХ КУРСІВ МАТЕМАТИКИ ТА ФІЗИКИ

Загальновизнаною ідеєю сучасного навчання вважається його відповідність розвитку науки, а також тим методам пізнання, які в науці є вирішальними. Історично склалося так, що спочатку нагромаджувалися факти, які потім систематизувалися й узагальнювалися. На їх підставі вчені висловлювали концептуальні ідеї, пропонували теоретичні моделі, завдяки яким факти отримували певну інтерпретацію. Згодом встановлювалися закони, формулювалися принципи, на основі яких створювалися теорії. Такий пізнавальний цикл науки спрямовувався на пояснення явищ і процесів оточуючого світу загалом, а також супроводжувався практичним використанням знань для створення технічних засобів діяльності людини і виробничих технологій.

У Державному стандарті базової і повної загальної середньої освіти, який затверджено постановою Кабінету Міністрів України від 23 листопада 2011 р. № 1392, зазначено, що однією із вимог до освіченості учнів основної і старшої школи є формування міжпредметної компетентності — здатності учня застосовувати щодо міжпредметного кола проблем знання, уміння, навички, способи діяльності та ставлення, які належать до певного кола навчальних предметів і освітніх галузей.

Предмети природно-математичного циклу дають учням знання про живу й не живу природу, про матеріальну єдність світу, про природні ресурси і їхнє використання в господарській діяльності людини. Загальні навчально-виховні завдання цих предметів спрямовані на формування діалектико-матеріалістичного світогляду учнів, всебічний гармонійний розвиток особистості. На основі вивчення загальних законів розвитку природи, особливостей окремих форм руху окремих форм матерії і їхніх взаємозв'язків вчителі формують в учнів сучасні уявлення про природно-наукову картину світу.

Розробка теоретичних основ міжпредметних зв'язків у навчальній темі з погляду розкриття її провідних положень дає можливість застосувати механізм виявлення й планування міжпредметних зв'язків до конкретних тем досліджуваного навчального предмета.

Математика і фізика зазвичай вважаються найбільш важкими предметами шкільного курсу. У всі переходи формування людської свідомості ці напрямки наукової думки розвивалися взаємопов'язано, стимулюючи обопільний прогрес. Широко поширена думка про те, що в шкільному викладанні інтеграція фізики з математикою можлива тільки в класах з поглибленим вивченням цих предметів. Я ж вважаю, що багато елементів такої інтеграції можуть зробити викладання фізики більш ясним і доступним на всіх рівнях її вивчення. Нерозуміння школярами та абітурієнтами якого-небудь питання з курсу фізики або невміння вирішити фізичну задачу часто пов'язані з відсутністю навичок аналізу функціональних залежностей, складанням і вирішенням математичних рівнянь, невмінням проводити алгебраїчні і геометричні побудови.

Сучасне викладання вимагає органічного поєднання експериментального і теоретичного методів вивчення фізики, виявлення суті фізичних законів на основі доступних школяреві понять елементарної математики. Такий підхід одночасно забезпечує підвищення рівня математичних знань, формує логічне мислення, усвідомлення єдності матеріального світу.

Вивчення фізики в тісному взаємозв'язку з математикою забезпечує постійний розвиток і вдосконалення вмінь учнів складати та розв'язувати різні види рівнянь та їх систем. Так, вивчаючи поняття швидкості рівномірного прямолінійного руху, учні закріплюють набуті на уроках математики вміння розв'язувати найпростіші лінійні рівняння з одним невідомим і виконувати дії з найменуваннями одиниць фізичних величин.

У старших класах ці вміння доповнюються знанням основних методів і прийомів дослідження рівнянь, які виражають складніші функціональні залежності.

Математика і фізика як науки все більшою мірою набувають виробничої значущості. Від якості знань цих предметів молодого покоління залежить науково-технічний прогрес нашої України. Поліпшення підготовки майбутніх спеціалістів сучасного виробництва неможливе без високого рівня знань фізики і математики. Упродовж всього свідомого життя людина здобуває нові знання — сукупність інформації, яку вона дістає з навколишнього світу, є результатом його пізнання, яке починається з живого споглядання, з відчуття. Встановлення міжпредметних зв'язків між фізикою і математикою допомагає більш глибокому засвоєнню знань, застосуванню знань з цих предметів в нестандартних життєвих ситуаціях.

Не раз вчителі фізики стикалися з проблемою, коли на уроці математики учні успішно справляються з розв'язуванням квадратних рівнянь, а на уроці фізики розв'язування рівнянь викликає у них труднощі. Це є результатом того, що таке рівняння з точки зору учня не схоже на той «образ» квадратного рівняння, який сформований у нього на уроках алгебри. Ще один приклад. Добре справляючись із розв'язанням числових пропорцій на уроках математики, деякі учні мають з цим труднощі на уроках фізики. Можна навести ще багато прикладів, які демонструють труднощі, що виникають у школі внаслідок розрізненості навчальних предметів.

Аналіз навчального процесу з фізики, що проведений науковцями, свідчить про наступне:

– Знання учнів з фізики та математики не завжди досить глибокі і міцні, особливо в старших класах. Учні ототожнюють поняття вектор і векторна величина, функція і функціональна залежність між змінними фізичними величинами, не володіють у достатній мірі навичками застосування математичних знань.

– Суттєвим недоліком навчального процесу є недосконалість змісту підручників фізики і математики. Так у підручниках використовується різна символіка і термінологія при позначенні тих самих об’єктів; у підручниках математики є посилання на фізичні об’єкти, що ще в шкільному курсі фізики не розглядалися.

- Більшість учнів старших класів не бачать доцільності вивчення деяких розділів математики, не розуміють, де математичні знання можна застосувати, хоча вивчення механіки, термодинаміки й електродинаміки прямо зв’язане із застосуванням практично всіх математичних знань, що вивчаються у школі. Саме застосування математичного апарату у фізиці для учнів також досить серйозна проблема.

– Учителі фізики і математики не завжди узгоджують свої календарно-тематичні плани, у результаті чого при виведеннях, розв’язуваннях задач трапляються випадки використання математичного апарату, що учнями ще не вивчався.

Розрізненість шкільних предметів призвела до того, що при вивченні кожного береться до уваги головним чином тільки його логіка, при цьому логіка навчально-виховного процесу часто переноситься на другий план. Так і займається кожен навчальний предмет в основному сам собою, не враховуючи логіку і потреби суміжних. Де ж вихід із становища, що склалося? Як покінчити із розрізненістю шкільних предметів, відродити інтерес молоді до навчання?

Повноцінне використання шкільного математичного апарату при вивченні фізики — необхідна умова сучасного уроку. Цей міжпредметний зв’язок постійно привертає увагу вчителів, оскільки математична підготовка школярів певною мірою зумовлює і їх рівень знань з фізики. Ряд питань курсу фізики вимагає застосування складних математичних виразів фізичних величин, глибокого аналізу залежностей між ними. Знання математики дають можливість більш суворо розглядати фізичні закони та закономірності, що є неодмінною умовою підвищення науковості викладання фізики. Неабияке значення для цього мають і загальні математичні ідеї: поняття функції містить ідеї зміни і відповідності, що важливо для розкриття динаміки фізичних явищ і встановлення причинно-наслідкових зв'язків; поняття похідної дає змогу кількісно оцінити швидкість зміни фізичних явищ і процесів у часі і просторі; вміння обчислювати інтеграл дає можливість визначати роботу змінної сили, потужність у колах змінного струму; ідеї симетрії дозволяють на основі загальніших наукових положень у молекулярній фізиці визначати будову молекул і кристалів, в оптиці — будувати зображення в плоских дзеркалах. Інтеграція фізики і математики сприяє кращому засвоєнню і розумінню учнями обох предметів, розвитку інтелектуальних здібностей, а також загальнонавчальних умінь і навичок учнів.

Інтеграція навчальних дисциплін є одним із важливих механізмів реалізації основних дидактичних принципів у сучасній школі [1;4]. Окремою складовою цього механізму є актуалізація математичних знань у процесі навчання фізики.

Інтеграція навчання базується на дотриманні принципу вікової доцільності змісту навчального матеріалу, сприяє розвитку творчого мислення учнів, забезпечує узагальнення та систематизацію знань сприяє оптимізації навчально-пізнавальної діяльності. Такі заняття дають змогу одержати багатогранні знання про об'єкт вивчення, сформувати уміння аналізувати та порівнювати процеси і явища, що відбуваються у природі або суспільстві, застосовувати набуті знання на практиці.

Завдяки здійсненню міжпредметних зв'язків учні додержуються загальних правил розв'язування задач різних типів, закріплюють свої вміння аналізувати вирази, для визначення шуканих величин, які є явними чи неявними функціями певних аргументів. Загальновизнаним є такий порядок роботи над задачами: а) визначення задачі та її аналіз; б) мобілізація наявних знань з різних предметів, які сприяють одержанню правильних результатів; в) вибір методу розв'язування задачі; г) складання плану розв'язування; д) реалізація плану; є) перевірка і дослідження розв'язку.

Поняття міжпредметних зв'язків включає в себе:

– взаємну узгодженість програм і підручників;

– узгодженість роботи вчителів різних дисциплін і з всебічного розгляду на уроках явищ і предметів;

– активну розумову діяльність учнів щодо відтворення раніше засвоєних знань суміжних дисциплін і їх зв'язку з новим матеріалом [4].

Математика і фізика – найскладніші предмети шкільного курсу. В усі періоди формування людської свідомості ці напрями наукової думки розвивалися взаємопов'язано, стимулюючи обопільний прогрес. Математика як наука сформувалася першою, але з розвитком фізичних знань математичні методи все більше застосовувалися у фізичних дослідженнях.

Зв'язки між науками математики і фізики різноманітні і постійні [13]. Об'єктом чистої математики є досить реальний матеріал: просторові форми і кількісні відношення матеріального світу. Той факт, що цей матеріал приймає надзвичайно абстрактну форму, може лише слабо затушувати його походження із зовнішнього світу. Але щоб бути в змозі дослідити ці форми і відносини в чистому вигляді, необхідно відокремити їх від їхнього змісту, залишити це останнє осторонь, як щось зайве. З цих міркувань випливає, що основний метод математики є метод абстракції.

По способу відображення дійсності вона є аспектною наукою. Її предметна область є дійсність, іншими словами, немає жодної матеріальної області, в якій не проявилася б закономірність, яку вивчає математика. Таким чином, математика вивчає кількісні відносини і просторові форми як існуючих областей, об'єктів, так і тих, які можна «сконструювати» [8].

Фізика, як наука, має свою предметну область, фундаментальні властивості матерії у двох її формах - у формі речовини та поля. Вони представляють собою комплекс самостійних областей знань, об'єднаних вихідними принципами, фундаментальними теоріями та методами дослідження.

Однак уже на цьому етапі вивчалися і деякі загальні проблеми - рух, взаємодія тіл, будова речовини, природа і механізм ряду явищ, наприклад теплових, звукових, оптичних. Отже спочатку фізика була в основному об'єктною наукою. Але в XX столітті головним об'єктом фізики стають фундаментальні явища природи і закони, які їх описують.

Математика як наука сформувалася першою, але в міру розвитку фізичних знань математичні методи знаходили все більше застосування в фізичних дослідженнях.

Взаємозв'язок математики і фізики визначається насамперед наявністю загальної предметної області, яка вивчається ними, хоча і з різних точок зору. Взаємозв'язок математики і фізики виражається у взаємодії їхніх ідей і методів. Ці зв'язки можна умовно розділити на три види, а саме [6]:

1. Фізика ставить завдання і створює необхідні для їх вирішення математичні ідеї і методи, які в подальшому служать базою для розвитку математичної теорії.

2. Розвинена математична теорія з її ідеями і математичним апаратом використовується для аналізу фізичних явищ, що часто призводить до нової фізичної теорії, яка в свою чергу призводить до розвитку фізичної картини світу і виникнення нових фізичних проблем.

3.Розвиток фізичної теорії спирається на наявний певний математичний апарат, але останній вдосконалюється і розвивається в міру його використання у фізиці.

Предмет фізики розкривається за тематичним принципом, що цілком відповідає його узагальнюючому інтегративному характеру. Тематична побудова цієї дисципліни дозволяє розглядати її навчальні теми як окремі «вузли» систематизованих знань, що перебувають між собою в зв'язку.

Аналіз наявного досвіду дозволяє рекомендувати наступні основні форми зв'язку фізики з іншими предметами:

- розкриття взаємозв'язку фізичних явищ із біологічними, хімічними й іншими явищами;
- повідомлення знань про застосування фізичних явищ і закономірностей в інших науках;
- використання на заняттях по фізиці знань й умінь, які учні одержали при вивченні інших предметів;
- проведення комплексних екскурсій;
- проведення позакласних занять комплексного характеру (організація роботи гуртків, що використовують знання учнів по двох або декількох предметах, наприклад, гурток юних біо- і агрофізиків;

проведення конференцій, вечорів);

- виконання учнями навчальних завдань, пов'язаних із трудовим навчанням: спостереження й досвіди по вивченню процесів переробки матеріалів у навчальних майстернях, фізичні досвіди й спостереження по вивченню фізичних властивостей ґрунтів, повітря й рослин у зв'язку з дослідно-практичною роботою учнів по сільському господарству.

Зазначені форми зв'язку й комплексне в ряді випадків вивчення явищ повинні відповідати змісту й специфіці кожного предмета, не порушуючи його «внутрішньої логіки» [3; 14].

Принцип міжпредметності у викладанні шкільних дисциплін обумовлений яскраво вираженою інтеграцією наук, що вивчаються у школі.

Міжпредметні зв'язки, що існують між шкільними курсами математики і фізики, як і між іншими навчальними предметами природничо-математичного циклу, є відображенням взаємозв'язків, що існують у природі.

Встановлення зв'язку між фізикою і математикою у процесі їх вивчення сприяє розвитку в учнів функціонального мислення, формуванню узагальнених знань про фізичні явища і процеси. Паралельне вивчення цих предметів дозволяє викладати багато питань курсу фізики на сучасному науковому рівні, використовуючи відповідний математичний апарат, розкривати прикладний характер відповідних математичних понять.

Міжпредметні зв'язки шкільних курсів фізики і математики ґрунтуються на основі використання спільних понять: функція, відповідність, змінна, величина, вектор, геометричні перетворення.... Математичні моделі широко використовуються під час розв'язування фізичних задач, дослідженні взаємозв'язків, що існують у навколишньому світі. Без використання математичних моделей не можливе міцне засвоєння учнями фізичних понять.

Математичні знання дітей не набувають необхідного практичного спрямування, існує певний бар'єр, недостатня мобільність знань. Так у восьмому класі на уроках фізики учням складно засвоїти поняття середньої швидкості, хоча з даним поняттям учні ознайомились на уроках математики у попередніх класах. Знання дітей набувають практичного спрямування лише в ході систематичного застосування знань на уроках фізики, де учням їх потрібно застосовувати у нових ситуаціях. Саме математика відіграє роль апарату для вивчення і аналізу закономірностей реальних явищ і процесів. Широке застосування математики у шкільному курсі фізики дозволяє також полегшити учням розуміння складних питань сучасної фізики та скоротити час вивчення окремих тем.

Зокрема, використання математичного апарату для ознайомлення учнів з фізичними поняттями дозволяє підсилити застосування дедуктивного методу при вивченні курсу фізики, сприяє розвиткові абстрактного мислення учнів, економить час, затрачений на вивчення окремих законів і залежностей, до яких входять величини, що задовольняють одній й тій самій математичній закономірності. Використання міжпредметних зв'язків фізики і математики сприяє підвищенню ефективності понять, спільних для цих дисциплін [15].

Здійснення міжпредметних зв'язків під час вивчення фізики помітно впливає на розвиток просторово-часових уявлень учнів. Використання фактичного матеріалу з інших предметів не тільки сприяє пізнанню об'єктивних закономірностей розвитку матерії в просторі і часі, а й створює необхідні передумови для ефективного засвоєння курсу, матеріал якого використовується.

Поступовий перехід від вивчення макроскопічних явищ і властивостей макротіл до вивчення мікроскопічних об'єктів і явищ дає змогу на певних етапах вивчення фізики узагальнити знання певних теорій, які відображені в кількох навчальних предметах, з'ясувати існуючі між поняттями просторово-часові зв'язки. Щоб уникнути однобічності в формуванні фундаментальних знань, слід спиратися на досить стійкі споріднені поняття математики, географії, хімії, креслення, біології.

Перші уявлення про простір і час учні дістають, вивчаючи матеріал про систему координат, будуючи графіки руху. Ці уявлення далі значно розширюються і поглиблюються під час ознайомлення з географічними координатами — довготою і широтою, та на уроках астрономії в XI класі, коли вивчаються координати небесних тіл.

На уроках хімії, біології систематично розглядаються процеси, явища, які характеризуються не тільки певною протяжністю й тривалістю, а й послідовністю стадій розвитку. Безумовно, що завершенням формування понять про простір і час є вивчення основ спеціальної теорії відносності, перетворень Лоренца на уроках фізики в X класі.

У нинішніх умовах неперервного нагромадження інформації надзвичайно зростає роль самостійного мислення, вміння розбиратись у фактах, явищах, самостійно їх пояснювати. Для цього, насамперед, треба мати різнобічні знання, вміти своєчасно відшукати необхідні зв’язки. Самостійне розв’язання теоретичних і практичних задач — необхідний ступінь на шляху до творчої діяльності, що передбачає різнобічну підготовку учнів. Тому треба дбати про постійне оволодіння новими дослідницькими прийомами як у вивченні нового матеріалу, так і в повторенні, виконанні лабораторних робіт, при розв’язуванні задач тощо.

Особливо важливо здійснювати міжпредметні зв’язки при розв’язуванні якісних задач на уроках фізики. Учні повинні усвідомити, що пояснити з достатньою глибиною дане явище можна лише за умови, коли основна закономірність, риса його розвитку розглядається через сукупність прояву його взаємодій з іншими явищами природи, які є предметами вивчення багатьох наук.

Так, наприклад, розв’язуючи якісні задачі на використання явищ змочування, капілярності, учні наводять відомі їм з біології приклади руху рідин по вузьких трубках, що є однією з умов, які забезпечують живлення рослин. Водночас постають запитання, пов’язані з тими явищами, які не були з’ясовані на уроках біології, наприклад, такі: як ніжні рослини пробивають товсті шари ґрунту, асфальту? Вчитель звертає увагу учнів на те, що інтенсивні потоки живильної рідини в надзвичайно тонких капілярних трубках рослин створюють тиск, який можна порівняти з тиском пари в парових котлах електростанцій. Цим пояснюється пробивна здатність рослин.

Учні також добре знають, що всі нові інструменти і, зокрема, ті, якими ще не користувалися в майстерні, змащені спеціальними мастилами. На це звертається увага у процесі вивчення взаємодії твердих і рідких тіл. Учням стає зрозумілим, що мастило зменшує вплив вологи на інструменти, яка спричиняє корозію.

Важливим етапом, що визначає успішність здійснення інтеграції фізики і математики, є попередня підготовка вчителя. Вона включає аналіз шкільних підручників, а також методичної літератури з метою встановлення рівня відображення в них вимог програми. Крім того, зіставляються й аналізуються програми курсів фізики і математики в різних класах. Це дозволяє виявити питання, які доцільно розглянути з використанням міжпредметних зв’язків або теми інтегрованих уроків.

Так, наприклад вивчення властивостей трикутників у курсі математики та ілюстрація їх застосування у фізиці на прикладі явищ в оптичних системах, безумовно, сприяє поглибленню міжпредметних зв’язків фізики і математики, підсиленню прикладної спрямованості навчання математиці та ілюстрації застосування математичних методів у фізиці. Це дає можливість вчителю фізики в повному об’ємі використати сформовані в учнів на уроках геометрії знання і вміння, що дозволяє на відповідному науковому рівні пояснювати фізичні поняття і закономірності. А проведений під час вивчення цих тем інтегрований урок геометрії і фізики «Властивості трикутників і геометрична оптика» сприяє підвищенню якості знань і вмінь учнів, розвитку їх просторової уяви, формуванню вміння зображувати просторові геометричні образи в певних проекціях, а також уявляти елементів природничо-наукової картини світу.

Широкі можливості для інтеграції фізики і математики відкриваються у X класі. Опорні знання, одержані учнями із курсу математики, часто використовуються при вивченні механіки, а це зобов’язує вчителя фізики з самого початку встановити тісний контакт з учителем математики, щоб правильно організувати повторення тих питань математики, які вкрай необхідні для курсу фізики.

Поняття функції — одне із фундаментальних в математиці. Курс фізики X класу відкриває всі можливості для конкретного вивчення функцій. Метод побудови графіків уже відомий школярам, проте на значення графіків руху та їх особливості треба звернути особливу увагу, оскільки в механіці їх широко застосовують. Крім того, завдання вчителя фізики — не тільки навчити учнів будувати графіки, але й аналізувати і читати їх, розуміти, яку інформацію про рух тіла можна взяти із графіка. Вивчення цього матеріалу в часі збігається з вивченням на уроках алгебри квадратичної функції та її властивостей. З метою формування в учнів цілісного уявлення про графіки, можливості графічних методів, їх застосування на практиці, а також з метою розвантаження учнів (на різних уроках проводиться вивчення подібних тем) доцільно в X класі в цей час провести інтегрований урок фізики та алгебри «Графіки залежності кінематичних величин від часу в рівноприскореному русі».

При вивченні в X класі розділів «Молекулярна фізика» і «Термодинаміка» учні поглиблюють знання з розділу математики «Рівняння і нерівності», закріплюють навички графічного зображення функціональних залежностей на прикладах рівняння стану газу та ізопроцесів у ньому. Удосконалити навички розв'язування задач на застосування поняття функції та побудови їх графіків, показати, що однією й тією самою функцією описується надзвичайно широкий клас різного роду залежностей, розширити кругозір учнів та їхні уявлення про можливості фізичних і математичних методів дослідження можна на інтегрованому уроці-семінарі «Поняття функції та її застосування у фізиці».

Всебічного прояву набуває інтеграція фізики й математики в XI класі. Успішне засвоєння основних положень теми «Коливання і хвилі» неможливе без знань з курсу математики про властивості й закономірності тригонометричних функцій, уміння застосувати похідну для вивчення характеристик коливального руху. В результаті цього основне рівняння гармонічних коливань, рівняння швидкості та прискорення таких коливань учні сприйматимуть як результат математичних узагальнень фізичних закономірностей коливального руху. Учителі фізики і математики повинні чітко спланувати спільну роботу з комплексного вивчення гармонічних коливань і хвиль, щоб уникнути зайвих повторень, нашарування однорідних понять, штучного введення взаємопов'язаних понять і характеристик. З цією метою можна провести в XI класі інтегрований урок алгебри та фізики «Диференціювання елементарних функцій. Гармонічні коливання. Застосування похідної для дослідження процесів коливального руху».

При вивченні матеріалу з фізики атомного ядра використовуються знання про показникову функцію і диференціальне рівняння, що описує її. Розглядаючи явище радіоактивності, слід звернути увагу на математичне вираження закону радіоактивного розпаду. Справді, закон радіоактивного розпаду відображає характерні властивості показникової функції. При вивченні цієї теми дуже корисним та ефективним може стати інтегрований урок фізики і алгебри «Закон радіоактивного розпаду. Диференціальне рівняння показникового зростання і показникового спадання».

Широкі можливості для здійснення інтеграції фізики і математики розкриваються на позакласних заняттях. Так, на засіданнях клубу старшокласників вчителями фізики і математики можуть бути прочитані лекції «Число в математиці і фізиці», «Симетрія навколо нас», «У світі ймовірностей», «Гіперболоїд інженера Гаріна та криві другого порядку» та інші. Ще один важливий напрям в здійсненні інтеграції в позаурочний час — факультативні заняття з розв'язування задач міжпредметного характеру. Наприклад, при розв'язуванні задач важливо знайомити учнів із загальними методами і підходами до аналізу задачі, а саме: аналітико-синтетичним, координатним, алгоритмічним. При цьому одні й ті самі задачі можуть на уроках математики і на уроках фізики розв'язуватися різними методами. Вчителям треба це враховувати, звертати увагу учнів на це, вчити їх обирати найраціональніший спосіб розв'язування. Важливими з практичної точки зору є задачі, в яких треба знайти найкоротшу дорогу, що задовольняє дані умови, чи обрати найкоротший маршрут, використовуючи дороги, що вже є, нарешті, обрати місце для будівництва об'єкта так, щоб в результаті транспортні затрати виявились мінімальними. Подібні задачі виникають в економіці на кожному кроці і, на перший погляд, без методів диференціального числення під час їх розв'язування не обійтись. Та велику кількість таких задач можна розв'язати простіше, якщо використати закони геометричної оптики.

Звичайно, однією з головних умов поглиблення взаємозв'язку при вивченні фізики і математики є узгодження програм. Наприклад у восьмому класі, вивчаючи тему "Обертальний рух тіла. Період обертання", немає можливості розглянути формулу періоду коливань математичного маятника, так як учні не знайомі ще з поняттям арифметичного квадратного кореня. Хоча дана тема теж розглядається у восьмому класі, але трохи пізніше.

Курс фізики у 7 класі передбачає вивчення теми "Будова атома, кількість молекул. Розмір молекул", в той час як відповідна тема з алгебри "Стандартний вигляд числа" вивчається у 8 класі, що вимагає від вчителя фізики додаткових витрат часу на попередній розгляд матеріалу, який буде детально вивчатись у наступному році. Вивчення у 7 класі ЗОШ теми з фізики "Оптичні явища. Заломлення" вимагає від учнів вільного володіння темою "Тригонометричні функції", яка у повному обсязі розглядається на уроках алгебри та початків аналізу у 10 класах [5; 10]. Така неузгодженість вимагає більш раціонального розподілу тем як у курсі математики, так і у курсі фізики.

Вимога розв'язування усіх фізичних задач у загальному вигляді потребує від кожного учня високого рівня математичної підготовки. Знання поняття похідної дозволяє кількісно оцінити швидкість зміни фізичних явищ і процесів у часі і просторі, наприклад швидкість випаровування рідини, радіоактивного розпаду, зміни сили струму та інше. Вміння диференціювати та інтегрувати відкриває великі можливості для вивчення коливань хвиль різної фізичної природи і разом з тим для повторення основних понять механіки (швидкості, прискорення) більш глибше, ніж вони трактувалися під час вивчення, а також для виведення формули потужності змінного струму. Користуючись ідеями симетрії, з якими учні знайомляться на уроках математики, можна фізично змістовно розглянути будову молекул і кристалів, вивчити побудову зображень у плоских дзеркалах і лінзи, з'ясувати картину електричних і магнітних полів.

Математика займає особливе місце у системі знань людства. Сьогодні немає практично такої галузі науки, де б не застосовувались досягнення математики. Математика є універсальною мовою, що широко використовується в усіх сферах людської діяльності. На сучасному етапі її роль у розвитку суспільства суттєво зростає. Значущим є також внесок математики у розвиток особистості, у становлення її світогляду, розвиток мислення.

Державний стандарт середньої освіти ґрунтується на засадах особистісно зорієнтованого, компетентнісного і діяльнісного підходів,що реалізовані в освітніх галузях і відображені в результативних складових змісту базової і повної загальної середньої освіти.

Система освіти в нашій країні вступила в період фундаментальних змін, що характеризуються новим розумінням цілей освіти, новими концептуальними підходами до розробки і використання навчальних технологій. Тому поставлені перед школою завдання щодо поєднання навчання з подальшою продуктивною працею, підвищення ефективності навчання можуть бути реалізовані за умовами зміни відношення педагогів до навчального процесу, у тому числі підвищення шкільної математичної освіти за умов посилення її прикладного, практичного та політехнічного спрямування.

Нові суспільні умови та нові завдання освітньої галузі «Математика» потребують корекції існуючих шляхів досягнення мети та вирішення зазначеної проблеми шкільного курсу математики, зокрема діяльнісний підхід спрямований на розвиток умінь і навичок учня, застосування здобутих знань у практичних ситуаціях.

Навчання математики в основній школі спрямоване на досягнення таких завдань:

- розкриття ролі та можливостей математики у пізнанні та описанні реальних процесів і явищ дійсності, забезпечення усвідомлення математики як універсальної мови природничих наук та органічної складової загальної людської культури;

- розвиток логічного, критичного і творчого мислення учнів, здатності чітко та аргументовано формулювати і висловлювати свої судження;

- формування здатності застосовувати математичні методи у процесі розв’язування навчальних і практичних задач, використовувати математичні знання і вміння під час вивчення інших навчальних предметів;

- розвиток умінь працювати з підручником, опрацьовувати математичні тексти, шукати і використовувати додаткову навчальну інформацію, критично оцінювати здобуту інформацію та її джерела, виокремлювати головне, аналізувати, робити висновки, використовувати отриману інформацію в особистому житті.

Посилення практичного спрямування матеріалу математики в процесі навчання, що передбачає виробленню в учнів умінь і навичок для застосування отриманих знань у практичній діяльності та при вивченні суміжних предметів, покращує загальний рівень освіти школярів. З цією метою на уроках математики доцільно використовувати прикладні задачі, в тому числі і задачі фізичного змісту, які сприяють активізації пізнавальної діяльності учнів та підвищенню їхнього інтересу до навчання. Важливо знайомити учнів із загальними методами і підходами до аналізу задач, а саме: аналітико-синтетичним, координатним, алгоритмічним. Причому одні й ті ж задачі можуть розв’язуватись на уроках фізики і математики різними методами або пропонуватись на інтегрованих уроках, де одна із задач вчителя – вчити учнів обирати найраціональніший спосіб.

Доцільність інтеграції математики та фізики

Щоб успішно реалізувати міжпредметні зв’язки у навчально-виховному процесі, вчителю треба попередньо проаналізувати програми, шкільні підручники та методичну літературу з метою їх виявлення.

Так як пріоритетною галуззю сучасної освіти є природничо-математична як основа для становлення та розвитку високотехнологічного інформаційного суспільства, то проблема інтеграції фізики і математики є надзвичайно важливою, адже математична підготовка школярів певною мірою впливає на рівень знань із фізики, оскільки: - вивчення окремих питань шкільного курсу фізики вимагає застосування складних математичних виразів; - існує необхідність аналізу функціональної залежності між фізичними величинами; - для розкриття динаміки фізичних явищ і встановлення причинно-наслідкових зв'язків важливо розуміти поняття функції; - поняття похідної дає змогу кількісно оцінити швидкість зміни фізичних явищ і процесів у часі та просторі; - вміння обчислювати інтеграл дає можливість визначити роботу змінної сили, потужність у колі змінного струму; - ідеї симетрії дозволяють на основі загальних наукових положень у молекулярній фізиці визначати будову молекул і кристалів, у оптиці – будувати зображення у плоских дзеркалах.

Щоб створити дидактичну модель міжпредметних зв'язків у навчальній темі, необхідно провести два структурно-логічних аналізи змісту навчальних дисциплін: внутрішній і зовнішній.

Внутрішній - це структурно-логічний аналіз змісту досліджуваної теми на предмет виявлення її провідних положень й основних пов'язуючих елементів.

Зовнішній - це структурно-логічний аналіз змісту тем інших дисциплін навчального плану школи з метою визначення ступеня перекриття їхнього змісту зі змістом досліджуваної теми й виявлення «опорних» міжпредметних знань, які необхідно використати, щоб науково й всебічно розкрити провідні положення досліджуваної теми розглянутого навчального предмета.

Перш ніж приступитися до вирішення цього завдання, необхідно визначити коло тих синтезованих тем навчального предмета, обраного для дослідження. Критеріями відбору цього кола навчальних тем є:

1. найбільша значимість тем для розкриття ведучих, основних ідей навчального предмета;

2. високий ступінь узагальнення й інтеграції різнорідних знань у змісті навчальної теми.

Опираючись на дані критерії, піддамо аналізу зміст навчальних тем

«Основи кінематики» та «Основи динаміки». Виділені навчальні теми найбільше відповідають меті даної роботи й критеріям відбору, наведеним вище.

Міжпредметні зв'язки теми «Основи кінематики»

Це тема - одна із центральних у предметі фізики. Ступінь перекриття змісту даної теми з іншими дисциплінами дуже висока. От чому значення міжпредметних зв'язків для розкриття провідних положень цієї теми величезне й об'єктивно необхідне.

Таблиця 1

Головні положення теми	**Знання, що використовуються з інших шкільних дисциплін для розкриття головних положень теми**
1. Опис положення тіла в просторі за допомогою системи координат	МАТЕМАТИКА: система координат, поняття про векторні величини, проекції векторів на координатні осі, дії над векторами та їх проекціями
2. Розкриття взаємозв'язку між основними кінематичними величинами, що описують рух тіл	МАТЕМАТИКА: використання математичних формул, дії для визначення певної величини через інші відомі
3. Опис рухомого тіла за допомогою графіків	МАТЕМАТИКА: побудова графіків руху, вектора, розв'язок рівнянь
4. Розуміння основоположних теорій руху	МАТЕМАТИКА: використання математичних формул, поняття про границю, диференціювання, інтегрування

Міжпредметні зв'язки теми «Основи динаміки»

Таблиця 2

Головні положення теми	**Знання, що використовуються з інших шкільних дисциплін для розкриття головних положень теми**
1. Поняття про силу як про векторну величину	МАТЕМАТИКА: побудова лінії векторів, від'ємні та додатні числа, дії над векторами
2. Розуміння ваги тіла, як величини, що може змінюватися	МАТЕМАТИКА: вектори, дії над векторами, тригонометричні обчислення
3. Рухи тіл з різними початковими швидкостями під дією сили тяжіння	МАТЕМАТИКА: вектори, побудова лінії векторів, дії над векторами, тригонометричні обчислення

Аналізуючи дані таблиці міжпредметних зв'язків можна побачити, що самі зв'язки в них дані у своєрідному статичному стані (статична сторона міжпредметних зв'язків у навчальній темі визначається змістом навчального матеріалу). Однак у реальному навчальному процесі міжпредметні зв'язки розглядаються в динаміці (динамічна сторона міжпредметних зв'язків у навчальній темі визначається процесом навчання) і в органічній єдності із внутрішньо-предметними й внутрішньо-курсовими зв'язками - у цьому й полягає якісна відмінність складеної дидактичної моделі міжпредметних зв'язків від процесу оволодіння ними школярами. Аналіз таблиці також може показати, що опорні міжпредметні знання часто носять «стиковий», синтезований характер. Особливо насичені ними останні теми. Це й зрозуміло, оскільки багато понять до кінця навчального року усвідомлюються й застосовуються старшокласниками на високому рівні узагальнення, у згорнутому виді [11].

Таким чином, таблично-текстовий аналіз змісту розглянутих навчальних тем показав, що вони можуть бути вивчені на широкій міжпредметній основі з метою наукового, системного, доступного й всебічного розкриття їхніх провідних положень і створення більш цілісної системи знань по кожній темі, через сукупність тем і по навчальному предмету в цілому. Провідні ідеї й положення навчальних дисциплін виконують при цьому функцію своєрідних «стрижнів, що стикуються».

Взаємозв'язок навчання фізики і математики

Сучасний курс математики побудований на ідеях множини, функції геометричних перетворень, які охоплюють різні види симетрії. Школярі вивчають похідні елементарних функцій, інтеграли і диференціальні рівняння. Математика не тільки дає фізики обчислювальний апарат, але і збагачує її в ідейному плані.

На уроках математики школярі вчаться працювати з математичними виразами, а завдання викладання фізики полягає в тому, щоб ознайомити учнів з переходом від фізичних явищ і зв'язків між ними до їх математичного виразу і навпаки [16].

Одне з центральних математичних понять в шкільному курсі фізики - поняття функції. Це поняття містить ідеї зміни і відповідності, що важливо для розкриття динаміки фізичних явищ і встановлення причинно-наслідкових відносин.

У шкільному курсі математики розглядають координатний метод, вивчають пряму і зворотну пропорційні залежності, квадратичну, кубічну, показову, логарифмічну і тригонометричні функції, будують їх графіки, досліджують і застосовують їх основні властивості.

Все це дозволяє школярам осмислювати математичні вирази фізичних законів, за допомогою графіків аналізувати фізичні явища і процеси, наприклад всілякі випадки механічного руху, ізопроцеси в газах, фазові перетворення, коливальні і хвильові процеси, спектральні криві електромагнітних випромінювань і ін. [9].

Уміння диференціювати й інтегрувати відкриває великі можливості для вивчення коливань і хвиль різної фізичної природи і разом з тим для повторення основних понять механіки (швидкості, прискорення) більш глибоко, ніж вони трактувалися при введенні, а також для виведення формули потужності змінного струму та ін. Користуючись ідеями симетрії, з якими учні знайомляться на уроках математики, можна фізично змістовно розглянути будову молекул і кристалів, вивчити побудову зображень в плоских дзеркалах і лінзах, з’ясувати картину електричних і магнітних полів [12].

Тісний зв’язок між шкільними курсами фізики і математики є традиційним. В результаті докорінної перебудови викладання цих дисциплін зв’язок між ними посилився, проте мають місце і деякі зміни [8] і хоча вони не такі вже й значні, але знання про це дозволить вчителю фізики більш ефективно побудувати викладання предмета.

Мають місце випадки, коли чисто математичні поняття в математиці не розглядаються, а у фізиці вводяться і використовуються. В геометрії докладно розглядаються операції додавання віднімання векторів, множення вектора на число, і абсолютно відсутнє поняття проекції вектора на вісь.

Не завжди на уроках фізики використовуються деякі математичні поняття, які міцно утвердилися в математиці. У фізиці не користуються поняттям протилежних векторів і нульового вектора, хоча вони відомі учням з курсу геометрії 8 класу.

У підручниках фізики та математики іноді використовується різна термінологія. У підручниках математики замість старого терміна «абсолютна величина числа» застосовується термін «модуль числа». У підручниках з фізики продовжують користуватися терміном «абсолютна величина».

У шкільному курсі математики застосовується термін «довжина вектора», оскільки розглядаються виключно геометричні вектори. У шкільному ж курсі фізики користуються термінами «модуль вектора» і «абсолютне значення вектора».

Іноді в шкільних курсах математики і фізики має місце невідповідність між символікою. Хоча ці порушення не надто значні, знання їх дозволить вчителю фізики більш ефективно побудувати викладання предмета.

Найскладнішим для учнів у курсі фізики 7-9 класів є такий математичний матеріал: -переведення одиниць величин; отримання величини з формули (співвідношення); -визначення за графіком значень функцій; -дії з векторами; -знаходження проекції точки і вектора на осі координат.

Аналіз можливостей інтеграції фізичних знань на уроках математики під час розв'язування задач

Проаналізуємо деякі можливості взаємодії шкільного курсу математики 5-11 класів в аспекті пропедевтики фізичних знань під час розв'язування задач.

5-6 кл.	- Текстові задачі на рух арифметичним методом та складанням рівнянь; - задачі з природничим змістом; - поняття про прямо пропорційні та обернено пропорційні величини; - формули (кількісні закони): $v=S/t$, та ρ=m/V; - складання числових і буквених виразів, робота з ними; - середнє арифметичне; - відсоткові розрахунки; - вправи на переведення одиниць фізичних величин; - площі та об'єми деяких геометричних фігур; - шкала, координатний промінь, координатна площина; - дії з від'ємними числами, цілими та дробовими числами, округлення чисел, наближені обчислення
7 кл.	- Буквені позначення, формули; - степінь з натуральним показником та його властивості; - лінійні рівняння, рівняння з двома невідомими, системи лінійних рівнянь; - поняття функції і її графічне представлення; - лінійна функція, пряма пропорційність; - властивості трикутників
8 кл.	- Поняття степеня з від'ємним показником; переведення одиниць величин; - стандартний вигляд числа; - графік оберненої пропорційності та її властивості; - квадратні та раціональні рівняння; - текстові задачі на рух; - співвідношення у прямокутному трикутнику; - подібність трикутників; - площі многокутників

9 кл.	- Функція, властивості функції, графік функції; - квадратична функція та її властивості; - розв'язування задач за допомогою системи рівнянь другого степеня; - математична модель практичної задачі, реального об'єкта чи процесу; - відсоткові розрахунки; - задачі, пов'язані з арифметичною та геометричною прогресіями; - вектори та дії над ними; - розв'язування трикутників; - площі многокутників, довжина кола, площі круга; - геометричні перетворення фігур; - розв'язування задач методом координат
10-11 кл.	- Тригонометричні, показникові та логарифмічна функції; - гармонічні коливання; - похідні елементарних функцій, механічний зміст похідної; - застосування похідної та інтеграла; - знаходження екстремумів, найбільшого та найменшого значень функції; - найпростіші диференціальні рівняння

Пропедевтика фізичного матеріалу у курсі математики 5-6 класів

Особливе місце в навчанні математиці 5-6 класів посідають сюжетно-текстові задачі, які є традиційним засобом навчання. У курсі фізики достатньо велика кількість задач на розрахунок шляху і часу руху. Подібні задачі розв'язуються у 5-6 класах в основному арифметичним методом на уроках математики, що необхідно використовувати, особливо на початку вивчення відповідної теми. Під час розв'язування задач учні встановлюють взаємний зв'язок між величинами, відновлюють у пам'яті їхні визначення, з'ясовують фізичний зміст формул, здійснюють зв'язок теорії з практикою.

Пропонуючи дітям задачі на рух, які розв'язуються арифметичним способом, слід розглядати реальні ситуації, різні види рухів: рух за течією річки і проти течії, озером, рухи в одному напрямку, в різних напрямках. Поїзди і автомобілі, морські судна, що при цьому широко використовують, легко уявити собі як такі, що рухаються із постійною швидкістю і тому підходять для розуміння сутності рівномірного руху. При цьому процес розв'язку треба обов’язково супроводжувати малюнками і схемами. У підручниках, збірниках є достатня кількість різноманітних сюжетних задач на рух.

Задача 1

Вирушивши в похід, Барвінок 14 год плив по річці на човні зі швидкістю 8 *км/год* і йшов пішки 23 *год* зі швидкістю 4 *км/год*. Який шлях річкою чи суходолом, він подолав більший і на скільки?

Задача 2

З одного села в одному напрямі вирушили одночасно два велосипедисти. Один з них їхав зі швидкістю 12 *км/год*, а другий – 9 *км/год*. Яка відстань буде між ними через 6 *год* після початку руху?

Задача 3

Відстань між двома містами дорівнює 2364 милі. З них одночасно вилетіли назустріч одне одному два килими-літаки і зустрілися через 8 *год* після вильоту. Один з килимів пролітав 82 милі за годину. З якою швидкістю летів другий килим?

У курсі математики 5-6 класів також багато задач на знаходження площі, довжини, об’єму, маси.

У 5-6 класах вивчаються *два кількісні закони:* $v=S/t$ *та* $\rho=m/V$. Використання конкретних значень фізичної величини *(швидкості, відстані, часу, площі, об’єму, густини*) у процесі розв’язування подібних задач сприяє розумінню самої ідеї вимірювання.

Так, формуючи вміння працювати з формулою у 5 класі, пропонуємо задачу:

Задача 1

Користуючись формулою об’єму прямокутного паралелепіпеда V=SH, обчисліть:

1) об’єм V, якщо S = 14 *м*^{2}, H = 3 *м*;

2) площу S основи, якщо V = 936 *см*^{3}, H = 26 *см*.

3) висоту H, якщо V= 3672 *дм*^{3}, S = 204 *дм*^{2}.

Більш цікавою, на мій погляд, є така задача:

Задача 2

Використовуючи формулу шляху, знайдіть:

А) значення шляху s(у *км*), якщо υ =60 *км/год,* t=20 *хв;*

Б) значення швидкості υ(у *см/хв*), якщо s=180 *м*, t=120 *хв;*

В) значення часу t (у *хв*), якщо s=24 *км*, υ=600 *м/хв*.

Розв'язуючи задачу, учні відпрацьовують вміння переводити фізичні величини. При цьому цікавою з дидактичної точки зору є задача А), тому що учні можуть розв'язати її двома способами:

1). υ =60 *км/год* =(60:60) *км/хв*=1 *км/хв* і тоді s = υt = 1·20 =20 *км* або 2). Оскільки t = 20 *хв* – 1/3 частина години, то s = 60:3 = 20 *км*. Причому спосіб 2 не лише логічно цікавіший, а й дає змогу дитині більш глибше зрозуміти фізичний зміст поняття швидкості.

Взагалі, у 5-6 класах варто пропонувати дітям *задачі на переведення фізичних величин*: шляху, швидкості, часу, маси, об'єму, площі, особливо тоді, коли вони вже вивчили десяткові дроби. Поряд з письмовим виконанням таких вправ потрібно частіше їх використовувати під час усного рахунку.

Доцільно розв'язувати також *задачі з природничим змістом*. Наведемо деякі приклади:

1.Швидкість поширення звуку у повітрі 330 *м/с*. Через який проміжок часу ми почуємо гуркіт грому, якщо блискавка спалахнула на відстані 3 *км* 300 *м* від нас?

2.Відстань від Землі до Сонця становить 150 млн. *км*. Скільки часу йде до Землі світло від Сонця, якщо за секунду воно проходить 300 тис. *км*? Скільки часу потрібно було б ракеті, щоб подолати таку ж саму відстань, якщо її швидкість15 *км/с*?

3. Радіус Сонця дорівнює приблизно 696 000 *км*, а Землі - 6400 *км*. У скільки разів радіус Сонця більший за радіус Землі?

Головна перевага конкретних задач – велика наочність і зв'язок із життям. Використання незвичайних парадоксальних і цікавих фактів пожвавлює урок, збільшує інтерес учнів до математики. *Сюжетні задачі* використовуються також і на уроках фізики. Розв'язування сюжетних задач забезпечує високий рівень розвитку творчої ініціативи учнів, здібностей і вмінь розв'язувати не тільки сюжетні, а й будь-які інші задачі. І. Ланіна зазначає, що на початковому етапі навчання розв'язуванню задач з фізики необхідно використовувати задачі із цікавим сюжетом з метою розширення сфери інтересів, не пов'язаних із навчальним предметом.

Специфічні вимоги до методики формування і розвитку початкових фізичних уявлень у 5-6 класах визначаються віковими особливостями учнів молодшого підліткового віку і труднощами, які виникають при цьому. З метою розвитку початкових фізичних уявлень доцільно використовувати сюжетні задачі, котрі складаються на основі дитячих художніх творів, кінофільмів, мультфільмів, відомих кожній дитині. Ці задачі містять не тільки необхідну для розв'язування умову, а також активізують пізнавальну діяльність і емоційну сферу учнів. Умови задач за мотивами художніх творів, анімаційних фільмів створюють яскраві емоційно забарвлені образи, а тому вони наочні і добре запам'ятовуються. Також сюжетні задачі укладаються на основі різноманітних побутових, технічних ситуацій. Особливо *цікавими є такі сюжетні задачі, як задачі-казки, задачі-розповіді, задачі-пригоди тощо*.

1. Чим відрізняється маса трьох кубометрів дров від маси трьох кубометрів диму?

2. Клоун у цирку однією лівою підіймає величезну гирю, на якій написано 500 *кг*. Насправді маса гирі у сто разів менша. Об'єм гирі 0,2 $м^3$. Знайдіть густину циркової гирі.

3. Одного разу одиниця вимірювання довжини вирушила у дорогу, у темряві зустріла одиницю вимірювання маси, але обізналася і прийняла її за одиницю вимірювання швидкості. Хто обізнався і кого не пізнав той, хто обізнався?

Розглянемо деякі приклади задач фізичного змісту у курсі алгебри та геометрії 7-11 класів відповідно до змістових ліній освітньої галузі «Математика» Державного стандарту базової і повної загальної середньої освіти.

Рівняння і нерівності

У курсі алгебри 7-9 кл. програмними вимогами передбачено застосування рівнянь (лінійних, квадратних, раціональних) та їх систем під час розв'язування задач. Особлива увага приділяється задачам на рух. При розв'язуванні таких задач прийнято позначати невідому величину через x (ікс), проте з метою реалізації міжпредметних зв'язків з фізикою у окремих випадках корисно вводити позначення фізичних величин.

Задача 1.

Теплохід пройшов за течією річки 48 *км* і стільки ж проти течії і затратив на весь шлях 5 *год*. Знайдіть власну швидкість теплохода, якщо швидкість течії річки 4 *км/год*.

Розв'язання:

Нехай власна швидкість теплохода дорівнює x *км/год*, тоді швидкість за течією дорівнює $(x + 4)$*км/год*.

На шлях за течією теплохід затратив $48/(x+4)$ годин, на шлях проти течії $48/(x-4)$ годин, а всього затратив 5 годин. Отримуємо рівняння:

$48/(x+4) + 48/(x-4) = 5;$

$\underline{48(x - 4) + 48(x + 4) - 5(x^2 - 16) = 0;}\ x \neq 4$ *і* $x \neq -4;$

$-5x^2 + 96x + 80 = 0,$

$5x^2 - 96x - 80 = 0;$

$D = 2304 + 400 = 2704;$

$x_1 = (48 + 52)/5 = 20,$

$x_2 = (48 - 52)/5 = -0{,}8.$

Очевидно, що від'ємне значення кореня не задовольняє умову задачі. Отже, власна швидкість теплохода дорівнює 20 *км/год*.

Відповідь: *20 км/год*.

Задача 2.

З пункту *А* відправили за течією річки пліт. Через 5 *год* 20 *хв* з пункту *А* слідом за плотом вийшов моторний човен, який наздогнав пліт, пройшовши

20 *км.* Знайдіть швидкість течії річки, знаючи, що човен проходив щогодини на 12 *км* більше, ніж пліт.

Розв'язання:

Позначимо швидкість течії річки через *x км/год*. Очевидно, що пліт рухався зі швидкістю *x км/год*. Оскільки моторний човен проходив за годину на *12 км* більше, можна сказати, що його швидкість була *(x+12) км/год*. Тоді *20 км* він пройшов за *20/(x+12)* годин. Пліт знаходився в дорозі на *5 год 20 хв* довше і проплив ті ж *20 км,* тобто

$20/x - 20/(x+12) = 16/3$;

Розв'яжемо це рівняння:

$20/x - 20/(x+12) - 16/3 = 0;$

$60(x+12) - 60x - 16x(x+12) = 0, \; x(x+12) \neq 0;$

$60x + 720 - 60x - 16x^2 - 192x = 0;$

$-16x^2 - 192x + 720 = 0;$

$x^2 + 12x - 45 = 0;$

$x_1 = -15, \; x_2 = 3.$

Від'ємне значення кореня не задовольняє умову задачі. Отже, швидкість течії річки дорівнює *3 км/год*.

Відповідь*: 3 км/год*

Задача 3.

З пункту *A* виїхав мотоцикліст, а через *1,5 год* услід за ним – автомобіль. Швидкість автомобіля *80 км/год*, а швидкість мотоцикліста – *40 км/год*. Через який час після свого виїзду автомобіль наздожене мотоцикліста?

$(80t=40(t+1,5))$

Числа. Вирази

Одна із найсуттєвіших претензій, що її висувають вчителі фізики і хімії, стосується обчислювальних умінь і навичок школярів. Виявляється, учні 7 – 11 класів частіше і охочіше користуються громіздкими натуральними числами і десятковими дробами, не записуючи їх у стандартному вигляді.

При розгляді теми «Степінь з цілим показником і його властивості. Стандартний вигляд числа» доцільно розв'язувати задачі практичного змісту.

Задача 1

Запишіть у стандартному вигляді

1) масу Землі М (М = 6000000000000000000000 *т*);
2) 1*мг* = 1/1000 000 000 *кг*;
3) масу атома гідрогену 0,0000000000000000000000017 *г*;
4) масу Місяця 73500000000000000000 *кг;*
5) швидкість світла 300000 *км/с;*
6) об'єм Землі 1083000000000 $м^3$

Задача 2

Густина заліза становить $7{,}8 \cdot 10^3$ $кг/м^3$. Знайдіть масу залізної плити, довжина якої 1,5 *м*, ширина $4 \cdot 10^{-1}$ *м*, а висота $2{,}1 \cdot 10^{-1}$ *м*.

Задача 3

Виразіть:

1) $5{,}2 \cdot 10^6$ *кг* у грамах;
2) $1{,}7 \cdot 10^{-6}$ *км* у дециметрах;
3) $8{,}13 \cdot 10^{10}$ *кг* у тонах;
4) $6{,}21 \cdot 10^{-10}$ *мм* у метрах

У курсі алгебри бажано глибше розглядати питання наближених обчислень.

Все сказане дає змогу зробити **висновок**. Інтеграція математики та фізики у навчальному процесі можлива на основі актуалізації математичних знань на уроках фізики і навпаки, фізичних знань на уроках математики. Формувати творче мислення учня можна тільки на базі зінтегрованого циклу навчальних предметів; це може бути двопредметний фізико-математичний цикл. Проблема інтеграції знань є складною та багатогранною, однією з її граней є регулярне поповнення традиційних курсів фізики і математики інтегруючими елементами з метою вдосконалення форм і засобів мислення.

Стратегічною метою математичної освіти в загальноосвітньому навчальному закладі є розвиток і саморозвиток школярів шляхом оволодіння математичними знаннями й видами діяльності, забезпечення їх математичної грамотності для свідомого вибору профілю подальшого навчання. Людина нового тисячоліття, безумовно, потребує інтегрованої системи знань, оскільки в сучасних умовах будь-якому спеціалісту необхідно опиратися на досягнення суміжних областей знань. Тому в Україні, в умовах сучасних реформувань, звертається увага на те, що шкільні навчальні предмети повинні не просто співіснувати в рамках програм, а співпрацювати, насамперед у змісті освіти. Оскільки ж математика сьогодні перетворилася на єдиний з всезагальних методів пізнання природи і суспільства, то шкільний курс математики має бути максимально адаптованим до потреб суміжних навчальних дисциплін, а одне з основних завдань його вивчення - забезпечення бази для засвоєння інших предметів природничо-математичного циклу.

Глибокі зв’язки, які існують між математикою і фізикою як науками, мають знаходити адекватне відображення у зв’язках між відповідними дисциплінами. Фізика нерозривно пов’язана з математикою. Математика дає для фізики засоби і прийоми загального і точного вираження залежності між фізичними величинами, які відкриваються в результаті експерименту або теоретичних досліджень. Тому зміст і методи викладання фізики залежать від рівня математичної підготовки учнів. Це підтверджують і слова англійського фізика **П. Дірака: «Фізичний закон повинен бути математично красивим».**

Посилення ж практичного спрямування матеріалу з математики в процесі навчання передбачає вироблення в учнів умінь і навичок для застосування отриманих знань у практичній діяльності, а тому покращує загальний рівень освіти школярів. З цією метою на уроках математики з успіхом використовують прикладні (в тому числі фізичного змісту) задачі, які сприяють активізації пізнавальної діяльності учнів та підвищенню їхнього інтересу до навчального предмета. І тут доречно згадати вислів **Євгенія Вагнера: «Вся глибина думки, яка закладена у формулювання математичних понять, згодом розкривається тим умінням, з яким ці поняття використовуються».**

Встановлення цілісної картини світу на основі міжпредметних зв’язків у навчальному процесі при викладанні фізики і математики відкриває шляхи для розв’язання проблеми підвищення якості освіти, розвитку самостійності й творчої активності учнів та підготовки їх до самостійного здобуття знань і творчої діяльності, формуванню в них наукового світогляду.

Інтегративний підхід при викладанні фізики і математики не лише підвищує якість окремих компонентів навчального процесу, а й сприяє формуванню в учнів комунікативних, ділових, інформаційних компетентностей, структурованої системи знань, яка зумовлює їхнє орієнтування в конкретно-предметній діяльності.

ЛІТЕРАТУРА

1. Вегера М., Галатюк Ю.М. Інтеграція навчання математики і фізики у сучасній школі / Ю. Галатюк, М. Вегера //Фізика. Нові технології навчання – Збірник наукових праць студентів і молодих науковців – Випуск 7. – Кіровоград: Ексклюзив-Систем, 2009. – С.26 – 31.
2. "Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти", затверджений постановою Кабінету Міністрів України від 23 листопада 2011 р. № 1392.
3. Бугаев А.И. Методика преподавания физики в средней школе. Теорет. основы. Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов / А. И. Бугаев. - М.: Просвещение, 1981. -С. 288.; Пинский А.А. К формированию понятия «функция» в школе. // Физика в школе, 1977, № 1. - С. 38.
4. Галатюк Ю.М. Міжпредметні зв’язки у навчанні фізики в основній школі: навчально–методичний посібник /О. Войнович, Ю. Галатюк. – Рівне: РВВ РДГУ, 2010. – 122 с.
5. Збірник програм для допрофільної підготовки та профільного навчання. Математика. Част. I-II. Харків: Ранок, 2011. – 57 с.
6. Иванов А. И., О взаимосвязишкольныхкурсовфизики и математики при изучении величин, - «Физика в школе», 1997, №7, стр. 48.
7. Кожекина Т. В., Взаимосвязь обучения физике и математике в одиннадцатилетней школе, - «Физика в школе», 1987, №5, стр. 65.
8. Кожекина Т. В., Никифоров Г. Г., Пути реализации связи с математикой в преподавании физики, - «Физики в школе», 1982, №3, стр. 38.
9. Коробов В. А., Опыт применения математики в преподавании физики, - «Физика в школе», 1991, №4, стр. 23.
10. Мантула Т.І. Інтегроване викладання та міжпредметні зв’язки в історичному аспекті та сьогоденні // Все для вчителя. – 2005.-№ 37. – С.23-27.
11. Межпредметные связи в учебном процессе. / Под. ред. Дмитриев С.Д. - Киров - Йошкар-Ола: Кировский гос. пед. ин-т, 1978. - С. 80.

12. Методика обучения физике в школах СССР и ГДР, под ред. Зубова В. Г., Разумовского В. Г., Вюншмана М., Либерса К. – М., Просвещение, 1978.].

13. Морозова О. А., Активное использование понятий и методов математического анализа в процессе преподавания темы «Электромагнитные колебания», Дипл. работа, Кемерово, КемГУ, Кафедра общей физики, 1995.

14. Пинский А.А. К формированию понятия «функция» в школе. // Физика в школе, 1977, № 1. - С. 38.

15. Стецюк К.Р. Методологічні та дидактичні аспекти актуалізації математичних знань у навчанні фізики / К. Р. Стецюк, Ю.М. Галатюк // Фізика. Нові технології навчання: Збірник наукових праць студентів і молодих науковців. Випуск 12. – Кіровоград: Ексклюзив-Систем, 2014. – С. 58 – 63.].

16. Тамашев Б.И., Некоторые вопросы святи между школьными курсами физики и математики, - «Физика в школе», 1982, №2, стр. 54.

Бенедисюк Марія Миколаївна – старший лаборант.

Наукові інтереси: система завдань міжпредметного змісту при вивченні фізики в ЗОШ.

Королюк О. М.

кандидат педагогічних наук, доцент

ДО ПИТАННЯ МЕТОДИКИ НАВЧАННЯ УЧНІВ РОЗВ’ЯЗУВАТИ ТЕКСТОВІ ЗАДАЧІ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

Реформа загальної середньої освіти «Нова українська школа» формулює фундаментально новий підхід до розвитку вчителя та його педагогічної свободи. Нині суспільство потребує не вузьких спеціалістів-педагогів, а всебічно розвинених, соціально активних особистостей, які мають фундаментальну наукову підготовку, глибоку внутрішню культуру, а також сформовані професійні знання і вміння, які включають у себе знання і вміння з предмету, зокрема з математики, з педагогіки та психології, методики навчання.

Зміни, які відбуваються в освіті, вимагають модернізації методичної підготовки майбутніх учителів математики. Потрібно вдосконалювати зміст математичної освіти, розробляти нові методичні системи навчання, створювати нові програми, підручники, навчальні посібники, дидактичні матеріали на базі сучасних інформаційно-комунікаційних технологій, з урахуванням новітніх досягнень у науці, техніці, організації суспільного життя. Таким чином, якісна методична підготовка майбутнього вчителя математики стає основним показником його професійної компетентності.

Проблема професійної підготовки вчителя завжди була в центрі уваги провідних вчених: педагогів, психологів, математиків. Загальнопедагогічні аспекти вирішення проблеми досліджувалися у роботах А. Алексюка, Ю. Бабанського, Н. Бібік, С. Гончаренка, В. Давидова, Н. Дем’яненко, О. Дубасенюк, Л. Занкова, М. Махмутова, Н. Тализіної та багатьох інших.

Проблемі методичної підготовки вчителя математики як важливої складової його професійної підготовки присвячено наукові праці І. Акуленко, О. Астряба, Г. Бевза, М. Бурди, О. Дубінчук, А. Коломієць, А. Мордковича, З. Слєпкань, Г. Саранцева, С. Семенця, М. Скаткіна, О. Скафи, В. Швеця та ін.

У математиці задачі посідають особливе місце. Математична наука виникла із задач, вона розвивається для розв`язування нових задач. Часто саме потреби практики примушували вчених-математиків створювати нові алгоритми, встановлювати закономірності, розробляти нові методи розв'язування задач.

У шкільному курсі математики багато уваги приділяється текстовим задачам. З одного боку, текстові задачі становлять певний розділ програми, матеріал якого учні повинні засвоїти, а з іншого – виступають як дидактичний засіб навчання, виховання і розвитку школярів. Тому питання методики навчання учнів розв’язувати текстові задачі завжди привертали увагу науковців і вчителів-практиків.

Уміння розв`язувати задачі вимагає знання залежностей між величинами, розуміння сутності арифметичних операцій, володіння прийомами обчислень, знання загальних правил встановлення причинно-наслідкових зв`язків, розуміння змісту та структури задачі, уміння орієнтуватися в певних життєвих ситуаціях тощо. У процесі розв`язування задач реалізуються цілі навчання математики: набуття і вдосконалення математичних знань; формування математичних умінь; розвиток творчого і логічного мислення тощо.

Традиційно розв’язування текстових задач викликає у школярів неабияких труднощів. Тому актуальним є окремий детальний розгляд питання методики навчання учнів розв’язувати такі задачі. На жаль, у межах начального часу, який виділяється на фаховий курс «Методика навчання математики», опанувати це питання повною мірою у студентів немає можливості. Деякою мірою вирішити цю проблему покликаний варіативний курс «Методика навчання учнів розв’язувати текстові задачі в курсі математики основної школи», який запроваджено для студентів 4-го курсу на фізико-математичному факультеті Житомирського державного університету імені Івана Франка.

У методиці навчання математики під *математичною задачею* розуміють будь-яку вимогу обчислити, побудувати довести або дослідити що-небудь, що стосується просторових форм чи кількісних співвідношень, або запитання, рівносильне такій вимозі [4, с. 52].

У структурі кожної задачі можна виділити умову й вимогу. Те, що дано в задачі називається її *умовою*, а те, що потрібно знайти – *вимогою*. Виконати сформульовану в задачі вимогу – це й означає *розв'язати* її [4, с. 52].

Опис процесу розв’язування у вигляді послідовності всіх міркувань, який часто подається у символічній формі, називають *розв’язанням* задачі. Розв’язання кожної задачі повинно бути безпомилковим, обґрунтованим, повним та раціональним. *Розв’язок* – це остаточний результат процесу розв’язування задачі [4].

Метод розв’язування задачі – це сукупність прийомів розумової діяльності або логічних математичних дій і операцій, за допомогою яких розв’язується великий клас задач [21].

Під *способом розв’язування задачі* в математиці розуміють сукупність прийомів розумової діяльності або логічних математичних дій і операцій, які використовуються у разі розв’язування окремої задачі або невеликої групи задач певного типу [21].

Кожну задачу можна розв’язати «по діям», оперуючи заданими числовими значеннями величин і відношеннями між ними. Це – *арифметичний спосіб* розв’язування. За умовою задачі також можна скласти рівняння або систему рівнянь, а вже їх допомогою одержати відповідь. Такий спосіб розв’язування задач називають *алгебраїчним* [15, с. 74].

У шкільному курсі математики існують задачі, в яких дані величини і зв'язок між ними включені у певну фабулу. Зміст цієї фабули є сюжетом, де відображено ситуацію, близьку до практичної, життєвої. У ній описується кількісний аспект реального явища чи події і міститься вимога знайти невідоме значення деякої величини (величин). Такі задачі називаються сюжетними [15, с. 74]. Оскільки ці задачі сформульовано звичайною (нематематичною) мовою, то їх часто називають також текстовими**.**

Отже, *текстова задача* – це опис на звичайній мові деякої ситуації, в якій потрібно надати кількісну характеристику якої-небудь компоненти цієї ситуації, встановити наявність чи відсутність певного співвідношення між її компонентами чи визначити вид цього співвідношення.

На основі аналізу математичної і методичної літератури, можна узагальнити:

задача – це вимога виконати що-небудь, або запитання, рівнозначне такій вимозі;

математична задача – будь-яка вимога обчислити, дослідити, побудувати або довести що-небудь методами математики;

текстова (сюжетна) задача – відображення ситуації, близької до життєвої, практичної, в якій описується кількісний аспект реального явища чи події і міститься вимога знайти невідоме значення деякої величини.

Текстові задачі допомагають розкрити опосередковані зв’язки математики з навколишнім середовищем і практичною діяльністю людей, реалізувати пізнавальні й виховні функції навчання. Від оволодіння вміннями розв’язувати задачі залежить не лише математична підготовка школярів на певному етапі навчання, а й осмислене засвоєння систематичних курсів алгебри, геометрії, фізики, інформатики, економіки тощо.

У навчальному процесі текстові задачі виконують різні *функції:*

навчальна – формування в школярів системи математичних знань, умінь і навичок;

виховна – формування світогляду, пізнавального інтересу і навичок самостійної праці;

контрольна – встановлення рівня навченості, здатності до самостійного навчання математики тощо;

інформативна – знайомство із різноманітними галузями прикладання математки, з історією виникнення математичних ідей тощо;

інтегруюча, яка проявляється, наприклад під час розв’язування текстових задач, які реалізують між предметні зв’язки;

евристична – використання та засвоєння різного роду евристик, евристичних прийомів, застосування їх у різних ситуаціях.

Уміння розв'язувати текстові задачі залежить від багатьох факторів. Перед усім необхідно навчитися розрізняти основні типи задач і вміти розв`язувати найпростіші із них.

Виділяють різні типи текстових математичних задач: «на рух»; «на спільну роботу і планування»; «на залежність між компонентами арифметичних операцій»; «на відсотки»; «на використання геометричних співвідношень» [13].

Розглянемо методичні особливості задач деяких типів та наведемо приклади розв'язування.

Задачі на рух – це задачі, у фабулі яких описується рух певних об'єктів.

Обов`язковими компонентами задач, такого типу є: шлях (S), пройдений тілом (тілами); швидкість ($\mathcal{V}$) об'єктів, що рухаються; час руху (t).

Основною формулою, на якій ґрунтується розв'язання усіх задач на рух, – є формула: $S = \mathcal{V}t$.

Розрізняють такі *основні види задач на рух*: - на зустрічний рух; - на рух у протилежних напрямках; - на рух в одному напрямі; - на рух із зупинкою на шляху; - на рух по воді; - на знаходження середньої швидкості руху.

Зустрічний рух

1. Якщо два тіла рухаються з двох пунктів назустріч одне одному, то до зустрічі вони разом проходять усю відстань між цими пунктами.

2. При одночасному виході тіл з цих пунктів час їх руху до моменту зустрічі однаковий і дорівнює: $t = S/(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)$.

3. За одиницю часу тіла зближуються на відстань, що дорівнює сумі їх швидкостей (із розрахунку на одиницю часу).

Рух у протилежних напрямках

Якщо два тіла рухаються з одного пункту у протилежних напрямках, то за одиницю часу вони віддаляються на відстань, що дорівнює сумі їх швидкостей (із розрахунку на одиницю часу).

Рух в одному напрямі

1. Тіло, що рухається, може наздогнати інше лише тоді, коли швидкість його більша за швидкість тіла, яке рухається попереду.

2. Якщо два тіла, які знаходяться на певній відстані, рухаються в одному напрямку, то ця відстань із кожною годиною (хвилиною, секундою) зменшується і перетворюється на нуль, коли тіло з більшою швидкістю наздоганяє тіло, швидкість якого менша. Зменшення відстані між тілами за одиницю часу дорівнює різниці швидкостей цих тіл.

3. При одночасному початку руху тіл з одного і того ж самого пункту й руху в одному напрямку тіл, що мають неоднакову швидкість, відстань між ними з кожною годиною (хвилиною, секундою) збільшується. Збільшення відстані між такими тілами за одиницю часу дорівнює різниці їх швидкостей.

4. Якщо швидкість першого тіла більша, то воно наздожене інше за час

$t = S/(V_1 - V_2)$.

Рух по воді

Тут розрізняють *рух за течією* та *рух проти течії;* виділяють власну швидкість катера (човна тощо) або швидкість у стоячій воді (по озеру), швидкість течії річки.

Швидкість течії річки вважається постійною. Швидкість плота вважається такою, що дорівнює швидкості річки.

Швидкість переміщення тіла V по воді, при швидкості течії річки $V_т$ і власної швидкості руху $V_{вл}$ виражається:

1. $V_{за\ т} = V_{вл} + V_т$ при русі тіла за течією річки.
2. $V_{пр\ т} = V_{вл} - V_т$ при русі тіла проти течії річки.

Звідки $V_{за\ т} - V_{пр\ т} = 2\ V_т$. – різниця швидкостей за течією і проти течії річки дорівнює подвоєній швидкості течії.

Розглянемо приклади [7; 8; 14; 18; 20; 22; 23].

Задача 1.1. *Товарний потяг був затриманий на 12 хв, а потім на відстані 60 км надолужив загаяний час, збільшивши швидкість на 15 км/год. Знайти початкову швидкість потягу.*

Розв'язання. За умовою задачі: якби потяг після запинки в пункті *В* продовжив рухатися з початковою швидкістю, то він витратив би на 12 *хв*

більше, ніж передбачено розкладом.

Нехай *х км/год* – початкова швидкість поїзда.

Тоді $t_1 = \frac{60}{x}$ – час руху до зупинки, а $t_2 = \frac{60}{x+15}$ – час руху після зупинки.

Отже, $t_1 - t_2 = \frac{1}{5}$. Складемо рівняння: $\frac{60}{x} - \frac{60}{x+15} = \frac{1}{5}$.

Звідки $x_1 = 60$, а $x_2 = -75$, що не задовольняє умову задачі, оскільки швидкість – величина невід'ємна.

Відповідь: 60 км/год.

Задача 1.2. *Із двох міст, відстань між якими 24 км, назустріч один одному вирушили два пішоходи і зустрілися на середині шляху, причому один із них розпочав свій рух на одну годину раніше, ніж інший. Якби пішоходи вийшли одночасно, то вони б зустрілися через 2 год 24 хв. Знайти швидкості пішоходів.*

Розв'язання. Нехай швидкість першого пішохода дорівнює *x км/год,* а швидкість другого – *y км/год*. Оскільки вони зустрілися на середині шляху, то кожний пройшов по 24:2=12 (км); першому на це знадобилось $\frac{12}{x}$ год, а другому $\frac{12}{y}$ год. Врахувавши, що за умовою задачі перший вийшов на 1 годину раніше, складаємо рівняння: $\frac{12}{x} - \frac{12}{y} = 1$.

Якби пішоходи вийшли одночасно і зустрілися через 2 *год* 24 *хв* = $2\frac{2}{5}$ *год,* то перший подолав би відстань $2\frac{2}{5}x$ *км,* а другий $2\frac{2}{5}y$ *км.* Проте разом було б пройдено 24 км. Отже, можна скласти друге рівняння: $2\frac{2}{5}x + 2\frac{2}{5}y = 24$.

Одержали систему: $\begin{cases} \frac{12}{x} - \frac{12}{y} = 1 \\ 2\frac{2}{5}x + 2\frac{2}{5}y = 24. \end{cases}$

Звідки: $x = 30$ (не задовольняє умову задачі) або $x = 4$. А $y = 10 - x$. Отже, $x = 4$, $y = 6$.

Таким чином, швидкість першого пішохода 4 *км/год*, а швидкість другого 6 *км/год*.

Відповідь: 4 км/год, 6 км/год.

Задача 1.3. *Катер пройшов 15 км за течією річки за 1 год і повернувся на ту саму пристань, витративши на зворотний шлях півтори години. Знайти швидкість катера та швидкість течії річки.*

Розв'язання. Нехай власна швидкість катера $V_{вл} = x$ *км/год*, а швидкість течії $V_{т.} = y$ *км/год*.

Складемо таблицю відповідно до умови задачі:

Рух	*V, км/год*	*S, км*	*t, год*
За течією	$x + y$	15	1
Проти течії	$x - y$	15	1.5

Для знаходження швидкості катера, який рухається за течією річки, потрібно до його власної швидкості додати швидкість течії: $x+y=15$.

Для того, щоб знайти швидкість проти течії, потрібно від власної швидкості відняти швидкість течії: $x - y = 10$.

Отже, складаємо систему рівнянь: $\begin{cases} x + y = 15 \\ x - y = 10. \end{cases}$

Звідки $x = 12,5$, а $y = 2,5$.

Відповідь: власна швидкість катера 12,5 км/год, швидкість течії річки 2,5 км/год.

Задача 1.4. *Рибалка відправився на човні з пункту А проти течії річки. Пройшовши 3 км, він кинув весла, і через 4 год 30 хв після відправлення з пункту А течія його віднесла назад до цього пункту. Знайдіть швидкість течії річки, якщо швидкість човна у стоячій воді становить 2,7 км/год.*

Розв'язання. Нехай швидкість течії *x км/год*. Систематизуємо дані умови задачі у вигляді таблиці:

Рух	*V, км/год*	*S, км*	*t, год*
За течією	x	3	$\frac{3}{x}$
Проти течії	$2{,}7 - x$	3	$\frac{3}{2{,}7 - x}$

Оскільки на весь шлях рибалка витратив 4 *год* 30 *хв*, складемо рівняння:

$$\frac{3}{x} + \frac{3}{2{,}7 - x} = 4\frac{1}{2}.$$

Звідки $x_1 = 1{,}2$, а $x_2 = 1{,}5$.

Відповідь: швидкість течії річки 1,2 км/год або 1,5 км/год.

Серед текстових задач на рух особливе місце посідають задачі ***на рух по колу***. Їх вирізняють деякі особливості. На жаль, за браком часу, а в деяких випадках свідомо, учителі залишають поза увагою навчання школярів розв'язувати такі задачі. Адже досить часто учні не готові зрозуміти співвідношення між компонентами, які характеризують рух по замкненій траєкторії (колу).

У ході розв'язування таких задач потрібно враховувати:

1) якщо два тіла рухаються по колу радіуса R із сталими швидкостями V_1 і V_2 у різних напрямах, то час між їх зустрічами обчислюється за формулою

$t = 2\pi R/(V_1 + V_2)$;

2) якщо два тіла рухаються по колу радіуса R зі сталими швидкостями V_1 і V_2 ($V_1 > V_2$) в одному напрямі, то час між їх зустрічами визначається:

$t = 2\pi R/(V_1 - V_2)$;

3) під час руху тіл в одному напрямку, незалежно від того, на якому колі одне тіло вперше наздоганяє друге і скільки часу пройшло, перше тіло проходить лише на одне коло більше, ніж друге.

Підвести учнів до розуміння цих положень можна на основі спеціально підібраних вправ. Розглянемо приклади [[7; 8; 10; 14; 18; 20; 22; 23].

Задача 1.5. Годинник показує північ. Через скільки хвилин годинна і хвилинна стрілки знову співпадуть.

Розв'язання. Незважаючи на таке формулювання – це звичайна задача на рух в одному напрямку.

Нехай довжина кола циферблата дорівнює С. Оскільки хвилинна стрілка проходить циферблат за *1 год = 60 хв*, то її швидкість С/60.

Годинникова стрілка проходить циферблат за *12 год (720 хв)* та її швидкість дорівнює С/720.

Отже, ці стрілки знову співпадуть через $\frac{C}{\frac{C}{60}-\frac{C}{720}} = \frac{720}{11} = 65\frac{5}{11}$*хв*.

Відповідь: $65\frac{5}{11}$*хв*.

Задача 1.6.. По колу, довжина якого дорівнює *100 м*, рухаються два тіла. Вони зустрічаються через кожні *20 с*, якщо рухаються в одному напрямку, і через кожні *4 с,* коли рухаються в протилежних напрямках. Визначити швидкість кожного тіла.

Розв'язання. Нехай швидкість тіл, відповідно, становить *x м/с* і *y м/ с.*

Якщо тіла рухаються в одному напрямі, то вони віддаляються зі швидкістю *(x – y) м/с.* У випадку, коли тіла рухаються в протилежних напрямах, швидкість їх віддалення – *(x + y) м/с.* На момент зустрічі відстань, на яку віддалилися ці тіла, в обох випадках, повинна дорівнювати довжині кола, тобто *100 м*. Складаємо систему рівнянь: $\begin{cases} 20(x-y) = 100, \\ 4(x+y) = 100. \end{cases}$ Розв'язавши її, одержимо *x = 15 м/с, y = 10 м/с.*

Відповідь: 10 м/с, 15 м/с.

Задача 1.7. Два спортсмени бігають по одній замкненій доріжці стадіону. Швидкість кожного є постійною, проте перший може пробігти всю доріжку на *10 с* швидше, ніж другий. Якщо вони почнуть бігти зі спільного старту в одному напрямі, то ще раз зійдуться через *720 с*. Яку частину довжини всієї доріжки пробігає за секунду кожен із бігунів?

Розв'язання. Особливістю цієї задачі є те, що в ній не вказано довжину доріжки стадіону, тобто відстані, яку пробігають спортсмени. У таких випадках прийнято цю *відстань позначати за одиницю*.

Нехай перший спортсмен може пробігти всю доріжку стадіону за *х с*, а другий – за *у с*. Оскільки перший може пробігти цю відстань на *10 с* швидше, то складаємо рівняння: $y - x = 10$.

Нехай довжина замкненої доріжки стадіону дорівнює 1. Швидкість першого бігуна $V_1 = \frac{1}{x}$, а швидкість другого $V_2 = \frac{1}{y}$. Спортсмени починають бігти зі спільного старту в одному напрямі, причому перший біжить швидше, а отже, він віддаляється. За одиницю часу відстань між спортсменами становитиме $(\frac{1}{x} - \frac{1}{y})$. Оскільки бігуни ще раз зійдуться через *720 с*, то можна скласти наступне рівняння: $(\frac{1}{x} - \frac{1}{y})\, 720 = 1$.

Одержуємо систему рівнянь: $\begin{cases} y - x = 10, \\ \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) \cdot 720 = 1. \end{cases}$

Звідси $x = 80$ с, $y = 90$ с.

Отже, перший спортсмен за секунду пробігає *1/80* доріжки, а другий – *1/90* її частину.

Відповідь: 1/80; 1/90.

Задача 1.8. Два спортсмени бігають по одній кільцевій доріжці стадіону. Швидкість кожного є постійною, і на пробіг усієї доріжки перший витрачає на *5 с* менше, ніж другий. Якщо вони почнуть бігти одночасно і в одному напрямі, то опиняться поруч через *30 с*. Через який час зустрінуться спортсмени, якщо розпочнуть біг з одного місця одночасно в протилежних напрямах [1]?

Розв'язання. 1) Аналогічно до попередньої задачі, одержимо систему рівнянь: $\begin{cases} y - x = 5, \\ \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) \cdot 30 = 1. \end{cases}$ Звідки $x = 10$ с, $y = 15$ с. Отже, швидкості спортсменів становлять: $\mathcal{V}_1 = \frac{1}{10}$ і $\mathcal{V}_2 = \frac{1}{15}$.

2) Якщо спортсмени починають бігти зі спільного старту в протилежних напрямках, швидкість, з якою вони віддаляються один від одного становитиме: $\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{1}{6}$. Отже, спортсмени знову зустрінуться через: $1 : \frac{1}{6} = 6$ (с).

Відповідь: 6 с.

Задача 1.9. (*Задача Джемшида ібн-Масуда Ал-Каші* – видатного математика й астронома Самаркандської обсерваторії Улугбека, 1420-1430 рр.). Двоє одночасно пішли від однієї точки в протилежних напрямах берегом озера. Перший проходив щодня 10 миль. Другий пройшов за перший день 1 милю, а кожного наступного дня він проходив на одну милю більше, ніж попереднього. Коли двоє знову зустрілися, виявилося, що перший пройшов 1/6, а другий – 5/6 довжини берега. Скільки днів пройшло до зустрічі?

Розв'язання. Позначимо довжину берега озера («замкнене коло») за *y* миль, тоді сумарна відстань, яку подолали ці двоє до зустрічі становитиме повну довжину кола.

Нехай до їх зустрічі минуло *x* днів, тоді перший за цей час подолав *10x* миль. Отже, маємо рівняння: $10x = \frac{1}{6}y$.

Відстань, яку пройшов другий можна розрахувати, використовуючи формулу суми *n* перших членів арифметичної прогресії, де $n = x$, $a_1 = 1$, $d = 1$:

$$S_x = \frac{2 + 1 \cdot (x-1)}{2} \cdot x = \frac{x^2 + x}{2}$$

Оскільки другий до зустрічі подолав 5/6 довжини берега, то можна скласти наступне рівняння: $\frac{x^2+x}{2} = \frac{5}{6}y$.

Розв'язавши систему рівнянь $\begin{cases} 10x = \frac{1}{6}y, \\ \frac{x^2+x}{2} = \frac{5}{6}y \end{cases}$, одержимо $x = 99$ *(д.)*.

Відповідь: 99 днів.

Задача 1.10. Три велосипедисти, які стартують одночасно з одного місця й в одному напрямку, їдуть по колу, довжина якого *1 км*. Через деякий час другий уперше наздоганяє першого; через *4 хвилини* в ту саму точку прибуває третій, який проїхав таку ж відстань, яку проїхав перший до моменту зустрічі з другим. Швидкості велосипедистів у деякому порядку утворюють арифметичну прогресію з різницею *5 км/год*. Знайти ці швидкості.

Розв'язання. Нехай швидкості велосипедистів дорівнюють відповідно x_1, x_2, x_3. Оскільки другий велосипедист наздоганяє першого, то $x_2>x_1$. На момент зустрічі другого і першого велосипедистів другий випередив першого тільки на одне коло (*1 км*). Тоді час, який пройшов до моменту зустрічі: $t=\frac{1}{x_2-x_1}$.

За цей час перший пройшов відстань $S = tx_1 = \frac{x_1}{x_2-x_1}$. Цю саму відстань пройшов і третій велосипедист, але за час $t+\frac{1}{15}$ *год* (*4 хв = 1/15 год*), тобто

$\frac{x_1}{x_2-x_1} = x_3\left(\frac{1}{x_2-x_1}+\frac{1}{15}\right)$. Звідки $\frac{x_1-x_3}{x_2-x_1} = \frac{x_3}{15}$ (*)

Оскілки права частина останньої рівності додатна, той й ліва частина має бути додатною, а це означає, що $x_1>x_3$. Тоді швидкості велосипедистів задовольняють умову $x_2>x_1> x_3$.

За умовою задачі швидкості x_1; x_2; x_3 утворюють арифметичну прогресію. Отже, $x_1 = x_3 + 15$, $x_2 = x_1 + 5 = x_3 + 10$.

З (*) одержуємо $\frac{x_3+5-x_1}{x_3+10-(x_3+5)} = \frac{x_3}{15}$.

Звідки $\frac{x_3}{15} = 1$ і $x_3 = 15$ *км/год*.

Таким чином, швидкості інших велосипедистів дорівнюють x_1=20 км/год, $x_2 = 25$ км/год.

Відповідь: 20 км/год; 25 км/год, 15 км/год.

Задача 1.11. Три мотогонщика A, B, C стартують одночасно й рухаються з постійними швидкостями в одному напрямку по кільцевому шосе. У момент старту гонщик B знаходився перед гонщиком A на відстані 1/3 довжини шосе, а гонщик С – перед гонщиком В на такій самій відстані. Гонщик А вперше наздогнав гонщика С. Гонщик В витрачає на коло на *2,5 хв* менше, ніж С. За скільки хвилин мотогонщики проходять коло?

Розв'язання. Нехай S – довжина кільцевого шосе, а x_1; x_2; x_3 – швидкості могогонщиків А, В, С відповідно.

У момент часу t гонщик В закінчив своє коло, тобто пройшов відстань S. У той самий момент часу гонщик А наздогнав В, а отже, пройшов $\mathrm{S}+\frac{1}{3}\mathrm{S}=\frac{4}{3}\mathrm{S}$.

Звідки $t=\frac{\mathrm{S}}{x_2}=\frac{4\mathrm{S}}{3x_2}$; $\quad x_1=\frac{4}{3}x_2$.

Через *10 хв = 1/6* наздогнав В у той момент, коли В закінчив своє коло, а ще через *10 хв* вперше *год*, тобто у момент часу $t+\frac{1}{6}=\frac{\mathrm{S}}{x_2}+\frac{1}{6}$ *год* гонщик А наздогнав уперше гонщика С і пройшов за цей час шлях:

$\left(\frac{\mathrm{S}}{x_2}+\frac{1}{6}\right)x_1=\frac{4}{3}\left(\frac{\mathrm{S}}{x_2}+\frac{1}{6}\right)x_2$, а гонщик С подолав відстань $\left(\frac{\mathrm{S}}{x_2}+\frac{1}{6}\right)x_3$.

Оскільки гонщики на початку руху знаходилися на відстані $\frac{2}{3}\mathrm{S}$, то

$$\frac{4}{3}\left(\frac{\mathrm{S}}{x_2}+\frac{1}{6}\right)x_2-\left(\frac{\mathrm{S}}{x_2}+\frac{1}{6}\right)x_3=\frac{2}{3}\mathrm{S}.$$

Гонщик А витрачає на коло час $\frac{\mathrm{S}}{x_2}$, а гонщик С – $\frac{\mathrm{S}}{x_3}$. Звідки слідує

$\frac{\mathrm{S}}{x_2}-\frac{\mathrm{S}}{x_3}=\frac{2,5}{60}$. Одержали систему трьох рівнянь:

$$\begin{cases} x_1=\frac{4}{3}x_2, \\ \left(\frac{\mathrm{S}}{x_2}+\frac{1}{6}\right)\left(\frac{4}{3}x_2-x_2\right)=\frac{2}{3}\mathrm{S}, \\ \frac{\mathrm{S}}{x_3}-\frac{\mathrm{S}}{x_2}=\frac{1}{24}, \end{cases}$$

Розділимо друге рівняння на x_2 і позначимо $\frac{\mathrm{S}}{x_2}=x,\ \frac{\mathrm{S}}{x_3}=y.$ Тоді $\frac{x_3}{x_2}=\frac{x}{y}$.

Отже, $\begin{cases} \left(x+\frac{1}{6}\right)\left(\frac{4}{3}-\frac{x}{y}\right)=\frac{2}{3}x, \\ y-x=\frac{1}{24}. \end{cases}$

Звідки $36x^2-9x+1=0$ й $x=1/3$, а $y=3/8$.

Таким чином, гонщик В проходить коло за *1/3 год = 20 хв*, гонщик С – за *3/8 год = 22,5 хв*, а гонщик А – за *15 хв*.

Відповідь: *15 хв, 20 хв, 22,5 хв*.

Наступний тип текстових задач – ***задачі на спільну роботу і планування*** – вирізняє таке формулювання: деяку роботу, обсяг якої може бути не вказаним і не є шуканим (наприклад, друк рукопису, заповнення резервуара, обробка поля тощо) виконує декілька осіб або механізмів, що працюють рівномірно (тобто з постійною для кожного продуктивністю).

Виділяють такі основні *види задач на спільну роботу*:

- на обчислення невідомого часу роботи;
- на знаходження продуктивності праці;
- задачі на "басейн".

У задачах на спільну роботу часто обсяг усієї роботи, яку потрібно виконати, умовно приймається за одиницю.

Час t, який необхідний для виконання всієї роботи, та v – продуктивність праці (швидкість виконання роботи), тобто кількість роботи, виконаної за одиницю часу, пов'язані співвідношенням $v = \frac{1}{t}$.

Розглянемо приклади.

Задача 2.1. *Одному з робітників для виконання виробничого завдання потрібно на 4 год більше, ніж другому. Якщо перший робітник буде працювати 3 год, а потім його замінить другий, то останньому потрібно буде працювати ще 6 год для того, щоб закінчити завдання. За скільки годин може виконати все завдання другий робітник?*

Розв'язання. Нехай x *год* – час, за який може виконати завдання другий робітник, тоді перший виконає завдання за $(x+4)$ *год*.

За 3 *год* перший робітник виконає $\frac{3}{x+4}$ частини завдання, а другий за 6 *год* – $\frac{6}{x}$ завдання. Відповідно до умови задачі складаємо рівняння:

$$\frac{3}{x+4}+\frac{6}{x}=1.$$

Звідки x_1 = -3, що не задовольняє умову задачі, x_2 = 8.

Отже, другий робітник може виконати все завдання за 8 *год*.

Відповідь: 8 год.

Задача 2.2. *Після двох годин спільної праці двох друкарок одній із них доручили інше завдання, а друга сама закінчила роботу через 1 год 20 хв. За скільки годин могла б передрукувати рукопис кожна друкарка, якщо другій на це потрібно було б на 1 год 10 хв більше часу, ніж першій?*

Розв'язання. Нехай вся робота 1, а *x год* – час, за який перша друкарка могла б передрукувати рукопис. Тоді за умовою задачі другій друкарці потрібно $\left(x+1\frac{1}{6}\right)$ *год* (*1 год 10 хв* = $1\frac{1}{6}$ *год*).

Продуктивність праці першої друкарки буде $\frac{1}{x}$, а продуктивність праці другої становитиме $\frac{1}{x+1\frac{1}{6}}$. Продуктивність їх спільної праці: $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1\frac{1}{6}}$ За дві години спільної праці друкарки передрукують $2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1\frac{1}{6}}\right)$ частини рукопису.

Друга друкарка, закінчуючи роботу, передрукувала $\frac{1}{x+1\frac{1}{6}}\cdot 1\frac{1}{3}$

(*1 год 20 хв* = $1\frac{1}{3}$ *год*) частину рукопису.

Можна скласти рівняння: $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1\frac{1}{6}}\right)\cdot 2+1\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1\frac{1}{6}}=1.$

Звідки $x_1=\frac{56}{12}; x_1=4\frac{2}{3}; x_2=-\frac{1}{2}$ – не задовольняє умову.

Отже, перша друкарка могла б передрукувати рукопис за $4\frac{2}{3}$ *год*. Друга виконала б цю саму роботу за $4\frac{2}{3}+1\frac{1}{6}=5\frac{5}{6}$ (*год*).

Відповідь: 4 год 40 хв, 5 год 50 хв.

Задача 2.3. *Двоє трактористів можуть виорати поле, працюючи разом, за 6 год. За скільки годин може зорати поле кожен тракторист, працюючи окремо, якщо одному з них для того, щоб виорати* $\frac{2}{5}$ *поля, потрібно на 4 год більше, ніж потрібно другом для того, щоб виорати* $\frac{1}{5}$ *поля?*

Розв'язання. Нехай перший тракторист може виорати поле за x *год*, а дугий – за y *год*. Тоді за 1 год перший виконає $\frac{1}{x}$, другий – $\frac{1}{y}$ частину роботи. Працюючи разом, трактористи за 1 годину виконають $\frac{1}{6}$ завдання. Отже, складаємо перше рівняння: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}$.

$\frac{2}{5}:\frac{1}{x}=\frac{2x}{5}$ (*год*) – час, необхідний для виконання $\frac{2}{5}$ завдання першому трактористу, $\frac{1}{5}:\frac{1}{y}=\frac{y}{5}$ (*год*) – час, який потрібен для виконання $\frac{1}{5}$ завдання другому трактористу. Звідки друге рівняння: $\frac{2x}{5}-\frac{y}{5}=4$.

Одержали систему рівнянь:

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6},\\ \frac{2x}{5}-\frac{y}{5}=4;\end{cases}\quad \begin{cases}x_1=4, x_2=15,\\ y=2x-20;\end{cases}\begin{cases}x_1=4,\\ y_1=-12;\end{cases}\begin{cases}x_2=15,\\ y_2=10.\end{cases}$$

$y=-12$ – не задовольняє умову задачі.

Отже, перший тракторист може виконати завдання за 15 *год*, а другий – за 10 *год*.

Відповідь: 15 год, 10 год.

Задача 2.4. *Перша труба заповнює водою резервуар, об'єм якого дорівнює* 10м^3*, на 5 хв швидше, ніж друга труба. Скільки кубічних метрів проходить за годину через кожну трубу, якщо через першу за годину проходить на 10 м³ більше, ніж через другу?*

Розв'язання. Нехай із другої труби за 1 *год* витікає *x м³* води, тоді з першої – (x + 10) *м³*.

Виконана робота – це заповнений резервуар, обсяг якого 10м^3. Такий резервуар друга труба заповнює за $\frac{10}{x}$ *год*, а перша – за $\frac{10}{x+10}$ *год*. Оскільки перша труба наповнює резервуар на 5 *хв* = $\frac{1}{12}$ *год* швидше, то складаємо рівняння: $\frac{10}{x}-\frac{10}{x+10}=\frac{1}{12}$.

Звідки $x_1=30, x_2=-40$ – не задовільняє умову задачі.

Отже, з другої труби за 1 *год* витікає 30 *м³*, а з першої: 30 + 10=40 *м³*.

Відповідь: 30 м³, 40 м³

Нині в статистиці, техніці, соціології, економіці, хімії, фізиці, а також в метеорології, сільському господарстві, медицині, виробництві, у повсякденному житті людини тощо широко використовуються відсотки. Наприклад, за допомогою процентів позначають різні допуски під час виготовлення продукції, коефіцієнти корисної дії механізмів, втрати енергії, витрати на експлуатацію, амортизацію, частки виконання завдання, процентний склад у суспільстві різних категорій населення, вологість повітря, схожість насіння, вміст металу в руді, жирність продуктів, вміст цукру в цукрових буряках, кількість вітамінів у фруктах та овочах і т.д. Отже, уміння розв'язувати ***задачі на відсотки*** має велике практичне значення.

Задачі на відсотки можна ***класифікувати***:

1) три основні задачі на відсотки (- знаходження відсотків від даного числа; - знаходження числа за його відсотками; - знаходження відсоткового відношення двох чисел);

2) задачі на прості і складні відсотки;

3) задачі на розчини, суміші, сплави (- задачі на пониження та підвищення концентрації; - задачі на «висушування»; - задачі на змішування розчинів (сплавів) різної концентрації; - задачі на переливання (пересипання)).

Задача 3.1. *Від тривалого зберігання ячмінь втрачає за перший рік 3% своєї маси, а за кожний наступний по 1% . Скільки залишиться від 100 ц ячменю через 4 роки?*

Розв'язання. 1) $100 \cdot 0{,}03 = 3$ (ц) – втрати ячменю за перший рік зберігання; 2) 100 – 3 = 97 (ц) – маса ячменю, яка залишилася після першого року зберігання.

Використовуємо формулу складних відсотків: $A_t = a_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$.

У нашому випадку p = 1%, t = 3, a_0 = 97 ц.

Важливо, оскільки ячмінь втрачає у масі, то у формулі змінюємо знак «+» на «-».

$A_t = 97\left(1 - \frac{1}{100}\right)^3 = 97 \cdot 0{,}99^3 = 94$.

Отже, через 4 роки від 100 ц ячменю залишиться 94 ц.

Відповідь: 94 ц.

Задача 3.2. *Банк нарахував за рік вкладникові на його заощадження 6000 грн відсоткових грошей. Вкладник додав 44 000 грн. і залишив гроші ще на рік. Через рік банк знову нарахував відсотки, і тоді внесок разом із відсотками становив 257 000 грн. Яку суму спочатку вкладник вніс до банку?*

*Розв'язання***.** Нехай у банк було покладено *х грн* під *p%* річних.

З огляду на те, що через рік із початкової суми банк нарахував 6000 *грн* відсоткових грошей, одержуємо рівняння:

$$\frac{xp}{100} = 6000$$

До кінця першого року внесок становив (*x + 6000) грн.*

Оскільки вкладник додав 44 000 *грн*, то на початок другого року внесок становив (*x + 50 000) грн.* Згідно з умовою, запишемо ще одне рівняння:

$$(x + 6000) + (x + 5000)\frac{p}{100} = 257\,000.$$

Одержали систему рівнянь: $\begin{cases} \frac{xp}{100} = 6000; \\ (x + 5000)\left(1 + \frac{p}{100}\right) = 257\,000 \end{cases}$

Розв’язавши цю систему, одержимо дві пари чисел $x_1 = 200\,000$, $p_1 = 3$ і $x_2 = 1500$, $p_2 = 400$. Друга пара не підходить за змістом задачі.

Відповідь: 200 000 грн.

Задача 3.3. *Сироп містить 18% цукру. Скільки кілограмів води необхідно додати до 40 кг сиропу, щоб вміст цукру складав 15%?*

Розв’язання. Нехай необхідно добавити *x кг* води.

Заповнимо таблицю.

	β, концентрація сиропу	***M*** (кг), маса сиропу	***m***(кг), маса цукру
Було	18% або 0,18	40	$0{,}18 \bullet 40 = 7{,}2$
Стало	15% або 0,15	$40 + x$	$0{,}15(40 + x)$

Оскільки маса цукру не змінилася, то складемо рівняння:

$0{,}15(40 + x) = 7{,}2;$ звідки $0{,}15 \bullet \boldsymbol{x} = 1{,}2$, тоді $x = 8$.

Відповідь: 8 кг.

Задача 3.4. *Злили два розчини сірчаної кислоти і отримали 10 кг суміші. Необхідно визначити масу кожного з розчинів, які увійшли до суміші, якщо перший розчин містив 800 г сірчаної кислоти, а другий – 600 г. Відомо, що концентрація першого розчину була на 10% більше, ніж концентрація другого розчину.*

Розв’язання. Заповнимо таблицю:

	m, кг	M, кг	β
1-й розчин	x	0,8	$\frac{0{,}8}{x} \cdot 100\%$
2-й розчин	y	0,6	$\frac{0{,}6}{y} \cdot 100\%$
Суміш	10	1,4	

Складемо систему рівнянь: $\begin{cases} x+y=10 \\ \frac{80}{x}-\frac{60}{y}=10 \end{cases}$;

Звідки $x_1=\frac{24-16}{2}=4$, $x_2=\frac{24+16}{2}=20$.

Тоді y_1 = 10-4 = 6; y_2 = 10-20 = -10 – не підходить за умовою.

Отже, маса 1-го розчину 4 *г*, а маса – 2-го розчину 6 *г*.

Відповідь: 4 г і 6 г.

Задача 3.5. *Зібрали 8 кг свіжих квітів ромашки, вологість яких складає 85%. Після того, як квіти висушили, їх вологість складала 20%. Чому дорівнює маса сухих квітів ромашки?*

Розв'язання. Складемо таблицю:

	Маса ромашки	Вода	Суха речовина
Свіжі квіти	8	85	100 – 85
Висушені	?	20	100 – 20

1) $0{,}15\cdot 8=1{,}2$ (*кг*) — маса сухої речовини у 8 кілограмах квітів ромашки.

2) 1,2 (*кг*) сухої речовини — це 80% маси сухих квітів.

Використовуючи пропорцію: $x=\frac{1{,}2\cdot 100\%}{80\%}$; $x=1{,}5$ (*кг*)

Відповідь: 1,5 кг.

Задача 3.6. *У наявності є сталь двох сортів із вмістом нікелю 5% і 40%. Скільки сталі кожного сорту потрібно взяти,щоб після переплавки одержати 140 т сталі з 30%-м вмістом нікелю?*

Розв'язання. Нехай *x т* – маса сталі з 5-відсотковим вмістом нікелю, *y т* – кількість сталі з 40-відсотковим вмістом нікелю. У *x т* сталі міститься 5% нікелю, тобто власне нікелю є $\frac{5x}{100}$ *т*, а в *y т* сталі чистого нікелю є 40% або $\frac{40y}{100}$ *т*. Оскільки в 140 *т* нового сплаву міститься 30% нікелю, тобто $140\cdot\frac{30}{100}$, то складаємо рівняння:

$$\frac{5x}{100} + \frac{40y}{100} = \frac{30 \cdot 140}{100}.$$

Окрім того, $x + y = 140.$

Таким чином, отримуємо систему рівнянь: $\begin{cases} 5x + 40y = 140 \ \cdot 30; \\ \quad x + y = 140. \end{cases}$

Розв`язавши систему, знаходимо: $x = 40$ та $y = 100$.

За змістом задачі, $0 < x < 140$, $0 < y < 140$. Знайдені значення x і y ці умови задовольняють.

Відповідь: 40 т сталі з 5% вмістом нікелю, 100 т сталі з 40% вмістом нікелю.

Вивчення та засвоєння арифметичних дій є невід'ємною частиною навчання математики. Знання арифметичних дій, їх властивостей, компонент становлять підґрунтя усього змісту шкільної програми. Тому задачі на залежність між компонентами арифметичних операцій посідають важливе місце серед текстових задач. Спосіб їх розв'язування безпосередньо випливає з умови задачі.

Серед ***задач на залежність між компонентами арифметичних операцій*** виділяють задачі:

- в яких потрібно знайти суму доданків, кожне з яких складає певну частину шуканої суми;
- в яких використовується формула двозначного числа;
- де використовується пропорційне ділення;
- де вказується співвідношення між чисельником, знаменником дробу;
- де невідомі є членами прогресії.

Задача 4.1. *Троє студентів-переможців конкурсу технічної творчості одержали за свої винаходи грошові призи загальною сумою 1410 у.о., причому другий одержав третину того, що одержав перший, та ще 60 у.о., а третій учасник одержав третину від кількості грошей другого й ще 30 у.о. Який приз здобув кожен?*

Розв'язання. Нехай перший студент одержав x у.о., тоді другий одержав $(\frac{1}{3}x + 60)$ у.о., а третій – $\frac{1}{3}(\frac{1}{3}x + 60) + 30 = (\frac{x}{9} + 50)$ у.о. Оскільки загальна сума грошових призів становила 1410 у.о., то складаємо рівняння: $x + \frac{1}{3}x + 60 + \frac{1}{9}x + 50 = 1410$. Звідки x = 900 у.о.

Тоді другий студент одержав $\frac{1}{3}900 + 60 = 360$ (у.о.); а призова сума третього становила $\frac{1}{9}900 + 50 = 150$ (у.о.).

Відповідь: 900 у.о.; 360 у.о.; 150 у.о.

Задача 4.2. *Сума квадратів цифр двозначного числа дорівнює 13. Якщо від цього числа відняти 9, то одержимо число, яке записане тими самими числами, але в зворотному порядку. Знайти це число.*

Розв'язання. Нехай *x* – цифра десятків числа, а *y* – цифра одиниць. Тоді шукане двозначне число можна подати у вигляді $\overline{xy} = 10x + y$.

За умовою задачі можна скласти перше рівняння $x^2 + y^2 = 13$.

Число, яке записане тими самими числами, але в зворотному порядку: $\overline{yx} = 10y + x$. Відповідно до другої частини умови задачі можна скласти наступне рівняння $10x + y - 9 = 10y + x$.

Одержали систему рівнянь: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ 10x + y - 9 = 10y + x. \end{cases}$

Розв`язавши яку, одержимо $x = 3$, $y = 2$ ($x = -2$ – не підходить, оскільки *x*, *y* – це цифри).

Відповідь: дане число 32.

Задача 4.3. *Чисельники трьох дробів пропорційні до чисел 1, 2, 5, а їх знаменники відповідно відносяться як числа 1, 3, 7. Середнє арифметичне цих дробів дорівнює* $\frac{200}{441}$. *Знайти ці дроби.*

Розв'язання. Нехай *к* – коефіцієнт пропорційності. За умовою задачі шукані дроби: *к*; $\frac{2}{3}$*к*; $\frac{5}{7}$*к*. Середнє арифметичне даних дробів $(к + \frac{2}{3}к + \frac{5}{7}к) : 3$.

Отже, складаємо рівняння $(к + \frac{2}{3}к + \frac{5}{7}к) : 3 = \frac{200}{441}$.

Звідки $к = \frac{4}{7}$, тоді шукані дроби – $\frac{4}{7}$; $\frac{8}{21}$ і $\frac{20}{49}$.

Відповідь: $\frac{4}{7}$; $\frac{8}{21}$ і $\frac{20}{49}$.

Задача 4.4. *Якщо від чисельника і знаменника звичайного дробу відняти по одиниці, то дріб зменшиться на* $\frac{1}{10}$. *Якщо до чисельника і знаменника додати по одиниці, то дріб збільшиться на* $\frac{1}{15}$. *Знайти цей дріб.*

Розв'язання. Нехай x – чисельник даного дробу, а y – його знаменник, тобто даний дріб – $\frac{x}{y}$.

Якщо від чисельника і знаменника даного дробу відняти по одиниці, то одержимо дріб $\frac{x-1}{y-1}$. За умовою задачі складаємо перше рівняння:

$$\frac{x-1}{y-1} = \frac{x}{y} - \frac{1}{10}.$$

Якщо до чисельника і знаменника додати по одиниці, то новий дріб – $\frac{x+1}{y+1}$. За умовою задачі складаємо друге рівняння: $\frac{x+1}{y+1} = \frac{x}{y} + \frac{1}{15}$.

Одержали систему рівнянь: $\begin{cases} \frac{x-1}{y-1} = \frac{x}{y} - \frac{1}{10}, \\ \frac{x+1}{y+1} = \frac{x}{y} + \frac{1}{15}. \end{cases}$

Розв`язавши систему, одержимо *x = 3, y = 5.*

Відповідь: $\frac{3}{5}$.

Задача 4.5. *Знайти три числа, які утворюють геометричну прогресію, якщо відомо, що їх сума дорівнює 26, а сума квадратів цих чисел дорівнює 364.*

Розв'язання. Нехай $в_1$ – перший член геометричної прогресії, а q – її знаменник. Тоді шукані три числа – $в_1$; $в_1 q$; $в_1 q^2$.

За умовою задачі складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} в_1 + в_1 q + в_1 q^2 = 26, \\ {в_1}^2 + (в_1 q)^2 + (в_1 q^2)^2 = 364, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} в_1(1 + q + q^2) = 26, \\ {в_1}^2(1 + q^2 + q^4) = 364. \end{cases}$$

Звідки $q = \frac{1}{3}$ або $q = 3$. Тоді відповідно $в_1 = 18$ або ж $в_1 = 2$.

Отже, задані три числа: 18, 6, 2 або 2, 6, 18.

Відповідь: 18, 6, 2 або 2, 6, 18.

Задача 4.6. *Знайдіть таких чотири числа, які утворюють арифметичну прогресію, що коли від другого числа відняти 2, а до четвертого додати 14, то буде отримано геометричну прогресію.*

Розв'язання. Цій задачі раціонально спочатку записати геометричну прогресію з чотирьох чисел, позначивши за $в_1$ – перший член геометричної прогресії, а q – її знаменник, тобто $в_1;\ в_1 q;\ в_1 q^2;\ в_1 q^3$.

Тоді числа $в_1;\ в_1 q + 2;\ в_1 q^2;\ в_1 q^3 - 15$, відповідно до умови задачі, утворять арифметичну прогресію.

Використовуючи властивість членів арифметичної прогресії, складаємо систему рівнянь: $\begin{cases} в_1 + в_1 q^2 = 2(в_1 q + 2), \\ (в_1 q + 2) + (в_1 q^3 - 14) = 2в_1 q^2. \end{cases}$

Розв`яжемо цю систему і одержимо $q = 3,\ в_1 = 1$.

Отже, дані числа, які утворюють геометричну прогресію, – це 1, 3, 9, 27. Шукані числа – 1, 5, 9, 13.

Відповідь: 1, 5, 9, 13.

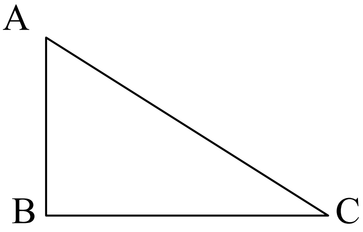
Текстові задачі на використання геометричних співвідношень. Серед геометричних задач є багато задач, які відносяться до задач на обчислення. Методи їх розв'язування вимагають як знання геометричних співвідношень, застосування властивостей, ознак фігур і співвідношень між ними, так і наявність уміння виконувати алгебраїчні перетоворення.

На відміну від інших видів задач із геометрії, досить часто при розв'язуванні текстових задач такого типу можна обійтися без побудови рисунка. Проте такий рисунок ніколи зайвим не буде. Його, наприклад, зручно використати для скороченого запису умови.

Текстові алгебраїчні задачі, в яких використовуються геометричні співвідношення, у першу чергу, демонструють взаємозв`язки шкільних курсів алгебри та геометрії, а їх застосування в процесі навчання математики дозволяє реалізувати прикладну спрямованість шкільного курсу.

Задача 5.1. *Периметр прямокутного трикутника дорівнює 36 см. Гіпотенуза відноситься до катета як 5 : 3. Знайти сторони трикутника.*

Розв'язання.



Нехай дано прямокутний трикутник ABC, у якому AC – гіпотенуза.

Нехай $к$ – коефіцієнт пропорційності, тоді AC = $5к$, а катет AB = $3к$.

За теоремою Піфагора другий катет $BC^2 = AC^2 – AB^2$

або $BC^2 = 25к^2 – 9к^2 = 16к^2$.

Звідки BC = $4к$ (BC, $к$ – додатні числа).

Периметр прямокутного трикутника дорівнює 36 см, отже

$$5к + 3к + 4к = 36, \text{ звідки } к = 3.$$

Таким чином, сторони трикутника дорівнюють 15 см, 9 см, 12 см.

Відповідь: 15 см, 9 см, 12 см.

Задача 5.2. *Дві сили прикладені до однієї точки і направлені під прямим кутом. Значення однієї з них на 4 Н більше від значення другої, а величина рівнодійної на 8 Н менша за суму значень даних сил. Знайти дані сили та їх рівнодійну.*

Розв'язання. Нехай значення першої сили $F_1 = x$ Н, тоді друга сила має величину $F_2 = (x + 4)$ Н. Рівнодійна цих сил : $x + x + 4 – 8 == (2x – 4)$ Н.

Оскільки дані сили направлені під прямим кутом одна до одної, то

$x^2 + (x + 4)^2 = (2(x – 2))^2$.

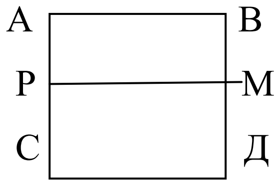
Звідки $x_1 = 0$ – не задовольняє умову здачі; а $x_2 = 12$.

Отже, перша сила – 12 Н; друга сила – 16 Н; рівнодійна сил – 20 Н.

Відповідь: 12 Н; 16 Н; 20 Н.

Задача 5.3. *Від аркуша картону, який має форму квадрата, відрізали смугу шириною 3 см. Площа прямокутної частини аркуша, що залишилася, дорівнює 70 см². Визначте початкові розміри аркуша.*

Розв'язання.



Нехай сторона квадрата AB = x см, тоді площа аркуша картону (квадрата АВСД) дорівнює x^2. Від аркуша відрізали прямокутну смугу площею *3x.* За умовою задачі площа прямокутної частини аркуша, що залишилася, дорівнює *70 см*^{2}. Складаємо рівняння: $x^2 - 3x = 70$.

Звідки $x_1 = -7$ – не задовольняє умову; а $x_2 = 10$ *см.*

Отже, сторона аркуша квадратної форми дорівнює *10 см.*

Відповідь: 10 см.

Задача 5.4. *Периметр прямокутника дорівнює 32 см, а сумма площ квадратів, які побудовані на кожній з його сторін – 260 см*^{2}*. Знайти сторони прямокутника.*

Розв'язання. Позначимо сторони прямокутника x см та y см. Тоді периметр прямокутника дорівнює: $2(x+y)=32$.

Відповідно до умови задачі, сума площ квадратів побудованих на кожній з його сторін (таких квадратів є чотири) буде дорівнювати $2x^2+2y^2=260$.

Одержали систему рівнянь : $\begin{cases} 2(x+y) = 32, \\ 2x^2 + 2y^2 = 260. \end{cases}$

Звідки $x_1=9$ або $x_2=7$, тоді, відповідно $y_1=7$ і $y_2=9$.

Такі значення визначають один і той самий прямокутник.

Відповідь: 7 см і 9 см.

Отже, текстові задачі відіграють надзвичайно важливу роль у шкільному курсі математики. Формування вміння в учнів розв'язувати такі задачі вимагає від учителя розкриття тих особливих зв'язків між шуканими величинами і даними значеннями, які зумовлюють тип задачі. Розуміння цих залежностей передбачає аналіз певних життєвих ситуацій, розуміння суті загальних правил причинно-наслідкових зв'язків, які «заховані» в тексті задачі тощо. Тому текстові задачі визнано одним із найбільш ефективних методичних засобів, спрямованих формування в учнів загального підходу, загальних умінь розв'язування будь-яких задач, пізнання та більш глибоке оволодіння математичним апаратом, а також деякими загальнонауковими і загальножиттєвими поняттями. Вони допомагають розвивати мислення школярів, формувати вміння й навички практичного застосування математики.

ЛІТЕРАТУРА

1. Азаров А. И. Системы алгебраических уравнений. Текстовые задачи / А. И. Азаров, С. А. Барвенов та ін. – Минск : “ТетраСистемс”, 1998. – 288 с.
2. Бевз Г. П. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. – К. : Зодіак-ЕКО, 2009. –133 с.
3. Бевз Г. П. Алгебра : підруч. для 7-9 кл. серед. шк. / Г. П. Бевз. – К. : Освіта, 2002. – 303 с.
4. Бевз Г. П. Методика викладання математики / Г. П. Бевз. – К. : Вища школа, 1989. – 367 с.
5. Бурда М. І. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з алгебри. 9 клас / М. І. Бурда, О. Я. Біляніна, О. П. Вашуленко, Н. С. Прокопенко. – Харків : Гімназія, 2009. – 224 с.
6. Бурда М. І. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики. 11 клас : у 2 кн. ; кн. 2. / М. І. Бурда, О. Я. Біляніна, О. П. Вашуленко, Н. С. Прокопенко. – Харків : Гімназія, 2008. – 224 с.
7. Горделадзе Ш. Г. Збірник конкурсних задач з математики / Ш. Г. Горделадзе, Н. М. Кухарчук, Ф. П. Яремчук. – К. : Вища школа, 1992.
8. Гришина В.О. Алгебраїчні рівняння, нерівності та їх системи : навч. посіб. / В.О. Гришина, О.Б. Папковська, Л.М. Васіліу. – Одеса : Наука і техніка, 2008. – С. 150.
9. Дубинчук О. С. Методика викладання алгебри в 7-9 класах : посібник для вчителя / О. С. Дубинчук, Ю. І. Мальований, Н. П. Дичек. – К. : Рад. школа, 1991. – 254 с. / Ю.О. Захарійченко, О.В. Школьний. – К. : Генеза, 2008. – С. 80.
10. Збірник задач і контрольних робіт з алгебри. 9 клас / за ред. А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Харків : Гімназія, 2009.
11. Королюк О. М. Деякі особливості методики розв’язування текстових задач на рух по колу / Королюк О. М. // Науковий пошук молодих дослідників : зб. наук. праць студ., магістр. та викл. / за ред. О. М. Королюк. – Житомир : Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2014. – Вип. 7. – С. 240–244.
12. Крамор В. С. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа / В.С. Крамор – М. : Просвещение, 1990. – 416 с.
13. Ларичев П.А. Сборник задач по алгебре / П.А. Ларичев. – М. : Гос. уч.-пед. изд-во, 1958. – Ч. 1. – С. 191.
14. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики / под ред. Е. И. Лященко. – М. : Просвещение, 1988. – 223 с.

15. Майба Т. Б. Розв'язування текстових задач за допомогою систем рівнянь: готуємося до ДПА в 9 класі / Т. Б. Майба // Математика в школах України. – 2012. – № 13-15. – С. 46–51.
16. Мерзляк А. Г. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Харків : Гімназія, 2009. – 320 с.
17. Мерзляк А. Г. Алгебраїчний тренажер : посіб. для школярів та абітурієнтів / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – 2-ге вид., переробл. і доп. – Х. : Гімназія, 2010 – 272 с.
18. Нелін Є. О. Текстові задачі: досвід систематизації та узагальнення при підготовці до державної підсумкової атестації з аглебри в 9 класі / Є. О. Нелін, О. П. Неліна // Математика в школах України. – 2009. – № 7–8. – С. 28–31.
19. Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во втузы : учеб. пособ. / под ред. М. И. Сканави – М. : Высш. шк., 1980. – 541 с.
20. Слепкань З. І. Методика навчання математики : підручник. – 2-ге вид. / З. І. Слєпкань. – К. : Вища школа, 2006. – 582 с.
21. Системы алгебраических уравнений. Текстовые задачи / А. И. Азаров, С. А. Барвенов, В. С. Федосенко, А. С. Шибут. – Мн. : «ТетраСистемс», 1998. – 288 с.
22. Королюк О. М. Текстові задачі в шкільному курсі математики: навчально-методичний посібник / О. М. Королюк. – Житомир : Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2016. – 63 с.
23. Фридман Л. М. Как научиться решать задачи : кн. для учащихся ст. кл. сред. шк. / Л. М. Фридман, Е. Н. Турецкий. – М. : Просвещение, 1989. – 192 с.

Королюк Олена Миколаївна – доцент, кандидат педагогічних наук.

Наукові інтереси: принцип фундаменталізації та його методичної реалізації в професійній підготовці майбутніх учителів математики.

Дисципліни, які викладає: диференціальна геометрія, вища математика, основи вищої математики.

Сверчевська І. А.
кандидат педагогічних наук, доцент

СТРУКТУРУВАННЯ ЗМІСТУ ТА МЕТОДИКА ФОРМУВАННЯ ПОНЯТЬ РОЗДІЛУ "ГЕОМЕТРИЧНІ ТІЛА" У ЗАГАЛЬНООСВІТНІЙ ШКОЛІ.

Освіта на сучасному етапі характеризується посиленням уваги до особистості учня, до виховання вміння шукати і знаходити своє місце в житті. Забезпечення загальноосвітньої підготовки з математики необхідне для успішної самореалізації особистості, її майбутньої професійної діяльності.

Вагоме місце у формуванні особистості займає такий розділ математики, як геометрія, яка пов'язує можливості гармонійного розвитку образного та логічного мислення учнів. А курс стереометрії оперує уявленнями візуального просторового характеру.

Навчання стереометрії в школі передбачає формування предметної математичної компетентності, одним з аспектів якого є уміння оперувати геометричними об'єктами в просторі. Розділ стереометрії "Геометричні тіла" реалізує освітні завдання формування уявлення про геометричні фігури в просторі та їх властивості, знання про геометричні величини: площу та об'єм.

Змістове наповнення програми реалізує компетентнісний підхід до навчання, спрямований на формування системи відповідних знань, навичок, досвіду, здібностей і ставлення, яка дає змогу обґрунтовано судити про застосування математики в реальному житті, визначає готовність випускника школи до успішної діяльності в різних сферах [9].

Принципи формування змісту і цілі вивчення математики досліджували М. І. Бурда, Г. І. Литвиненко, Г. І. Саранцев, З. І. Слєпкань, В. О. Швець та ін. Вимоги до змісту, його структури і цілей вивчення геометрії в школі розглядали О. Д. Александров, Г. П. Бевз, В. О. Гусєв, М. М. Рогановский, І. Ф. Шаригін та ін.

Зміст, форми і методи навчання геометрії, зокрема стереометрії, досліджували О. Д. Александров, Г. П. Бевз, М. І. Бурда, А. П. Кисельов, І. Г. Ленчук, О. В. Погорєлов, Г. І. Саранцев, З. І. Слєпкань, В. О. Тадеєв, та ін. Науково-методичне забезпечення процесу навчання геометрії розробляли Л.С. Атанасян, В.Г. Бевз, М.І. Бурда, В.М. Клопський, Г.М. Литвиненко, М.М. Рогановський, З.А. Скопець, Н.А. Тарасенкова та ін.

Значний внесок у вивчення процесу засвоєння понять зробили психологи Л. С. Виготський, В. В. Давидов, Н. Ф. Тализіна, Н. А. Менчинська та ін. [14, с. 25]. Питанням формування математичних понять приділяють увагу такі математики-методисти, як Г. П. Бевз, М. І. Бурда, К. А. Рупасов, Г. І. Саранцев, З. І. Слєпкань та інші, які виділяють два основні шляхи введення математичних понять: конкретно-індуктивний та абстрактно-дедуктивний [11, с. 95].

Незважаючи на традиційність змістового наповнення матеріалу розділу "Геометричні тіла", нові вимоги сучасного суспільства, що характеризуються посиленням уваги до особистості учня, до його саморозвитку та самопізнання, разом зі змінами в умовах навчання школярів у класах різних напрямів профілізації, учнів з різним рівнем підготовки та різним рівнем мотивації зумовлюють необхідність дослідження можливих структур змісту розділу "Геометричні тіла" з метою вибору такого типу структури змісту, який краще забезпечує доступність для учнів, науковість під час введення понять.

Поставимо **завдання** прослідкувати можливі шляхи введення означень геометричних тіл, виділити етапи процесу формування понять та показати їх реалізацію із застосуванням системи вправ.

Структурування змісту розділу "Геометричні тіла"

Зміст розділу "Геометричні тіла" визначає його структуру, тобто окремі модулі матеріалу, їх послідовність, взаємозв’язок між ними. Хоча зміст і структура відносно незалежні, даний зміст можна втілити у різних структурах. Запропонувавши певну структуру, зміст матеріалу можна видозмінювати. Наприклад, структурування матеріалу про геометричні тіла для загальноосвітніх класів і класів з поглибленим вивченням математики може бути однакове, а змістове наповнення відрізнятися за рівнем складності, підходами до доведень, підбором задач тощо. Доцільно також використати паралельне структурування навчального матеріалу [6, с. 46].

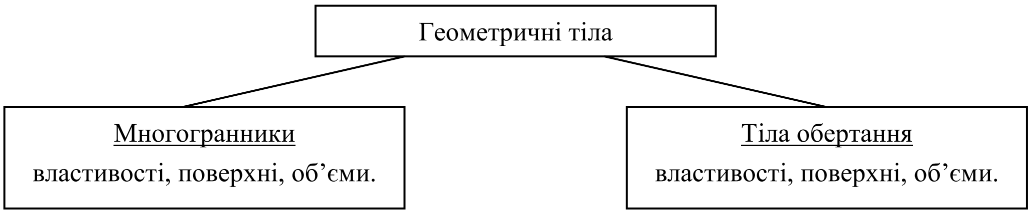


Схема 1

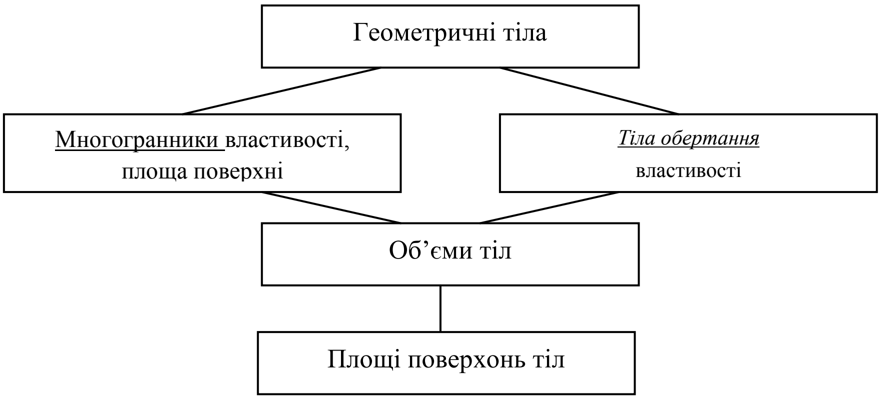


Схема 2.

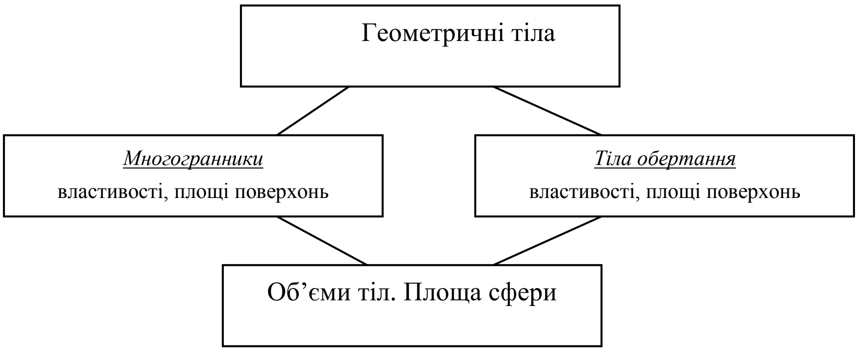


Схема 3

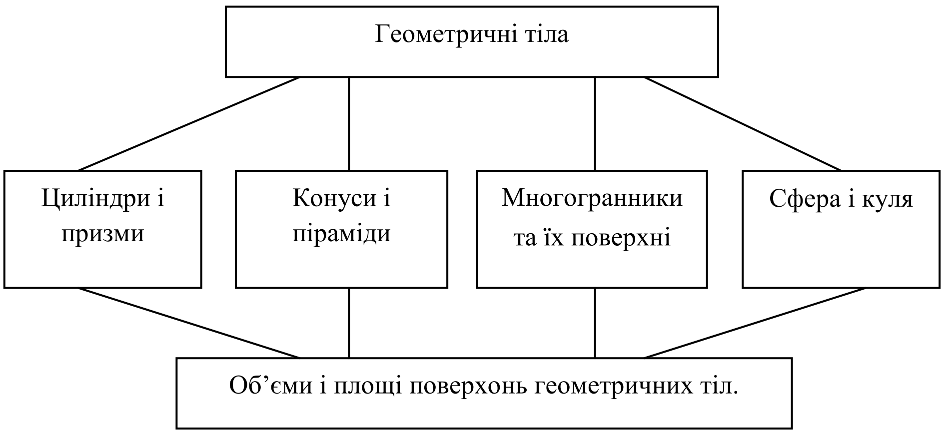


Схема 4

Проаналізувавши структуру матеріалу про геометричні тіла у програмах і підручниках різних часів, ми виділили два типи структури (схема 1, схема 2).

І тип: окремою змістовою лінією повністю вивчаються многогранники, а потім аналогічно – тіла обертання (схема 1). ІІ тип: спочатку вивчаються властивості многогранників і тіл обертання, потім – вимірювання об'ємів і площ поверхонь всіх геометричних тіл (схема 2). Сучасний підхід до вивчення геометричних тіл відповідає ІІ типу структури, який видозмінюється, і структурування відбувається у такій послідовності:

А) властивості і площі поверхонь многогранників → властивості тіл обертання → об'єми тіл → площі поверхонь тіл обертання (схема 2);

Б) властивості і площі поверхонь многогранників → властивості і площі поверхонь тіл обертання (без площі поверхні кулі) → об'єми тіл і площа поверхні кулі (схема 3);

В) єдиний підхід до означення циліндра і призми та конуса і піраміди або паралельне їх вивчення → властивості многогранників → властивості сфери і кулі → об'єми, площі поверхонь тіл (схема 4).

Тип структури ІІ-А виправданий з наукового погляду: поверхні всіх тіл обертання вивчаються одночасно. З точки зору логіки не зрозуміло, чому многогранники вивчаються докладно, з обчисленням площ поверхонь, а тіла обертання – ні. Причина в тому, що при доведенні площі поверхні кулі використовується формула для обчислення її об'єму. Але тоді логічно і площі поверхонь многогранників вивчати після об'ємів тіл, і тут ми приходимо до класичного ІІ типу структури. Але ж його недолік в тому і полягає, що маючи тільки властивості геометричних тіл, можна розв'язувати лише найпростіші задачі, які не мають практичного застосування.

Тип структури ІІ-Б з логічної точки зору не має недоліків, однак залишається питання про те, чому не вивчається площа поверхні кулі. Учні з основної школи вже знають формулу для обчислення площі сфери, і її тимчасово можна використати без доведення. Але, при такому підході з'являється можливість розв'язувати задачі різної складності, показати прикладну спрямованість цього розділу. Після вивчення об’ємів геометричних тіл можна розглянути загальний підхід до визначення площ поверхонь і застосувати його не тільки для обчислення площі поверхні кулі, а й інших геометричних тіл. Тому для загальноосвітніх класів ми віддаємо перевагу ІІ-Б типу структури. Для класів природного-математичного напряму профілізації навчання доцільно обрати цей же тип структури, розширивши об’єм матеріалу згідно з програмою.

Тип структури ІІ-В дає можливість економити час за рахунок єдиного підходу до означень циліндра і призми, конуса і піраміди, коли правила обчислення площ поверхонь і об’ємів циліндра і конуса можна перенести відповідно на призму і піраміду. Тоді більше уваги можна приділити розв’язуванню задач з практичним змістом, що важливо для класів технологічного напряму профілізації. В той же час є можливість розглянути теорію многогранників, об’ємів і поверхонь геометричних тіл.

Тип структури ІІ-В з варіантом паралельного вивчення призми і циліндра, піраміди і конуса доцільно використовувати у класах суспільно-гуманітарного напряму профілізації. Враховуючи те, що у таких класах дещо знижується рівень строгості обґрунтувань математичних тверджень, ми пропонуємо також використовувати І тип структурування матеріалу. Зауважимо, що при цьому не можна зовсім відмовлятися від доведень. Але така структура відповідає історичному шляху еволюції понять геометричних тіл і полегшує сприймання матеріалу.

Визначивши типи структурування матеріалу для класів певних напрямів профілізації, введемо такі **компоненти** структури змісту розділу.

1. Система змістових модулів (цілісні частини змісту, які пов’язані між собою).
2. Порядковий компонент (принципи, які лежать в основі введення понять, вибору способів доведення теорем, забезпечують логічну строгість, ступінь науковості викладу матеріалу і методичну доцільність). Від цих принципів залежить порядок модулів.

3. Основний навчальний матеріал (поняття, означення, теореми та їх доведення, основні задачі)
4. Допоміжний навчальний матеріал (пояснювальний матеріал, матеріал для необов'язкового вивчення, додаткові задачі, історичні довідки, схеми, малюнки, портрети, довідковий матеріал)
5. Апарат контролю навчальних досягнень (тести, усні вправи, тексти самостійних, контрольних робіт, картки для корекції знань)

Перший компонент для різних типів структури змісту різний. Так, І тип структури має два модулі, а ІІ – чотири, типи структури ІІ-А і ІІ-Б мають однакові перші модулі, а інші модулі різні. Другий компонент в усіх структурах різний. Якщо не ставиться завдання дати загальну теорію об'ємів і площ кривих поверхонь, то маємо І тип структури. Якщо формула площі поверхні кулі доводиться на основі формули об'єму кулі, на перше місце ставиться науковість, то використовується тип структури ІІ-А. Якщо до означень циліндра і призми, конуса і піраміди використовується спільний підхід, то це визначає тип структури ІІ-В. Інваріантними для всіх типів структури є 3, 4 і 5 компоненти. Кожний модуль незалежно від типу структури повинен містити основний, допоміжний матеріал та апарат діагностики навчальних досягнень. Змістове наповнення інваріантних компонентів взаємопов'язаний з порядковим компонентом.

Розглянемо, як використовуються ці компоненти структурування під час вивчення геометричних тіл у старших класах загальноосвітньої школи. Виберемо тип структури ІІ-Б, який складається з таких *змістових модулів*:

1. Многогранники (призми, піраміди, зрізані піраміди, правильні многогранники). Властивості, площі поверхонь.
2. Тіла обертання (циліндри, конуси, зрізані конуси). Властивості, площі поверхонь. Куля (властивості).
3. Об'єми геометричних тіл і площі поверхонь тіл обертання. Доповнимо цю структуру ще одним модулем.
4. Комбінації геометричних тіл.

Порядковий компонент цього типу структури визначається методичною і логічною доцільністю одночасного вивчення властивостей і площ поверхонь тіл обертання, за винятком площі поверхні кулі, для доведення якої використовується об'єм. Кожний модуль має свою структуру. Розглянемо, наприклад, структурування матеріалу другого модуля, врахувавши введені нами інваріантні компоненти структури і виділені цілі.

До *основного* навчального матеріалу віднесемо:

- Означення фігури та тіла обертання, поверхні тіла обертання.
- Означення циліндра, конуса, зрізаного конуса, кулі, сфери та їх елементів.
- Теореми про бічні поверхні циліндра, конуса; про відношення площі основи конуса і площі паралельного до основи перерізу; про бічну поверхню зрізаного конуса; про переріз кулі площиною; про дотичну площину до кулі.
- Задачі на засвоєння понять. Наприклад:
  1) Чи може бути неопуклим тіло, утворене обертанням навколо осі опуклої плоскої фігури?
  2) Чи усі твірні одного циліндра рівні і паралельні одна одній?
  3) Чи всі осьові перерізи конуса – рівні рівнобедрені трикутники?
  4) Чи правильно говорити, що конуси бувають повні і зрізані?
  5) Січна площина перетинає кулю по кругу, а сферу?
- Елементарні задачі на відшукування елементів, площ поверхонь циліндра, конуса, зрізаного конуса, елементів кулі. Задачі на дослідження, доведення, побудову [13].

Основний матеріал може бути виділений у діючому підручнику, законспектований учнями у спеціальні зошити для теорії, тощо.

Допоміжний навчальний матеріал для модуля "Тіла обертання. Властивості, площі поверхонь" включає:

- Пояснювальний матеріал:

1) тексти пояснень із залученням моделей, таблиць, малюнків;

2) протоколи виконання практичних робіт;
3) алгоритми розв’язування базових задач;
4) готові розв’язки задач для робіт навчального характеру.

- Зауваження:

1) про загальне означення циліндра, конуса;
2) про те, що площу кривої поверхні не завжди можна розглядати як границю площ вписаних многогранних поверхонь (циліндр Шварца).

- Схеми. Наприклад, схема 5. Аналогічно можна виконати схеми для циліндра, зрізаного конуса та інші.

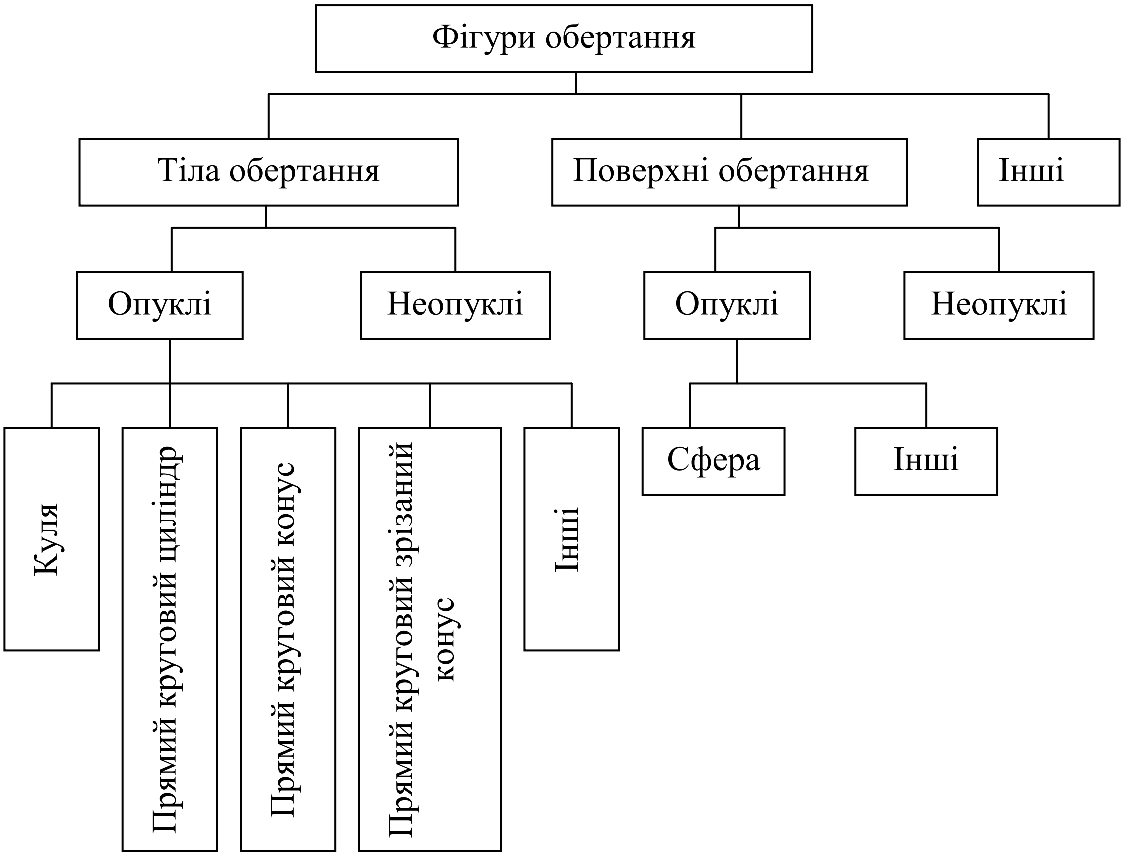


Схема 5

- Додаткові задачі:

– <u>Прикладні задачі</u>:

1) Дві ялинкові прикраси циліндричної форми потрібно пофарбувати. Висота першої прикраси вдвічі більша за висоту другої, а радіус основи вдвічі менший радіуса основи другої. На яку прикрасу потрібно більше фарби? (На другу)

2) Діаметр основи конічного літнього цирку – 16 м, висота шатра – 6 м. Яка найменша кількість брезенту потрібна для виготовлення шатра? (≈250 $м^2$)

3) Поверхня Африки складає $\frac{1}{17}$ частину всієї земної поверхні. Діаметр Місяця приблизно дорівнює $\frac{1}{4}$ діаметра Землі. Чи зміг би розміститися материк, рівновеликий Африці, на одній півсфері місяця? (Ні)

– Задачі на розвиток просторового мислення:

1) В яких межах змінюється кут а) при вершині осьового перерізу конуса; б) між двома твірними конуса?
2) Як обчислити площу бічної поверхні, одержаної при обертанні рівнобічної трапеції навколо а) осі симетрії; б) основи; в) бічного ребра?
3) Радіуси куль дорівнюють 20 см і 15 см. Яке взаємне розташування цих куль, якщо відстань між їх центрами дорівнює а) 35 см; б) 40 см; в) 5см; г) 20 см?
4) Циліндр перетнули площиною під кутом 45^0 до осі так, що отримали два рівних тіла. Потім приклали одну частину до іншої під прямим кутом так, що отримали колінчасту трубу. Як знайти площу поверхні цієї труби?

– Задачі на формування конструктивних умінь:

1) Побудуйте проекцію циліндра на площину а) паралельну до його осі; б) перпендикулярну до його осі.
2) Дана точка на основі конуса. Побудуйте точку перетину бічної поверхні конуса і прямої, яка проходить через дану точку і середину висоти конуса.
3) Розріжте яблуко на 10 рівних частин.

– Нестандартні задачі, визначні математичні задачі. Наприклад, старовинна єгипетська задача жерців бога Ра, задача Бега-Еддіна, задача Аполлонія із трактату "Коніка" тощо [3, с. 8]

- Історичні довідки
  - виникнення понять про циліндричну і конічну форми;
  - означення циліндра, конуса, кулі в "Основах" Евкліда;
  - обчислення площ поверхонь циліндра, конуса, кулі Архімедом;
  - обчислення площі кривої поверхні у десятій задачі Московського папірусу;
  - вивчення властивостей кулі у зв'язку з мореплавством і астрономічними дослідженнями, "Піфагорова музика сфер";
  - властивості перерізів кулі площиною у праці "Про сферики" геометра і астронома Феодосія із Тріполі.
- Портрети, картини, малюнки. Портрети Евкліда, Архімеда, Платона.

Картини М. Ешера "Три сфери", "Рука з відображаючою сферою", "Рептилії", Рафаеля "Афінська школа", М. Ернста "Евклід", Д. Фетті "Архімед", Р. Магрита "Коли проб'є час", "Три еліпсоїди" та ін. Малюнки із зображеннями Парфенону, Софійського собору та ін. Зображення радіолярій, мушель, грибів, інших циліндричних, конічних і сферичних тіл у природі.

До апарату контролю навчальних досягнень учнів у модулі "Тіла обертання. Властивості, площі поверхонь" відносимо:

- Усні вправи [13]
- Тести, диктанти, які можна проводити традиційно або із застосуванням педагогічних програмних засобів на комп'ютері. Наприклад:

1) Дайте відповідь "так" чи "ні". Чи правильно, що через довільні дві точки поверхні кулі можна провести декілька кіл великого круга? (Ні)
2) Виберіть істинне твердження. Прямий круговий циліндр утворюється при обертанні ...

а) прямокутника навколо його осі симетрії; б) прямокутного трикутника навколо катета; в)квадрата навколо його діагоналі; г) прямокутника навколо його сторони. (а, г)

3) Вставте пропущене слово. Однією із найрозповсюдженіших форм у природі є ____. Він присутній у будові крон стовбурів дерев, стеблин і суцвіть, грибів і мушель. (конус) На малюнку 1 – відповідні зображення.

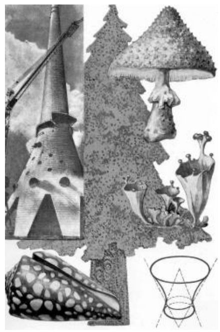


Рис. 1

- Практичні роботи
- Самостійні роботи
- Тематичні контрольні роботи
- Картки для корекції знань

Матеріали для контролю навчальних досягнень, розроблені нами у [12, с.13]

Методичні особливості формування понять під час вивчення геометричних тіл.

Під час організації вивчення геометричних тіл учитель оперує певною системою властивих їм понять. У поняттях відображаються загальні, істотні й специфічні властивості певних предметів і явищ дійсності. Вони є мисленнєвим образом об’єктів навколишнього світу або нашої свідомості. Головними поняттями розділу стереометрії "Геометричні тіла" є поняття: геометричне тіло, многогранник, куб, паралелепіпед, призма, піраміда, зрізана піраміда, тіло обертання, циліндр, конус, зрізаний конус, куля, сфера, площа поверхні, об’єм. Формування системи понять відіграє важливу роль під час вивчення геометрії. Однією із умов поліпшення викладання геометрії в школі є істотна зміна ставлення до формування геометричних понять [5, с. 4].

З геометричними тілами учні вже знайомляться у початковій та основній школі: прямокутний паралелепіпед, куб, призма, циліндр, куля, піраміда, конус. Вони розглядають предмети, які мають форму цих тіл, виготовляють розгортки, моделюють тіла з пластиліну, обчислюють об’єми прямокутного паралелепіпеда і куба, площі поверхонь і об’єми прямої призми, циліндра, кулі [8].

У 10 класі під час вивчення початкових відомостей стереометрії після вивчення паралельності прямих і площин розглядається зображення просторових фігур на площині, вимагаються уміння знаходити на моделях геометричних тіл паралельні і перпендикулярні прямі і площини, перпендикуляр і похилу [9]. Починаючи вивчення геометричних тіл в 11 класі, слід врахувати, що учні вже мають уявлення про призму, піраміду, циліндр, конус, кулю, тому потрібно їх систематизувати, поглибити і розширити, дати означення, доповнити новими поняттями (геометричного тіла та ін.), ввести більш строгі означення поняття площі поверхні і об’єму.

Ми вважаємо, що підходити до означення геометричних тіл, які вивчаються в курсі стереометрії, можна двома шляхами. Перший підхід: "геометричне тіло" як родове поняття, а поняття "многогранники" і "тіла обертання" – видові поняття, які знаходяться у відношенні підпорядкування (від виду до роду), а між собою не перетинаються. У свою чергу поняття "многогранник" є родовим поняттям для видових понять "призма", "піраміда", "зрізана піраміда", які є непорівнянними поняттями, тобто за своїм змістом не перетинаються. Поняття "правильні многогранники" також видове по відношенню до поняття "многогранники", а з іншими видовими поняттями "призма" і "піраміда" знаходиться у відношенні часткового співпадання (перехресні поняття). Поняття "тіло обертання" є родовим поняттям по відношенню до видових понять "прямий круговий циліндр", "прямий круговий конус", "прямий круговий зрізаний конус", "куля", які є непорівнянними поняттями. Важливо не плутати поняття піраміди і зрізаної піраміди, конуса і зрізаного конуса, правильного тетраедра і правильної трикутної піраміди. Доцільно навести приклади геометричних тіл, які не є многогранниками і тілами обертання, многогранників, які не є призмами (ромбододекаедр), не є зрізаною пірамідою (обеліск). Такий підхід у [4], [7], [10].

За другим підходом поняття "циліндр", "конус", "зрізаний конус" є видовими поняттями родового поняття "геометричне тіло", вони є непорівнянними поняттями. Поняття "многогранник" також видове поняття, яке знаходиться у відношенні часткового співпадання з поняттями "циліндр", "конус", "зрізаний конус", оскільки обсяг видового поняття призма входить як частина в обсяг поняття "циліндр", обсяг поняття піраміда – частина обсягу поняття "конус", обсяг поняття "зрізана піраміда" – частина обсягу поняття "зрізаний конус". Такий підхід дає можливість застосовувати твердження, доведені для циліндра, при вивченні призми, а твердження про конус і зрізаний конус – при вивченні піраміди і зрізаної піраміди. Цей шлях введення понять зручний для застосування у класах технологічного напряму профілізації навчання. Такий підхід у [1], [2]. Для загальноосвітньої школи на нашу думку доцільний перший підхід.

Формування понятійного апарату визначається обраним підходом і здійснюється в рамках відповідної структури. При цьому будемо дбати не тільки про засвоєння матеріалу, передбаченого програмою, а й про загальнокультурні знання, розвивати учня як цілісність, усі його якості й таланти в цілому. Аналізуючи методичні дослідження [5, с. 4], [11, с. 49] та спираючись на власний досвід ми виділили три структурні **етапи процесу формування понять** розділу "Геометричні тіла". Кожний етап має відповідні методичні складові, які реалізуються за допомогою спеціальних вправ.

I. *Підготовчий етап*. Здійснюється актуалізація понять і уявлень, які є опорою для засвоєння нових понять, та мотивація вивчення поняття. З’ясовуються уявлення учнів про нове поняття на основі знань про нього з основної школи, уміння відшукувати приклади з навколишнього середовища, які ілюструють дане поняття. Цей етап має такі методичні складові.

   1. Актуалізація. Реалізується за допомогою вправ на розпізнавання за малюнками, моделями геометричних тіл, що вивчалися у попередніх класах, елементів геометричних тіл.

2. Мотивація. Використовуються прикладні задачі, красиві задачі, історичні довідки, приклади із навколишнього середовища, які ілюструють дане поняття.

II. *Пізнавальний етап.* На цьому етапі вводиться поняття, формулюється означення, після чого виконуються вправи, які повинні бути посильними і забезпечувати засвоєння поняття. Методичні складові цього етапу:

1. Введення поняття. Застосовуються спеціальні запитання про введене поняття.
2. Розкриття змісту й обсягу поняття. Цьому сприяють:
   2.1. вправи на варіювання неістотних властивостей і виділення істотних;
   2.2. вправи на розпізнавання об’єктів, що задовольняють обсягу поняття (підведення під поняття);
   2.3. вправи на конструювання об’єктів, що задовольняють поняттю.
3. Виділення термінів, на яких ґрунтується нове поняття. Реалізується за допомогою спеціальних запитань.
4. Засвоєння логічної структури означення поняття, запам’ятовування означення. Застосовуються:
   4.1. вправи на виведення наслідків з означення;
   4.2. завдання на вибір порядку слів для одержання істинного твердження;
   4.3. вправи на доповнення умов для одержання правильного означення;
   4.4. контрприклади;
   4.5. вправи, в яких потрібно вставити пропущені слова.
5. Використання поняття. Здійснюється за допомогою вправ:
   5.1. на вміння оперувати поняттями;
   5.2. на застосування понять та їх властивостей у різних ситуаціях;
   5.3. на розпізнавання і виведення наслідків, що згруповані у блоки задач на обчислення, доведення, дослідження і побудову;

5.4. на використання прикладної спрямованості поняття;

5.5. вправи з корегуючими функціями.

6. Встановлення зв'язків між поняттями, класифікація, систематизація. Реалізується за допомогою:

6.1. складання родоводу поняття;

6.2. побудови схем;

6.3. заповнення таблиць.

III. *Контролюючий і корегуючий етап*. Передбачається контроль і корекція засвоєння поняття. На цьому етапі частіше всього розглядається декілька понять. Для підвищення продуктивності цього етапу ми пропонуємо проведення комп'ютерного тестування. Методичні складові цього етапу:

1. Попередній контроль засвоєння поняття. Здійснюється за допомогою тестів, диктантів, усного розв'язування задач.
2. Корекція, самокорекція. Планується самостійна робота учнів по корекції засвоєння поняття.
3. Підсумковий контроль та індивідуальна корекція. Проводиться контрольна робота, після якої застосовуються картки для корекції знань.

Понятійний апарат, обраний підхід до його введення та структура визначає відповідне змістове наповнення. Відображення змісту за обраною нами структурою згідно першого підходу до введення понять ми покажемо у повному обсязі на прикладі формування поняття "піраміда". Для інших понять зупинимося тільки на окремих складових етапів формування понять, наведемо найбільш яскраві приклади.

Зокрема найскладнішим є введення поняття геометричного тіла. Ввести поняття геометричного тіла доцільно конкретно-індуктивним методом у такий спосіб: пригадати геометричні тіла, які вивчали в основній школі; розглянути поверхні цих тіл і скінчену просторову область, яка ними обмежується; навести приклади просторових фігур, які не є тілами; після цього сформулювати означення: геометричним тілом називається об'єднання скінченої просторової області та її поверхні. Для класів з поглибленим вивченням математики допоміжні поняття означаються, застосовується абстрактно-дедуктивний метод. Наведення прикладів геометричних тіл та фігур, що не є тілами, сприяють розкриттю обсягу поняття, а означення – його змісту. Зупинимося на деяких методичних складових етапів формування поняття "геометричне тіло" (2.2, 2.3, 4.1). На *пізнавальному* етапі виконуються вправи на розкриття змісту і обсягу поняття. Ці вправи можуть бути запропоновані під час фронтальної роботи з класом у вигляді евристичної бесіди або як тестування за індивідуальними картками чи засобами комп'ютерних технологій.

2.2. Вправи на підведення об'єкта під поняття:

1. Дано малюнок геометричних фігур (октаедр, ікосаедр, двогранний кут, об'єднання двох кубів із одним спільним ребром, об'єднання кулі і плоского кільця, круг, циліндр, обруч, колба та ін.) Визначити, які з них є геометричними тілами.
2. Чи є тілом а) куб без однієї грані; б) куля з вилученим центром?
3. Прикладами матеріальних тіл обертання є а) планета Сатурн; б) звичайна пляшка; в) спортивний диск; г) свердло. Виберіть правильні варіанти відповідей.

2.3. Вправи на конструювання об'єктів, що задовольняють поняттю. Ці завдання виконуються під час практичної роботи.

1. З двох кубів побудуйте фігуру, яка а) є тілом; б) не є тілом.
2. Наведіть приклад неплоскої фігури, яка а) містить тільки граничні точки; б) містить тільки внутрішні точки.
3. Поясніть, що зображено на таблиці (рис. 2).

(Можна на цьому малюнку побачити кут кімнати, в якому розташовано куб, можна куб з вирізаним кутом, можна побачити два куби – великий і прилеглий до нього маленький).

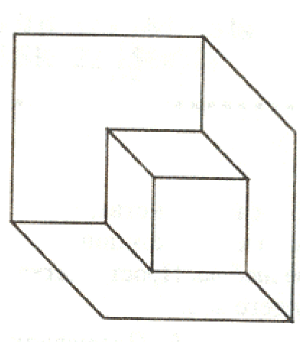


Рис. 2

Також пропонуємо запитання для евристичної бесіди з методичної складової засвоєння логічної структури означення поняття, запам'ятовування означення.

4.1. Виведення наслідків з означення:

1. Тіло розбили на дві частини. Чи будуть утворені частини тілами?

2. Дано кулю і точку А, яка їй не належить. Побудуйте точку кулі найближчу до даної точки. Чи існує внутрішня точка кулі найближча до точки А?

Із усіх тіл многогранники займають особливе місце. Це пояснюється насамперед тим, що багато результатів для інших тіл одержуються із відповідних результатів для многогранників. Наприклад, визначення об'ємів тіл та площ їх поверхонь шляхом граничного переходу від многогранників, або вивчення початкових відомостей із стереометрії на многогранниках. Многогранники використовуються і для розвитку просторової уяви.

Поняття *"многогранник"* можна ввести двома шляхами: конкретно-індуктивним або абстрактно-дедуктивним. *Конкретно-індуктивний* шлях має таку схему: 1) розглядаються приклади геометричних тіл, серед яких є многогранники; 2) із усієї множини виділяються многогранники і з'ясовуються загальні ознаки цього поняття; 3) формулюється означення; 4) означення закріплюється наведенням прикладів і контрприкладів; 5) подальше засвоєння поняття і його означення в процесі їх застосування. *Абстрактно-дедуктивний* шлях має таку схему: 1) формулюється означення поняття; 2) наводяться приклади і контрприклади; 3) подальше засвоєння поняття і означення в процесі їх застосування. На нашу думку, перший шлях слід застосовувати в основній школі, а другий – в старшій. Але який шлях не було б використано, поняття многогранника означається через найближчий рід – геометричне тіло, і видові відмінності – поверхня складається із скінченої кількості многокутників. Зауважимо, перш ніж вводити означення многогранника, треба повторити і узагальнити поняття многокутника.

На *пізнавальному* етапі для розкриття змісту і обсягу поняття "многогранник" пропонуємо блоки вправ для методичних складових.

2.1. Вправи на варіювання неістотних властивостей і виділення істотних. Запитання для евристичної бесіди.

1. Чи існує неопуклий многогранник, що має 4 грані? 5 граней?
2. Яку найменшу кількість ребер може мати многогранник?
3. Чи може гранню 5-гранника бути 5-кутник?
4. Чи існує многогранник, у якого рівно 7 ребер?

2.2. Вправи на розпізнавання об’єктів, що задовольняють обсягу поняття. Застосовується дослідницький метод, метод створення проблемних ситуацій під час фронтальної роботи з класом.

1. Чи є тіла зображені на малюнку 2 многогранниками?
2. Чи існує многогранник, який має а) 5 граней і 5 вершин; б) 5 граней і 6 вершин.
3. Зобразіть декілька відомих многогранників. Чи може трикутник бути зображенням многогранника (ніяких ліній, крім сторін трикутника, на зображенні немає)?

2.3. Вправи на конструювання об’єктів, що задовольняють поняттю. Завдання для домашньої самостійної роботи або практичної роботи на уроці.

1. Складіть 12 сірників так, щоб вони утворили 6 квадратів із стороною, яка дорівнює одному сірнику. (Для розв’язання цієї задачі потрібно вийти в простір і скласти сірники у вигляді куба).
2. Побудуйте многогранник, який має 11 ребер. (Чотирикутна піраміда має 8 ребер, якщо у неї зрізати кут при основі, кількість ребер збільшиться на 3).
3. Придумайте многогранник, зображенням якого є квадрат з проведеними діагоналями.

При введенні поняття многогранника необхідно використати моделі многогранників, таблиці із зображенням правильних многогранників, напівправильних, зірчастих, паралелоедрів, кристалів. Можна також використати репродукції відомих картин, гравюр, наприклад, картини С. Далі "Таємна вечеря", гравюр М. Ешера "Рептилії", "Куб і чарівні стрічки", "Зірки", "Подвійний планетоїд", А. Дюрера "Меланхолія", зробити історичний екскурс. Як приклади многогранників потрібно навести не тільки куб, призму, піраміду, а й многогранники складної форми, які зустрічаються в житті – кристали, книжкова шафа, полиці, сірникова коробка, будинок, стіл, табуретка, тощо. Це дасть можливість показати, що геометрія є частиною загальнолюдської культури і буде сприяти гуманізації навчання. Сформулювавши означення многогранника і навівши приклади, доцільно дати завдання учням знайти в навколишньому просторі приклади многогранників і потім обговорити ці приклади. Перед цим завданням потрібно дати очевидне твердження: "Тіло, складене із многогранників, які послідовно прикладаються до плоских частин граней або до граней, є многогранником".

Після введення поняття многогранника поняття призми і піраміди означаються як родове поняття. Означення цих понять, як і означення многогранника, є дискриптивними, тобто описовими.

Означення призми. Саме поняття призми учням відоме із основної школи. У старшій школі воно розширюється на основі узагальнення поняття многогранника, уточнюється завдяки введенню неопуклих призм, похилих. Поняття паралелепіпеда вводиться як видове поняття родового поняття "призма", а поняття куба – як видове поняття родового поняття "прямокутний паралелепіпед". Співвідношення між цими поняттями проілюструємо кругами Ейлера (схема 6).

Означення піраміди вводиться аналогічно до означення призми. Проаналізувавши різні підходи до означення цих геометричних тіл, ми зупинилися на такому: "Пірамідою називається многогранник, одна грань якого – довільний многокутник, а інші грані – трикутники, що мають спільну вершину". При цьому многокутник може бути як опуклий, так і неопуклий, з "дірками". При означенні правильної піраміди слід звернути увагу на дві вимоги: в основі такої піраміди лежить правильний многокутник і його центр збігається з основою висоти піраміди. Потрібно показати моделі або малюнки неправильних пірамід, які мають одну із вказаних властивостей.

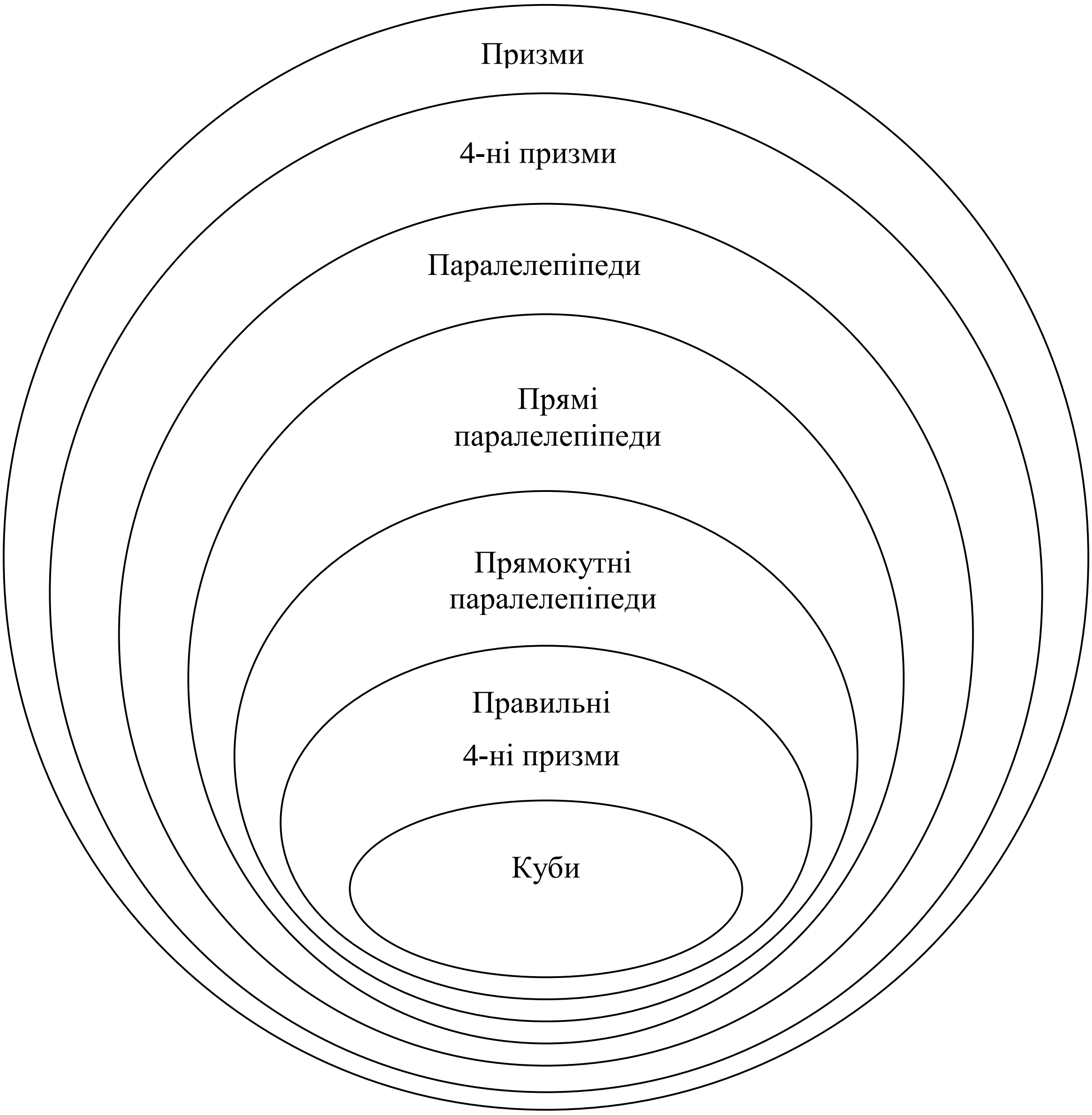


Схема 6

Покажемо реалізацію етапів введення поняття "*піраміда*" та їх методичних складових.

На *підготовчому* етапі для здійснення актуалізації знань учнів пропонуємо тестові завдання для всього класу на картках:

– Серед зображених на малюнку геометричних фігур пірамідою є ... (додаються малюнки геометричних фігур)

– За даним малюнком піраміди назвіть: а) грані; б) основу; в) ребра; г) вершини.

– Виберіть правильний варіант продовження речення. Поверхня правильної трикутної піраміди складається з ... а) рівностороннього трикутника і трьох трикутників; б) рівностороннього трикутника і трьох рівнобедрених трикутників; в) квадрата і чотирьох рівнобедрених трикутників; г) трикутника і трьох рівнобедрених трикутників.

Для здійснення мотивації пропонуємо історичну довідку, застосовуємо пояснювально-ілюстративний метод навчання. Тіла пірамідальної форми досить поширені, зокрема в архітектурі. Піраміда, яка зменшується від своєї основи до вершини, утворює красиву форму. Ось чому протягом багатьох століть раби зводили своєму фараону піраміду. Найстародавнішим пам’ятником геометрії в Єгипті є піраміди. Серед пірамід Єгипту особливе місце займає величня піраміда фараона Хеопса. Силуети кам’яних споруд, церков і скульптурних пам’ятників, як правило, вписуються в піраміду. На острові Шпіцберген навіть є селище з назвою Піраміда.

Термін "піраміда" походить з грецької "пірамід" або "пірамідос". Греки запозичили це слово, як вважають, у єгиптян. У папірусі Рінда (XX ст. до н.е.) зустрічається слово "пірамус" у розумінні ребра правильної піраміди. Цей твір є зібранням різних практичних задач, більша частина яких взята з практики. Один з розділів – вимірювання пірамід, у ньому розглядаються різні співвідношення між частинами піраміди.

Для мотивації використовуємо задачі:

Історичні. Наприклад. Серед пірамід Єгипту особливе місце займає величня піраміда фараона Хеопса. Розміри цієї піраміди: сторона основи – 500 ліктів, висота – 318 ліктів. Знайдіть відношення апофеми бічної грані до половини сторони основи (1,618). Задача Коммандіно, задача Фаульгабера, розглянуті нами у [3, с. 7].

Прикладні задачі. Наприклад, у комп’ютерному тестуванні. Вставте пропущене слово у твердження, що пов’язане з історією вивчення многогранників. Перший вчений Фалес Мілетський (бл. 625 – 547 рр. до н.е.) визначив висоту однієї із єгипетських пірамід. Вважають, що він, вибравши момент, коли сонячні промені падали під кутом 45^0, виміряв довжину ___ від піраміди і цим самим знайшов її висоту.

Красиві задачі. Наприклад, у комп'ютерному тестуванні. Вставте пропущене слово, розглянувши малюнок. Многогранник, який має чотири грані математики називають ___ . Голландський художник Мауріц Ешер використав на картині "Подвійний планетоїд" два таких многогранники: один пройшов крізь інший, причому перший – "цивілізований", а другий залишився у первісному вигляді (рис. 3).

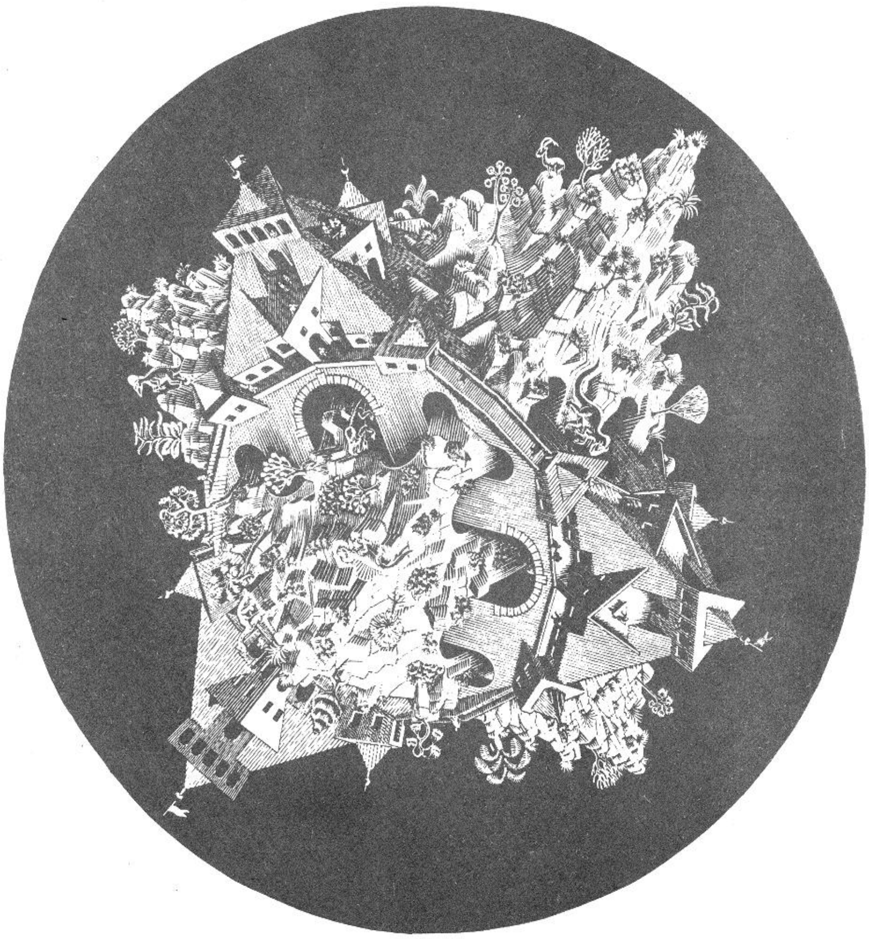


Рис.3

Розглянемо методичні складові *пізнавального* етапу.

1. Після введення поняття абстрактно-дедуктивним шляхом пропонуємо вправи, для розв'язання яких використовується колективна форма роботи або індивідуальна за картками.

Усні запитання.

– Поясніть, як можна утворити піраміду.

– Чи може довільна грань тетраедра вважатися основою?

– Чи рівні всі ребра правильної піраміди?

Математичний диктант. Дайте відповідь "так" чи "ні".

– Многогранник складений з трикутників, називається пірамідою.

– Піраміда називається правильною, якщо її основою є правильний трикутник.

– Висота бічної грані правильної піраміди, проведена з її вершини, називається апофемою.

– Неправильна піраміда апофем не має.

Тести. Вставте пропущені слова у твердження. Такі тести можна проводити із застосуванням комп'ютера.

– Пірамідою називається многогранник, одна грань якого довільний ___ , а інші грані ___ , що мають спільну ___ .

– Піраміда називається правильною, якщо її основа ___ ___ , центр якого збігається з основою ___ піраміди.

– Трикутну піраміду називають ще ___ .

2. Розглянемо вправи на розкриття змісту і обсягу поняття.

2.1.Для варіювання неістотних властивостей та виділення істотних пропонується розглянути малюнки, на яких зображено різні піраміди: трикутні, чотирикутні, п'ятикутні, у яких основа не обов'язково лежить у горизонтальній площині, прямі та похилі, опуклі та неопуклі. Крім пірамід – є ще призми, зрізані піраміди, октаедр, комбінації піраміди з іншими многогранниками, геометричні тіла, в основі яких не лежить многокутник, наприклад, сектор. Після обговорення виділяються ті геометричні тіла, основою яких є многокутник, а бічні грані – трикутники із спільною вершиною. Виконуються вправи на дошці на побудову різних геометричних тіл, зокрема пірамід. Виділенню істотних властивостей сприяють також вправи на конструювання моделей геометричних тіл, при цьому учні виявляють суттєві властивості піраміди. Наприклад: складіть тетраедр із паперового рівнобедреного трикутника за допомогою трьох згинань. Такі вправи краще запропонувати для домашньої роботи.

2.2.Для конструювання вправ на підведення під поняття можна виходити з логічної структури означення піраміди. Многогранник – піраміда тоді і тільки тоді, коли одночасно виконуються дві умови: 1) одна грань – многокутник, 2) інші грані – трикутники, що мають спільну вершину. Тому ми пропонуємо такі вправи, які розв’язуються усно всіма учнями і коментуються ними, а в разі потреби вчителем.

– Чи є пірамідою геометричне тіло, якщо одна його грань многокутник, а інші грані трикутники?

– Чи є пірамідою просторова фігура, основою якої є многокутник, а інші грані – трикутники із спільною вершиною? (піраміда без однієї грані)

– Чи є пірамідою многогранник, всі грані якого трикутники? (октаедр)

Для встановлення належності об’єкта до поняття можна організувати виконання вправ у такій формі. Текст означення розбити на частини (на плакаті): /пірамідою називається многогранник/, /одна грань якого – довільний многокутник/, /а інші грані трикутники/, /що мають спільну вершину/. Кожна виділена частина відповідає властивостям піраміди і використовується при виконанні вправ. Якщо об’єкт не має хоча б однієї із виділених властивостей, то він не є пірамідою. Пропонуємо вправи для комп’ютерного тестування:

– Які із геометричних тіл, зображених на малюнку є пірамідами?

– Порівняйте терміни: "правильна трикутна піраміда" і "правильний тетраедр". Чи можна стверджувати, що вони означають одне і те ж?

– Виберіть правильну відповідь. Поверхня правильної чотирикутної піраміди складається з ... а) квадрата і чотирьох трикутників; б) квадрата і чотирьох рівнобедрених трикутників; в) двох квадратів і чотирьох рівнобедрених трикутників; г) чотирикутника і чотирьох рівнобедрених трикутників.

– Встановіть відповідність між назвами многогранників та їх зображеннями на малюнках. (Чотирикутна піраміда, куб, трикутна призма, правильний тетраедр).

2.3. Вправами на конструювання об’єктів, що задовольняють поняттю можуть бути:

– Складіть 6 сірників так, щоб вони утворювали чотири рівносторонні трикутники із стороною, яка дорівнює довжині сірника.

– Дано два рівних тетраедри, в основах яких лежать прямокутні трикутники з катетами а і в та гіпотенузою с. Бічне ребро, яке проходить через точку перетину катетів, перпендикулярне до основи. Складіть з них подумки інші тіла, зробіть малюнки. Скільки різних тіл можна скласти? Які з них є пірамідами? (Три піраміди, одна біпіраміда. Рис. 4) Такі вправи краще використати для індивідуальної роботи, а саме, запропонувати для практичній роботи на уроці або як дослідницьке домашнє завдання.

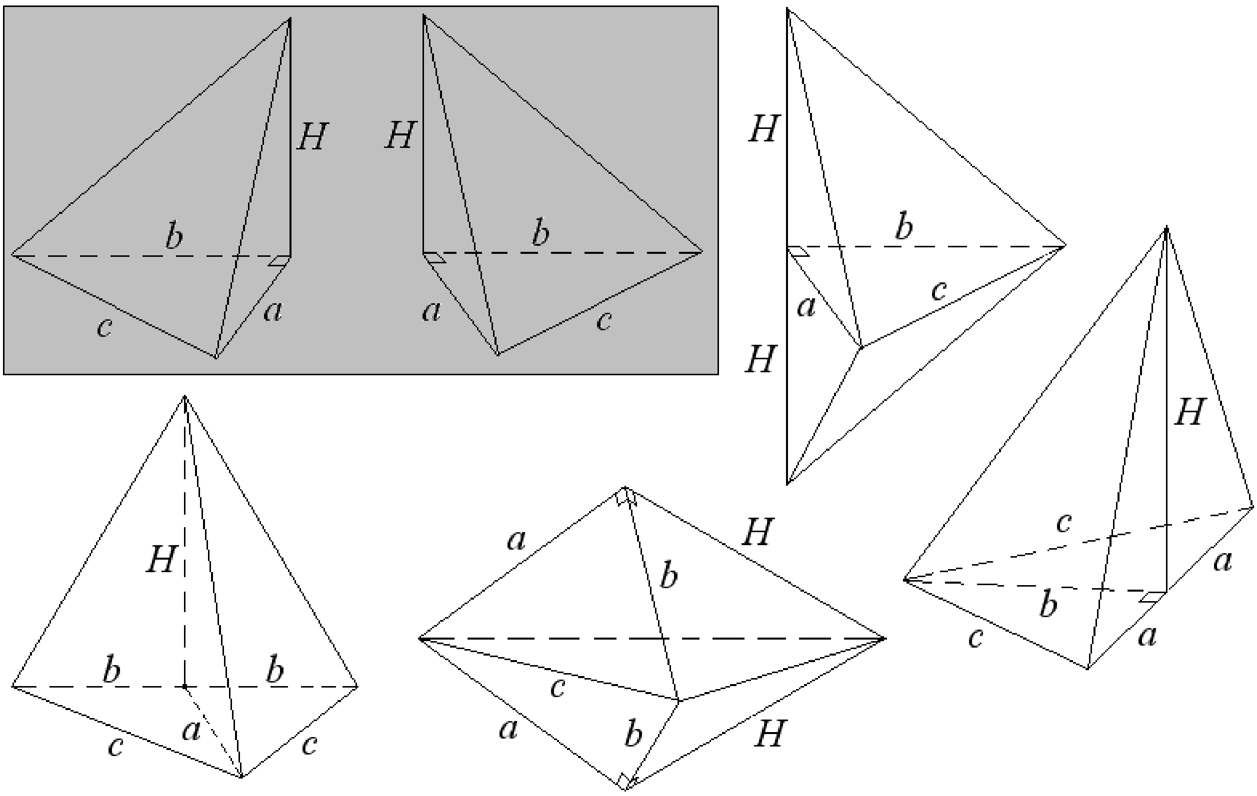


Рис. 4

3. В ході бесіди з учнями виділимо терміни, на яких ґрунтується нове поняття. Повторимо означення многокутника, узагальнивши його на випадок неопуклих многокутників; означення многогранника, звернувши увагу на те, що многогранник є геометричним тілом. Розглянемо поняття грані, ребра,

вершини многогранника, зробимо висновки, про те, що грані та ребра піраміди є не тільки бічні; основа також грань, сторони основи – ребра.

4. Реалізація методичної складової засвоєння логічної структури означення піраміди та запам’ятовування означення.

4.1.При виведенні наслідків з поняття від факту належності до поняття приходимо до властивостей, які має піраміда. Пропонуємо усні вправи, частину з них можна виконати у вигляді математичного диктанту, тестування або застосувати форму роботи "мікрофон":

– Якщо многогранник – піраміда, то основою є ...

– Якщо піраміда правильна, то її бічні грані – ...

– Скільки ребер у шестикутної піраміди: а) 6; б) 12; в) 18; г) 24; д) 8?

– Яку найменшу кількість граней може мати піраміда: а) 5; б) 12; в) 10; г) 4?

– Яку найменшу кількість ребер може мати піраміда: а) 6; б) 5; в) 4; г) 7?

– Бічні ребра піраміди однаково нахилені до площини основи. Які з названих фігур можуть бути в основі цієї піраміди: а) прямокутник; б) ромб; в) рівнобічна трапеція?

– Чи може перерізом чотирикутної піраміди бути шестикутник?

– Формула Ейлера для опуклих многогранників: $В + Г – Р = 2$, де В – кількість вершин, Г – кількість граней, Р – кількість ребер, є однією з найкрасивіших формул математики і першою теоремою топології. Складіть таблицю для перевірки цієї формули для n-кутної піраміди. Придумайте приклад геометричного тіла, для якого не виконується ця формула (наприклад, трикутна піраміда з вирізаною трикутною пірамідою).

4.2. Завдання на вибір порядку слів для одержання істинного твердження будується з довільного істинного твердження, для якого записуються усі слова у довільному порядку, причому перше слово твердження з великої літери. Завдання подається на індивідуальних картках або на таблиці для всього класу. Наприклад. Встановіть правильну послідовність слів, щоб одержати відоме твердження про властивість діагональних перерізів n-кутної піраміди при $n \neq 3$.

Слова: 1) діагональний; 2) піраміда; 3) Кожний; 4) трикутник; 5) переріз. Учень повинен вказати послідовність номерів: 3 1 5 2 4.

4.3. Вправи на доповнення умов для одержання правильного означення подаються як запитання при супровідному закріпленні.

– Перевірте правильність означення. Пірамідою називається многогранник, одна грань якого довільний многокутник, а інші грані трикутники.

– Закінчіть твердження. Висоту бічної грані правильної піраміди, проведену з вершини піраміди, називають ...

4.4. Необхідність усіх умов в означеннях обґрунтовуємо за допомогою контрприкладів під час евристичної бесіди з класом.

– Тетраедр – піраміда, всі грані якої трикутники. Всі грані октаедра також трикутники, чи можна його також назвати пірамідою?

– Многогранник є об’єднанням куба і чотирикутної піраміди, що має основою одну з граней куба. Оскільки основою цього многогранника є многокутник, а серед бічних граней є трикутники, то даний многокутник – піраміда. Так чи ні?

– З трикутної піраміди видалили одну бічну грань, одержаний многогранник – також піраміда. Чи є правильним це твердження?

4.5. Вправи, в яких потрібно вставити пропущені слова у дані твердження можуть бути подані як тестові завдання на картках або у формі комп’ютерного тестування.

– Усі бічні грані правильної піраміди – рівні ___ трикутники.

– Бічна поверхня піраміди складається з усіх її ___ ___ .

– Піраміда, в основі якої лежить п’ятикутник, називається ___ .

5. Вагома методична складова пізнавального етапу – використання поняття.

5.1. Завдання на вміння оперувати поняттями доцільно подати за допомогою таблиці. Наприклад. Дано правильну трикутну піраміду, у якої a – сторона основи, k – апофема, P – периметр основи, S_1 – площа бічної поверхні, S – площа піраміди. Заповніть таблицю 1.

Таблиця 1.

№	a	k	P	S_1	S
1	5			75	
2		24	24		
3		18		297	
4			45	315	
5				$198\sqrt{3}$	$202\sqrt{3}$

5.2. Вправи на застосування понять та їх властивостей у різних ситуаціях можуть бути запропоновані у вигляді дослідницької практичної роботи.

– Чи існує зображення піраміди, на якому всі її ребра видимі? Виконайте малюнок.

– Наведіть приклади пірамід, у яких висота міститься всередині піраміди, лежить у бічній грані, співпадає з бічним ребром, проходить через точку поза основою піраміди. Зробіть малюнки.

5.3. Задачі на розпізнавання поняття та виведення наслідків згрупуємо у блоки: задачі на обчислення, на дослідження, на доведення, на побудову. Такі задачі повинні бути нескладними, щоб розв’язувати їх усно під час фронтальної роботи з класом [13].

– У правильній чотирикутній піраміді висота утворює з бічною гранню кут 37^0. Знайдіть кут між апофемами протилежних бічних граней.

– У трикутній піраміді всі бічні ребра рівні. Чи може висота такої піраміди лежати в одній із граней піраміди?

– Сторона квадрата дорівнює 10 см. Доведіть, що не можна, взявши його за основу, побудувати правильну чотирикутну піраміду з бічним ребром 7 см.

– Побудуйте два зображення однієї піраміди. Перше, що має найбільшу кількість видимих ребер, і друга – найменшу кількість видимих ребер.

5.4. Щоб показати прикладну спрямованість поняття, доцільно запропонувати учням навести приклади застосування форми піраміди у практичній діяльності людини, в архітектурі тощо. А також розв’язати задачі, які наводилися під час мотивації поняття.

5.5. Вправи з корегуючими функціями повинні попередити можливі помилки учнів у застосуванні поняття. Це можуть бути запитання для фронтальної роботи з класом.

– Учень, розв'язуючи задачу про правильну чотирикутну піраміду, отримав, що сторона основи дорівнює 4 см, а бічне ребро – 2 см. Чи існує така піраміда?

Можна запропонувати тестове завдання. Вкажіть номери термінів, що задають однакові поняття для піраміди:

1) двогранний кут при ребрі основи; 2) кут між бічним ребром і основою; 3) двогранний кут при бічному ребрі; 4) кут нахилу бічної грані до основи; 5) кут нахилу бічного ребра до основи.

6. Встановлення зв'язків між поняттями, їх класифікація та систематизація.

6.1. Класифікацію різних видів пірамід подамо за схемою 7.

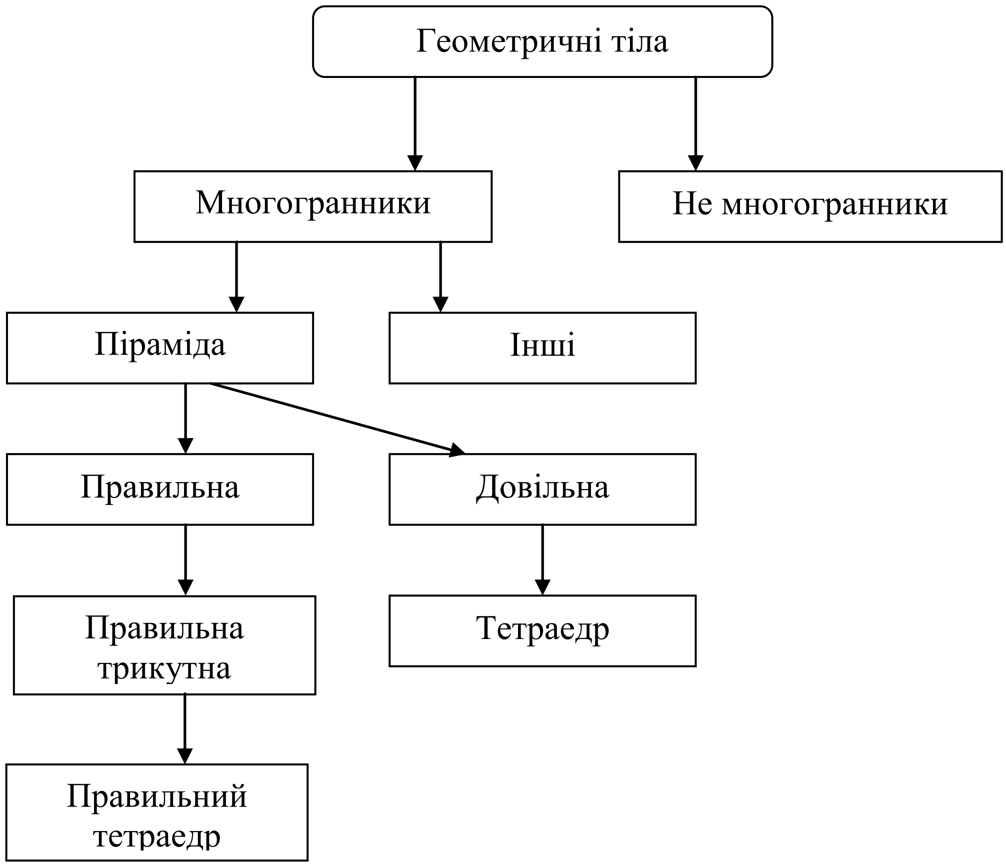


Схема 7

6.2. Пропонуємо учням скласти родовід поняття "піраміда", який може бути таким як на схемі 8.

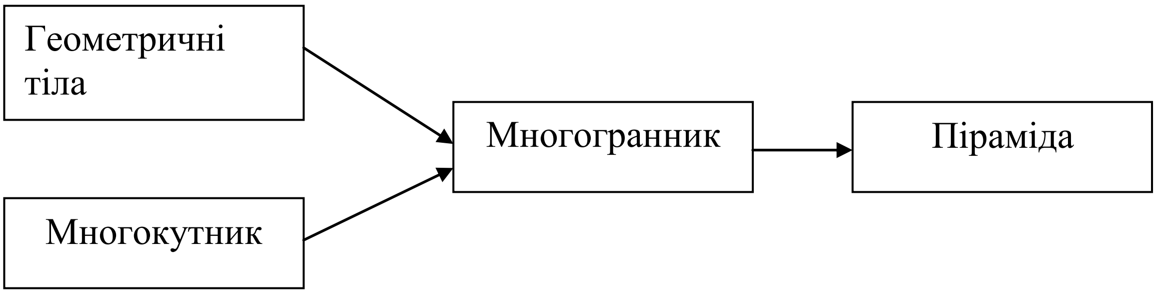


Схема 8

6.3. Для систематизації використаємо таблицю 2, яка заповнюється учнями за допомогою вчителя.

Таблиця 2.

Види пірамід

Основа / Бічні грані	Довільний опуклий многокутник	Неопуклий многокутник	Довільний правильний n-кутник
трикутники	опукла довільна піраміда	неопукла довільна піраміда	піраміда
рівні рівнобедрені трикутники	висота піраміди проходить через центр описаного кола основи	не існує	правильна піраміда
правильні трикутники	не існує	не існує	правильна піраміда, якщо n=3 – правильний тетраедр

Розглянемо методичні складові 1 – 3 *контролюючого і корегуючого* етапу.

1. Попередній контроль засвоєння понять має на меті виявити рівень засвоєння поняття, недоліки та неточності в його розумінні. На цьому етапі пропонуємо диктант.

1) Правильною пірамідою називається ...

2) Чи є піраміда правильною, якщо в її основі лежить квадрат, а висота проходить через одну з вершин основи?

3) Якщо всі бічні грані піраміди нахилені до основи під одним кутом, то її вершина проектується ...

4) Висота піраміди проходить через центр описаного навколо основи кола. Що можна сказати про бічні ребра цієї піраміди?

5) У піраміді дві суміжні бічні грані перпендикулярні до основи. Як розташована висота цієї піраміди?

Попередній контроль засвоєння понять також здійснюється під час усного розв'язування задач, наприклад:

1) Бічні ребра піраміди дорівнюють гіпотенузі прямокутного трикутника, що лежить в основі, і дорівнюють 12 см. Обчисліть висоту піраміди.

2) Бічні ребра піраміди рівні між собою. Чи може її основою бути: а) прямокутна трапеція, б) ромб, в) рівнобедрений трикутник?

3) Доведіть, що сума площ проекцій бічних граней піраміди може бути більшою за площу основи.

4) У правильній чотирикутній піраміді апофема утворює з площиною основи кут β. Покажіть цей кут на малюнку.

2. Після проведення попереднього контролю проводиться робота по корекції та самокорекції. Учні отримують індивідуальні завдання по виправленню помилок, допущених у діагностичних роботах, на індивідуальних консультаціях здійснюється корекція рівня засвоєння учнями понять теми.

3. Підсумковий контроль та індивідуальна корекція рівня засвоєння понять проводиться під час контрольної роботи з теми та роботи з картками для остаточної корекції знань. Така тематична контрольна робота перевіряє крім рівня засвоєння всіх понять теми, також вміння доводити твердження, розв'язувати задачі, застосовувати вивчені властивості, формули тощо. Після контрольної роботи проводиться її аналіз та корекція знань і вмінь учнів за допомогою карток трьох типів, в залежності від вироблених в учнів механізмів орієнтовних основ дій. Картка № 1 – картка з умовою задачі та теоретичним матеріалом, необхідним для її розв'язання (III тип орієнтування). Картка № 2 – картка із вказівками до розв'язування задачі (II тип орієнтування). Картка № 3 – картка з повним розв'язанням задачі (I тип орієнтування). У випадку, коли учень не може розв'язати задачу за карткою № 1, він отримує картку № 2, якщо

і в цьому разі учень неспроможний знайти розв’язок, видається картка № 3. Таким чином вчитель здійснює рівневу диференціацію під час корекції знань. Текст такої контрольної роботи та відповідних карток ми приводимо в [12, с. 22].

Зрізану піраміду означають як частину піраміди, одержану відтинанням площиною, паралельною основі. При цьому слід звернути увагу на те, що із означення випливає, що бічні ребра зрізаної піраміди при продовженні перетинаються в одній точці (вершині піраміди, з якої утворена зрізана піраміда). Тому многокутники основ зрізаної піраміди мають дві властивості: вони гомотетичні і відповідні їх сторони паралельні.

При введенні означень, пов’язаних з поняттями "призма", "піраміда", "зрізана піраміда" слід мати на увазі помилки, які допускають учні при введенні означень: термін тіло замінюють на "фігура"; гранями називають тільки бічні грані; вершиною піраміди – тільки спільну вершину бічних граней; ребрами – тільки бічні ребра; многокутники, які лежать в основах, вважають тільки опуклими; зрізану піраміду вважають пірамідою.

Наступним є поняття "правильний многогранник", розглядаючи його, потрібно врахувати, що програма передбачає лише введення найпростіших відомостей про них. Поняття "правильні многогранники" виділяються із родового "многогранники". Зміст поняття "правильний многогранник" визначається двома умовами: гранями є рівні правильні многокутники і усі вершини рівновіддалені від деякої точки. З цього випливає, що правильний многогранник є опуклим.

На підготовчому етапі для мотивації вивчення поняття використаємо естетичний потенціал геометрії: правильні форми, симетрію, золотий переріз. Потрібно також дати учням практичне завдання – виготовити моделі правильних многогранників. Слід мати на увазі помилки учнів, які трапляються при вивченні цієї теми. Так, вважають, що правильна трикутна піраміда і правильний тетраедр – це один і той же многогранник; оскільки призми, піраміди – це многогранники, то правильні призми, правильні піраміди – це правильні многогранники. Слід також зауважити, що означення ще не гарантує існування відповідних многогранників.

Після введення означення правильного многогранника на пізнавальному етапі для засвоєння логічної структури означення поняття, запам'ятовування означення застосовуємо метод доцільних задач, розглядаємо задачі на виведення наслідків з означення. Наприклад:

1. Знайдіть двогранні кути правильного тетраедра.
2. Доведіть, що сума відстаней від довільної внутрішньої точки куба до всіх його граней стала величина для даного куба.
3. З яких двох чотирикутних пірамід можна скласти правильний октаедр?
4. Чи є просторовий хрест (тіло, складене із 7 рівних кубів) правильним многогранником?

Над цими задачами учні міркують деякий час, а потім виконують малюнки на дошці та пояснюють розв'язання.

При вивченні поняття "правильні многогранники" на пізнавальному етапі при реалізації методичної складової використання поняття потрібно показати значення геометричних тіл для людини (5.4. прикладну спрямованість поняття), провівши, наприклад, таку бесіду.

Правильні многогранники існували на землі до появи людини – кубічні кристали кухонної солі, тетраедри сірчанокислого натрію, октаедри хромових квасців, ікосаедри бора і додекаедри радіолярій. З глибокої давнини були відомі п'ять правильних многогранників, їх властивості вивчали вчені, їх моделі можна побачити в роботах архітекторів і ювелірів. Давньогрецький філософ Платон і його учні в своїх роботах приділяли велику увагу правильним многогранникам, тому їх називають Платоновими тілами. У школі Піфагора будову світу пов'язували з правильними многогранниками. Основою всесвіту вони вважали чотири стихії – вогонь, землю, повітря і воду. Атомам цих стихій приписували форму правильних многогранників: атомам вогню – форму тетраедра, землі – гексаедра, повітря – октаедра, води – ікосаедра, всьому всесвіту приписували форму додекаедра. Іспанський художник Сальвадор Далі використав цей символ у своїй картині "Тайна вечеря", на якій Христос і його учні зображені на фоні прозорого додекаедра. На гравюрах голландського художника М. Ешера, зокрема "Зірки" можна побачити всі п’ять правильних многогранників.

На нашу думку, прямі кругові циліндр і конус слід означити конструктивно, тобто як тіла обертання, при цьому створюються наочні уявлення про ці тіла. Цим означенням і слід користуватися в школі, доповнивши зауваженням про загальний підхід до означення циліндра і конуса та підкресливши, що надалі будуть вивчатися тільки прямі кругові циліндри і конуси, які є тілами обертання. При цьому слід звернути увагу на можливі помилки в означеннях: замість терміна "тіло обертання", вживають – "фігура обертання" (це більш загальне поняття); площини перпендикулярні до осі обертання, перетинають тіла обертання по кругах (в перерізі може бути круг, кільце, кілька кілець тощо. Зауважимо, що при введенні понять про тіла обертання слід звернутися до історичних відомостей.

При означенні поняття "куля" можливі два підходи: куля як тіло обертання і куля як множина точок. В першому випадку зберігається єдиний підхід до означень циліндра, конуса, кулі. В другому – з’являється можливість для часткового фузіонізму (означення кулі вводиться аналогічно до означення круга). Тому вчитель може вибрати той підхід до означення, який він вважає за потрібне.

На контролюючому і корегуючому етапі формування понять "циліндр", "конус", "куля" ми пропонуємо усне розв’язування вправ.

1. За таблицею, поданою на дошці виберіть номер малюнка, на якому зображено а) циліндр; б) конус; в) кулю.
2. Як знайти найменшу відстань між двома точками циліндричної поверхні?
3. Чи є тілом обертання тіло, утворене обертанням паралелограма навколо його сторони?
4. Через які дві точки поверхні кулі можна провести декілька кіл великого круга?

Рекомендуємо також математичні диктанти, в яких можуть бути питання з вибором відповіді, твердження, в які потрібно вставити пропущені слова. Робота ведеться за індивідуальними картками або із застосуванням комп'ютерної тестової системи.

1. Перерізом опуклого тіла обертання площиною, перпендикулярною до його осі, є

а) коло; б) круг; в) плоске кільце; г) кілька кілець. (б)

2. Перерізом тіла обертання площиною, перпендикулярною до його осі, є ...

а) коло; б) круг; в) плоске кільце; г) кілька кілець. (б, в, г)

3. Основами циліндра є ...

а) два рівних кола, які лежать у паралельних площинах;

б) дві фігури обертання;

в) два рівних круги, які лежать у паралельних площинах;

г) два кола, радіуси яких рівні. (в)

1. Циліндром називається тіло, утворене обертанням ___ навколо його сторони.

2. Тіло, утворене обертанням прямокутного трикутника навколо його катета називається ___ .

3. Просторовими аналогами кола і круга на площині є ___ і ___ . (сфера і куля)

4. Симетрія – є мірою краси. Можливо тому давньогрецький вчений Піфагор (бл. 580 – бл. 500 до н.е.) вважав ___ найпрекраснішою з усіх геометричних тіл, оскільки вона на відміну від інших крім центру симетрії має безліч осей і площин симетрії. (кулю)

5. Однією із найрозповсюдженіших форм у природі є ____ . Він присутній у будові крон стовбурів дерев, стеблин і суцвіть, грибів і мушлей. (конус)

До даних запитань обов'язково додаються малюнки.

Площа поверхні многогранників означається як площа усіх граней, тобто як площа розгортки (за теоремами О.Д. Александрова та О. Коші многогранник однозначно визначається своєю розгорткою). В такий же спосіб можна ввести поняття площі поверхні циліндра, конуса, зрізаного конуса. Оскільки розгорнути сферу на площину неможливо, то потрібно узагальнити поняття площі поверхні (за Мінковським): $S = \lim\limits_{t \to 0} \frac{V_t}{t}$, де S – площа поверхні, V_t – об’єм шару товщини t даної поверхні. Тому поняття про поверхню кулі вводиться після вивчення об’єму кулі. Для тих, хто цікавиться математикою, можна показати, що на основі цього означення можна вивести формули для площі довільної поверхні.

З поняттям об’єму учні вже зустрічалися на уроках в основній школі та у повсякденному житті. У деякому розумінні поняття об’єму є більш природнім, ніж поняття площі поверхні. У рамках шкільного курсу не можливо побудувати строгу теорію вимірювання площ і об’ємів. Але в старшій школі, спираючись на вже існуючі в учнів уявлення, потрібно дати аксіоматичне означення об’єму.

Об’єм – це додатна величина, що задовольняє аксіомам:

1. Об’єм довільного тіла виражається додатним числом.
2. Якщо тіло розбите на декілька частин, то його об’єм дорівнює сумі об’ємів всіх цих частин (адитивність).
3. Об’єм куба, ребро якого дорівнює 1 довжини, дорівнює одиниці об’єму (нормування).
4. Аксіома Кавальєрі (з неї випливає інваріантність: рівні тіла мають рівні об’єми).

Аксіоматичне означення вимагає обґрунтування існування та єдиності об’єму геометричного тіла. Практично це можна здійснити побудовою моделей при виведенні формул для обчислення об’ємів. Так, прямокутний паралелепіпед уявляється заповненим однаковими кубами, ці куби мають однакові об’єми (перша умова), а сума об’ємів всіх цих кубів дорівнює об’єму паралелепіпеда (друга умова). Для прямокутного паралелепіпеда, прямої призми виконуються умови Дена-Кагана, тому їх об’єм визначається на основі рівноскладеності. Доведення рівновеликості двох многогранників на основі рівноскладеності у загальному випадку неможливе. Об’єм піраміди не можна знайти безпосереднім вимірюванням кубічною одиницею, навіть трикутну піраміду в загальному випадку не можна перетворити у рівновелику їй призму. Об'єм трикутної піраміди визначається за принципом Кавальєрі і розрізанням на частини, а многокутної піраміди розрізанням на трикутні. Об'єми тіл обертання визначаються за принципом Кавальєрі. Об'єм зрізаного конуса визначається як різниця об'ємів двох конусів. Об'єм зрізаної піраміди можна ввести геометричним або алгебраїчним шляхом.

При введенні аксіоматичних означень площ поверхонь і об'ємів тіл можна використати як конкретно-індуктивний, так і абстрактно-дедуктивний методи. Оскільки аксіоми поверхонь і об'єму виражають факти знайомі учням, то доцільно застосувати дедуктивний метод.

Висновки. Визначальним у вивченні геометричних тіл є перенесення акцентів із збільшення обсягу змісту розділу на вироблення вмінь використовувати матеріал, тобто на розвиток учня.

Нами виділено типи можливих структур змісту розділу та охарактеризовано компоненти цих структур, введено поняття "інваріантний компонент структури". При навчанні учнів слід вибирати такий тип структури змісту, щоб введення понять було найбільш доступним та науковим.

Потрібно забезпечити засвоєння понять розділу "Геометричні тіла" шляхом здійснення запропонованих структурних етапів процесу формування понять та їх методичних складових, які реалізуються за допомогою спеціальних вправ, що сприяє повному опрацюванню понять та урівноважує процеси введення поняття та його засвоєння, підсилює практичний аспект діяльності учня.

ЛІТЕРАТУРА

1. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Геометрия 10 – 11. – М.: Просвещение, 1998. – 271 с.
2. Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенко А.К. Геометрія 10 – 11. – Донецьк: Дон НУ, 2001. – 235 с.
3. Бевз В.Г., Сверчевська І.А. Геометричні тіла у визначних математичних задачах // Математика в школі. – 2002. – №5. – С. 6 – 9; № 6. – С. 11 – 15.
4. Бевз Г.П., Бевз В.Г., Владімірова Н.Г. Геометрія 10 – 11.–К.: Вежа, 2002.– 224с.

5. Бевз Г.П. Геометрія у загальноосвітній школі // Математика в школах України. – 2003. – № 1, 2. – С. 1 – 6.
6. Бурда М.І. Зміст підручника з геометрії для спеціалізованих шкіл // Проблеми сучасного підручника: Зб. наук. праць.– К.: Педагогічна думка, – 2000. – Вип. 2. – С. 44 – 47.
7. Клопський В.М., Скопець З.А., Ягодовський М.І.. Геометрія 9–10.–К.: Рад. шк., 1978. – 248 с.
8. Навчальна програма для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика. 5 – 9 класи / Міністерство освіти і науки України. URL: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-5-9-klas
9. Навчальна програма для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика. 10 – 11 класи / Міністерство освіти і науки України. URL:https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv
10. Погорєлов О.В. Геометрія 10 – 11. – К.: Освіта, 2000. – 128 с.
11. Саранцев Г.И. Методология методики обучения математике. – Саранск: Тип. "Красный Октябрь", 2001. – 144 с.
12. Сверчевська І.А. Методичне забезпечення діагностики навчальних досягнень з геометрії в 11 кл. // Математика в школі. – 2003. – № 6. – С. 18 – 24, № 7. – С. 13 – 15.
13. Сверчевська І.А. Усні задачі зі стереометрії: 9 – 11 (12) класи. – Київ: Шкільний світ, 2010. – 128 с.
14. Слєпкань З.І. Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2004. – 240 с.

Сверчевська Ірина Анатоліївна – доцент, кандидат педагогічних наук.

Наукові інтереси: вдосконалення фахової підготовки студентів-математиків.

Дисципліни, які викладає: лінійна алгебра, алгебра і теорія чисел, алгебра многочленів, історія математики.

РОЗДІЛ III. МАТЕМАТИЧНА ТА МЕТОДИЧНА КОМПЕТЕНТНОСТІ ЯК СКЛАДОВІ ФАХОВОЇ ПІДГОТОВКИ ВЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ

Прус А.В.
кандидат педагогічних наук, доцент

ФОРМУВАННЯ ПРОФЕСІЙНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ МАЙБУТНЬОГО ВЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ У ПРОЦЕСІ ВИВЧЕННЯ КУРСУ «ЗАДАЧІ З ПАРАМЕТРАМИ»

Реформування всієї системи освіти сьогодні – нагальна потреба суспільства, оскільки це один з основних важелів цивілізаційного поступу та економічного розвитку будь-якої країни у світі. Саме у сфері освіти перебуває ключ до забезпечення економічного зростання України в середньо і довгостроковій перспективі, її конкурентоспроможності. Сучасний ринок праці, як зазначається у Національній стратегії розвитку освіти в Україні на 2012-2021 роки, вимагає від випускника не лише глибоких теоретичних знань, а здатності самостійно їх застосовувати в нестандартних, постійно змінюваних життєвих ситуаціях, переходу від суспільства знань до суспільства життєво компетентних громадян. Це вимагає змін в освітній галузі, зокрема, у вищій освіті у процесі фахової підготовки вчителів математики.

На сучасному етапі окремі аспекти проблеми підготовки майбутніх учителів математики в Україні досліджують такі методисти та науковці як М. Бурда, Н. Морзе, В. Моторіна, С. Семенець, О. Скафа, С. Скворцова, О. Співаковський, Н. Тарасенкова, А.Теплицька, Ю. Триус, В. Швець. Професіоналізації фахової підготовки учителя математики в педагогічному вищому навчальному закладі присвячено наукові праці Д. Біджієва, В. Єжова, І. Захарова, Є. Лодатко, Г. Михаліна, І. Новик, С. Ракова, Ю. Рамського, О. Томащук, М. Третяка, М. Шкіля.

У системі фахової підготовки вчителя математики, згідно з результатами досліджень [5], чітко прослідковуються три складові: змістова (оволодіння спеціальними математичними знаннями); технологічна (оволодіння прийомами і методами навчання математики); особистісна (наявність особистісних якостей, необхідних для фахівця). Це є основою для формування компетентностей учителя в галузі математики. На думку [4], доцільно виокремити такі фахові компетентності:

1) предметна (наявність системи математичних знань та готовність до їхнього застосування в професійній діяльності; спроможність вирішувати професійні задачі засобами математики);

2) інформаційна (спроможність знаходити математичну інформацію; здатність з нею працювати, зокрема, систематизувати та узагальнювати);

3) комунікативна (володіння математичною термінологією; уміння передавати математичну інформацію; уміння користуватися засобами передачі математичної інформації);

4) рефлексивна (прагнення до досконалості професійної діяльності засобами математики);

5) творча (уміння використовувати інноваційні математичні методи в професійній діяльності).

Безперечно, значну роль у формуванні фахової компетентності вчителя математики відіграє методика навчання математики та елементарна математика. Однак, з огляду на власний досвід, можна стверджувати, що інші математичні дисципліни своїми засобами теж здатні ефективно формувати компетентності майбутнього учителя математики.

«Задачі з параметрами» – відносно новий математичний курс, що читається магістрам першого року навчання. Мета курсу – формування вмінь та навичок розв'язувати рівняння, нерівності та їх системи з параметрами курсу елементарної математики. Завдання курсу:

1) розширити і поглибити знання студентів про рівняння і нерівності в контексті вивчення відомостей про рівняння і нерівності з параметрами;

2) розширити і поглибити знання студентів про основні методи і способи розв'язування рівнянь і нерівностей, зокрема рівнянь і нерівностей з параметрами;

3) формувати на достатньому і вищих рівнях вміння і навички розв'язувати лінійні рівняння (нерівності) з параметром, рівняння другого (нерівності другого) та вищих степенів з параметрами, раціональні та ірраціональні рівняння (нерівності) з параметрами; показникові та логарифмічні рівняння (нерівності) з параметрами; тригонометричні рівняння (нерівності) з параметрами; рівняння (нерівності) з параметрами, які містять модуль;

4) ознайомити студентів із графічним методом розв'язування рівнянь і нерівностей з параметром в прямокутній декартовій системі координат xOy, xOa та aOx;

5) розвиток логічних прийомів мислення (аналізу, синтезу, порівняння, конкретизації, узагальнення тощо) та евристичних прийомів мислення у процесі розв'язування завдань із параметрами.

Табл.1

Програма курсу «Задачі з параметрами»

Зміст матеріалу	Які знання, вміння може набути студент
Тема 1. Знайомство з параметром (2 год.) Рівняння з двома змінними. Рівносильні рівняння, метод евристичної редукції. Параметр. Рівняння з параметром. Область визначення рівняння, область зміни параметра.	– *знає* що таке рівняння з двома змінними, розв'язок рівняння; – *знає* що таке рівняння з параметром, що таке параметр; – *вміє* знаходити для нескладних рівнянь з параметром їх область визначення, область значень параметра
Тема 2. Раціональні рівняння з параметром (4 год.) Лінійні рівняння та рівняння другого степеня з параметром і їх розв'язання. Вправи з параметром, які пов'язані з квадратним тричленом. Дробово-раціональні рівняння з параметром і їх розв'язання.	– *розпізнає* лінійні, рівняння другого степеня, дробово-раціональні рівняння з параметром; – *вміє* розв'язувати вказані в програмі рівняння; – *розв'язує* вправи з параметром, які пов'язані з квадратним тричленом

Продовження табл. 1

Тема 3. Раціональні нерівності з параметром (4 год.) Лінійні нерівності та нерівності другого степеня з параметром і їх розв'язання. Дробово-раціональні нерівності з параметром і їх розв'язання.	– *розпізнає* лінійні нерівності другого степеня, дробово-раціональні нерівності з параметром; – *вміє* розв'язувати вказані в програмі нерівності
Тема 4. Системи рівнянь (нерівностей) з параметром (2год.) Системи двох лінійних рівнянь (нерівностей) з двома змінними з параметром ї їх розв'язання. Системи двох нелінійних рівнянь (нерівностей) з двома змінними і їх розв'язання.	– *знає* що таке система двох лінійних рівнянь (нерівностей) з двома змінними з параметром; – *має уявлення* про систему нелінійних рівнянь (нерівностей) з двома змінними; – *вміє* розв'язувати вказані в програмі системи рівнянь (нерівностей) з параметром
Тема 5. Модуль у рівняннях і (нерівностях) з параметром (4 год.) Рівняння (нерівності) та системи рівнянь з параметрами, що містять модуль.	– *розпізнає* рівняння (нерівності) та їх системи з параметром, що містять модуль; – *вміє* розв'язувати вказані в програмі рівняння (нерівності) і їх системи з параметром
Тема 6. Ірраціональні рівняння (нерівності) з параметром (4 год.) Ірраціональні рівняння (нерівності) з параметром і їх розв'язання.	– *має уявлення* про ірраціональні рівняння (нерівності) з параметром; – *вміє* розв'язувати простіші ірраціональні рівняння (нерівності) з параметром
Тема 7. Трансцендентні рівняння (нерівності) з параметром (6 год.) Тригонометричні рівняння (нерівності) з параметром. Показникові рівняння (нерівності) з параметром. Логарифмічні рівняння (нерівності) з параметром.	– *має уявлення* про трансцендентні рівняння (нерівності) з параметром; – *вміє* розв'язувати простіші тригонометричні, показникові, логарифмічні рівняння (нерівності) з параметром
Тема 8. Графічний метод розв'язування рівнянь (нерівностей) з параметром (4 год.) Розв'язування рівнянь і нерівностей з параметром графічним методом в прямокутній декартовій системі координат.	– *має уявлення* про прямокутні декартові системи координат xOy, xOa та aOx і з чим пов'язана їх поява; – *вміє* розв'язувати простіші рівняння і нерівності графічним методом використовуючи прямокутні декартові системи координат xOy, xOa та aOx.

Розглянемо, які завдання фахової підготовки майбутнього вчителя математики можна вирішувати засобами цього курсу, тобто, в процесі виконання завдань вивчення дисципліни «Задачі з параметрами», які визначені вище.

По-перше. Розв'язування завдання із параметрами неможливе без узагальнення та систематизації знань та вмінь відповідної частини елементарної математики (формується предметна, інформаційна комунікативна, творча компетентності).

Звернімося до формування у студентів поняття рівняння з параметром. Зазначимо, що визначення поняття параметра, рівняння (нерівності) з параметром на сьогодні чітко не сформульовано. Кожен автор вкладає в це поняття різні істотні та неістотні властивості. Тому під керівництвом викладача йде аналіз вже відомої інформації та її узагальнення:

— Розглянемо дві аналітично задані числові функції з двома змінними $u = f_1(x; y)$ та $u = f_2(x; y)$ областями визначення яких є відповідно множини $D(f_1)$ та $D(f_2)$, де *u, x, y* – дійсні числа. Нехай множина $D = D(f_1) \bigcap D(f_2)$ – спільна область множин $D(f_1)$ та $D(f_2)$. Запишемо формальну рівність обох функцій $f_1(x; y) = f_2(x; y)$. Якщо для цієї рівності сформулювати вимогу – «знайти всі пари значень змінних (*x*;*y*) з області *D*, при яких вона перетворюється в правильну числову рівність», то таку рівність разом з вимогою називають рівняннями з двома змінними. Отже,

Означення 1. Рівність $f_1(x; y) = f_2(x; y)$, де $f_1(x; y)$ і $f_2(x; y)$ – аналітично задані функції з областю визначення відповідно $D(f_1)$ і $D(f_2)$, називають рівнянням з двома змінними, а множину $D = D(f_1) \bigcap D(f_2)$ – областю визначення рівняння, якщо ставиться вимога – знайти всі пари значень змінних (*x*; *y*) із множини D, при яких значення обох функцій рівні.

Кожну пару чисел (*x*; *y*), яка задовольняє рівність називають розв'язком рівняння. Всі розв'язки рівняння утворюють множину D_r, яка називається множиною розв'язків. Очевидно, що $D_r \subset D$. Множина розв'язків може бути порожньою. Тоді кажуть, що рівняння розв'язків не має. Розв'язати рівняння означає знайти множину всіх його розв'язків.

Отже, нехай дано рівняння з двома змінними

$$f_1(x; y) = f_2(x; y) \qquad (1)$$

в якому змінні x і y – незалежні змінні. Досить часто одній з них надають *особливого статусу* і називають ***параметром*** та позначають першими літерами латинського алфавіту *a, b, c*. Наприклад, надавши статус параметр змінній y і позначивши її літерою a, матимемо рівняння з параметром a:

$$f_1(x;a) = f_2(x;a) \qquad (2)$$

Параметр [від грецького *parametreo* – вимірюю що-небудь, порівняною з чим-небудь іншим] – величина, яка за певних умов не змінює свого значення. Надання одній із змінних статусу параметра пов'язане *зі зміною вимоги в рівнянні* (1). У зміненій вимозі мовиться не лише про відшукання розв'язків рівняння, а й про те, що числа, які входять до розв'язку, мають задовольняти додатковим вимогам (співвідношенням). З цього приводу розглянемо кілька прикладів.

Приклад 1. Для всіх значень параметра a розв'яжіть рівняння $(a-1)x^2 + 2(2a+1)x + 4a + 3 = 0$.

Дане рівняння, очевидно, є рівнянням з двома змінними a і x, в якому параметром є змінна a. Суть вимоги в даному випадку полягає в наступному – якщо змінну a вважати сталою величиною, то задане рівняння можна розглядати як рівняння з однією змінною x, при цьому вимагається знайти множину його розв'язків залежну від значень параметра a. Оскільки значенням параметра a в даному рівнянні може бути будь-яке дійсне число, то його запис задає ціле сімейство (нескінченну множину) рівнянь з однією змінною x. Окремі рівняння цього сімейства можна отримати взявши конкретні значення параметра a. Якщо, наприклад, a = 0, a = 1, a = 2, то відповідно матимемо рівняння: $-x^2 + 2x + 3 = 0$; $5x + 7 = 0$; $x^2 + 10x + 11 = 0$. Отже, вимогу в заданому прикладі слід розуміти так: вважаючи змінну а – параметром і розглядаючи дане рівняння як рівняння зі змінною x, знайти як виражатимуться його корені залежно від значень параметра а.

Приклад 2. Знайдіть при яких значеннях параметра a рівняння $x^2 - x + a = 0$ має два корені x_1 і x_2, що задовольняють умову $x_1^2 + x_2^2 = 25$.

Дане рівняння, очевидно, також є рівнянням з двома змінними *a* і *x*, в якому параметром обрано змінну *a*. Її значенням може бути будь-яке дійсне число. Наприклад, взявши *a* = 0, матимемо рівняння $x^2 - x = 0$, корені якого $x_1 = 0$ і $x_2 = 1$ вказану умову не задовольняють. Якщо *a* = 1, то матимемо рівняння $x^2 - x + 1 = 0$, яке коренів немає, а тому вказана умова $x_1^2 + x_2^2 = 25$ не буде виконуватись. Пам'ятаючи, що рівняння з параметром $f(x; a) = f_2(x; a)$ – це символічний запис цілого сімейства рівнянь зі змінною *x*, вимогу в даному прикладі слід розуміти так: знайдіть всі значення параметра а, при якому обидва корені x_1 і x_2 рівняння $x^2 - x + a = 0$ (а воно буде квадратним), задовольняють вимогу $x_1^2 + x_2^2 = 25$.

Приклад 3. Знайдіть усі значення змінної *a*, при яких обидва рівняння $x^2 - ax + 4 = 0$ і $3x^2 - ax + a - 3 = 0$ мають спільний дійсний корінь.

Обидва рівняння, очевидно, є рівняннями з параметром. Зі змісту умови видно, що статус параметра надається змінній *a*, хоч про це явно не сказано. Її значенням може бути будь-яке дійсне число, при цьому, очевидно, кожне з рівнянь буде квадратним. При певних значеннях параметра кожне з рівнянь або матиме корені, або ні. В даному прикладі вимогу слід розуміти наступним чином: знайдіть всі дійсні значення змінної (параметра) а, при яких обидва рівняння мають спільний корінь.

Наведені приклади 1-3 показують, що *вимога* у рівняннях з параметром часто формулюється завуальовано. Щоб розв'язувати такі рівняння її потрібно чітко виокремити та усвідомити. Більшість рівнянь з параметром, за формулюванням вимоги, можна поділити умовно на дві групи: а) рівняння, в яких вимога звучить – «розв'язати рівняння з параметром»; б) рівняння, в яких вимога звучить – «знайти такі значення параметра, при яких корені задовольняють певну умову чи умови». В конкретних вправах обидві вимоги можуть мати і дещо інші формулювання, які істотно від вже названих не відрізняються. Розв'язати рівняння з параметром означає виконати його вимогу. На особливу увагу заслуговує запис відповіді. Вона, як правило, складається із декількох пунктів, кожні з яких доцільно писати складнопідрядним реченням на зразок: якщо …, то …Так, наприклад, відповідь для рівняння $(a-1)x^2+2(2a+1)x+4a+3=0$ (приклад 1) слід записати так: *Відповідь*: 1) якщо $a\in\left(-\infty;-\frac{4}{5}\right)$, то рівняння розв'язків не має; 2) якщо $a\in\left(-\frac{4}{5};1\right)\cup(1;+\infty)$, то рівняння має два різні корені $x_{1,2}=\frac{-(2a+1)\pm\sqrt{5a+4}}{a-1}$; 3) якщо $a=-\frac{4}{5}$ або $a=1$, то рівняння має один корінь відповідно $x=-\frac{1}{3}$ та $x=-\frac{7}{6}$.

Отже, підсумовуючи вище сказане приходимо до висновку, *що* ***рівнянням з параметром*** *називають рівняння з двома змінними* $f_1(x;a)=f_2(x;a)$*, де* $f_1(x;a)$ *та* $f_2(x;a)$ *– аналітично задані функції, змінна а має статус параметра (яка за певних умов розглядається як стала величина), змінна х – незалежна змінна.* Якщо згадані в означенні функції будуть функціями більше, ніж з двома змінними, то в рівнянні може бути і не один параметр або не одна незалежна змінна.

По-друге. Процес знаходження розв'язків завдань із параметрами вимагає, серед іншого, вмінь здійснювати, розумові операції аналізу й синтезу, порівняння, узагальнення й систематизації, абстрагування, індуктивного висновку і встановлення причинно-наслідкових зв'язків, постановки проблеми й висунення гіпотези її вирішення, пошуку й використання аналогії, дедуктивного висновку й доведення. А це базова характеристика професійної компетентності вчителя математики. Розглянемо це на прикладі розв'язування одного завдання з параметрами різними способами [3].

Приклад 4. Розв'яжіть нерівність $|x+a|<1$ з параметром a.

Розв'язання. *І спосіб (аналітичний).*

1. І параметр, і змінна можуть приймати будь-які значення.

2. Нерівність $|x+a|<1$ - це нерівність з одним модулем, зовні якого немає змінної. Ця нерівність рівносильна системі $\begin{cases} x+a<1, \\ x+a>-1 \end{cases}$, звідки $\begin{cases} x<-a+1, \\ x>-a-1 \end{cases}$.

Отже, при будь-якому значенні параметра a розв'язком початкової нерівності буде інтервал $x \in (-a-1; -a+1)$.

II спосіб (графічний у системі координат xOa).

1. Для того, щоб розв'язати нерівність $|x+a|<1$ графічно у вказаній системі координат, спочатку побудуємо графік рівняння $|x+a|=1$. Це сукупність двох прямих $x+a=1$, $x+a=-1$. Зауважимо, що прямі будуємо пунктирною лінією (вихідна нерівність строга). Ці прямі розбивають площину на три області (рис. 1).

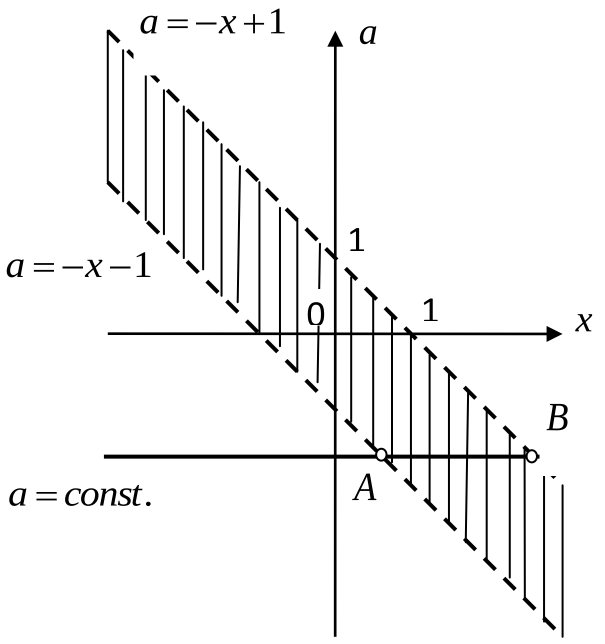


Рис. 1

2. Яка з областей належить до розв'язків початкової нерівності? У кожній із областей оберемо «пробну» точку та визначимо, чи належить та чи інша область до розв'язків нерівності $|x+a|<1$.

2.1 Точка $(2;0)$: $|2+0|<1$ (хибно). Отже, область, яка розташована над прямою $x+a=1$, не належить до розв'язків.

2.2. Точка $(0;0)$: $|0+0|<1$ (істинно). Отже, область, яка розташована між прямими прямою $x+a=1$ та $x+a=-1$, належить до розв'язків.

2.3. Точка $(0;-3)$: $|-3+0|<1$ (хибно). Отже, область, яка розташована під прямою $x+a=-1$, не належить до розв'язків.

Таким чином, усі розв'язки нерівності $|x+a|<1$ утворюють на площині xOa область (смугу), яка заштрихована на рис. 1.

3. Очевидно, що будь-яка пряма $a = const.$ перетинає смугу та має з нею спільний інтервал $x \in (x_A; x_B)$. Знайдемо абсциси точок A, B.

3.1. Абсциса точки A - це розв'язок рівняння $x + a = -1$, звідки $x_A = -a - 1$.

3.2. Абсциса точки B - це розв'язок рівняння $x + a = 1$, звідки $x_B = -a + 1$.

Отже, при довільному значенні параметра a розв'язком початкової нерівності буде $x \in (-a - 1; -a + 1)$.

III спосіб (графічний у системі координат xOy).

1. Для того, щоб розв'язати нерівність $|x + a| < 1$ графічно у вибраній системі координат, спочатку побудуємо графіки лівої та правої частин нерівності (рис. 2).

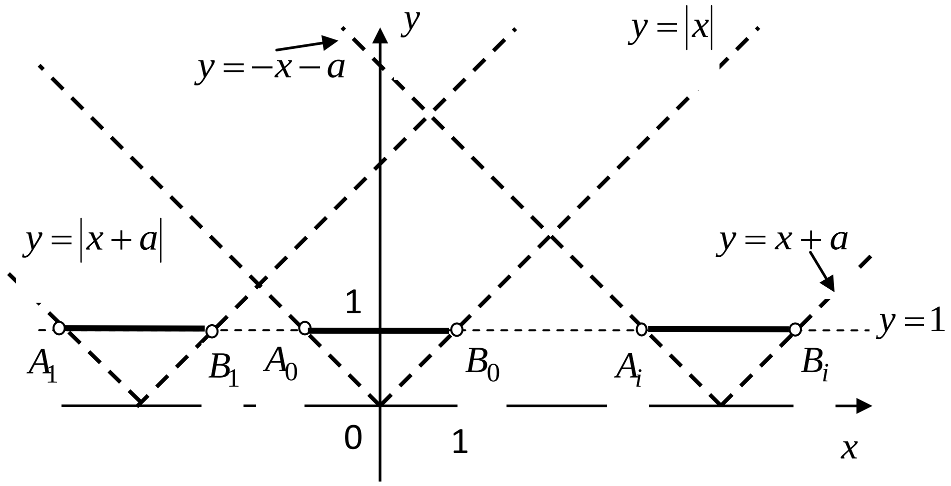


Рис. 2

1.1. Графік $y = |x + a|$ - це сукупність «куточків», які при різних значеннях параметра a рухаються вправо або вліво вздовж осі Ox. Зауважимо, що «вітки» куточків – це прямі $y = x + a$ («вітка справа) та $y = -x - a$ («вітка» зліва).

1.2. $y = 1$ - це пряма, яка паралельна осі абсцис та проходить через точку з координатами $(0;1)$.

2. Розв'язком заданої нерівності будуть ті значення змінної x, при яких графік функції $y = |x + a|$ розташований нижче графіка функції $y = 1$. Очевидно, що незалежно від того, як розташований графік функції $y = |x + a|$ (тобто, незалежно від значень параметра a), розв'язком буде інтервал $x \in (x_{A_i}; x_{B_i})$, де

x_{A_i}, x_{B_i} - це абсциси точок перетину лівої та правої віток $y=|x+a|$ відповідно. Знайдемо x_{A_i}, x_{B_i} як розв'язки систем рівнянь $\begin{cases} y=-x-a, \\ y=1 \end{cases}$, $\begin{cases} y=x+a, \\ y=1 \end{cases}$ відповідно. Звідки отримаємо, що $x_{A_i}=-a-1$, $x_{B_i}=-a+1$.

Відповідь. $x\in(-a-1;-a+1)$ для будь-якого значення параметра a.

Зупинимось на деяких «підказках» у формулюванні завдання, які можуть допомогти обрати студенту (вчителю, учню) необхідний прийом та розв'язати завдання із параметром.

1. Нехай вимога завдання з параметром сформульована на зразок: *«Знайдіть всі значення змінної x, які задовольняють рівняння (нерівність, систему)* ***при будь-яких значеннях параметра****»*. Отже, якщо значення змінної мають задовольняти при будь-яких значеннях параметра, то і при деякому конкретному значенні параметра – теж.

Далі можна діяти так:

1) знайти хоча б одне «зручне» значення параметра;

2) підставити його в задане рівняння (нерівність, систему);

3) отримати деякі значення змінної;

4) підставити вже їх по черзі в задане рівняння (нерівність, систему);

5) обрати саме ті з них, для яких виконується вимога задачі.

Слід зазначити, що знайти «зручне» значення параметра - це основна частина роботи. Це певний творчий процес, здогадка. Іноді такими «зручними» числами можуть бути числа нуль, один.

Приклад 5. Знайдіть усі значення x, які при будь-якому a задовольняють рівняння $\log_{x+a^2+1}\left(a^2x+2\right)=2\log_{7+2x}\left(5-\sqrt{6-2x}\right)$.

Розв'язання. 1. Якщо значення змінної мають задовольняти рівняння при будь-яких значеннях параметра a, то і при конкретному значенні параметра теж. Виберемо значення параметра $a=1$. Тоді рівняння

$\log_{x+a^2+1}\left(a^2x+2\right)=2\log_{7+2x}\left(5-\sqrt{6-2x}\right)$ прийме вигляд $\log_{x+2}(x+2)=2\log_{7+2x}\left(5-\sqrt{6-2x}\right)$.

2. Як бачимо, після підстановки обраного значення параметра ліва частина рівняння перетворюється в 1 (зрозуміло, за умов $x+2>0$ і $x+2\neq 1$) Тому обране значення можна вважати зручним. Отже, розв'яжемо рівняння $\log_{x+2}(x+2)=2\log_{7+2x}\left(5-\sqrt{6-2x}\right)$ (*).

2.1. Область визначення рівняння (*) описується системою умов $\begin{cases} x+2>0, \\ x+2\neq 1, \\ 7+2x>0, \\ 7+2x\neq 1, \\ 5-\sqrt{6-2x}>0, \\ 6-2x\geq 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x>-2, \\ x\neq -1, \\ x>-3{,}5, \\ x\neq -3, \\ \sqrt{6-2x}<5, \\ x\leq 3 \end{cases}$, $\begin{cases} x\in(-2;-1)\cup(-1;3), \\ 6-2x<25 \end{cases}$ $\begin{cases} x\in(-2;-1)\cup(-1;3), \\ x>-9{,}5 \end{cases}$ звідки $x\in(-2;-1)\cup(-1;3)$.

2.2. Перепишемо рівняння (*) у вигляді $1=2\log_{7+2x}\left(5-\sqrt{6-2x}\right)$ та виконаємо на області визначення такі його перетворення: $1=\log_{7+2x}\left(5-\sqrt{6-2x}\right)^2$, $7+2x=\left(5-\sqrt{6-2x}\right)^2$, $7+2x=25-10\sqrt{6-2x}+6-2x$, $10\sqrt{6-2x}=24-4x$, $5\sqrt{6-2x}=12-2x$. Останнє рівняння рівносильне системі $\begin{cases} 12-2x\geq 0, \\ 25(6-2x)=(12-2x)^2 \end{cases}$, $\begin{cases} x\leq 6, \\ 150-50x=144-48x+4x^2 \end{cases}$, $\begin{cases} x\leq 6, \\ 2x^2+x-3=0 \end{cases}$, $\begin{cases} x\leq 6, \\ \left[\begin{array}{l} x=-1{,}5, \\ x=1 \end{array}\right. \end{cases}$,

звідки $x=1$ або $x=-1{,}5$. Знайдені значення задовольняють область визначення.

3. Перевіримо, чи задовольняють знайдені значення змінної початкове рівняння при будь-якому a.

3.1. Нехай $x=-1{,}5$. Тоді початкове рівняння буде мати вигляд $\log_{-1{,}5+a^2+1}\left(-1{,}5a^2+2\right)=2\log_{7-3}\left(5-\sqrt{6+9}\right)$, $\log_{a^2-0{,}5}\left(-1{,}5a^2+2\right)=2\log_4 2$, $\log_{a^2-0{,}5}\left(-1{,}5a^2+2\right)=1$, $-1{,}5a^2+2=a^2-0{,}5$, $2{,}5a^2=2{,}5$, звідки $a=\pm 1$. Отже, значення $x=-1{,}5$ не задовольняє вимогу задачі.

3.2. Нехай $x=1$. Тоді початкове рівняння буде мати вигляд $\log_{1+a^2+1}\left(a^2+2\right)=2\log_{7+2}\left(5-\sqrt{6-2}\right)$, $\log_{a^2+2}\left(a^2+2\right)=2\log_9 3$, звідки маємо при будь-якому значенні параметра істинну числову рівність $\log_{a^2+2}\left(a^2+2\right)=1$. Отримаємо *відповідь*. $x=1$.

2. Нехай вимога завдання з параметром сформульована на зразок: *«Знайдіть всі значення параметра (параметрів), при яких рівняння (нерівність, система) має* ***єдиний*** *розв'язок».*

• Досить часто таке рівняння (нерівність, система) містить або змінну під модулем, або змінну у парному степені, або змінну під знаком функції косинуса (парної функції) тощо. Тобто при заміні x на $-x$ рівняння не змінюється. Таким чином, необхідною умовою для єдиності розв'язку буде $x=0$.

Тоді можна діяти так:

1) підставити $x=0$ *у рівняння (нерівність, систему);*

2) знайти відповідні значення параметра;

3) перевірити, чи задовольняють завдання кожне із знайдених значень параметра, оскільки при деяких значеннях параметра можуть виявитись розв'язки, відмінні від нуля.

Приклад 6. Знайдіть всі значення параметра a, при яких система $\begin{cases} a\left(x^4+1\right)=y+1-|x|, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ має єдиний розв'язок.

Розв'язання. 1. Оскільки змінна x входить до заданої системи під знаком модуля $|x|$ або у парному (четвертому) степені, то необхідною умовою для єдиності розв'язку буде $x=0$.

2. Підставимо $x=0$ у систему. Отримаємо $\begin{cases} a=y+1, \\ y^2=1 \end{cases}$, звідки $a=0$ (якщо $y=-1$) або $a=2$ (при $y=1$).

3. Перевіримо знайдені значення параметра (можливо, при цих значеннях система має ще й інші розв'язки).

3.1. Нехай $a=0$. Тоді початкова система буде мати вигляд $\begin{cases} 0 = y+1-|x|, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$.

Ця система має три розв'язки (див. рис. 3). Отже, знайдене значення параметра не задовольняє вимогу задачі.

3.2. Нехай $a=2$. Тоді початкова система буде мати вигляд $\begin{cases} 2\left(x^4+1\right) = y+1-|x|, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$, $\begin{cases} 2x^4+|x|+1 = y, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$. З другого рівняння системи зрозуміло, що $|x| \le 1$, $|y| \le 1$. Однак ліва частина першого рівняння системи приймає значення, які є більшими або рівними 1. Отже, $y=1$ і $x=0$ - це єдиний розв'язок початкової системи.

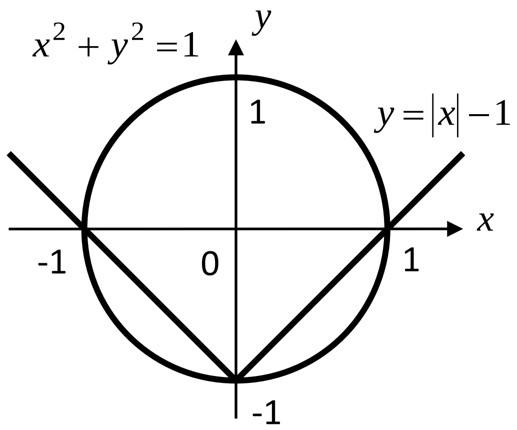


Рис. 3

Отримаємо *відповідь* $a=2$.

- Може виявитись для деякої системи з параметром, що якщо $(x_0;y_0)$ - розв'язок, то і $(y_0;x_0)$ - теж розв'язок. Тоді необхідною умовою єдності розв'язку буде $x_0=y_0$.

Тоді можна діяти так: підставити $x=y$ у систему та знайти значення параметра, коли виконується вимога задачі. Як правило, процес розв'язування при цьому спрощується.

Приклад 7. Знайти всі значення параметра a, при яких система нерівностей $\begin{cases} y \ge x^2+2a, \\ x \ge y^2+2a \end{cases}$ має один розв'язок.

Розв'язання. 1. Нехай деяка пара $(x_0;y_0)$ - це розв'язок заданої системи, тоді в силу симетричності змінних пара $(y_0;x_0)$ - це теж розв'язок цієї системи. Для єдності розв'язку необхідно, щоб $x_0=y_0$.

2. Отже, $x=y$. Тоді початкова система рівносильна нерівності $x \ge x^2+2a$, тобто $x^2-x+2a \le 0$. Остання нерівність має один розв'язок за умови, коли її

ліва частина – це повний квадрат. Для цього потрібно, щоб дискримінант відповідного квадратного тричлена дорівнював нулю: $D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 2a = 0$, звідки $a = \dfrac{1}{8}$. При $a = \dfrac{1}{8}$ корінь $x_1 = x_2 = \dfrac{1}{2}$, тоді отримаємо $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 \le 0$, звідки $x = \dfrac{1}{2}$.

3. Нехай $a = \dfrac{1}{8}$, тоді з початкової системи слідує нерівність $x + y \ge x^2 + y^2 + \dfrac{1}{2}$. Виконаємо її рівносильні перетворення: $x^2 - x + y^2 - y + \dfrac{1}{2} \le 0$, $\left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}\right) - \dfrac{1}{4} + \left(y^2 - 2 \cdot y \cdot \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}\right) - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} \le 0$, $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 \le 0$, звідки $x = \dfrac{1}{2}$, $y = \dfrac{1}{2}$. *Відповідь.* $a = \dfrac{1}{8}$.

3. Нехай у вимозі до завдання з параметром іде мова ***про певну кількість розв'язків, зокрема два, три тощо.***

Приклад 8. При яких значеннях параметра b система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ |y| - x = b \end{cases}$ має рівно три розв'язки?

Розв'язання. 1. Нехай деяка пара $(x_1; y_1)$ - це розв'язок заданої системи, тоді пара $(x_1; -y_1)$ - це теж розв'язок цієї системи, оскільки змінна y входить до вимоги задачі лише через парні функції y^2 та $|y|$. Отже, для будь-якого значення змінної $y_1 \ne 0$ існують два різних розв'язки. Тоді початкова система має три розв'язки, коли розв'язком буде пара виду $(x_0; 0)$.

2. Нехай $y = 0$. Тоді початкова система буде мати вигляд $\begin{cases} x^2 = 2, \\ -x = b \end{cases}$, звідки $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \sqrt{2}, \\ b = -\sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\sqrt{2}, \\ b = \sqrt{2} \end{cases} \end{array}\right.$. Отже $b = \pm\sqrt{2}$ - це необхідні умови того, щоб початкова система мала три розв'язки. Перевіримо достатність цих умов.

3. Нехай $b=\sqrt{2}$. Тоді початкова система рівносильна системі $\begin{cases} x^2+y^2=2, \\ |y|-x=\sqrt{2} \end{cases}$ (*). Розв'яжемо систему (*): $\begin{cases} x^2+\left(x+\sqrt{2}\right)^2=2, \\ |y|=x+\sqrt{2} \end{cases}$, $\begin{cases} x^2+x^2+2\sqrt{2}x+2=2, \\ |y|=x+\sqrt{2} \end{cases}$,

$\begin{cases} 2x^2+2\sqrt{2}x=0, \\ |y|=x+\sqrt{2} \end{cases}$, $\begin{cases} x\left(x+\sqrt{2}\right)=0, \\ |y|=x+\sqrt{2} \end{cases}$, $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0, \\ |y|=\sqrt{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\sqrt{2}, \\ |y|=0 \end{cases} \end{array}\right.$, $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0, \\ y=\sqrt{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} x=0, \\ y=-\sqrt{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\sqrt{2}, \\ y=0 \end{cases} \end{array}\right.$. Отже, початкова система при $b=\sqrt{2}$ має три розв'язки.

4. Нехай $b=-\sqrt{2}$. Тоді початкова система рівносильна системі $\begin{cases} x^2+y^2=2, \\ |y|-x=-\sqrt{2} \end{cases}$ (**). Розв'яжемо систему (**): $\begin{cases} x^2+\left(x-\sqrt{2}\right)^2=2, \\ |y|=x-\sqrt{2} \end{cases}$,

$\begin{cases} x^2+x^2-2\sqrt{2}x+2=2, \\ |y|=x-\sqrt{2} \end{cases}$, $\begin{cases} 2x^2-2\sqrt{2}x=0, \\ |y|=x-\sqrt{2} \end{cases}$, $\begin{cases} x\left(x-\sqrt{2}\right)=0, \\ |y|=x-\sqrt{2} \end{cases}$, $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0, \\ |y|=-\sqrt{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} x=\sqrt{2}, \\ |y|=0 \end{cases} \end{array}\right.$,

$\begin{cases} x=-\sqrt{2}, \\ y=0 \end{cases}$. Отже, початкова система при $b=-\sqrt{2}$ має один розв'язок.

Відповідь. $b=\sqrt{2}$.

По-третє. Теоретичне вивчення та математичне моделювання різноманітних процесів із різних областей науки і практичної діяльності людини часто приводять до достатньо складних рівнянь, нерівностей та їх систем, які містять параметри. Зазначимо, що необхідною частиною розв'язування таки завдань є дослідження характеру і кінцевого результату процесу в залежності від значень параметра. Складність розв'язування завдань із параметрами полягає в тому, що при зміні параметрів змінюються не лише коефіцієнти, але й ряд інших характеристик задачі: область визначення, степінь, а іноді й вид рівняння, неперервність, періодичність, парність та інші властивості функцій, які входять до умови. Такі задачі потребують глибокого розуміння суті процесу, вільного володіння різними математичними методами та ретельного аналізу. Це дозволяє формувати у студентів, а згодом і у їх учнів, поняття про прикладну спрямованість математики, що, у свою чергу, важливо для формування професійної компетентності, оскільки предметна (математична) компетентність – це спроможність бачити та застосовувати математику в реальному житті, розуміти зміст і метод математичного моделювання, будувати математичну модель, досліджувати її методами математики.

— Як відомо, дослідження квадратичної функції з трьома параметрами є одним із найважливіших розділів у курсі алгебри загальноосвітньої школи. Воно є майже ідеальною моделлю для формування багатьох навичок розв'язування завдань із параметрами. До того ж, розуміння цього процесу необхідне під час вивчення вищої математики (загального рівняння поверхні другого порядку; лінійних однорідних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами та ін.). В якості прикладів застосування теорії квадратного тричлена з параметрами у практиці автори [2] звертають увагу на модельні задачі про явище антирезонансу у системі з двома степенями свободи, стійкості трубопроводу, частотному аналізі власних коливань автомобіля, стійкості горизонтального польоту та ін. Цікавим є наведений факт про те, що у процесі аналізу критичних умов утворення природних алмазів від ударів комет або великих метеоритів із Землею, потрібно декілька разів розв'язувати квадратне рівняння з багатьма параметрами та кожного разу з'ясовувати фізичну суть перетворення в нуль відповідного дискримінанта. Крім квадратичної функції, певні аналогії до розв'язування систем лінійних рівнянь та нерівностей із параметрами можна знайти у процесі розв'язування деяких задач газової та хвильової динаміки, а також серед прикладних питань лінійного та параметричного програмування [2].

Багато задач вищої математики (зокрема, інтеграли з квадратичними радикалами, які використовуються для обчислення довжин кривих, площ фігур та об’ємів тіл обертання) містять ірраціональні вирази, одним із ефективних методів їх розв’язування є підстановки, які їх раціоналізують, зокрема, це тригонометричні підстановки. Цей аналітичний прийом ефективно використовується і під час розв’язування ірраціональних нерівностей та рівнянь із параметрами.

Приклад 9. При яких значеннях параметра a нерівність $\sqrt{1-x^2} > a - x$ має розв’язки?

Розв’язання. 1. Параметр може приймати будь-які дійсні значення. Область допустимих значень змінної $x \in [-1;1]$.

2. Оскільки $x \in [-1;1]$, то можна ввести заміну $x = \cos\beta$, $\beta \in [0;\pi]$. Отримаємо нерівність $\sqrt{1-\cos^2\beta} > a - \cos\beta$, звідки $|\sin\beta| > a - \cos\beta$ (*). Так як у нашому випадку $\sin\beta \geq 0$, то нерівність (*) буде мати вигляд $\sin\beta > a - \cos\beta$, звідки $\sin\beta + \cos\beta > a$ (**).

3. Перетворимо ліву частину нерівності (**) так: $\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\beta\right) > a$, $\sqrt{2}\sin\left(\beta + \frac{\pi}{4}\right) > a$.

4. Оскільки $\beta \in [0;\pi]$, то $\max\sqrt{2}\sin\left(\beta + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$. Отже, задана нерівність буде мати розв’язки, якщо $\sqrt{2} > a$.

Відповідь. $a \in \left(-\infty; \sqrt{2}\right)$.

По-четверте. Рівняння, нерівності, системи рівнянь та нерівностей із параметрами можна часто бачити серед завдань учнівських математичних олімпіад, державної підсумкової атестації з математики, зовнішнього незалежного оцінювання (див. табл. 1), контрольних робіт на конкурсах-захистах дослідницьких робіт, що проводить Мала академія наук тощо.

Табл. 1

Якого року проводилось ЗНО	Завдання з параметром, яке пропонувалось для розв'язування
2005	Розв'яжіть рівняння $x^3 - ax^2 - (2a+1)x + a^2 + a = 0$ з параметром a.
2006	Розв'яжіть рівняння $2\left(tg^2x + ctg^2x + 2\right) + a^2 = 3a \cdot (tgx + ctgx)$ з параметром a.
2007	Розв'яжіть нерівність $\left(x^2 - 2\sqrt{a} \cdot x + 1\right) \cdot \left(2^x + \lg a\right) < 0$ з параметром a.
2008	Задано функцію $f(x) = 4x^6 - 6x^4 + 3$. Знайдіть значення параметра a, при яких рівняння $f(x) = a$ має точно два різних корені.
2011	Знайдіть найменше значення параметра a, при якому має розв'язки рівняння $\frac{1}{2}\left(\sin x + \sqrt{3}\cos x\right) = 6 - 5a - 2a^2$.
2012 (1 сесія)	При якому найменшому цілому значенні параметра a рівняння $\sqrt{2x+15} \cdot \left(\sqrt{x^2+18x+81} - \sqrt{x^2-10x+25}\right) = a \cdot \sqrt{2x+15}$ має лише два різні корені?
2012 (1 сесія)	При якому найменшому значенні параметра a рівняння $\sqrt{x-2+2\sqrt{x-3}} + (14-2a) \cdot \sqrt[4]{x-3} + 32 = 6a$ має хоча б один корінь?
2013 (1 сесія)	Знайдіть значення параметра a, при якому корінь рівняння $\lg(\sin 5\pi x) = \sqrt{16+a-x}$ належить проміжку $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$.

2013 (2 сесія)	При якому найбільшому від'ємному значенні параметра a рівняння $\sqrt[4]{\lvert x\rvert-1}-2x=a$ має один корінь?
2014	Знайдіть усі від'ємні значення параметра a, при яких система рівнянь $\begin{cases} 2\sqrt{y^2-4y+4}+3\lvert x\rvert=11-y, \\ 25x^2-20ax=y^2-4a^2 \end{cases}$ має єдиний розв'язок.
2014 (додаткова сесія)	Знайдіть найбільше значення параметра a, при якому система рівнянь $\begin{cases} (2a-1)\sin x+\cos x=2, \\ a\sin x+(2a-1)\cos x=a+1 \end{cases}$ має безліч розв'язків.
2015	При яких значеннях параметра a рівняння $\dfrac{\left(x^2-2(a+1)x+6a-3\right)\cdot(tg\pi x-1)}{\sqrt[4]{49x^2-84xa+36a^2}}=0$ на проміжку [0; 1] має рівно два різні корені?
2016	Розв'яжіть рівняння $\dfrac{\sqrt{x^2+(4a-4)x+4a^2}-2\sqrt{2a}}{5\cdot 5^{2x}-5^{a+x}-5^{a-1}+5^x}=0$ залежно від значень параметра a.
2016 (додаткова сесія)	Розв'яжіть рівняння $\dfrac{\left(\sqrt{x+2a}-\sqrt{4-x}\right)\cdot\sin\dfrac{\pi x}{7}}{\lvert x+6\rvert-\lvert x\rvert+6}=0$ залежно від значень параметра a.
2017	Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \lvert x-y\rvert=\lvert x-a\rvert, \\ \lg(y-a)=\lg\left(4a^2+x-x^2\right) \end{cases}$ залежно від значень параметра a.
2017 (додаткова сесія)	Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} (2x+a)^2=(2y+a)^2, \\ \sqrt{3ax-8x-6y}=x \end{cases}$ залежно від значень параметра a.

Значна кількість вправ з параметрами є і у діючих підручниках з математики. Основним прийомом або способом розв’язування завдань із параметрами є така послідовність дій, яка повторює стандартні процедури знаходження розв’язку у відповідних завданнях без параметра.

Ми маємо на увазі таке. Нехай є деяке завдання із параметром. Надамо параметру конкретне значення. Отримаємо відповідне завдання (рівняння, нерівність, систему тощо) вже без параметра. Як правило, таке завдання вже можна віднести до певного розділу елементарної математики. А також, у багатьох випадках, визначити його вид, а отже, і спосіб розв’язування. Тоді, вирішуючи завдання з параметром, можна використовувати ті ж самі традиційні кроки визначеного способу розв’язування. Часто основою цього прийому є рівносильні перетворення. Цей прийом в літературі називають *прийомом прямого розв’язування* (див. приклад 10).

Приклад 10. Розв’яжіть нерівність $\sqrt{5x^2+a^2}\geq -3x$ з параметром a.

Розв’язання. 1. Замінимо задану ірраціональну нерівність рівносильною сукупністю нерівностей: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-3x\geq 0',\\ 5x^2+a^2\geq 9x^2,\end{cases}\\ \begin{cases}-3x<0,\\ 5x^2+a^2\geq 0\end{cases}\end{array}\right.$ звідки $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\leq 0',\\ 4x^2-a^2\leq 0,\end{cases}\\ \begin{cases}x>0,\\ 5x^2+a^2\geq 0\end{cases}\end{array}\right.$. Розв’яжемо кожну із систем сукупності (*).

2. Перепишемо систему $\begin{cases}x\leq 0',\\ 4x^2-a^2\leq 0,\end{cases}$ у вигляді $\begin{cases}x\leq 0',\\ \left(x-\dfrac{a}{2}\right)\left(x+\dfrac{a}{2}\right)\leq 0,\end{cases}$.

2.1. Якщо $a>0$, то її розв’язком буде $x\in\left[-\dfrac{a}{2};0\right]$ (див. рис. 4).

2.2. Якщо $a=0$, то система буде мати вигляд $\begin{cases}x\leq 0',\\ x^2\leq 0,\end{cases}$, звідки $x=0$.

2.3. Якщо $a<0$, то її розв’язком буде $x\in\left[\dfrac{a}{2};0\right]$ (див. рис. 5).

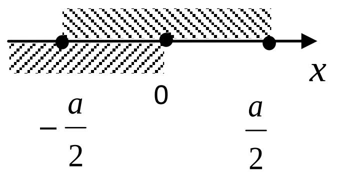


Рис. 4

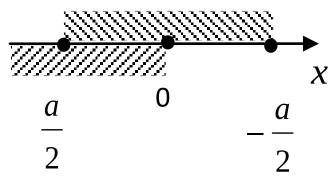


Рис. 5

3. Система $\begin{cases} x > 0, \\ 5x^2 + a^2 \geq 0 \end{cases}$, очевидно, при будь-якому значенні параметра має розв'язком проміжок $x \in (0;+\infty)$.

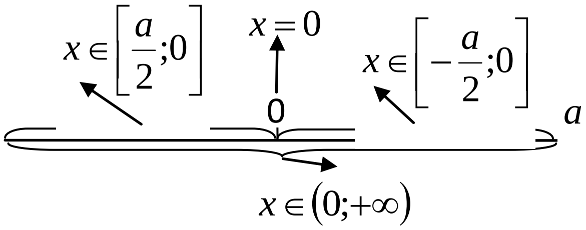


Рис. 6

4. Об'єднаємо знайдені розв'язки на прямій параметра (див. рис. 6) та запишемо відповідь.

Відповідь. Якщо $a \in (-\infty;0)$, то $x \in \left[\frac{a}{2};+\infty\right)$; якщо $a = 0$, то $x \in [0;+\infty)$; якщо $a \in (0;+\infty)$, то $x \in \left[-\frac{a}{2};+\infty\right)$.

Також основний прийом розв'язування називають й інакше: *метод евристичної редукції*. Схематично суть методу евристичної редукції полягає в наступному: дане рівняння (нерівність) зводять до нового (нової нерівності), чи сукупності нових рівнянь (чи нерівностей), спосіб розв'язування яких загальновідомий. Потім із множини (множин) розв'язків останнього чи останньої (останніх) утворюють множину розв'язків заданого рівняння (заданої нерівності). Вміння розв'язувати такі завдання цілком справедливо вважають показником високого рівня математичної компетентності учня, студента. Тому можна говорити про пряму можливість для студентів формувати їх предметну компетентність. Проілюструємо сказане.

Приклад 11 *(пробне ЗНО-2017)*. Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність $\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} > a$.

Розв'язання. 1. Знайдемо область визначення нерівності. Для цього врахуємо, що підкореневі вирази у даному випадку повинні бути невід'ємними:

$\begin{cases} a+x \ge 0, \\ a-x \ge 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x \ge -a, \\ x \le a \end{cases}$. Розв'яжемо утворену систему. Якщо $a>0$, то $x \in [-a;a]$; якщо $a=0$, то $x=0$; якщо $a<0$, то $x \in \varnothing$. Звідки вже можна зробити висновок, що при $a<0$ нерівність розв'язків не має.

2. Розглянемо випадок $a=0$. Отримаємо, що $\sqrt{x}+\sqrt{-x}>0$. Ця нерівність розв'язків не має, оскільки єдиний можливий претендент на корінь - це $x=0$, але він коренем нерівності не буде.

3. Розглянемо випадок $a>0$. Оскільки у лівій частині ірраціональної нерівності знаходиться сума невід'ємних величин, а у правій – додатна величина, то рівносильним переходом буде піднесення обох частин нерівності до квадрату. Отримаємо, що $a+x+2\sqrt{a+x}\cdot\sqrt{a-x}+a-x>a^2$, $2\sqrt{a^2-x^2}>a^2-2a$. Далі див. розв'язання у табл. 2.

Табл. 2

3.1)	Нехай $a^2-2a \ge 0$, $a \in (-\infty;0)\cup(2;+\infty)$. Врахуємо, що $a>0$: $\begin{cases} a \in (-\infty;0)\cup(2;+\infty), \\ a \in (0;+\infty) \end{cases}$; $a \in (2;+\infty)$	На області визначення нерівності піднесемо її до квадрату: $4(a^2-x^2)>a^4-4a^3+4a^2$, $-4x^2>a^4-4a^3$, $x^2<a^3-\frac{1}{4}a^4$.
3.1.1)	Нехай $a^3-\frac{1}{4}a^4>0$, $a^3(4-a)>0$, $a(a-4)<0$, $a \in (0;4)$. Врахуємо, що $a \in (2;+\infty)$: $\begin{cases} a \in (0;4), \\ a \in (2;+\infty) \end{cases}$, $a \in (2;4)$	У правій частині квадратної нерівності – додатна величина. Розв'яжемо цю нерівність методом інтервалів: $x^2-\left(a^3-\frac{1}{4}a^4\right)<0$, $x^2-\frac{4a^3-a^4}{4}<0$, $\left(x-\frac{\sqrt{4a^3-a^4}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{4a^3-a^4}}{2}\right)<0$, $\left(x-\frac{a\sqrt{a(4-a)}}{2}\right)\left(x+\frac{a\sqrt{a(4-a)}}{2}\right)<0$, звідки $x \in \left(-\frac{a\sqrt{a(4-a)}}{2};\frac{a\sqrt{a(4-a)}}{2}\right)$

Продовження табл. 2

3.1.2)	Нехай $a^3-\frac{1}{4}a^4\le 0$, $a\in(-\infty;0]\cup[4;+\infty)$. Врахуємо, що $a\in(2;+\infty)$: $\begin{cases} a\in(-\infty;0]\cup[4;+\infty) \\ a\in(2;+\infty) \end{cases}$, $a\in[4;+\infty)$	У правій частині квадратної нерівності $x^2<a^3-\frac{1}{4}a^4$ знаходиться величина від'ємна або нуль. Така нерівність розв'язків не має.
3.2)	Нехай $a^2-2a<0$, $a\in(0;2)$. Врахуємо, що $a>0$: $\begin{cases} a\in(0;2), \\ a\in(0;+\infty) \end{cases}$; $a\in(0;2)$	Тоді у правій частині нерівності $2\sqrt{a^2-x^2}>a^2-2a$ - від'ємна величина. Тому розв'язком такої нерівності буде її область визначення, тобто $x\in[-a;a]$.
3.3)	Нехай $a^2-2a=0$, звідки $a=0$ або $a=2$. Врахуємо, що $a>0$. Отже, $a=2$	Тоді отримаємо нерівність $2\sqrt{4-x^2}>0$, звідки $x\in(-2;2)$.

4. Позначимо знайдені розв'язки на прямій параметра (рис. 7) та запишемо відповідь.

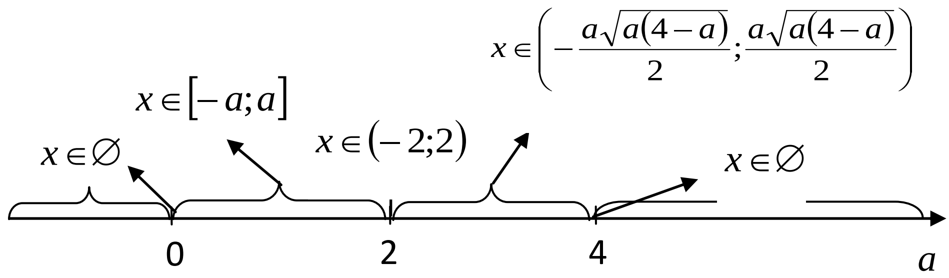


Рис. 7

Відповідь. Якщо $a\in(-\infty;0]\cup[4;+\infty)$, то $x\in\varnothing$; якщо $a\in(0;2)$, то $x\in[-a;a]$; якщо $a=2$, то $x\in(-2;2)$; якщо $a\in(2;4)$, то $x\in\left(-\frac{a\sqrt{a(4-a)}}{2};\frac{a\sqrt{a(4-a)}}{2}\right)$.

Окремо зазначимо таке. Якщо проаналізувати вид рівнянь, нерівностей, систем із параметрами, які входять до завдань ЗНО (див. табл.1), то можна сказати, що більшість із них є комбінованими. Їх розв'язування, як правило, потребує умінь поєднувати та комбінувати знання різних розділів елементарної математики, застосовувати вміння розв'язувати певні види рівнянь, нерівностей, систем, будувати та аналізувати графіки тощо. Значну частину таких завдань можна назвати нестандартною (навіть якщо мова йде про завдання з параметрами, які самі по собі вже можна вважати нестандартними). Відповідно, такі завдання будуть потребувати відповідних підходів та схем розв’язування. Про частину таких підходів вже говорилося вище. Зупинимось на аналітичному прийомі рівноцінної змінної (приклад 12).

Іноді необхідно поміняти ролі шуканої величини та параметра. Цей прийом є ефективним, коли степінь шуканої величини у рівнянні або нерівності відносно високий, а степінь параметра не перевищує другого степеня. Особливістю цього прийому є своєрідний обмін ролями змінної і параметра, коли початкову задачу складно або неможливо відразу розв’язати відносно шуканої змінної x, але достатньо легко розв’язати відносно параметра a. У такому випадку x і a приймаються рівноправними змінними та вибирається та змінна, відносно якої аналітичне розв’язування визнається простішим. Після спрощень повертаємось до початкового розуміння ролі x і a та завершуємо розв’язування.

Приклад 12 *(ЗНО-2005)*. Розв’яжіть рівняння з параметром a: $x^3 - ax^2 - (2a+1)x + a^2 + a = 0$.

Розв’язання. 1. І параметр, і змінна можуть приймати будь-які значення.

2. Степінь шуканої величини – третій, а параметра – другий. Поміняємо параметр та змінну місцями: фіксуємо змінну, а параметр буде виступати змінною. Тоді будемо мати рівняння другого степеня відносно змінної a з параметром x.

3. Виконаємо тотожні перетворення лівої частини рівняння $x^3 - ax^2 - (2a+1)x + a^2 + a = 0$ та приведемо рівняння до квадратного відносно нової змінної: $x^3 - ax^2 - 2ax - x + a^2 + a = 0$, $a^2 + \left(-ax^2 - 2ax + a\right) + x^3 - x = 0$, $a^2 - \left(x^2 + 2x - 1\right)a + x^3 - x = 0$ (*).

4. Знайдемо корені квадратного тричлена у лівій частині (*) та розкладемо її на множники за формулою розкладу квадратного тричлена на множники.

4.1. $D=\left(-x^2-2x+1\right)^2-4\cdot 1\cdot\left(x^3-x\right)=x^4+4x^2+1+4x^3-2x^2-4x-4x^3+4x=$
$=x^4+2x^2+1=\left(x^2+1\right)^2>0$.

4.2. Оскільки $D>0$ при будь-яких значеннях x, то тричлен має два корені

$$a_{1,2}=\frac{x^2+2x-1\pm\left|x^2+1\right|}{2}=\frac{x^2+2x-1\pm\left(x^2+1\right)}{2},\text{ тобто}$$

$$a_1=\frac{x^2+2x-1-x^2-1}{2}=x-1,\ a_2=\frac{x^2+2x-1+x^2+1}{2}=x^2+x.$$

4.3. Таким чином, рівняння (*) рівносильне рівнянню $(a-x+1)\left(a-x^2-x\right)=0$, а останнє, в свою чергу, рівносильне сукупності рівнянь $\left[\begin{array}{l}a-x+1=0,\\ a-x^2-x=0\end{array}\right.$ (**).

5. Повертаємось до початкового розуміння ролі x та a. Тоді можна сказати, що (**) – це сукупність лінійного рівняння та квадратного рівняння зі змінною x та параметром a. Розв'яжемо кожне з рівнянь сукупності окремо.

5.1. Розв'язком рівняння $a-x+1=0$ при будь-яких значеннях параметра a, зрозуміло, буде $x=a+1$.

5.2. Знайдемо розв'язки квадратного рівняння $x^2+x-a=0$. Знайдемо $D=1+4a$.

• Якщо $D=1+4a>0$, звідки $a>-\frac{1}{4}$, то $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$.

• Якщо $D=1+4a=0$, звідки $a=-\frac{1}{4}$, то $x_1=x_2=-\frac{1}{2}$.

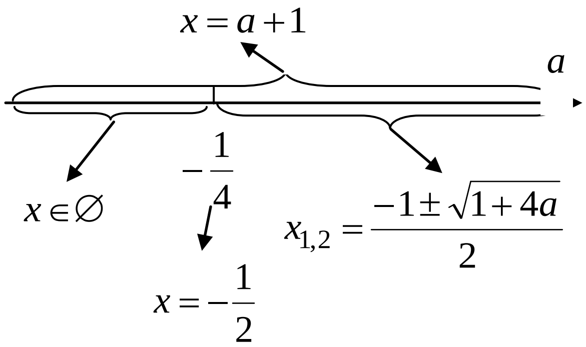


Рис. 8

• Якщо $D=1+4a<0$, звідки $a<-\frac{1}{4}$, то $x\in\varnothing$.

6. Об'єднаємо відповіді на прямій параметра (рис. 8) та запишемо відповідь.

Відповідь. Якщо $a\in\left(-\infty;-\frac{1}{4}\right)$, то

$x=a+1$; якщо $a=-\frac{1}{4}$, то $x=\frac{3}{4}$, $x=-\frac{1}{2}$; якщо $a\in\left(-\frac{1}{4};+\infty\right)$, то $x=a+1$, $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$.

По-п'яте. Рівняння, нерівності та їх системи з параметрами – чудовий засіб для вчителів складання завдань для контрольних та самостійних робіт. Розв'язати потрібно лише одне завдання з параметром потрібного виду. При цьому можна скласти кожному учню свій варіант та відразу мати відповіді. Продемонструємо це на такому прикладі.

Приклад 14. .Розв'язати нерівність $\frac{x^2+1}{a^2x-2a}-\frac{1}{2-ax}>\frac{x}{a}$ з параметром a.

Розв'язання. Використаємо графічний метод в системі координат xOa.

1. Знайдемо область визначення нерівності $\frac{x^2+1}{a^2x-2a}-\frac{1}{2-ax}>\frac{x}{a}$ (*): $a\neq 0$, $ax\neq 2$.

2. Якщо $a=1$, то $x\in(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$.

3. Якщо $a\neq 0$ та $a\neq 1$, то отримаємо нерівність (*) у вигляді

$$\frac{(1-a)\left(x-\frac{a+1}{a-1}\right)(x+1)}{a^2\left(x-\frac{2}{a}\right)}>0.$$

3.1. Для розв'язування нерівності графічно в системі координат xOa спочатку побудуємо лінії, які задані такими рівняннями:

- $a=1$, $a=0$ - це горизонтальні прямі;
- $x=-1$ - вертикальна пряма;
- $x=\frac{a+1}{a-1}$ - дві вітки гіперболи (оскільки $\frac{x}{1}=\frac{a+1}{a-1}$, $ax-x=a+1$, $a\neq 1$, звідки $a(x-1)=x+1$);
- $x=\frac{2}{a}$ - дві вітки гіперболи (оскільки $\frac{x}{1}=\frac{2}{a}$, $ax=2$).

Ці лінії розіб'ють площину на окремі області. Використаємо пробні точки у кожній із утворених частин площини. Знайдемо розв'язки нерівності графічно. На рис. 9 вони зображені штриховкою.

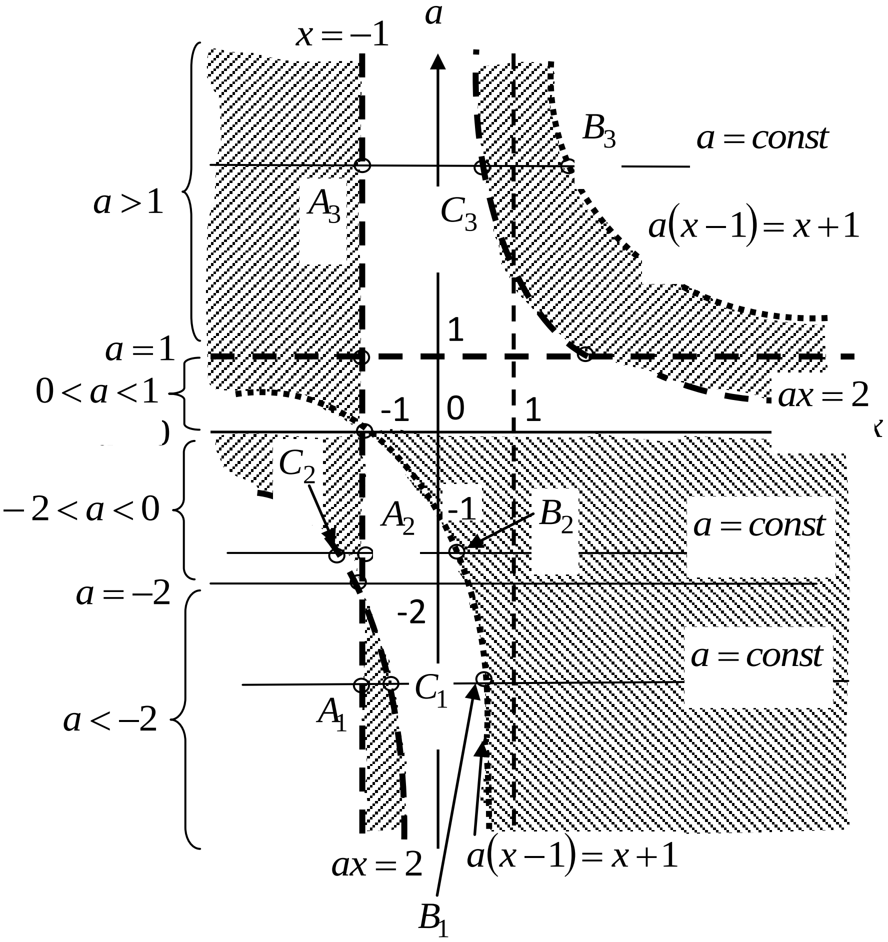


Рис. 9

Домовимось за такі позначення: літера A (з індексами або без них) - точки перетину прямих $a = const$ із прямою $x = -1$; літера C (з індексами або без них) - точки перетину прямої $a = const$ із графіком функції $ax = 2$; літера B_1(з індексами або без них) - це точка перетину прямої $a = const$ із графіком функції $a(x-1) = x+1$.

3.2. Прочитаємо утворені розв'язки. Запишемо їх залежно від значень параметра.

3.2.1. Нехай $a < -2$. Будь-яка пряма $a = const$ із цього проміжку перетинає область розв'язків. Розв'язком буде об'єднання проміжків $x \in (x_{A_1}; x_{C_1}) \cup (x_{B_1}; +\infty)$, де x_{A_1} - абсциса точки A_1, x_{C_1} - абсциса точки C_1 , x_{B_1}

абсциса точки B_1. Очевидно, що $x_{A_1}=-1$; зрозуміло, що $x_{C_1}=\frac{2}{a}$ та $x_{B_1}=\frac{a+1}{a-1}$.

Отже, якщо $a\in(-\infty;-2)$, то $x\in\left(-1;\frac{2}{a}\right)\cup\left(\frac{a+1}{a-1};+\infty\right)$.

3.2.2. Нехай $a=-2$. Пряма $a=-2$ перетинає область розв'язків. Тоді розв'язком буде проміжок $x\in(x_B;+\infty)$, де $x_B=\frac{-2+1}{-2-1}=\frac{1}{3}$. Отже, якщо $a=-2$, то $x\in\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$.

3.2.3. Нехай $-2<a<0$. Будь-яка пряма $a=const$ із цього проміжку перетинає область розв'язків. Розв'язком буде об'єднання проміжків $x\in\left(x_{C_2};x_{A_2}\right)\cup\left(x_{B_2};+\infty\right)$. Очевидно, що $x_{C_2}=\frac{2}{a}$, $x_{A_2}=-1$, $x_{B_2}=\frac{a+1}{a-1}$. Отже, якщо $a\in(-2;0)$, то $x\in\left(\frac{2}{a};-1\right)\cup\left(\frac{a+1}{a-1};+\infty\right)$.

3.2.3. Нехай $a=0$. Задача не визначена (дане значення не входить до області визначення).

3.2.4. Нехай $0<a<1$. Будь-яка пряма $a=const$ із цього проміжку перетинає область розв'язків. Розв'язком буде об'єднання проміжків $x\in(x_B;x_A)\cup(x_C;+\infty)$. Очевидно, що $x_C=\frac{2}{a}$, $x_A=-1$, $x_B=\frac{a+1}{a-1}$. Отже, якщо $a\in(0;1)$, то $x\in\left(\frac{a+1}{a-1};-1\right)\cup\left(\frac{2}{a};+\infty\right)$.

3.2.5. Випадок $a=1$ розглянуто окремо (див. вище).

3.2.6. Нехай $a>1$. Будь-яка пряма $a=const$ із цього проміжку перетинає область розв'язків. Розв'язком буде об'єднання проміжків $x\in\left(-\infty;x_{A_3}\right)\cup\left(x_{C_3};x_{B_3}\right)$. Очевидно, що $x_{C_3}=\frac{2}{a}$, $x_{A_3}=-1$, $x_{B_3}=\frac{a+1}{a-1}$. Отже, якщо $a\in(1;+\infty)$, то $x\in(-\infty;-1)\cup\left(\frac{2}{a};\frac{a+1}{a-1}\right)$.

Відповідь. Якщо $a \in (-\infty;-2)$, то $x \in \left(-1;\frac{2}{a}\right) \cup \left(\frac{a+1}{a-1};+\infty\right)$; якщо $a=-2$, то $x \in \left(\frac{1}{3};+\infty\right)$; якщо $a \in (-2;0)$, то $x \in \left(\frac{2}{a};-1\right) \cup \left(\frac{a+1}{a-1};+\infty\right)$; якщо $a=0$, то задача не визначена; якщо $a \in (0;1)$, то $x \in \left(\frac{a+1}{a-1};-1\right) \cup \left(\frac{2}{a};+\infty\right)$; якщо $a=1$, то $x \in (-\infty;-1) \cup (2;+\infty)$; якщо $a \in (1;+\infty)$, то $x \in (-\infty;-1) \cup \left(\frac{2}{a};\frac{a+1}{a-1}\right)$.

Використаємо отриману відповідь для складання однотипних завдань (без параметра), при чому, одночасно будемо мати відповідь. Про це детальніше можна ознайомитись у посібнику [3]. Приклад складання декількох таких завдань див. у табл. 3 (зрозуміло, що таких варіантів можна створити будь-яку кількість). Таким чином формується предметна, рефлексивна компетентності.

Табл. 3

Завдання (без параметра) для письмових робіт, які складені на основі розв'язаної нерівності $\frac{x^2+1}{a^2x-2a} - \frac{1}{2-ax} > \frac{x}{a}$ з параметром a

№	a	Нерівність	Відповідь
1	$a=-5$	$\frac{x^2+1}{25x+10} - \frac{1}{2+5x} > \frac{x}{-5}$	$x \in \left(-1;-\frac{2}{5}\right) \cup \left(\frac{2}{3};+\infty\right)$
2	$a=-2$	$\frac{x^2+1}{4x+8} - \frac{1}{2+2x} > -\frac{x}{2}$	$x \in \left(\frac{1}{3};+\infty\right)$
3	$a=-\sqrt{3}$	$\frac{x^2+1}{3x-2\sqrt{3}} - \frac{1}{2+\sqrt{3}x} > -\frac{x}{\sqrt{3}}$	$x \in \left(-\frac{2}{\sqrt{3}};-1\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1};+\infty\right)$
4	$a=1$	$\frac{x^2+1}{x-2} - \frac{1}{2-x} > x$	$x \in (-\infty;-1) \cup (2;+\infty)$
5	$a=2{,}5$	$\frac{x^2+1}{6{,}25x-5} - \frac{1}{2-2{,}5x} > \frac{x}{2{,}5}$	$x \in (-\infty;-1) \cup \left(\frac{4}{5};2\frac{1}{3}\right)$

Підсумовуючи, слід зазначити таке. Професійна компетентність вчителя математики формується протягом навчання у вищому навчальному закладі в процесі вивчення всіх дисциплін загальної та професійної підготовки. Однак рівень сформованості основ професіоналізму (високий, оптимальний, базовий і початковий) у першу чергу залежить від мотиваційного чинника, тобто прагнення самого студента стати професіоналом в обраній сфері.

ЛІТЕРАТУРА

1. Горнштейн П.І., Полонський В.Б., Якір М.С. Задачі з параметрами. – Тернопіль: Підручники і посібники. – 2004. – 256 с.
2. Натяганов В.Л., Лужина Л.М. Методы решения задач с параметрами: Учеб. пособие. – М.: Изд-во МГУ, 2003. – 368 с.
3. Прус А.В., Швець В.О. Задачі з параметрами в шкільному курсі математики. Начально-методичний посібник. – Житомир: Вид-во «Рута», 2016. – 468 с.
4. Скворцова С.О. Формування професійної компетентності в майбутнього вчителя математики // Електронний журнал «Педагогічна наука: історія, теорія, практика, тенденції розвитку». – 2010. – Вип. № 4.
5. Теплицька А.О. Формування основ професіоналізму майбутніх учителів математики у процесі фахової підготовки: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.04 / Теплицька А. О., Мелітопольський державний педагогічний університет ім. Богдана Хмельницького – Мелітополь, 2017. – 317 с.

Прус Алла Володимирівна – доцент, кандидат педагогічних наук.

Наукові інтереси: прикладна спрямованість математики.

Дисципліни, які викладає: Прикладні задачі з параметрами, методика навчання математики, елементарна математика, додаткові розділи АТЧ, додаткові розділи стереометрії, аналітична геометрія, розв’язування олімпіадних задач.

Фонарюк О.В.

кандидат педагогічних наук, старший викладач

ДЕЯКІ АСПЕКТИ ПРОФЕСІЙНОЇ ПІДГОТОВКИ МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ ДО КОНСТРУКТИВНО-ПРОЕКТУВАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Одним з провідних завдань педагогічного процесу підготовки учителя є перетворення особистості студента на спеціаліста, здатного розв'язувати проблеми навчання і виховання школярів. Тому покращення професійної підготовки майбутнього вчителя вимагає не лише нових ефективних шляхів організації навчально-виховного процесу вищого педагогічного навчального закладу, але і перегляду структури та змісту предметної підготовки студентів на основі підняття її на технологічний рівень навчання та викладання при врахуванні професійної ідентичності особистості та професії, професійної компетентності та творчості.

Проблема професійної підготовки майбутніх педагогів залишається актуальною в сучасній науковій думці як результат тенденції до технологізації та інтенсифікації різних сфер життя суспільства, з одного боку, та нереалізованість цих процесів унаслідок низки об'єктивних і суб'єктивних факторів у сфері освіти – з іншого. В Україні стрімко зростає вартість людського капіталу, що ставить перед професійною освітою та педагогікою вищої школи нові завдання з підготовки спеціалістів високого рівня кваліфікації, який відповідав би європейським та світовим стандартам.

Нагальність вирішення поставлених перед підготовкою вчителя завдань підкреслюється законодавчо. Так, у останніх державних документах (Закон України "Про освіту" [4], „Національна доктрина розвитку освіти України у XXI столітті"[11] та інше) визначено пріоритетні завдання вищої школи щодо підготовки студентської молоді до свідомого суспільного вибору, збагачення на цій основі інтелектуального, творчого, культурного потенціалу народу, виховання майбутніх спеціалістів як найвищої цінності суспільства, розвиток їх талантів, розумових і фізичних здібностей, виховання високих моральних якостей. Це вимагає від системи вищої освіти, зокрема педагогічної, розробки дієвих моделей і технологій навчально-виховного процесу за галузями підготовки фахівців на основі сучасного теоретико-методологічного підґрунтя; підбору відповідного змісту освіти, збереження традиційних і апробування інноваційних методів і форм професійної підготовки тощо. У Національній доктрині розвитку освіти важливою умовою модернізації освіти визначається професійне вдосконалення і підготовка педагогічних і науково-педагогічних працівників. З цією метою держава забезпечує: розроблення та вдосконалення нормативно-правової бази професійної діяльності педагогічних і науково-педагогічних працівників; прогнозування та задоволення потреб суспільства у зазначених працівниках; розвиток конкурентоспроможної системи навчальних закладів, в яких проводиться підготовка, перепідготовка та підвищення кваліфікації педагогічних і науково-педагогічних працівників; розроблення та запровадження державних стандартів педагогічної освіти різних освітньо-кваліфікаційних рівнів і державних стандартів післядипломної педагогічної освіти; оволодіння педагогічними працівниками сучасними інформаційними технологіями; періодичне оновлення і взаємоузгодження змісту підготовки, перепідготовки та підвищення кваліфікації педагогічних працівників; впровадження системи цільового державного фінансування підготовки педагогічних і науково-педагогічних працівників та їх професійного вдосконалення; поліпшення системи стимулювання професійного зростання педагогічних і науково-педагогічних працівників, можливість вивчення іноземних мов [11].

У Концепції розвитку професійно-технічної (професійної) освіти в Україні зазначається, що без якісної підготовки кваліфікованих спеціалістів, адаптованих до сучасних вимог технологічного розвитку галузей науки, що мають високий рівень теоретичної підготовки та професійної компетенції, володіють багатофункціональними практико орієнтованими вміннями, здатні до самоорганізації, самореалізації у професійній діяльності, підготовлених до розв'язання виробничих завдань і соціально-економічних проблем, неможливо розвивати високотехнологічне суспільство [7].

Теоретичний аналіз та емпіричного спостереження за системою професійної підготовки майбутніх учителів математики свідчать про наявність низки протиріч у системі вищої педагогічної освіти:

- ✓ між рівнем розвитку сучасних технологій та ступенем їх впровадження у систему педагогічної освіти учителів математики;
- ✓ між потребою у підготовці педагогічних кадрів, які б володіли методикою і практикою навчального процесу у школі та затеоретизованістю змісту математичної освіти;
- ✓ між проголошенням особистісно-орієнтованих та гуманістичних принципів системи вищої освіти та орієнтованістю навчально-виховного процесу вищої школи на «середнього» студента;
- ✓ між теоретичною усвідомленістю у необхідності формування професійних умінь майбутніх учителів математики та відсутністю дієвих технологій формування цих умінь.

С.М. Рибак у своєму дисертаційному дослідженні визначає суперечності методологічного, дидактичного і конструктивного характеру у професійній підготовці учителів фізико-математичного циклу, серед яких, на нашу думку, доцільно виділити такі: інтенсивний розвиток інтеграційних процесів у науці, техніці, суспільстві та рівень їхнього відображення в змісті природничо-математичних і спеціальних дисциплін професійної підготовки вчителя; потреба залучення природничо-математичних і спеціальних дисциплін до цілісної системи освіти й традиційній орієнтації навчальних предметів на абстрактно-знаннєве навчання студентів, яке й дотепер відірване від цілісної ноосферної структури, у рамках якої формується світогляд людини; необхідність розвитку предметного мислення (фізичного, математичного, технічного) та формування уявлень студентів про єдність світу, та інші [17].

І.В. Фольварочний виділяє такі чинники труднощів у професійній підготовці майбутніх фахівців в умовах вищих навчальних закладів:

початковий період самореалізації особистості; необхідність адаптації до нових умов освітньої діяльності; необхідність в утвердженні для самого себе правильності професійного вибору; система мотивів та вольових якостей щодо опанування професією; усвідомлення життєвих реалій [23].

Як зазначає Є.І. Смірнов, однією із основних проблем математичної освіти педагогів на сьогодні є подвійний розрив між шкільною та вузівською математикою, коли постає необхідність викладання елементарної математики з точки зору вищої [21]. Вченим виділено такий ряд суперечностей, що характеризують рівень предметної і педагогічної підготовки учителя математики:

- ✓ між змістом навчально-методичного забезпечення освіти та об'єктивною необхідністю наявності цілісної дидактичної системи викладання дисципліни в педагогічному закладі;
- ✓ між рівнем розвитку теоретичних положень психології і педагогіки, практичною значимістю предметного змісту (основні поняття, процедури, методи, докази, дії) та уніфікованістю, вузькою спрямованістю методики викладання навчальної дисципліни у ВНЗ;
- ✓ між орієнтацією на побудову змісту предметної освіти на основі її специфіки та необхідністю врахування психологічних характеристик сенсорно-перцептивних процесів адекватного сприйняття математичного змісту студентам.

О.Г. Величко, С.Й. Пинчук та С.Т. Плісканoвський виділяють сформовані протягом останніх десятиріч показники досягнень якості в професійній освіті, а саме:

- ✓ *комплексність* (пошук шляхів підвищення якості охоплює різноманітні зусилля, які включають усі види діяльності в навчанні);
- ✓ *взаємообувленість* (те, як ми працюємо, придбаний нами досвід, вміння, які ми використовуємо, знання, якими ми володіємо, і наше відношення – усе це бере свій початок в освіті, яку ми отримали раніше);

- ✓ *конкурентноспроможність* (світова конкуренція вимагає змін в організації навчання – революція якості примусила освітянські установи переглянути цілі освітнього процесу);
- ✓ *доступність* (умови отримання професмійної освіти мають бути такими, щоб людина, яка хоче навчатися, була впевнена, що вона зможе зробити все, що потрібно для підвищення якості).

Визначені суперечності та труднощі детермінують необхідність реформування системи вищої педагогічної освіти майбутніх учителів математики на основі сучасних досягнень наукової думки та педагогічної практики. Аналіз наукової літератури свідчить про зростання кількості досліджень проблеми педагогічної підготовки майбутнього педагога як компетентного спеціаліста, який досконало володіє професійними знаннями, вміннями та навичками, характеризується професійно відповідними особистісними якостями.

Проаналізуємо сутність понять «підготовка» і «професійна підготовка». Термін “підготовка” є похідним від дієслова “підготувати”, тобто навчити, дати необхідні для чого-небудь знання. У словниково-довідниковій літературі термін «підготовка» тлумачиться як процес формування та збагачення настанов, знань та умінь, які необхідні індивіду для адекватного виконання специфічних завдань.

Згідно зі словником С.І. Ожегова, підготовка визначається як «запас знань, отриманий будь-ким» [14]. Там же зазначається, що цей термін походить від слова «підготувати», сутнісними значеннями якого є «результат навчання – як процесу надання необхідних знань для чогось» та «сукупність попередніх дій, які полегшують реалізацію якихось подальших дій чи процесів». А за «Коротким тлумачним словником української мови» під підготовкою (у значенні кінцевого результату процесу) розуміють «запас знань, навичок, досвід, набутий у процесі навчання, практичної діяльності» та «готування (як дія) всього необхідного до чого-небудь» [8].

«Енциклопедія професійної освіти» визначає «підготовку» як загальний термін стосовно прикладних завдань освіти, коли передбачається засвоєння певного соціального досвіду з метою його подальшого застосування під час виконання специфічних завдань практичного, пізнавального чи навчального характеру. Сутність поняття «підготовка» розкривається у двох його значеннях: як навчання, тобто, як деякий спеціально організований процес формування готовності до виконання майбутніх завдань, та як готовність, під чим розуміється наявність компетенції, знань, умінь та навичок, необхідних для успішного виконання певної сукупності завдань. Таким чином, поняття «підготовка» вживатиметься нами в значенні цілеспрямованого процесу формування підготовленості майбутніх педагогів.

Професійна підготовка у науково-практичній літературі також має різні тлумачення; в сучасній психолого-педагогічній науці існує декілька підходів до визначення її сутності. З точки зору психології, професійна педагогіка визначається як засіб приросту індивідуального потенціалу особистості, розвитку її резервних сил, пізнавальної й творчої активності на основі оволодіння загальнонауковими та професійно значущими знаннями, вміннями й навичками. Педагогічний підхід розглядає професійну підготовку як оволодіння людиною професійною освітою, що є результатом засвоєння інтелектуалізованих знань, умінь та формування необхідних особистісних професійних якостей. На думку дослідників Ю.О. Дорошенка та Н.В. Семенюка у науковій літературі склалися такі підходи до визначення професійної підготовки:

- ✓ як цілеспрямованого педагогічного процесу професійного навчання і виховання;
- ✓ як цілеспрямованого, здійснюваного державою та суспільством, процесу відтворення кваліфікованої робочої сили, підготовки, перепідготовки й підвищення кваліфікації спеціалістів;
- ✓ як системи професійної освіти, яка являє собою мережу професійних навчальних закладів – від простих курсових форм до вищої та післядипломної освіти;

- ✓ як професійну підготовку і наявний рівень компетентного володіння тією чи іншою програмою професійної освіти.

У Законі України «Про вищу освіту» професійна підготовка визначається як здобуття кваліфікації за відповідним напрямом підготовки або спеціальністю.

За «Педагогічним енциклопедичним словником» професійна підготовка являє собою систему професійного навчання, метою якої є прискорене набуття тими, хто навчається, навичок, необхідних для виконання визначеної роботи або ж групи робіт [16].

За С.У. Гончаренком, професійна освіта – це сукупність знань, навичок і вмінь, оволодіння якими дає змогу працювати спеціалістом вищої, середньої кваліфікації або кваліфікованим робітником [1].

У дослідженні О. Шквир професійна підготовка визначається як процес формування спеціаліста для однієї з галузей трудової діяльності, пов’язаний з оволодінням певним родом занять, професією.

Ю.О. Дорошенко і Н.В. Семенюк професійну підготовку розглядають як сукупність уже отриманих людиною спеціальних знань, умінь та навичок, особистісних якостей, власного досвіду роботи та усвідомлених норм поведінки, що забезпечують можливість успішної роботи з певної професії; або, з іншого боку, як процес повідомлення тим, хто навчається (научуваним) відповідних знань та формування в них умінь і навичок.

Н.Д. Хмель під професійною підготовкою розуміє процес формування спеціаліста для однієї з галузей трудової діяльності, яка пов'язана з оволодінням визначеним родом занять, професією. Метою професійної підготовки є набуття професійної освіти, яка, у свою чергу, є результатом засвоєння систематизованих знань, умінь, навичок та необхідних особистісно-професійних якостей.

Професійна освіта у «Педагогічному енциклопедичному словнику» визначається як соціально і педагогічно організований процес трудової соціалізації особистості, який забезпечує орієнтацію і адаптацію у світі професій, опанування певної спеціальності і рівнем кваліфікації, неперервне зростання компетентності, майстерності та розвиток здібностей у різних сферах людської діяльності [16]. Таким чином, професійна освіта створює умови для професійного становлення, розвитку й самореалізації особистості та сприяє досягненню гуманістичних та демократичних цілей суспільства.

Дослідниця професійної підготовки педагога з психолого-педагогічному точки зору В.А. Семиченко розглядає сутність досліджуваного поняття в трьох аспектах: як процес, в ході якого відбувається професійне становлення майбутніх спеціалістів; як мету і результат діяльності вищого навчального закладу; як сенс включення студента у навчально-виховну діяльність [19]. На думку В.А. Семиченко, реальна дійсність вимагає гнучкого, адаптивного підходу до визначення співвідношення відповідних пріоритетів. Зокрема, це підтверджується тим, що система професійної підготовки одночасно має забезпечити і виконання певного державного замовлення на спеціалістів (тобто, діяльність є зорієнтованою), і стати певним етапом і засобом життєвого самовизначення особистості (тобто, є особистісно значущою).

Таким чином, під професійною підготовкою ми розуміємо цілеспрямований процес формування у вищому педагогічному навчальному закладі системи професійних знань, умінь, навичок, мотивів, відношень та особистісних рис. Професійна підготовка майбутніх учителів математики передбачає, відповідно, двосторонні процеси викладання та научіння професійно значимих знань, умінь та навичок, формування та оволодіння системою відповідних потреб і мотивів, розвиток та саморозвиток особистості студента педагогічного закладу в процесі здобуття математичної освіти, результатом якого є готовність до професійної діяльності у загальноосвітній школі.

Аналізуючи наукову літературу, нами було виділено такі підходи до розуміння професійної підготовки майбутніх учителів математики (таблиця 1).

Таблиця 1.

Теоретичні підходи до розуміння професійної підготовки майбутніх учителів математики

№	Назва підходу	Вчені	Взаємозв'язок	Відмінне
1.	*Компетентнісний* – як результат формування ключових компетентностей учителів математики за галузями необхідних знань (педагогічна, психологічна, математична, методична тощо компетентність)	Н.Ф. Бориско і Н.Б. Ішханян, Н.В. Кузьміна та А.А. Реан, А.К. Маркова та ін.	Спрямованість професійної освіти не на зміст, а на результат навчально-виховного процесу, головне місце в якому посідають професійно значущі якості особистості випускника, а також високий рівень володіння фаховими знаннями, уміннями та навичками	Спрямованість на володіння фаховими ключовими компетентностями
2.	*Євроінтеграційний* – як необхідність наукової дифузії у підготовці майбутніх вчителів математики у відповідності до європейських стандартів та послуговуючись сучасними європейськими технологіями	М.Б. Євтух, В.І. Луговий, І.М. Носаченко та ін.		Акцент на конкурентоспроможності та мобільності майбутнього спеціаліста
3.	*Акмеологічний* – як результат досягнення високої якості освітніх систем і розвитку суб'єктів навчально-виховного процесу вищої школи	В.Н. Максимова, І.А. Зязюн, Л.Е. Орбан-Лембрик, О.Д. Сафін та ін.		Увага до неперервної освіти на основі постійного розвитку суб'єктів освітнього процесу вищої школи та саморозвитку та самовдосконалення
4.	*Ціннісний* – як посилення культурологічного компонента в професійній освіті	І.А. Зязюн, Т.В. Іванова та ін.		Насичення змісту освіти аксіологічним наповненням з орієнтацією на професійно спрямований результат, що має ціннісне значення для майбутньої професійної діяльності
5.	*Професіографічний* – як включення у систему підготовки фахівця професійно значущих якостей особистості крім знань, умінь та навичок, окреслених в освітньо-кваліфікаційних характеристиках.	О.А. Макаренко, Н.В. Кузьміна, С.О. Сисоєва, І.Л. Погребний та ін.		Формування змісту професійної освіти на основі професіограми спеціальності

Зупинимося більш детально на характеристиці кожного підходу в науковій літературі.

Євроінтеграційний підхід розглядається нами як необхідність наукової дифузії у підготовці майбутніх вчителів математики відповідно до європейських стандартів, послуговуючись сучасними європейськими технологіями. При цьому наукову дифузію ми розуміємо як взаємопроникнення теоретико-методологічних і методико-технологічних підходів до змісту організації професійної підготовки майбутніх вчителів, у тому числі математики. Така ситуація зумовлена глобалізаційними процесами у різних сферах життєдіяльності світового та українського суспільства і спрямована на трансформацію вищої школи України до світового простору в контексті Болонського процесу.

На необхідність врахування даного підходу при професійній підготовці майбутніх педагогів у своїх працях наголошують М.Б. Євтух, М.І. Пальчук, Л.Л. Товажнянський, О.С. Пономарьов і О.Г. Романовський та інші. Загалом, Болонська декларація об’єднала у собі матеріали Паризької конференції ООН-ЮНЕСКО з проблем вищої освіти 1998 року задля взаємоузгоджених і конвергентних реформ вищої освіти Європи. Головними завданнями впровадження цього документу в європейський освітній простір можна вважати значне підвищення конкурентоспроможності європейської вищої освіти й освітніх послуг вищих навчальних закладів; поглиблення науково-навчальної співпраці й координації, подальше підвищення мобільності студентів, викладачів, дослідників, адміністративного персоналу європейських ВНЗ; зростання якості європейської вищої освіти і здатності випускників європейських ВНЗ до працевлаштування в умовах відкритого європейського та квазівідкритого глобального ринків праці. Аналізуючи вітчизняну наукову літературу, ми прийшли до висновку, що наведені завдання є актуальними для реалізації у сфері вищої освіти України. Так, на думку М.І. Пальчука, головним капіталом при освітній євроінтеграції виступають інтелект, знання, професіоналізм і моральна зрілість особистості, тому пріоритетним напрямом розвитку держави є освіта як сфера «олюднення знань» [15]. Тому постає необхідність створення умов для відповідності змісту професійної освіти потребам ринку праці. М.Б. Євтух виділяє такі принципи професійної підготовки майбутніх педагогів у контексті розглядуваного підходу, як: конкурентність ВНЗ, неперервність освіти, мобільність змісту освіти, стандартизованість оцінки якості підготовки спеціалістів. Такі само тенденції у своїй роботі визначають Л.Л. Товажнянський, О.С. Пономарьов і О.Г. Романовський, які визначають основною засадою сучасної професійної підготовки спеціалістів надання їм конкурентоспроможності на європейському ринку праці [22]. На нашу думку, даний підхід ґрунтується на необхідності постійного підвищення якості освіти, оновлення її змісту та форм організації навчально-виховного процесу, задекларованих у Національній доктрині розвитку освіти. Згідно з цим державним документом, модернізація системи освіти спрямована на забезпечення її якості відповідно до новітніх досягнень науки, культури і соціальної практики. При цьому якість освіти є національним пріоритетом і передумовою національної безпеки держави, додержання міжнародних норм і вимог законодавства України щодо реалізації права громадян на освіту. Крім того, даний підхід передбачає й підготовку професійних кадрів, здатних ефективно працювати на європейських рівнях. Відповідно до цього підходу Україні, як і іншим країнам – учасницям Болонського процесу, необхідно розробити заходи щодо гармонізації системи вищої освіти, а саме: використання системи кредитів для уніфікації обрахування об'ємів навчальної роботи; прийняття співставної системи ступенів вищої освіти, розвиток мобільності викладачів і студентів, тощо. Таким чином, професійна підготовка майбутніх учителів математики в межах представленого підходу визначається використанням вітчизняних і європейських надбань в контексті формування конкурентоспроможного спеціаліста.

Сутність *професіографічного підходу* до професійної підготовки майбутніх вчителів математики ми вбачаємо у впровадженні в зміст професійної освіти форм, методів і прийомів, здатних забезпечити формування особистості спеціаліста відповідно до професіограми. Як зауважує О.А. Макаренко, професіографічний підхід, порівняно з підготовкою фахівця на основі освітньо-кваліфікаційної характеристики, вміщує, крім спроектованих знань, умінь і навичок, ще й вимоги до властивостей особистості та професійно-важливих якостей фахівця [9]. Сутність даного підходу визначається укріпленням позицій професійного виховання перед професійним навчанням, в його снові лежить критерій результативності діяльності вчителя математики, що дає нам змогу стверджувати про тісний взаємозв'язок між професіографічним та компетентнісним підходом. Загалом, проблемою створення професіограм і кваліфікаційних характеристик як системи вимог до змісту підготовки майбутнього учителя певного профілю займаються В.О. Сластьонін, А.І. Щербаков, І.М. Богданова та інші. А.Є. Миколаєнко й І.Л. Погребний визначають психологічну професіографію як комплекс способів і технічних засобів, за допомогою яких визначають всі творчі чинники, що мають вплив на фахівця, окрім психічних. Такими чинниками можуть бути деякі фізіологічні, організаційні, соціальні, технічні, економічні та ін., що прямо або опосередковано впливають на трудову діяльність і продуктивність праці спеціаліста [20]. Отже, професіографічний підхід до підготовки майбутніх спеціалістів визначається підвищенням уваги до зростання частки професійного виховання конкретних якостей особистості фахівців.

Роль *ціннісного підходу* до професійної підготовки майбутніх педагогів представлена у роботах Т.В. Іванової. Вченою наголошується на необхідності переходу від абсолютизації цінності раціональних наукових знань до реалізації в освітній практиці гуманітарних і культурологічних цінностей. На думку дослідниці, зміст культурологічної педагогічної освіти вчителя-предметника передбачає розвиток у студента діалогічного мислення; здібностей до педагогічного цілепокладання; аналізу педагогічних ситуацій; проектування і конструювання освітньо-виховних процесів; організацію міжособистісної і групової взаємодії суб'єктів навчально-виховного процесу; формування системи знань про людину як суб'єкта життєдіяльності; глибоке розуміння змісту, структури освітніх процесів і технологій їх реалізації. І.А. Зязюн розуміє особистісну культуру як стан, результат і продуктивний процес засвоєння і створення соціальних цінностей [5]. На думку Л.А. Руденко, культуротворча функція освіти полягає у формуванні інтересу студентської молоді до широкої освіченості і високого естетико-культурного рівня особистості, що здатне компенсувати недостатність предметно-функціонального навчання [18]. Виховання як засіб формування педагогічних знань, умінь і навичок стали об'єктом наукових досліджень О.А. Дубасенюк та колективу авторів [3], Л.П. Пуховської та ін. Відповідно до розглянутого підходу знання та вміння майбутніх вчителів математики з цілі освітнього процесу у вищій школі переходять до засобів, в той час як метою виступає формування педагогічної культури. До цієї групи щодо визначення пріоритетів професійної освіти належить, на нашу думку, концепція багаторівневої системи професійної педагогічної освіти. Базовою ідеєю неперервної освіти виступає максимальна реалізація всіх індивідуальних здібностей особистості, надання усім учасникам навчально-виховного процесу рівних можливостей для розвитку. Проектуючи цю концепцію на систему підготовки майбутніх учителів математики при розробці державних стандартів освіти, необхідно враховувати необхідність оптимального поєднання дисциплін трьох блоків підготовки спеціаліста: загальнокультурного, психолого-педагогічного й спеціального. Без врахування цієї ідеї може скластися ситуація, коли навчальні програми загальнокультурних і спеціальних дисциплін будуть побудовані поза контекстом педагогічної діяльності, що не забезпечить педагогізацію усіх сторін підготовки майбутнього вчителя математики.

З точки зору *акмеологічного підходу* до професійної підготовки майбутніх фахівців визначальним виступає розвиток різних педагогічних систем та суб'єктів навчально-виховного процесу. Так, на думку

В.Н. Максимової, акмеологія освіти досліджує умови досягнення високої якості освітніх систем і розвитку суб'єктів освітнього процесу: викладачів і студентів. При цьому розвиток можна розуміти як набуття нової якості знань, умінь, навичок, властивостей, тощо. Значний внесок у розвиток педагогічної акмеології зробили дослідження Б.Г. Ананьєва, А.О. Бодальова, А.А. Реана, А.О. Деркача, Н.В. Кузьміної, А.П. Ситникової, В.Н. Максимової та інших відомих вітчизняних учених. З точки зору акмеологічного підходу вік дорослої людини як суб'єкта професійної діяльності відрізняється не меншим динамізмом, аніж періоди дитинства, підліткового та юнацького віку. З високим професіоналізмом людини, зазначає А.О. Бодальов, пов'язаний не тільки яскравий розвиток здібностей, але і глибокі та широкі знання в тій галузі діяльності, в якій цей професіоналізм виявляється, а також нестандартне володіння вміннями, необхідними для успішного виконання цієї діяльності. Дійсний професіоналізм неможливий водночас і без розвитку загальних здібностей людини, вироблення системи особистих цінностей, моральної вихованості, розвитку внутрішньої мотивації діяльності. Одним з головних завдань акмеології є дослідження технології оволодіння професією на високому рівні, формування "алгоритму поведінки", який призведе до виробки індивідуального стилю та високого професіоналізму. Загалом, сутність акмеологічного підходу в контексті досліджуваної проблеми визначається врахуванням внутрішніх та зовнішніх умов щодо розвитку професійного потенціалу майбутніх учителів математики; саме цей підхід дозволяє виділити критерії та рівні розвитку особистості майбутніх фахівців та окреслити етапи роботи по формуванню необхідних явищ, що дозволяє здійснювати професійну підготовку цілеспрямовано, з урахуванням психологічних закономірностей становлення особистості. При цьому акценти системи професійної освіти щодо набуття відповідних знань, умінь і навичок зміщуються на створення умов для розвитку мислення і здібностей особистості майбутнього педагога.

Окремим теоретичним підходом до визначення сутності професійної підготовки майбутніх педагогів можна вважати *технологічний підхід*, який синтезує у собі можливості алгоритмізації дидактики вищої школи з метою підвищення її ефективності. Відповідно до мети навчання, поставленими завданнями і використаними методами визначається структура дидактичного комплексу, який виступає як ключовий елемент і служить основою технології навчання. Крім алгоритмізації дидактичної діяльності, технологічний підхід дозволяє здійснювати дослідження структури педагогічної діяльності вчителя певного профілю, виділення притаманних кожному компоненту структури педагогічних знань, умінь і навичок, розробку форм і методів їх формування у процесі професійної підготовки. Результати таких досліджень у науковій літературі представлені у працях Б.Г. Ананьєва, О.Є. Антонової, І.А. Зязюна, Н.Г. Ничкало, С.О. Сисоєвої та інших.

Компетентнісний підхід у професійній педагогіці був предметом вивчення таких дослідників, як Н.Ф. Бориско і Н.Б. Ішханян, Н.В. Кузьміної та А.А. Реана, А.К. Маркової та інших. Компетентнісний підхід до освіти спрямований на формування професійної компетентності, під якою ми розуміємо інтегральну характеристику, що визначає здатність спеціаліста розв'язувати професійні завдання, які виникають в реальних ситуаціях професійної діяльності, з використанням знань, професійного і життєвого досвіду, цінностей та нахилів. Професійна компетентність є сукупністю ключових, базових і спеціальних компетентностей Компетентність розглядається як характеристика рівня професіоналізму особистості, що дозволяє визначати її як здатність розв'язувати професійні проблеми; професійна компетентність ґрунтується на знаннях, уміннях, навичках, досвіді та цінностях, отриманих особистим шляхом освіти та практичної діяльності. Таким чином, при застосуванні компетентнісного підходу до професійної підготовки майбутніх педагогів відбувається зміщення акценту до вимог сучасного працівника з формальних факторів його кваліфікації й освіти до соціальної цінності його особистісних якостей, здатності до саморозвитку особистості. При проектуванні представлених положень на сферу підготовки майбутніх учителів математики варто зауважити, що професійна компетентність зазначених педагогічних фахівців складатиметься з когнітивної, емоційної, мотиваційної та діяльнісної сфер.

Отже, провідним результатом виділення і теоретичного аналізу представлених підходів до розуміння професійної підготовки майбутніх учителів математики є визначення таких положень. Сучасна педагогічна наука при визначенні професійних вимог до майбутнього спеціаліста зосереджує свою увагу на особистісному розвитку суб'єкта професійної діяльності. Це підтверджується думкою В.А. Далінгер, згідно з якою освіта на сучасному етапі розвитку проголошує пріоритетами розвиток особистості, узагальнення її індивідуального досвіду, взаємодію її індивідуального і соціального досвіду в процесі розвитку та саморозкриття творчих можливостей особистості [2]. Ця ідея є об'єднуючою для всіх виділених теоретичних підходів і дає можливість обрати методологічною основою проблеми формування конструктивно-проектувальних умінь особистісно-орієнтований, діяльнісний, системний та вітагенний підходи, розкриті нами у площині формування конструктивно-проектувальної діяльності.

У багатогранній структурі загальної підготовки майбутнього учителя математики особлива роль відведена професійно-методичній підготовці, в якій особливе значення сьогодні набуває проектувальна діяльність; школа потребує вчителів, здатних самостійно здійснювати цей вид професійної діяльності.

У роботі Є.І. Смірнова проектування педагогічного процесу у системі професійної освіти майбутніх учителів математики побудовано на єдності чотирьох факторів: фундування, дидактичної системи, стійкості шкільних математичних знань, творчої активності студентів. Гармонізація інтересів суспільства та особистих інтересів і мотивів діяльності студентів вищих педагогічних навчальних закладів, на думку вченого, визначає такі цілі та завдання професійної підготовки учителя математики в організаційній структурі цілісного педагогічного процесу:

- ✓ забезпечити підготовку вчителя математики на високому предметному, педагогічному, гуманітарному та методичному рівні з широким спектром реалізації професійних можливостей для роботи в різнопрофільних школах за такими критеріями: а) базовий рівень навченості математичним дисциплінам (професійний рівень); б) академічний рівень навченості математичним дисциплінам (фундаментальний рівень); в) матеріалізація мотиваційної сфери навчання математики (пізнавальний інтерес); г) базовий рівень;
- ✓ сформувати у ході педагогічного процесу особистість учителя математики як соціально адаптовану професії педагога: а) адаптивні можливості (професійна самооцінка, рівень тривожності, тощо); б) комунікативні якості; в) педагогічна спрямованість особистості, мотиви, інтереси; г) рівень розвитку загальнонавчальних знань, умінь та навичок;
- ✓ сформувати творчу активність особистості майбутнього учителя математики: а) трансформація та перехід знаково-символічних систем: вербальної, графічної, символічної (когнітивна візуалізація знань, моделювання, процесуальна орієнтація, тощо); б) збір даних, висунення і перевірка гіпотез, рефлексія; в) антиципаційна діяльність (формалізація функціональної глобальної сутності математичних об'єктів, наочність наступності, наочно-графічні асоціації, наочне моделювання майбутньої професійної діяльності та ін.); г) серійність завдань навчального та навчально-дослідницького характеру з метою формування прийомів наукового мислення, як-от: аналіз, синтез, моделювання, тощо;
- ✓ забезпечити розвиток професійних особистісних якостей майбутнього учителя математики: а) математичне мислення; б) педагогічна майстерність; в) функціональні механізми психіки (сприймання, мислення, мовлення, пам'ять, психомоторика, самоаналіз); г) воля, характер, темперамент, здібності;
- ✓ створити психолого-педагогічні та технологічні умови для

диференціації навчання математицки [21].

Японський педагог Т.Кіучі запропонував модель учителя, основними ознаками і якостями якого є: здатність одночасно вчити і виховувати, міцні теоретичні педагогічні знання, висока культура і усвідомлення цінностей виховання, свобода і відповідальність, причетність до інтелектуальної еліти.

Оригінальна модель підготовки вчителя, побудована на основі формування цілісної особистості вчителя, запропонована російським вченим В.О.Сластьоніним [20]. Ця модель передбачає, що сучасний педагог повинен володіти основами економічних знань, уміннями організаційної і виховної роботи, комп'ютерною грамотністю, умінням використовувати інформаційні технології в професійній діяльності, високою культурою, добрим знанням іноземної мови, бути ініціативною і відповідальною людиною, мати потребу у постійному збагаченні і оновленні знань, бути здатним до інновацій.

Професійна підготовка майбутнього вчителя математики повинна відповідати принципам цілеспрямованості, системності, інноваційності і мати творчу спрямованість. При цьому результатом професійної підготовки майбутнього фахівця має стати оптимальна техніка проектування й конструювання навчального процесу шляхом формування у майбутнього вчителя математики знань, умінь і навичок.

Аналіз останніх наукових досліджень з питань теорії і методики професійної освіти дозволив нам виділити методологічний, психологічний, технологічний, дидактичний і виховний напрями розвитку педагогічної думки в галузі професійної освіти (таблиця 2).

Таким чином, розглянуто основні суперечності і проблеми професійної підготовки майбутніх учителів математики; виділено теоретичні підходи; розглянуто методологічний, психологічний, технологічний, дидактичний і виховний напрями розвитку педагогічної думки в галузі професійної освіти.

Таблиця 2.

Напрями розвитку педагогічної науки в галузі професійної освіти

№	Дослідники	Підхід	Сутність підходу
1.	В.В. Докучаєва, О.А. Дубасенюк, Б. Сітарська, М.М. Солдатенко та інші	Методологічний	Розробка теоретико-методологічних засад професійної підготовки майбутніх педагогів на основі законів діалектики та теоретичних закономірностей психологічного і педагогічного характеру
2.	І.А. Зязюн, С. Єлканов, М.І. Станкін, Г.В. Троцко, О.Я. Боданська, І.В. Кукуленко-Лук'янець та інші	Психологічний	Розвиток здібностей вчителя як суб'єкта професійної діяльності
3.	З.З. Фалинська, Ю.О. Костюшко, Л.П. Гусак та інші	Технологічний	Розробка і впровадження нових навчально-виховних технологій професійної підготовки майбутніх вчителів
4.	А.Ю. Джантіміров, Г.Р. Генсерук, Л.О. Петриченко, Т.Ю. Подобєдова, Г.Б. Шульга та інші	Дидактичний	Обґрунтування змісту, форм і методів професійного навчання майбутніх спеціалістів
5.	О.А. Дубасенюк, І.А. Зязюн, І.Д. Бех, Г.П. Васянович, В. Гриньова, Н.В. Кичук та інші	Виховний	Вивчення професійної виховної діяльності педагогів та впливу на її продуктивність основних психолого-педагогічних факторів

Існуюча на сьогодні практика професійної підготовки вчителя, на нашу думку, недостатньо орієнтована на формування системного бачення педагогічної діяльності, усвідомлену професійну мотивацію. У професійній підготовці педагогів почасти домінує спрямованість на результат, а не на взаємодію учасників освітнього процесу, відсутній якісний аналіз результатів діяльності майбутніх педагогів у процесі їх професійної підготовки.

Аналіз наукових теорій щодо сутності конструктивно-проектувальної діяльності майбутнього педагога дає змогу дійти певних *висновків*, а саме:

1. Конструктивно-проектувальна діяльність вчителя математики є компонентом його професійної діяльності як системного феномена і здійснюється в процесі викладання математики як навчального предмета та в позанавчальній діяльності щодо засвоєння математичних знань учнями. Різновидом педагогічного проектування вчителя математики є дидактичне проектування, об'єктом якого є дидактичні системи, процеси, навчально-педагогічні ситуації і явища (наприклад, процес засвоєння математичних знань під час вивчення курсу математики у загальноосвітній школі). Дидактичне проектування ми розглядаємо як сукупність певних дій вчителя математики, які дають змогу передбачити реальність організації процесу вивчення математики та спрогнозувати ідеальний результат цього процесу.

2. Конструктивно-проектувальна діяльність вчителя математики уможливлює задовго до актуальної участі учасників освітнього процесу спроектувати образ, динаміку і логіку взаємозв'язку всіх дидактично значущих елементів, що входять до процесу вивчення математики і засвоєння учнями математичних знань. Таким чином, конструктивно-проектувальну діяльність вчителя математики можна розглядати як особливий вид віртуальної реальності, яка може виникати лише внаслідок певних організованих дій педагога.

3. Професійна підготовка майбутнього вчителя математики до здійснення ним конструктивно-проектувальної діяльності повинна відповідати принципам цілеспрямованості, системності, інноваційності і мати творчу спрямованість.

При цьому результатом професійної підготовки вчителя до конструктивно-проектувальної діяльності має стати оптимальна техніка проектування й конструювання навчального процесу шляхом формування у майбутнього вчителя математики спеціальних знань, умінь і навичок конструктивно-проектувальної діяльності.

Конструктивно-проектувальна діяльність підлягає дії головних законів діалектики.

1. Закон єдності часткового і загального, сутності і форми. Так, конструювання і проектування як інструмент пізнання складно організованих систем, на відміну від їх вдосконалення ставить під сумнів сам характер даної системи, тобто при конструктивно-проектувальній діяльності майбутні педагоги переходять від часткового до загального розглядаючи всю тему (зміст курсу), а не окремі її частини. Відповідно і завданням конструктивно-проектувальної діяльності є оптимізація системи загалом, а не зростання ефективності її елементів.

2. Закон єдності загального, одиничного и особливого. При цьому окремий елемент конструктивно-проектувальної діяльності майбутнього вчителя математики може вважатися одиничним; проектувальна діяльність вчителя математики – особливий вид діяльності; професійна діяльність педагога загалом – загальним. Виходячи із взаємодії цих діалектичних елементів, зауважимо, що внесення змін у проектувальну та конструктивну діяльність майбутнього педагога та зміст підготовки до цієї діяльності впливає на загальний процес професійної підготовки майбутніх педагогів. Співвідношення і зміст окремих елементів проектів відіграють впливову роль у змісті професійної підготовки майбутнього педагога до конструктивно-проектувальної діяльності (як особливої категорії).

3. Закон переходу кількісних змін у якісні. Дія цієї діалектичної закономірності простежується у:

– накопиченні професійних знань майбутніх педагогів під час конструювання і виконання ними навчальних проектів, а також у результаті вивчення фахових дисциплін, які мають у своїй основі формування конструювально-проектувальних умінь, в результаті чого й формується професійна готовність майбутніх математиків до конструктивно-проектувальної діяльності;

– кількісному зростанні конструктивно-проектувальних умінь майбутніх педагогів у загальній системі професійних умінь, що призводить до формування комплексу професійних умінь майбутнього педагога і впливає на їх подальшу професійну самореалізацію як істотно новий якісний результат.

Конструктивно-проектувальна діяльність майбутнього вчителя математики може розглядатися в кількох площинах, і в цьому полягає й головна складність розгляду цього феномена, оскільки він різнорівневий і складно організований – і як процес, і як засіб, і як явище. Тому ми пропонуємо розглядати конструктивно-проектувальну діяльність:

1) як **засіб створення власного проекту професійної діяльності** вчителя математики (під час навчання у вищому навчальному закладі, та під час накопичення індивідуального професійного досвіду);

2) як **базову діяльність** у системі професійної діяльності майбутнього вчителя математики (поряд з організаційною, аналітичною, прогностичною тощо);

3) як інноваційний **метод навчання**, що має бути засвоєний майбутнім вчителем математики під час професійної підготовки і відтворений згодом у професійній діяльності;

4) як **засіб активізації пізнавальної активності учнів**, формування у них базових знань з математики під час навчання у загальноосвітній школі.

Крім того, що педагогічне проектування можна тлумачити як науково-теоретичний підхід до здійснення професійної діяльності, його можна представляти ще й як методологічний принцип, згідно з яким педагогічна діяльність здійснюється з урахуванням особистісного смислу педагогічної дії. Цей принцип дає змогу філософськи переосмислити раніше напрацьований педагогічний досвід і створити новий, нетрадиційний педагогічний продукт.

При цьому глибинні чинники педагогічного проектування знаходяться у площині розвитку творчих сил учнів. Проектування починається з визначення цінностей педагогічної дії. Він вимагає:

– самовизначення вчителя математики у цілях і цінностях проектування;

– вміння відстоювати власну точку зору;

– здатності висловлювати судження й умозаключення;

– вміння враховувати й приймати думку іншої людини, підкорюючи особистісні амбіції колективним інтересам;

– здатність рефлексувати над своїми власними результатами й результатами колективної праці.

У широкому, аксіологічному розумінні цього поняття, конструктивно-проектувальна діяльність майбутнього вчителя математики – це внесення ціннісного компонента у педагогічну діяльність, у пошук додаткових ресурсів для здійснення замислу навчальної діяльності.

Методологічне значення конструктивно-проектувальної діяльності полягає у тому, щоб проект обов´язково пройшов через ціннісносмислове значення пошуку невідомих умов його здійснення, пошук зовнішніх і внутрішніх латентних можливостей. Проект одразу орієнтує на інновацію, експеримент, прогнозування. У межах проектної діяльності можлива фактична незалежність результату від початкових ресурсів, наприклад, навчальних.

Конструктивно-проектувальна діяльність учителя математики включає в себе прогностичне бачення шляхів вирішення навчально-педагогічних проблем; вміщує комплекс пріоритетів, цілей, методів і завдань педагогічної діяльності. Це своєрідна *технологія педагогічної миследіяльності,* що передбачає пошук однодумців (учнів, студентів) у розумінні навчальної проблеми, обговорення сутності завдання (можливо, в дискусійній формі), обмін міркуваннями і замислами, пошук факторів, що мають бути усунені для ефективного вирішення проблеми, конструювання передбачуваних результатів і оцінка ресурсних можливостей суб´єктів освітнього процесу.

Педагогічне проектування – складне самостійне явище, що з´явилося на основі швидкого розвитку методології педагогічної науки у 60-70-х рр. ХХ століття (Г.П. Щедровицький, В.І. Гінецинський, К.М. Кантор). Проектувальну діяльність можна представити як:

– структурні й процесуальні характеристики діяльності, спрямованої на вирішення різноманітних проблем у педагогічному процесі, в тому числі й проблем викладання окремих навчальних дисциплін;

– як продуктивну діяльність, результатом якої є проект і програма його реалізації в практиці навчання.

Г.П. Щедровицький, аналізуючи проблему проектування, зазначає: «Узагальнюючи досвід використання гасової лампи, не можна перейти до електрики. І навпаки, щоб отримати електричну лампочку, потрібно попередньо вивчити природу й закони електричних і електромагнітних явищ… Суть питання в одному: чи будемо ми будувати наше виховання й навчання, як і раніше, на засадах здорового глузду і так званого узагальнення передового педагогічного досвіду, не розгортаючи наукових досліджень, а чи будемо розвивати педагогічну науку й проектування». А. Тупіцин виділяє головні чинники розвитку конструювання і проектування в педагогічній науці, а саме:

– поширення у 80-х рр. ХХ століття руху педагогів-новаторів, завдяки яким з´явилася ідея співробітництва в педагогічній діяльності, оскільки багато в чому проектувальна діяльність є результатом рефлексії й інноваційної діяльності творчих педагогів;

– діяльність наукових колективів щодо розвитку методології педагогічної науки (В.І. Слободчиков, Н.Г. Алексєєв, П.Г. Щедровицький та ін.);

– активний розвиток проектувальних технологій у різних галузях промисловості, що підштовхнули гуманітарні науки до розробки проблеми проектувальної діяльності в освітній сфері.

Теоретичні засади конструктивно-проектувальної діяльності дають змогу визначати кілька основних моделей проектування з боку вчителя:

1) прогностичну модель, яка дає змогу оптимально розподіляти ресурси й конкретизувати цілі (в нашому випадку – цілі вивчення математики й

засвоєння математичних знань учнями);

2) інструментальну модель, за допомогою якої є можливість професійно підготувати майбутніх учителів математики до використання педагогічного інструментарію конструктивно-проектувальної діяльності у практичній професійній діяльності в умовах загальноосвітньої школи;

3) моніторингову модель, яка використовується для створення механізму зворотного зв´язку і коректування можливих відхилень в ході реалізації конструктивно-проектувальної діяльності вчителем математики безпосередньо у процесі вивчення математики;

4) рефлексивну модель, за допомогою якої здійснюється вироблення рішень у випадку виникнення несподіваних і непередбачуваних навчальних і виховних ситуацій у діяльності вчителя математики.

Співвідношення основних моделей конструктивно-проектувальної діяльності вчителя математики і проблеми професійної підготовки майбутнього вчителя математики ми узагальнили у таблиці 2.

На думку В.С. Безрукової, проектувальна і конструювальна діяльність вчителя пов´язані між собою через феномен моделювання, який науковець вважає першим у низці етапів педагогічного проектування. Таким чином, на думку вченої, конструктивно-проектувальна діяльність вчителя повинна мати ще один, попередній крок – моделювання процесу вивчення математики.

А.М. Новіков саме проектування вважає найзагальнішим процесом серед інших педагогічних процесів (моделювання, конструювання, аналізу, рефлексії тощо), тому вводить в процес педагогічного проектування такі стадії:

1. Концептуальну, яка складається з таких кроків: виявлення суперечності; формулювання проблеми; визначення проблематики; визначення мети; вибір критеріїв.

2. Стадію моделювання, яка складається з: побудови моделі; оптимізації моделі; вибору оптимальної моделі (прийняття рішення).

Таблиця 2.

Взаємозв'язок основних моделей конструктивно-проектувальної діяльності вчителя математики та проблеми професійної підготовки вчителя

Модель конструктивно-проектувальної діяльності	Специфіка окреслення проблеми професійної підготовки вчителя математики до здійснення конструктивно-проектувальної діяльності
Прогностична	У межах цієї моделі є можливість окреслення і корекції цілей професійної підготовки вчителя математики до професійної діяльності, в тому числі до здійснення конструктивно-проектувальної діяльності
Інструментальна	Дає можливість використати метод проектів як один з методів навчання у вищому педагогічному навчальному закладі; окреслює можливість набуття професійних знань, умінь і навичок конструктивно-проектувальної діяльності вчителя математики
Моніторингова	Визначає можливості і шляхи корекції рівня знань, умінь і навичок конструктивно-проектувальної діяльності вчителя математики в безпосередній практичній діяльності та під час навчання у вищому навчальному закладі
Рефлексивна	Дає змогу оцінити результати застосування методу проектів та рівень засвоєння знань, умінь і навичок конструктивно-проектувальної діяльності майбутніх вчителів математики

3. Стадію конструювання, а саме: декомпозиції (розділення загальної цілі проектування на окремі підцілі-завдання відповідно до обраної моделі); агрегування (поєднання розрізнених цілей в одну загальну, тобто процес узгодження окремих завдань проекту між собою); дослідження умов реалізації; побудови програми проектування.

4. Технологічну стадію, тобто власне реалізацію проекту.

Виходячи з класичної концепції проектування Дж. Джонса, процес педагогічного проектування можна представити у єдності трьох фаз, які можуть стати самостійними моделями конструктивно-проектувальної діяльності вчителя:

1) **дивергенції**, тобто розширення меж проектної ситуації з метою забезпечення більш широкого простору для пошуку рішення (наприклад, застосування додаткових форм і методів засвоєння математичних знань в межах певних тем курсу математики в загальноосвітній школі);

2) **трансформації** – створення принципів і концепцій проектувальної діяльності вчителя;

3) **конвергенції – вибору** оптимального варіанту вирішення навчальної проблеми з множини альтернатив.

Вчитель математики бере участь у конструктивно-проектувальній діяльності трьох основних видів:

– конструюванні й проектуванні педагогічних **систем** (в нашому випадку – системи власної професійної діяльності);

– конструюванні й проектуванні навчальних і виховних **процесів** (процесу засвоєння математичних знань, наприклад);

– проектуванні навчальних **ситуацій** (ситуації вирішення окремої математичної задачі, засвоєння окремої теми з курсу математики середньої школи тощо).

Конструктивно-проектувальна діяльність учителя математики характеризується такими головними характеристиками:

1) наявністю суб´єкт-суб´єктної взаємодії учнів і педагога на всіх етапах створення й реалізації проекту;

2) поетапною практичною діяльністю щодо досягнення мети проектувальної діяльності;

3) можливістю передбачення результату проектувальної діяльності з боку як педагога, так і учня; планування покрокового втілення проектувальної діяльності, створити ситуацію успіху у досягненні мети проекту;

4) наданням учасникам конструктивно-проектувальної діяльності можливості реалізувати різні види діяльності;

5) наявністю конкретного практичного результату у вигляді вирішеного навчального завдання, засвоєної навчальної теми, досягненого рівня засвоєння математичних знань.

Головними **принципами** здійснення конструктивно-проектувальної діяльності вчителя вважаємо такі: принцип гуманізму, що відображає пріоритетність людського, особистісного; принцип саморозвитку, реалізація якого полягає в динамічному й гнучкому конструюванні й проектуванні педагогічних процесів; принцип прогностичності й діагностування.

Професійна підготовка майбутнього вчителя математики до здійснення конструктивно-проектувальної діяльності передбачає:

1. Розподіл всього процесу професійної підготовки вчителя математики на окремі етапи і спрямованість кожного з них на формування мотиваційного, когнітивного, операційного, емоційно-ціннісного й інформаційного компонентів.

2. Виявлення організаційно-педагогічних умов активізації навчально-пізнавальної діяльності майбутніх учителів математики відповідно до цілей і специфіки кожного етапу конструктивно-проектувальної діяльності.

3. Визначення комплексу навчально-методичного забезпечення й програмно-технічного оснащення процесу професійної підготовки вчителя математики до здійснення конструктивно-проектувальної діяльності.

Виходячи з наведених вище умов здійснення процесу формування у майбутніх вчителів математики готовності до здійснення конструктивно-проектувальної діяльності, він може відбуватися протягом таких **етапів**:

1) ***діагностико-інформаційного,*** у межах якого здійснюється діагностичне обстеження рівня сформованості конструктивно-проектувальних умінь майбутніх вчителів математики; накопичуються необхідні знання про конструктивну й проектувальну діяльність учителя математики;

2) ***аналітичного***, який має на меті подальшу систематизацію теоретичного матеріалу студентами; знайомство зі зразками проектувальної і конструктивної діяльності під час педагогічних практик; аналіз результатів проектування й конструювання навчального процесу, що здійснюється педагогами зі стажем викладання математики; вивчення різноманітних педагогічних об’єктів, явищ, процесів з позиції конструктивно-проектувальної діяльності;

3) ***відносно творчого,*** у межах якого відбувається закріплення базових знань, умінь і навичок конструктивно-проектувальної діяльності майбутнього вчителя математики у формі розробки пробних конструктивно-проектувальних моделей педагогічних явищ, ситуацій, процесів тощо;

4) ***етапу створення власних проектів,*** метою якого є інноваційно-творча діяльність майбутнього вчителя математики щодо створення й часткової апробації власної конструктивно-проектувальної діяльності під час педагогічних практик на старших курсах навчання у ВНЗ.

У працях О.А. Дубасенюк, Н.В. Кузьміної, С.О. Сисоєвої, В.О. Сластьоніна, А.І. Щербакова та ін. детально обгрунтовано структуру професійної педагогічної діяльності вчителя (в навчальному і виховному контексті). У роботах цих учених виділяються такі види професійної діяльності вчителя: діагностична; орієнтаційно-прогностична; **конструктивно-проектувальна;** організаторська; інформаційно-пояснювальна; комунікативно-стимулювальна; аналітико-оцінна; дослідницько-творча. При цьому конструктивно-проектувальна діяльність виражається в умінні вчителя математики «матеріалізувати» результати педагогічного прогнозування в конкретних планах вивчення курсу математики в загальноосвітній школі. Розробка проекту педагогічної діяльності вчителя означає, насамперед, формулювання цілей навчання математики в категоріях і поняттях педагогіки; конкретизацію і обгрунтування способів їх поетапної реалізації.

Як свідчить аналіз взаємозв’язку конструктивно-проектувальної діяльності з іншими видами професійної діяльності педагога, найбільш тісний зв’язок ми спостерігаємо з організаторською, аналітико-оцінною та комунікативно-стимулюючою видами діяльності вчителя, що пов’язано зі специфікою застосування конструювання і проектування як виду професійної діяльності і як методу навчальної діяльності вчителя математики в ході засвоєння математичних знань учнями.

Останнє зауваження спонукає до чіткого розмежування проблеми конструктивно-проектувальної діяльності на аспекти, а саме:

1) конструктивно-проектувальна діяльність є видом професійно-педагогічної діяльності і полягає в умінні вчителя математики: визначати цілі й завдання вивчення курсу математики з урахуванням вікових та індивідуальних особливостей учнів; моделювати й деталізувати зміст, форми й методи здійснення навчального процесу;

2) конструкт і проект можуть виступати самостійними формами (і результатами) навчальної діяльності вчителя математики; здійснення учнями проектів спонукає їх до вияву пізнавальної активності; таким чином, конструктивно-проектувальна діяльність учителя математики може стати початком і спонукальним чинником проектувальної діяльності учнів як елементу дослідницької діяльності на уроці та в позанавчальній діяльності;

3) педагогічне конструювання і проектування може стати самостійною методологією професійно-педагогічної діяльності, оскільки відображається на досягненні вчителем вершин професійного становлення й професійного успіху (акме).

Отже, одним з пріоритетних напрямків розвитку системи професійної освіти є зростання її якісних показників, що є можливим на основі активізації процесів проектування у вказаній галузі, інтеграції освітньої, наукової і практично-педагогічної діяльності. Дослідження у царині педагогіки супроводжуються інтенсивним входженням методології проектування в педагогічну галузь – її науку і практичну педагогічну діяльність – і це сприяє зміні цілей, змісту і технологій педагогічної освіти, що ґрунтується на проектуванні як діяльнісному інструменті кожного педагога. Уміння здійснювати конструктивно-проектувальну діяльність стає нині важливим критерієм професіоналізму вчителя. Навчання математики як вид педагогічного проекту вчителя математики може мати вигляд перспективного й оперативного конструювання і планування.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гончаренко С.У. Український педагогічний словник / С.У. Гончаренко. – К. : Либідь, 1997. – 376 с., с.188.
2. Далингер В.А. Приоритетное направление исследования педагогики высшей

школы – подготовка современного учителя математики [Электронный ресурс] / В.А. Далингер // Научный журнал "Современные наукоемкие технологии". – 2007 год. – №11. – (Российская Академия Естествознания). — Режим доступа к ресурсу : www.rae.ru.
3. Дубасенюк О.А. Професійна підготовка майбутнього вчителя до педагогічної діяльності: [монографія] / О.А. Дубасенюк, Т.В. Семенюк, О.Є. Антонова. – Житомир : Житомирський держ. пед. ун-т, 2003. – 192 с.
4. Закон України „Про освіту”. – К. : Генеза, 1996. – 36 с.
5. Зязюн І.А. Інтелектуально-творчий розвиток особистості в умовах неперервної освіти. Неперервна професійна освіта: Проблеми, пошуки, перспективи : [монографія] / І.А. Зязюн. – К. : Вид-во „Віпол”, 2000. – 636 с.
6. Концептуальні засади розвитку педагогічної освіти України та її інтеграції в європейський освітній простір [Електронний ресурс] // Основні засади розвитку вищої освіти України в контексті Болонського процесу. – Тернопіль : Вид-во ТНПУ ім. В. Гнатюка, 2005. – Частина 3. – С. 14 -19. – Режим доступу до ресурсу: www.tnpu.edu.ua/php1/include/resurs/kms/14/ukrainian.pd.
7. Концепція розвитку професійно-технічної (професійної) освіти в Україні // Професійно-технічна освіта : науково-методичний журнал. – 2004. – №3. – С. 2 - 5.
8. Короткий тлумачний словник української мови / [Д.Г. Гринчишин, Л.Л. Гумецька, В.Л. Карпова та інші] ; відп. ред. Л.Л. Гумецька. – К. : Рад. школа, 1978. – 296 с.
9. Макаренко О.А. Професіографічний підхід до підготовки майбутніх інженерів-педагогів до виховної діяльності // Теоретичні та методичні засади розвитку педагогічної освіти: педагогічна майстерність, творчість, технології: Зб. наук. праць / за заг. ред. Н.Г. Ничкало. – Харків: НТУ «ХПІ», 2007. – 644 с. – С. 305-308.
10. Максимова В.Н. Акмеология: новое качество образования: [книга для педагога] / В. Н. Максимова. – СПб. : Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена, 2002. – 99 с.
11. Національна доктрина розвитку освіти України у XXI столітті: затверджено указом Президента України від 17 квітня 2002 р. № 347 // Освіта. – 2002. – 24 квітня-1 травня.
12. Ничкало Н.Г. Неперервна професійна освіта: [монографія] / Н.Г. Ничкало ; за ред. І.А. Зязюна // Неперервна професійна освіта: проблеми, помилки, перспективи. – К.: Видавництво „Віпол”, 2000. – 636 с.
13. Носаченко І.М. Підвищення якості професійної освіти в Україні в контексті Булонської декларації / І.М. Носаченко // Теоретичні та методичні засади розвитку педагогічної освіти: педагогічна майстерність, творчість, технології : зб. наук. праць / за заг. ред. Н.Г. Ничкало. – Харків : НТУ «ХПІ», 2007. – С. 516-519.
14. Ожегов С.И. Словарь русского язика / С. И. Ожегов. – М. : Государственное издательство иностранных и национальных словарей, 1960. – 900 с.
15. Пальчук М.І. Підготовка педагогічного персоналу в умовах європейської інтеграції / М. І. Пальчук // Теоретичні та методичні засади розвитку педагогічної освіти: педагогічна майстерність, творчість, технології : зб. наук. праць / за заг. ред. Н. Г. Ничкало. – Харків : НТУ «ХПІ», 2007. – С. 275-279.
16. Педагогический энциклопедический словарь / [Безруких М.М., Болотов В.А. и др.] ; гл. ред. Б.М. Бид-Бад. – М. :Большая Российская энциклопедия, 2003. – 528 с., с.312.
17. Рибак С.М. Міжпредметні зв’язки природничо-математичних і спеціальних дисциплін у підготовці вчителя фізики : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд.

пед. наук : спец. 13.00.04 «Теорія і методика професійної освіти» / С.М. Рибак. – Вінниця : Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, 2006. – 19 с.
18. Руденко Л.А. Психолого-педагогічні передумови формування особистісної культури / Л.А. Руденко // Теоретичні та методичні засади розвитку педагогічної освіти: педагогічна майстерність, творчість, технології : зб. наук. праць / за заг. ред. Н.Г. Ничкало. – Харків : НТУ «ХПІ», 2007. – С. 392-395.
19. Семиченко В.А. Психологія педагогічної діяльності: [навчальний посібник для студентів вищих педагогічних навчальних закладів] / В.А. Семиченко. – К. : Вища школа, 2004. — 335 с.
20. Сластенин В.О. Профессионально-педагогическая подготовка современного учителя / В. О. Сластенин // Педагогика. – 1991. – № 16. – С. 79-84.
21. Смирнов Е.И. Современные проблемы профессионализации предметной подготовки учителя в XXI веке [Электронный ресурс] / Е.И. Смирнов. – Режим доступа к ресурсу : smirn@gw.yspu.yar.ru
22. Товажнянський Л.Л. Якість освіти і професійна культура: європейські орієнтири / Л.Л. Товажнянський, О.С. Пономарьов, О.Г. Романовський // Педагогічна і психологічна науки в Україні. – К. : «Педагогічна думка», 2007. – Т.5. – С. 58-67.
23. Фольварочний І.В. Конкурентне середовище на ринку освітніх послуг / І.В. Фольварочний // Теоретичні та методичні засади розвитку педагогічної освіти: педагогічна майстерність, творчість, технології : зб. наук. праць / за заг. ред. Н.Г. Ничкало. – Харків : НТУ «ХПІ», 2007. – С. 139-142.
24. Фонарюк О.В. Конструктивно-проектировочные умения будущего учителя математики в системе его профессиональных умений / О.В. Фонарюк // Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology. – Budapest, 2014. – II (15). – С. 87-91.
25. Хилл П. Наука и искусство проектирования: Методы проектирования, научное обоснование решений / П. Хилл. – М. : Мир, 1973. – 263 с.

Фонарюк Олена Василівна – старший викладач, кандидат педагогічних наук.

Наукові інтереси: підготовка майбутніх учителів математики до конструктивно-проектувальної діяльності.

Дисципліни, які викладає: алгебра та геометрія, лінійна алгебра та аналітична геометрія, вища та прикладна математика, проективна геометрі888я та методи зображень, математика.

Чемерис О. А.

кандидат педагогічних наук, доцент

МЕТОДИЧНІ АСПЕКТИ У ВИКЛАДАННІ ДИСЦИПЛІН ГЕОМЕТРИЧНОГО ЦИКЛУ ДЛЯ СТУДЕНТІВ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНОГО ФАКУЛЬТЕТУ

Сучасне суспільство має потребу у високоосвічених і мотивованих фахівцях, здатних виконувати відповідні функції в державних і приватних організаціях, тому роботодавці зацікавлені в забезпеченні високої якості підготовки майбутніх фахівців.

Підготовка майбутніх учителів – поняття широкоаспектне, воно включає в себе фундаментальну, психолого-педагогічну, методичну, інформаційно-технологічну, практичну та соціально-гуманітарну підготовки. Зміст фундаментальної підготовки передбачає вивчення теоретичних основ спеціальності згідно з вимогами до рівня теоретичної підготовки педагогічного працівника відповідного профілю у класичних університетах і базується на новітніх досягненнях науки.

Професійна підготовка визначається як процес формування спеціаліста для однієї з галузей трудової діяльності, який пов'язаний з оволодінням певним родом занять, професією [1, с. 549]. У сучасній психолого-педагогічній літературі існує декілька підходів до визначення сутності професійної підготовки. Психологи розглядають її як засіб приросту індивідуального потенціалу особистості, розвитку резервних сил, пізнавальної й творчої активності на основі оволодіння загальнонауковими та професійно значущими знаннями, вміннями й навичками. Представники педагогічної науки вбачають сутність такої підготовки у набутті людиною професійної освіти, що є результатом засвоєння інтелектуалізованих знань, умінь та формування необхідних особистісних професійних якостей. Всебічний аналіз професійної підготовки проведений у працях В.А. Семиченко. Вона розглядає її в трьох аспектах: як процес, в ході якого відбувається професійне становлення майбутніх спеціалістів; як мету і результат діяльності вищого навчального закладу; як сенс включення студента у навчально-виховну діяльність [2].

Професійна підготовка для різних освітньо-кваліфікаційних рівнів визначається галузевими стандартами вищої педагогічної освіти та стандартами вищої освіти вищого навчального закладу. Як показав аналіз спеціальної літератури, професійна підготовка в технічному вищому навчальному закладі поділяється на три головні напрями: фундаментальна, гуманітарна, професійно-практична [3]. Професійно-педагогічна підготовка, що здійснюється в педагогічних навчальних закладах, складається з фундаментальної, психолого-педагогічної, методичної, інформаційно-технологічної, практичної й соціально-гуманітарної [4].

Оскільки предметом нашого дослідження є фундаментальна підготовка, розкриємо зміст даної категорії більш детально.

Назва *фундаментальна* походить від іменника *фундамент* (з лат. *fundamentum* – основа) – головне, істотне, що лежить в основі чого-небудь, на чому ґрунтується, базується щось [5, с. 511].

На сучасному етапі розвитку системи освіти йде пошук шляхів забезпечення якості фундаментальної освіти, яку академік В.А. Садовнічий розглядає як таку, що дає можливість людині в подальшому самостійно працювати, навчатися та переучуватися. Саме людина знає закони природи, закони розвитку суспільства, вміє логічно міркувати, аналізувати та пов'язувати факти, приймати рішення, вивчати явища з наукової точки зору. Таку освіту забезпечують фундаментальні науки [6, с. 7].

В Українській радянській енциклопедії (1985) читаємо, що всі науки можна поділити на *фундаментальні* та прикладні. Функція фундаментальних наук полягає в пізнанні законів реальної дійсності в "чистому вигляді", безвідносно до їх можливого практичного застосування (саме тому ці науки називають "чистими"). Фундаментальні науки покликані пояснювати навколишній світ, а прикладні, спираючись на їх досягнення, – перетворювати, змінювати його [7, с. 73]. У фундаментальних науках пошук законів здійснюється шляхом створення інваріантних, ідеалізованих моделей, які перевіряються на практиці спеціалістами, що проектують та реалізують їх у власній діяльності [8, с. 13].

Як зазначають В. Бабак, Е. Лузік, фундаментальна підготовка є загальнонауковою основою формування особистості, спрямованої на відтворення інтелектуального потенціалу суспільства, його системи цінностей, традицій і забезпечення внутрішнього зв'язку часу від покоління до покоління [9, с. 79].

Фундаментальна підготовка передбачає вивчення теоретичних основ спеціальності згідно з вимогами до рівня теоретичної підготовки педагогічного працівника відповідного профілю у класичних університетах і базується на новітніх досягненнях науки [4].

Головним завданням фундаментальної підготовки є вивчення законів природи й сучасне обґрунтування можливостей їх практичного використання, що й визначає її функціональний напрям. Тоді відповідно до характеру свого предмета в ході фундаментальної підготовки в процесі навчання реалізуються дві цілі:

- визначення сутності явищ природи й пізнання їх законів (тактична мета);
- обґрунтування можливості на практиці використовувати пізнані закони (стратегічна мета).

Сформульовані цілі та завдання вказують на місце фундаментальної підготовки в системі університетської освіти – об'єднання фундаментальності, ступеневості пізнання і його професійної спрямованості. Оновлений зміст фундаментальної підготовки має містити проблемно орієнтовані курси, реалізація яких потребує від студентів та викладачів міждисциплінарного синтезу й об'ємного поліпредметного системного бачення [9, с. 80].

У цілому вивчення дисциплін, що є складовими фундаментальної підготовки майбутніх учителів математики, спрямоване на формування загальної математичної культури, необхідної майбутньому вчителеві математики, оволодіння комплексом математичних методів та розвиток навичок застосування їх на практиці, розгортання теоретичних основ для прикладних наукових досліджень, забезпечення зв'язку з методичною підготовкою.

Аналіз наукових джерел, навчальних планів, програм ряду вищих педагогічних навчальних закладів дав можливість визначити особливості фундаментальної підготовки майбутніх фахівців, у томі числі й учителів. Протягом останніх десятиріч мали місце такі своєрідності:

- зміна кількості годин від значного збільшення до значного зменшення на користь введених спецкурсів;
- перерозподіл годин між окремими дисциплінами;
- введення нових дисциплін шляхом від'єднання окремих розділів від традиційно існуючих дисциплін тощо [10].

Як зазначає М. Корець, якість фундаментальної підготовки визначається не обсягом спеціальної навчальної дисципліни (кількість годин, що відводиться), а відбором структурованого навчального матеріалу, достатнього для послідовного опанування основними її положеннями як наукової системи, та вибором оптимальних шляхів реалізації навчального процесу [11, с. 50].

На думку Н.В. Кузьміної, якість освіти в цілому, й фундаментальної підготовки зокрема, залежить від компетентності, умілості, майстерності спеціалістів освіти. Їх підготовку здійснюють викладачі класичних університетів (для всіх типів та рівнів професійних і загальноосвітніх навчальних закладів); педагогічних університетів – учителів, вихователів, викладачів для загальноосвітніх шкіл, професійних коледжів, додаткової освіти тощо [8, с. 37].

Із зазначеного вище робимо попередній висновок, що якість фундаментальної підготовки залежить від оптимального підбору змісту, від шляхів реалізації навчальних дисциплін (технології, методичної системи тощо), від компетентності фахівців вищих навчальних закладів, від її гуманістичної спрямованості.

Таким чином, *якість фундаментальної підготовки майбутнього вчителя математики* будемо розглядати як глибоке засвоєння спеціально відібраного, структурованого теоретичного матеріалу з основ спеціальності у ході спеціально організованого, гуманістично спрямованого навчального процесу й набуття таких умінь та навичок, яке створює передумови для їх реалізації за будь-яких обставин та в будь-який час, формування необхідних особистісних професійних якостей учителя математики.

Професор О.Г. Величко, підсумовуючи вище наведені фактори впливу на якість підготовки майбутніх фахівців, а отже й учителів, наводить наступні рекомендації для викладачів:

- прийняття студентів як рівноправних партнерів та забезпечення студентам відповідного середовища;
- прищеплення студентам почуття відповідальності та їх значущості;
- створення студентам середовища, де вони змогли б виявити свої сильні сторони й нейтралізувати слабкі;
- надання допомоги студентам у навчанні завдяки командній роботі;
- залучення студентів і викладачів до процесу прийняття рішень, що мають відношення до них самих;
- надання студентам можливості поділитися своїм ентузіазмом, мріями з викладачами, адміністрацією [12, с. 221].

Пошук певних груп факторів дозволить вдосконалити систему, форми й методи організації навчального процесу майбутніх фахівців і дозволить реалізувати певну технологію, націлену на забезпечення якості освітнього процесу.

В останні роки підходи до проблеми "якість освіти" надмірно концентруються навколо стандартів (облікова кваліфікаційна картка, облікова кваліфікаційна характеристика тощо) для всіх спеціальностей підготовки фахівців у вищих навчальних закладах та перевіркою їх виконання центральними інституціями. В Україні практично не враховують широкі можливості самих колективів вищих навчальних закладів і громадськості. Практично відсутня незалежна відкритість навчальних закладів, усвідомлення необхідності звітуватися і відповідати не лише перед Міністерством освіти і науки України, а й перед тими групами населення, які найбільше зацікавлені в якості навчально-виховного процесу і високій компетентності випускників університетів, – роботодавцями, батьками студентів тощо [13, с. 45].

Наведемо приклади компетентностей випускника фізико-математичного факультету Житомирського державного університету імені Івана Франка для спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика) (див. табл. 1) за розробленою освітньо-професійною програмою для першого рівня вищої освіти [14].

Таблиця 1

Перелік компентентностей випускника спеціальності

014.04 Середня освіта (Математика)

Інтегральна компетентність	**ІК.** Здатність розв’язувати складні спеціалізовані задачі та практичні проблеми у сфері професійної діяльності або у процесі навчання, що передбачає застосування певних теорій та методів математичної науки і характеризується комплексністю та невизначеністю педагогічних умов організації навчально-виховного процесу в основній (базовій) середній школі.
Загальні компетентності	**ЗК 1.** Здатність до пошуку інформації, її аналізу та критичного оцінювання. **ЗК 2.** Здатність застосовувати набуті знання в практичних ситуаціях. **ЗК 3.** Здатність до самовдосконалення та саморозвитку. **ЗК 4.** Здатність діяти етично, соціально відповідально та свідомо. **ЗК 5.** Здатність використовувати інформаційно-комунікаційні технології. **ЗК 6.** Здатність до адаптації та дії в новій ситуації на основі креативності. **ЗК 7.** Здатність вільно спілкуватися державною мовою (усно та письмово). **ЗК 8.** Здатність розв’язувати поставлені професійні завдання в колективі, під керівництвом лідера. **ЗК 9.** Здатність використовувати знання іноземної мови в освітній діяльності.
Спеціальні (фахові, предметні) компетентності	**ПК 1.** Здатність використовувати математичні інструменти для розв’язування прикладних задач. **ПК 2.** Здатність формулювати наукову проблему, аналізувати її та синтезувати рішення.

Продовження табл. 1

	ПК 3. Здатність до аналізу, співставлення, порівняння педагогічних явищ, формування сучасного педагогічного мислення**.** **ПК 4.** Здатність до здійснення цілеспрямованої діяльності з проектування та організації педагогічного процесу, окремих його складових відповідно до цілей, задач середньої освіти та розробки нормативної, організаційної й навчально-методичної документації **ПК 5.** Здатність розробляти методичні та дидактичні матеріали, що використовуються учнями в навчальному процесі. **ПК 6.** Здатність володіти методикою аналізу навчально-виховної діяльності у ЗОШ, проведення педагогічної діагностики та моніторингу якості освіти. **ПК 7.** Здатність визначати рівень особистісного і професійного розвитку; планувати та здійснювати власне наукове дослідження, присвячене суттєвій проблемі навчання математики у середній школі. **ПК 8.** Здатність представляти результати досліджень у вигляді звітів і публікацій державною та однією з іноземних мов. **ПК 9.** Здатність використовувати теоретичні знання та практичні навички застосування комунікативних технологій, ораторського мистецтва та риторичної комунікації для здійснення ділових комунікацій у професійній сфері. **ПК 10.** Здатність створювати належний психологічний клімат в класі; виявляти шляхи оптимізації управління навчально-виховним процесом та створювати умови для їх реалізації. **ПК 11.** Здійснювати педагогічний супровід процесів соціалізації та професійного самовизначення учнів, підготовки їх до свідомого вибору життєвого шляху.

В останнє десятиріччя значно збільшилася кількість досліджень щодо проблеми педагогічної підготовки майбутнього вчителя, який досконало володіє професійними знаннями, вміннями та навичками, виробляє свій індивідуальний стиль роботи, моделює свою майбутню діяльність, тобто проблема забезпечення якості освіти набула конкретної спрямованості, а саме, виділилась проблема забезпечення якості підготовки майбутніх учителів [15].

Однак рівень фундаментальної підготовки майбутніх учителів не відповідає вимогам європейських стандартів. Особливо це стосується майбутніх учителів математики, оскільки система знань, умінь та навичок, якою оволодівають студенти фізико-математичного факультету, реалізується на високому рівні складності. Останнє зумовлює потребу узагальнення досвіду фундаментальної підготовки майбутніх учителів математики та вимагає оновлення її теоретико-методологічних засад.

Вивчення питання забезпечення компетентної фундаментальної підготовки майбутніх учителів математики представлене такими аспектами: професійна підготовка майбутніх учителів математики (Н.А. Барило, К.В. Нєдялкова, Н.І. Одарченко, О.В. Семеніхіна, Б.К. Юдрупа); організація навчальної діяльності студентів фізико-математичного факультету (Н.А. Барило, Т.В. Васильєва, В.Ф. Єфімов, Н.І. Одарченко, О.В. Семеніхіна, Л.В. Ушанкіна, Б.К. Юдрупа, Т.В. Ящун); виділення чинників, що впливають на ефективість навчання майбутніх учителів математики (Т.Г. Величко, М.І. Мєшков, К.В. Нєдялкова, І.П. Підласий, І.Ю. Потай, М.П. Хоменко).

Фундаментальна підготовка майбутнього вчителя математики передбачає вивчення теоретичних основ спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика) згідно з вимогами до рівня теоретичної підготовки педагогічного працівника відповідного профілю вищих педагогічних навчальних закладів та класичних університетів і базується на новітніх досягненнях науки. Для майбутнього вчителя математики згідно з навчальним планом, прийнятим Житомирським державним університетом імені Івана Франка, такими дисциплінами є елементарна математика, вступ до спеціальності, математичний та комплексний аналізи, різні розділи геометрії, лінійна алгебра, алгебра і теорія чисел, дискретна математика, диференціальні рівняння, теорія ймовірностей та математична статистика, вибрані питання окремих дисциплін, ряд спецкурсів та практикумів.

Проаналізувавши навчальні плани та програми, розроблені кафедрами алгебри та геометрії й математичного аналізу Житомирського державного університету імені Івана Франка, визначимо особливості фундаментальної підготовки на прикладі дисциплін геометричного циклу.

Сама предметна галузь надає необмежені можливості для інтелектуального розвитку, тренування вмінь аналізувати, синтезувати, абстрагувати, класифікувати, систематизувати, узагальнювати, планувати, а відпрацьовані вміння можна з успіхом переносити зі світу абстракції у реальний світ.

Логічний каркас програми з геометрії складається з ряду розділів: аналітична геометрія на площині та в просторі, основи геометрії, конструктивна, проективна, диференціальна геометрія та топологія. Цей курс повинен створювати в студентів максимально повне і цілісне сприймання математичної науки (від Евкліда до наших часів) [16].

Мета навчальної дисципліни «*Аналітична геометрія*» – це ознайомлення та оволодіння сучасними теоретичними положеннями і математичними методами аналітичної геометрії та формування вмінь їх застосовувати на практиці, зокрема, під час вивчення інших дисциплін. Завдання курсу включають у себе вивчення геометричних фігур за допомогою алгебри із використання методу координат і дослідження, які геометричні фігури представлені тими або іншими рівняннями.

Метою навчальної дисципліни «*Основи геометрії*» є формування у студентів погляду на геометрію та її методи і на елементарну геометрію з точки зору вищої; сформувати у студентів знання, навички та вміння з курсу основ геометрії, які необхідні студенту при подальшому вивчені фізико-математичних дисциплін. Студенти забезпечуються відповідним понятійним та математичним апаратом, необхідним для значно глибшого і чіткішого розуміння багатьох законів і співвідношень, які мають геометричний характер.

Завдання курсу:

1. Розкрити значення геометрії для загальної та математичної освіти людини.
2. Ознайомити з аксіоматичним методом побудови геометрії.
3. Показати місце геометрії серед математичних дисциплін, її зв'язок з практикою і іншими математичними дисциплінами.

Мета навчальної дисципліни «*Проективна геометрія*» є забезпечення студентів відповідним понятійним та математичним апаратом, необхідним для значно глибшого і чіткішого розуміння багатьох геометричних співвідношень і побудов; формування в них знань, умінь і навичок, необхідних для розв'язування геометричних задач методами проективної геометрії.

Завдання курсу:

1. Розкрити місце і значення знань з проективної геометрії в загальній і професійній освіті людини, з'ясувати взаємозв'язки курсу проективної геометрії з іншими навчальними предметами.

2. Показати практичну значущість методів проективної геометрії, їх застосовність до розв'язання найрізноманітніших геометричних задач.

3. Забезпечити ґрунтовне вивчення студентами тих понять і методів проективної геометрії, які можуть бути використані ними під час викладання шкільного курсу та проведення позакласних занять з математики.

Розглянемо зміст навчальних фундаментальних дисциплін на прикладі проективної геометрії.

У нині діючих підручниках з вищої геометрії для фізико-математичних спеціальностей вищих закладів освіти не завжди звертається увага на зв'язок університетського та шкільного курсів геометрії, який значною мірою сприяє покращенню якості фундаментальної підготовки майбутніх учителів математики. Особливо відчутною для студентів ця проблема стає при вивченні питань проективної геометрії, які найбільш відірвані від теорії та методики викладання геометрії в школі.

Програма навчальної дисципліни складається з таких змістових модулів:

Модуль 1. Проективні властивості форм І-го ступеня

Змістовий модуль 1. Побудова проективного простору

Змістовий модуль 2. Основні поняття проективної геометрії форм першого ступеня

Модуль 2. Проективні властивості форм ІІ-го ступеня

Змістовий модуль 3. Лінії ІІ-го порядку на проективній площині

Змістовий модуль 4. Проективні перетворення форм ІІ-го ступеня

Змістовий модуль 5. Група перетворень та її підгрупи

Завдання курсу проективної геометрії у вищому освітньому закладі – розширення та поглиблення знань студентів щодо геометричних перетворень, їх інваріантів, обґрунтування необхідності розширення евклідового простору введенням невласних елементів (точок, прямих, площин) та побудови проективного простору й проективної геометрії в цілому. Навчальна програма включає основні поняття та методи проективної геометрії, головним з яких є метод центральної проекції. Саме тому вивчення проективної геометрії починається з перетворення центральної проекції і проективних властивостей фігур, які зберігаються при довільних центральних проекціях. Запропонована концепція викладу курсу проективної геометрії дозволяє тісно пов'язати нові поняття й теореми проективної геометрії з матеріалом елементарної геометрії, що має важливе значення в системі фахової підготовки майбутніх учителів математики.

Взявши евклідовий простір за основний в побудові проективного простору ми відмовилися від аксіоматичного методу побудови геометрії. Центральне місце в програмі займають принципи двоїстості, теорема Дезарга, подвійне (складне) відношення, гармонізм, проективні відповідності форм першого ступеня (колінеації), проективна теорія кривих другого порядку. Детально розглянута з проективної точки зору побудова афінної і метричної геометрії, яка має безпосереднє відношення до курсу елементарної (шкільної) геометрії. Кожна із зазначених геометрій (афінна й метрична) визначається своєю групою (за означенням Клейна). У побудованій груповій класифікації проективних перетворень містяться афінна, метрична група і група рухів. Проективна геометрія становить теоретичну базу для нарисної геометрії. Узагальнення проективних властивостей реалізується при аналітичному викладі проективної геометрії. Метричні колінеації дозволяють обґрунтувати метричну геометрію Лобачевського та еліптичну геометрію Рімана.

Авторитет навчального закладу на ринку освітніх послуг безпосередньо залежить від якості підготовки фахівців, тому необхідно якнайкраще використовувати передові методи й види забезпечення навчального процесу для підвищення якості підготовки фахівців вищої кваліфікації.

Під *методами навчання* розуміємо способи послідовної взаємодії тих, хто навчається, й тих, хто навчає, направлені на організацію засвоєння змісту навчання. Ознаки довільного методу: спрямованість на засвоєння певного елементу змісту освіти в його певному перевтіленні та організований педагогом характер навчально-пізнавальної діяльності студентів, що залежить від способу засвоєння цього змістового елементу. Методи повинні бути спрямовані на збагачення уяви, мислення, пам’яті, мовлення, розкриття суб’єктивного досвіду кожного. Організація експериментальної роботи передбачає використання як традиційних, так і нетрадиційних методів, які б дозволили сформувати в майбутніх педагогів готовність до виконання своїх професійних функцій. Вибір методів навчання за розробленою програмою спрямовано на досягнення якісного рівня знань. Одна з основних вимог до вибору методу – його активна і творча спрямованість [17].

Як багатомірне утворення методи різносторонні, тому їх можна групувати чи класифікувати. В наш час відомі десятки їх класифікацій за різними ознаками: за джерелом передачі інформації (С.І. Перовський, Е.Я. Голант), за призначенням (М.А. Данилов, Б.П. Йосипов), за типом пізнавальної діяльності (І.Я. Лернер, М.М. Скаткін), за дидактичною метою (Г.І. Щукіна, І.Т. Огородников та інші), на основі поєднання методів викладання й методів навчання (М.І. Махмутов), за цілісним діяльнісним підходом (Ю.К. Бабанський) тощо.

Для якісної фундаментальної підготовки майбутніх учителів математики головним є не стільки міцне засвоєння студентами знань, умінь та навичок, скільки становлення творчого потенціалу особистості фахівця. Виходячи з цього, всі методи умовно поділимо за рівнем прояву творчого потенціалу на дві групи: 1) репродуктивні; 2) продуктивні.

Репродуктивні методи поділяються на дві групи: інформаційно-рецептивні та інструктивно-репродуктивні.

Мета викладача, який застосовує *інформаційно-рецептивні методи*, – формування певного кола уявлень про проективну геометрію, при цьому його діяльність полягає в організації сприйняття готової інформації, згідно з принципами доступності, наочності, систематичності та послідовності. Засоби, необхідні для цієї діяльності, містять креслення, схеми, підручники тощо.

Мета студента – первісне засвоєння знань; його діяльність складається зі сприйняття, усвідомлення й запам’ятовування сприйнятого. Засобами виступають лекційні записи, опорні конспекти, підручники тощо.

Результатом навчання при використанні інформаційно-рецептивних методів є сформованість у студента кола знань і уявлень, які дозволяють орієнтуватися в подальшій діяльності.

До інформаційно-рецептивних методів належать такі:

- *пояснювально-ілюстративний виклад* (пояснювально-ілюстративна лекція) – вихідне положення цього методу – констатація матеріалу теоретичного характеру, який поєднується з прийомами активізації пізнавальної діяльності студентів (виписуванням основної думки, конспектуванням, складанням схем тощо);
- *образно-асоціативний виклад* (лекція-візуалізація) – це усний монолог викладача, який подає студентам образно-асоціативну конструкцію (опору) навчального матеріалу, що сприяє запам'ятовуванню інформації й усуненню перевантажень у навчанні (наприклад, пояснення проективної та перспективної відповідності за допомогою значків $\overline{\wedge}, \overline{\overline{\wedge}}$ тощо);
- *ілюстративний метод* (креслення, схеми) поєднується з вербальними (словесними) методами навчання;
- *пояснення з повтором* – використовують на лекціях при вивченні теоретичного матеріалу, доведенні теорем, розв’язанні задач на практичних заняттях.

Наприклад, при поясненні важких питань на лекціях з математики пропонуємо таку схему: спочатку викладач пояснює матеріал, а студенти слухають, але не записують; потім лектор відповідає на запитання й пропонує студентам записати матеріал в зошити. Як правило, нотатки вдається зробити лише декільком, оскільки більша частина аудиторії до цього моменту досягла лише попереднього розуміння, що не піддається словесному викладу. Тоді лектор повторює пояснення – на цей раз при підвищеній увазі аудиторії, оскільки матеріал набуває особистісну зацікавленість для кожного слухача.

Завершальний етап схеми – студенти записують матеріал у зошит (записування можливе під диктування). Такий прийом проведення лекції більш сприйнятливий для підвищення пізнавальної активності студентів. Оскільки саме на лекціях з фундаментальних дисциплін пояснювальний матеріал грає більш вагому роль, ніж розповідальний.

У межах *інструктивно-репродуктивних методів* мета викладача – формувати в студентів уміння та навички, спрямовувати їх на способи діяльності репродуктивного характеру. Діяльність викладача зводиться до інструктажу студента про способи будь-якої діяльності. Засобами виступають письмові вказівки, алгоритми, приклади дій.

Мета студента – вміти виконувати певний вид діяльності, попередньо оволодівши певними діями та операціями. Пізнавальна діяльність студента зводиться до виконання зразків дій, операцій певного виду. В результаті такий досвід стає вміннями та навичками. Засобами тут виступають завдання репродуктивного рівня.

Зміни особистості полягають у її готовності до діяльності. Результатом навчання студента є оволодіння різними способами діяльності, що дозволяють їх відтворення.

До інструктивно-репродуктивних методів належать:

- *інструктаж* (правила, алгоритми тощо) реалізується з метою роз'яснення студентам призначення певних дій, способів їх здійснення, умов розв'язання практичних задач, послідовності операцій, які входять до того чи іншого вміння, характеристики типових ситуацій та їх використання, застосування на практиці тощо;
- *складання плану лекції* – попередній запис плану лекції на дошці під час перерви чи в зошиті до читання лекції відіграє мотивуючу, організовуючу й орієнтуючу роль, хоча менше активізує самостійність розумової діяльності студентів;
- *самостійне конспектування* – цей метод використовуємо для осмислення й засвоєння нового матеріалу студентами.

Студенти можуть виконувати такі види завдань: записати самостійне доведення теореми за аналогією до проведеного раніше викладачем; зробити виписки довідок, повідомлень з посібників, статей, які доповнюють матеріал лекції, заповнити таблиці; привести еквівалентні визначення понять і підходи до розгляду якоїсь проблеми, що відрізняються від записаних на лекції. Але спочатку має бути проведений інструктаж і здійснена перевірка виконання завдань на практичних і індивідуальних заняттях. Наприклад, на лекціях з аналітичної геометрії, розглядаючи конічні перерізи, можна повністю дослідити еліпс і записати його властивості, а дослідження гіперболи й параболи записати самостійно.

- *домашня робота з літературою* є логічним продовженням опрацювання теоретичного матеріалу, розглянутого на лекції.

Її можна проводити таким чином: слухачам ставлять запитання й пропонують знайти розв’язання. Не даючи відповіді на поставлене запитання, називають список літератури, де неважко знайти відповідь (список літератури із вказівкою на сторінки й абзаци має бути невеликим (дві-чотири назви) й бібліографічно правильно оформлений).

<u>Завдання з проективної геометрії для самостійного опрацювання</u>

За малим принципом двоїстості дати означення повному чотиристороннику і сформулювати його гармонічні властивості.

- *завдання репродуктивного рівня* включають у себе теоретичні питання або декілька однокрокових задач, відповіді на які мають показати підготовку студентів до заняття і є необхідною базою їх подальшої успішної роботи. До таких завдань належать і багатокрокові задачі з алгоритмом розв'язання.

При використанні *продуктивних методів* змінюються цілі викладача й студента. Педагог ставить собі за мету активно формувати пізнавальні здібності, професійні інтереси й світогляд, досвід творчої діяльності. Оскільки останнє засвоюється лише при розв'язанні проблемних завдань, то діяльність викладача полягає ще і в організації проблемних ситуацій, під якими ми розуміємо психічний стан студента, що складається з трьох позицій:

усвідомлення протиріч, сприйняття їх як труднощів і бажання їх розв'язати. Засобами, які допомагають викладачу ефективно організувати цей метод навчання, є задачі середнього й вищого рівня складності, додаткова література, що відображає ряд точок зору на одне й те саме питання, яке має в науці парадокси, звернені до реального життя та співвіднесені з науковими фактами.

Мета студента – активне творче пізнання, механізм якого відповідає науковому дослідженню (проблема, гіпотеза, доведення, висновки). Засоби для студента в цьому випадку частково або повністю збігаються із засобами для викладача.

Досвід творчої діяльності, засвоєний особистістю, готує її до участі в творчому перетворенні культури. Саме в цьому полягають якісні зміни особистості. Результатом навчання тут виступає наявність у студентів структур творчого мислення.

- *проблемний виклад* (лекція проблемного характеру) – усний монолог викладача, який активізує продуктивну діяльність шляхом створення у студентів проблемної ситуації з наступною пропозицією щодо її розв'язання, що потребує аргументації та доведення;
- *дослідницький метод* (практичні й теоретичні завдання середнього та вищого рівня складності) – завдання такого рівня використовуються для усунення такого недоліку в навчанні, на який звертав увагу М.М. Скаткін, – відсутність роботи із сильними студентами та розвиток творчого мислення в усіх студентів, а також їх самокритичності щодо своїх знань. Такі завдання дають змогу викладачеві індивідуалізувати роботу студентів з різними математичними здібностями.
- *метод проектів* – це творча самостійна робота для створення за допомогою програми PowerPoint мультимедійної презентації прикладів розв’язування задач. Оформлення задачі може містити, крім ходу розв’язання, також викладки теоретичного матеріалу.

Як бачимо, різні методи виконують різні функції: для репродуктивних домінуючою є навчаюча функція, для продуктивних – розвиваюча.

Головною рисою компетентності випускників фізико-математичного факультету має бути опанування ними методу математичного моделювання, методологія якого описана ґрунтовно такими науковцями: А.М. Колмогоровим, А.М. Тихоновим, О.А. Самарським, Б.В. Гнеденком. Тому формування вмінь математичного моделювання при вивченні фундаментальних курсів (математичного аналізу, елементарної математики, різних розділів геометрії, алгебри й теорії чисел, теорії ймовірностей та математичної статистики, спецкурсів тощо) є одним з найважливіших дидактичних завдань фізико-математичного факультету. Цьому присвячені праці Т.В. Крилової, Л.І. Нічугівської, Л.Л. Панченко.

Метою навчання математичним методам є показ можливостей використання математики для розв'язання практичних задач, у навчанні студентів реалізації цих можливостей на виробництві, в побуті, у науковій роботі. Самим істотним компонентом процесу розв'язання практичних задач методами математики є математичне моделювання. Тому досягнення вказаної мети повинно бути обов'язково пов'язане з формуванням у студентів умінь будувати й досліджувати математичні моделі. Це буде сприяти оволодінню моделюванням не лише як методом розв'язання практичних задач, але й як методом наукового пізнання, будуть розв'язані питання розуміння значущості абстрактних математичних понять (наукових моделей) в пізнанні реальної дійсності.

У наш час моделювання дуже широко застосовується не лише в наукових дослідженнях, але й при розв'язуванні задач, які виникають в техніці, економіці, геології, медицині тощо. Тому поняття «моделювання» й «модель» розглядають в широкому розумінні.

Під математичним моделюванням розуміють вивчення властивостей об'єкта на його математичній моделі [18, с. 3]. Математичне моделювання розглядають як засіб наукового дослідження та навчального пізнання, необхідний для утворення математичних абстракцій при введенні математичних понять та як метод розв'язування прикладних задач [19, с. 35].

Під математичною моделлю розуміють наближений опис якого-небудь класу явищ зовнішнього світу, виражений за допомогою математичної символіки [18, с. 5].

Побудову математичної моделі, тобто вивчення явища за допомогою математичної моделі, можна умовно розбити на чотири етапи: етап змістовного опису; етап формалізації опису; етап остаточної побудови моделі (ідентифікації параметрів і перевірки адекватності моделі); етап перегляду і вдосконалення моделі за результатами узагальнення емпірично накопичених даних [20].

У процесі математичного моделювання виділяють три рівні [21, с. 119]:

І. Формалізація – переклад запропонованої задачі (ситуації) на мову математичної теорії (побудова математичної моделі задачі).

ІІ. Розв’язання задачі в межах математичної теорії (розв’язання всередині моделі).

ІІІ. Переклад результату математичного розв’язання задачі на ту мову, якою була сформульована вихідна задача (інтерпретація одержаного математичного розв’язання).

Частіше за все математична модель являє собою дещо спрощену схему (опис) оригіналу, а отже, має певний ступінь похибки. Одна й та ж модель може описувати різні процеси, об’єкти; тому результати внутрімодельного дослідження одного явища частіше за все можуть бути перенесені на інше.

Моделювання може бути використане у навчанні таким чином:

- по-перше, воно виступає як зміст, який повинен бути засвоєний студентами в результаті навчання, і як спосіб пізнання, яким повинен оволодіти майбутній фахівець;
- по-друге, моделювання є одним із навчальних засобів, за допомогою яких формується навчальна діяльність студентів.

За метою використання в навчанні моделювання ділять на два типи: моделювання об’єктів вивчення та моделювання дій і операцій щодо вивчення цих об’єктів.

Перший тип використовують для виявлення й фіксації тих загальних відносин, які відображають сутність явищ, об'єктів, процесів, які вивчаються. Наприклад, $ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$ – теоретична модель поняття «квадратне рівняння з однією змінною». Ця модель та її конкретизація використовується як для вивчення теорії квадратних рівнянь загалом, так і для розв'язання задач практичного змісту.

Другий тип навчального моделювання застосовується для виявлення й фіксації загальної схеми дій і операцій, пов'язаних з розв'язанням певного кола задач. У навчальній моделі цього виду зазначено, які дії, операції, в якому порядку, при яких умовах потрібно виконати, щоб вивчити певний об'єкт потрібного виду.

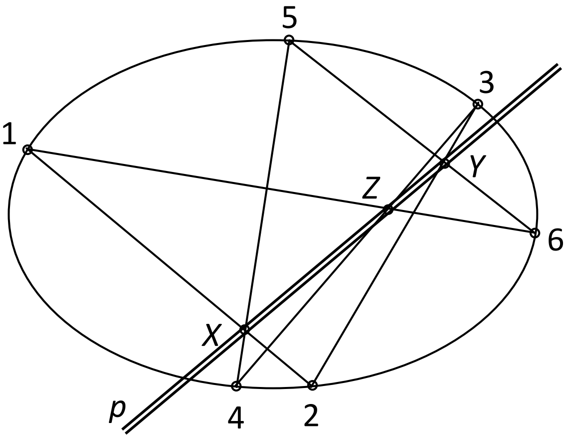
Кожна така модель – це схема діяльності щодо розв'язання навчальної задачі, пов'язаної з вивченням певного виду об'єктів.

Наприклад, довільний алгоритм виконання певного виду дій є певна модель, яка є навчальною, якщо ставиться задача щодо вивчення суті та властивостей цієї дії. А одержаний план, його фіксація – навчальне моделювання другого типу.

Можна стверджувати, що перший тип навчального моделювання відображає предметну сторону навчальної діяльності студентів, а другий – оперативну сторону. Оскільки в реальній навчальній діяльності ці дві сторони завжди єдині, тому в більшості випадків навчальні моделі використовують і як моделі, тих об'єктів, які вивчаються, так і моделі дій для цього вивчення.

Наведемо приклади моделей обох типів у проективній геометрії під час вивчення теми «Проективна відповідність форм другого ступеня».

Приклад І. Базовими поняттями даної теми є «ряди точок другого порядку (лінії другого порядку)» і «пучки другого порядку», які використовують для означення наступних геометричних фігур.



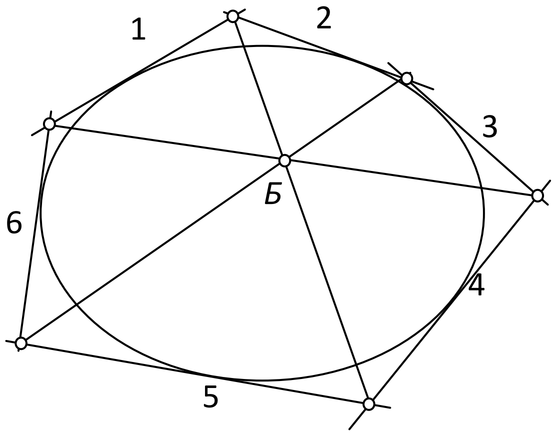


Рис. 1. Шестивершинник *Рис. 2. Шестисторонник*

Фігура, яка складається із шести точок ряду другого порядку і шести відрізків, які послідовно з'єднують ці точки, називається *шестивершинником* (шестикутником), вписаним у лінію другого порядку (див. рис. 1).

Фігура, утворена шістьма прямими пучка другого порядку, жодні три з яких не належать одній точці, називається *шестисторонником* (див. рис. 2).

Довільний шестивершинник, вписаний у лінію другого порядку, має властивість, сформульовану Б. Паскалем, що точки перетину пар протилежних сторін лежать на одній прямій (прямій Паскаля) (див. рис. 1). Тому якщо вершини шестикутника (точки) занумерувати від 1 до 6, то матимемо таку *модель-схему для розв'язування задач на теорему Паскаля:*

$$\left.\begin{array}{l}(1,2)\cap(4,5)=X\\(2,3)\cap(5,6)=Y\\(3,4)\cap(6,1)=Z\end{array}\right\} \text{– пряма Паскаля } p.$$

Теорема Паскаля залишається правильною і в тих випадках, коли шестивершинник, вписаний в лінію другого порядку, вироджується в п'яти-, чотири-, тривершинник при суміщенні двох і більше вершин, або коли лінія другого порядку розпадається на дві лінії першого порядку. Якщо дві вершини зближаються і в граничному випадку збігаються, то сторона, якій належали ці дві точки, стає дотичною до ряду другого порядку в цій точці.

Довільний шестисторонник, сторони якого належать прямим пучка другого порядку, має властивість, сформульовану Ш. Бріаншоном, що три прямі, які сполучають його протилежні вершини, належать одній точці (точці Бріаншона) (див. рис. 2). Тому якщо сторони шестисторонника (прямі) занумерувати від 1 до 6, то матимемо таку *модель-схему для розв'язування задач на теорему Бріаншона:* $\left.\begin{matrix}(1,2)-(4,5)\\(2,3)-(5,6)\\(3,4)-(6,1)\end{matrix}\right\}-Б$ – точка Бріаншона

Задача 1. Зробити рисунок до теореми Бріаншона, коли точка Бріаншона є невласною.

Розв'язання. Розв'яжемо задачу, використовуючи відповідну схему модель. Занумеруємо прямі – сторони шестикутника від 1 до 6 і запишемо модель-схему розв'язування задач на теорему Бріаншона згідно умови:

$$\left.\begin{matrix}(1,2)-(4,5)\\(2,3)-(5,6)\\(3,4)-(6,1)\end{matrix}\right\} Б \equiv B_\infty$$

Точка Бріаншона є невласною, отже прямі $(1,2)-(4,5)$, $(2,3)-(5,6)$, $(3,4)-(6,1)$ мають бути на рисунку паралельні (див. рис. 3).

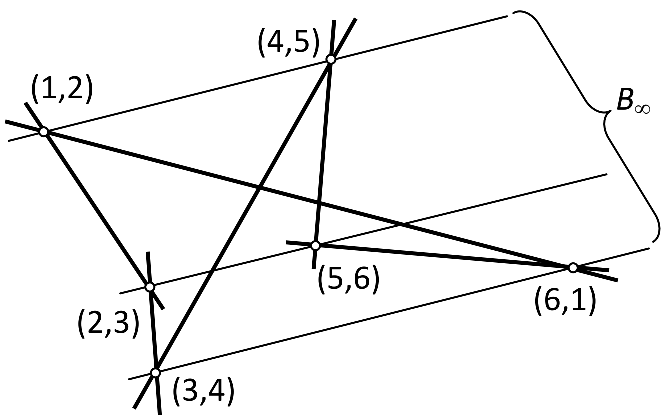


Рис. 3

Приклад ІІ. Тепер наведемо використання іншого типу моделі в проективній геометрії. Утворення ліній другого порядку (гіперболи, параболи) можна пояснити на прикладі перетину невласної прямої з еліпсом (це буде модель, яку ми на афінній площині подаємо як перетин еліпса і власної прямої) (див. рис. 4, 5).

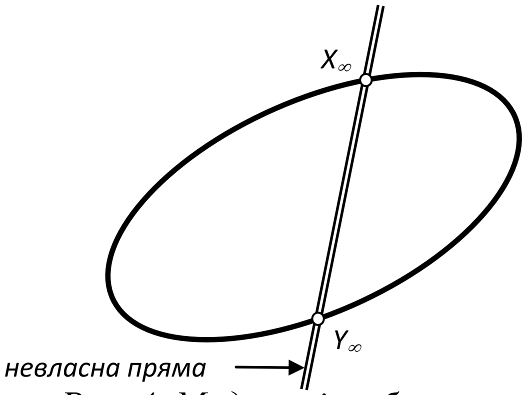
<table>
<tr>
<td>Вважатимемо гіперболічним ряд другого порядку, якщо дві його довільні точки розміщені на невласній прямій</td>
<td>

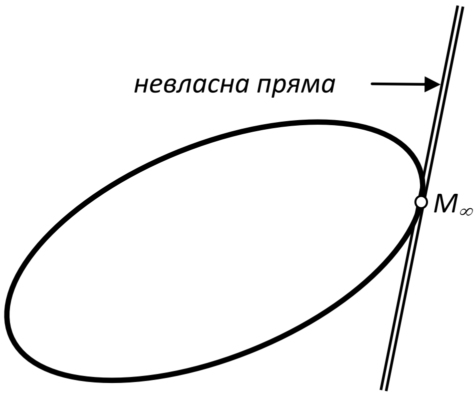
Рис. 4. Модель гіперболи</td>
</tr>
<tr>
<td>Вважатимемо параболічним ряд другого порядку, якщо одна його довільна точка розміщені на невласній прямій</td>
<td>

Рис. 5. Модель параболи</td>
</tr>
</table>

Наведемо приклад задачі із поданим вище типом моделювання.

Задача 2. Дано чотири точки гіперболи, з них дві власні – *A, B* та дві невласні – C_∞, D_∞ і дотичну в точці *A*. Провести дотичну в точці *B*.

Розв'язання.

Опишемо розв'язання даної задачі на моделі. Гіпербола – це крива другого порядку з двома невласними точками (див. рис. 4). Занумеруємо задані точки та застосуємо схему теореми Паскаля.

Згідно даних в умові маємо: $A \equiv 1 \equiv 2$, $t_A \equiv (1,2)$, $C_\infty \equiv 3_\infty$, $D_\infty \equiv 6_\infty$, $B \equiv 4 \equiv 5$. Шуканою буде дотична $t_B \equiv (4,5)$. Використовуємо схему: $(2,3_\infty) \cap (5,6_\infty) = Y$, $(6_\infty,1) \cap (3_\infty,4) = Z$. $YZ \equiv p$ – пряма Паскаля. Тому $(1,2) \cap p = X$, а $(X, 4 \equiv 5) \equiv (4,5) \equiv t_B$ (див. далі рис. 6).

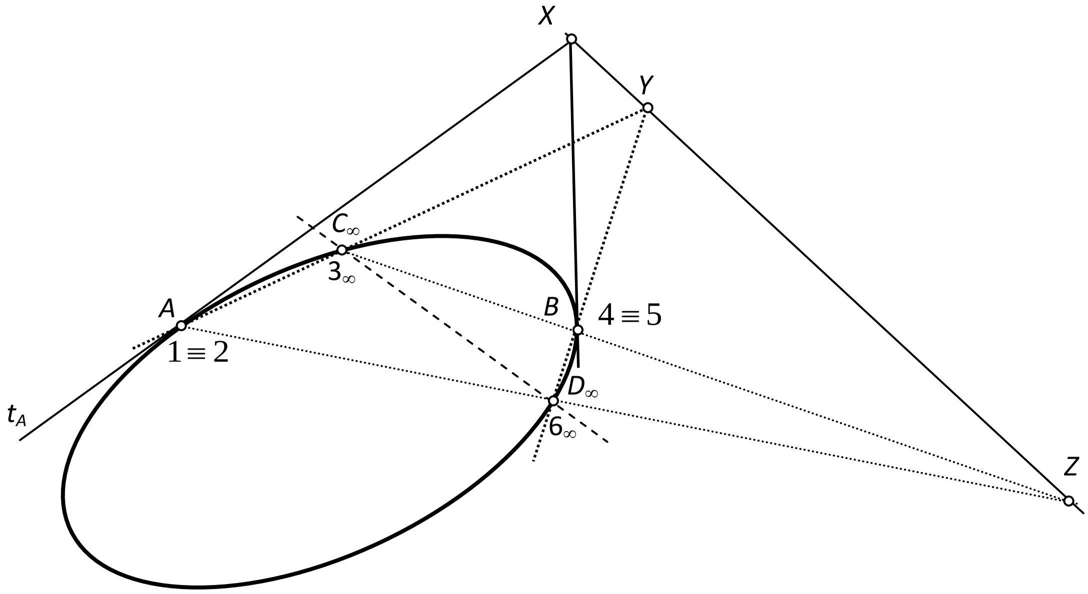


Рис. 6. Розв'язання задачі 2 на моделі

Виконаємо тепер побудову на проективній площині (згідно описаної послідовності дій) (див. рис. 7).

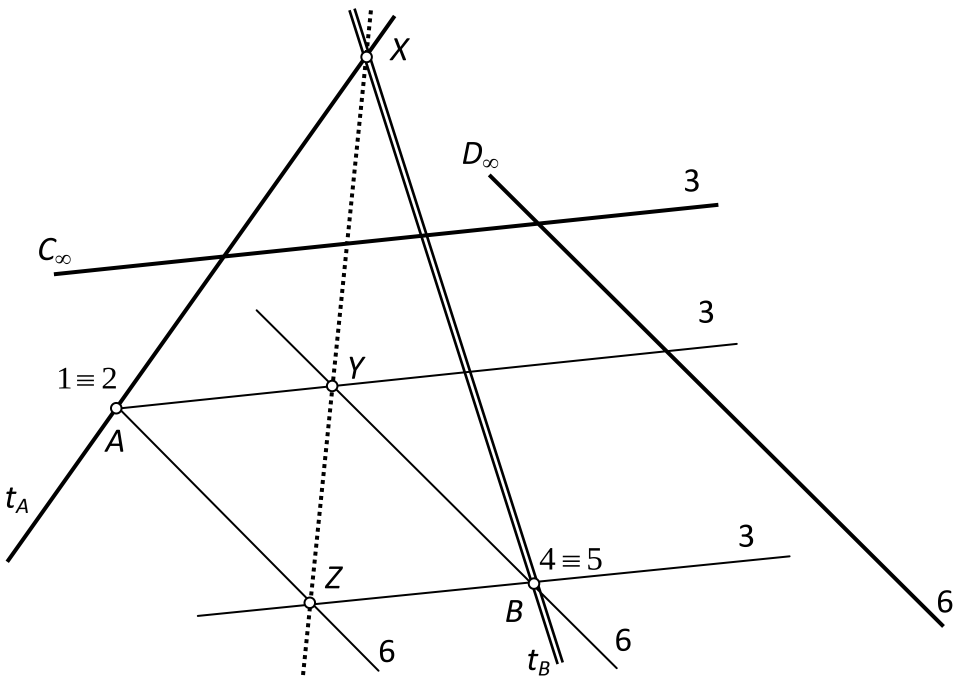


Рис. 7. Розв'язання задачі 3 на проективній площині

Задача 3. Дано дві власні точки *A* і *B* і невлану точку C_∞ параболи. Через точку *A* проведено дотичну t_A до параболи і відмінну від неї пряму *a*. Побудувати другу точку прямої *a* з параболою.

Розв'язання.

Опишемо розв'язання даної задачі на моделі. Парабола – це крива ІІ-го порядку, яка дотикається до невласної прямої (див. рис. 5). Занумеруємо задані точки та застосуємо схему за теоремою Паскаля (див. рис. 8).

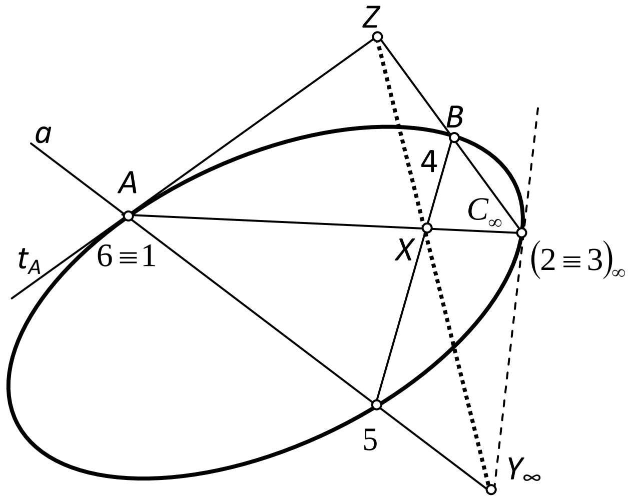


Рис. 8. Розв'язання задачі 3 на моделі

Згідно даних в умові маємо: $A \equiv 6 \equiv 1$, $t_A \equiv (6{,}1)$, $C_\infty \equiv (2 \equiv 3)_\infty$, $a \equiv (5{,}6)$, $B \equiv 4$. Шуканою буде точка 5.

Використовуємо схему: $(2_\infty, 3_\infty) \cap (5{,}6) = Y_\infty$, $(6{,}1) \cap (3_\infty, 4) = Z$. $Y_\infty Z \equiv p$ – пряма Паскаля. Тому $(1{,}2_\infty) \cap p = X$, а $(X, 4) \cap (5{,}6) \equiv 5$ – шукана точка.

Виконаємо тепер побудову в проективній площині (згідно описаної послідовності дій) (див. рис. 9).

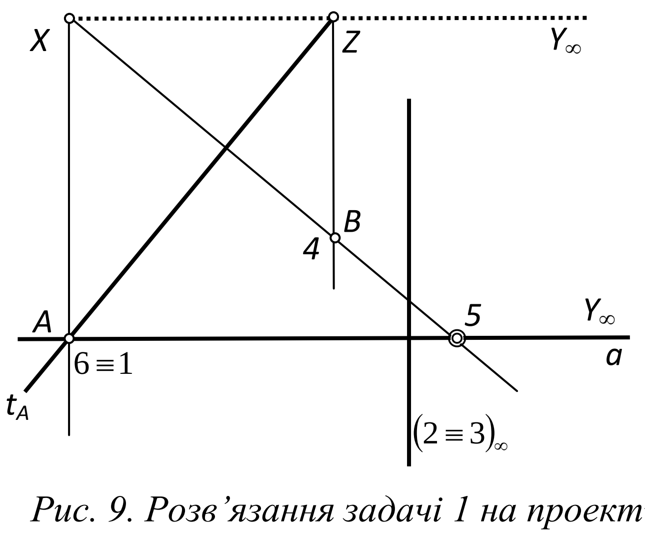


Рис. 9. Розв'язання задачі 1 на проективній площині

Використання математичних моделей при викладенні фундаментальних дисциплін значно полегшує сприймання матеріалу і дозволяє розв’язувати практичні задачі, які є основою формування у майбутніх фахівців умінь математичного моделювання.

Інтенсивний розвиток сучасної освіти та науки наповнив зміст традиційного методу навчання динамічністю, тому перед вищим навчальним закладом поряд з передачею стабільної системи знань висувається завдання навчити мислити й самостійно здобувати знання. Однією з найважливіших задач стає розвиток логіки мислення майбутніх фахівців, вміння користуватися знаннями та бути здатним до самоосвіти.

Зміст навчального матеріалу має забезпечувати інтенсивне та самостійне навчання студентів, обсяг засвоєної інформації повинен приводити до чіткого вироблення вмінь її використання, до інтелектуального розвитку кожного студента. Такий підхід передбачає не тільки засвоєння готових знань, але й способів цього засвоєння, способів міркувань, що використовуються в математиці. Тому навчальний матеріал повинен містити загальні схеми розв’язування задач, загальні підходи до моделювання прикладних ситуацій, відомості про суть задач, їх склад і структуру. Навчальний матеріал має містити алгоритми та евристики, якими визначається процес переходу від вихідних даних до шуканого результату, а також завдання на самостійні пошуки алгоритмів і евристик шляхом узагальнення розв’язань певних груп задач.

Передумовою для алгоритмізації навчання є теорія поетапного формування розумових дій П. Я. Гальперіна [22, с. 37-39]. Слабкість існуючих методик, на думку П. Я. Гальперина, полягає в тому, що знання, навички засвоюються не в процесі раціонально організованих діям, а як довільне механічне запам'ятовування або унаслідок проб та помилок. Основним інструментом виховання алгоритмічного мислення є організація на заняттях процесу алгоритмізації – створення алгоритмів, що сприяють розумовому розвитку й формуванню логічного мислення студентів.

Під алгоритмом в педагогічній психології [22, с. 122] зазвичай розуміють точний, загальнозрозумілий опис певної послідовності мислительних операцій, необхідних і достатніх для вирішення будь-якого завдання.

Дослідження вітчизняних психологів показують, що студенти, які добре пам’ятають усі формули, роблять помилки саме тому, що не знають, як ці правила застосовувати, не знають відповідних методів дій та міркувань.

Усякий розумовий процес складається з ряду мислительних операцій. Психологи підкреслюють, що для ефективного навчання ці операції потрібно виявити і спеціально їм навчати. Це не менш необхідно, чим навчання самим правилам. Без опанування операційної сторони мислення знання правил виявляється даремним, бо студент чи учень не в змозі їх застосувати. В даному випадку виконання розумових дій аналогічно виконанню дій трудових. Насправді, виконати те або інше трудове завдання, наприклад, зробити деталь, неможливо, не виробляючи тих або інших трудових операцій. Так само не можна розв’язати граматичну, математичну, фізичну, взагалі будь-яку інтелектуальну задачу не виконавши ряд інтелектуальних операцій.

За В. П. Беспалько [23, с. 75] алгоритм – такий припис, який визначає зміст і послідовність операцій, що перетворюють початкові дані на шуканий результат, а алгоритмом навчання називають таку логічну побудову, яка розкриває зміст і структуру розумової діяльності того, хто навчається, при розв’язанні завдань даного типу й служить практичним посібником для вироблення навичок або формування понять.

Математика виникла як наука завдяки алгоритму, точному припису, інструкції для виконання послідовних дії, направлених на розв’язання будь-якої задачі. Перший алгоритм зафіксовано у Вавілоні (додавання, віднімання цілих чисел тощо).

Переважна більшість шкільних задач, зокрема алгебраїчних вправ, базових геометричних задач, вправ на дослідження функції виконується за певними алгоритмами. Оволодіння учнями цими алгоритмами – важливе завдання навчання математики. Наприклад, для закріплення доведення теорем важливу роль відіграє покрокове повторення. При розв’язувані задач на обчислення після записування відповідної формули, за якою обчислюється шукана величина, далі здійснюється пошук невідомих величин, які входять до формули. У процесі розв’язування будь-якого типу задач здійснюється як алгоритмічна, так і евристична діяльність. Розв’язування творчих, нестандартних задач зводиться врешті врешт до виконання відомих базових задач, які розв’язуються за певними алгоритмами.

Разом з тим навчити учнів розв’язування задач і вправ алгоритмічного характеру не можна шляхом лише пропонування їм готових алгоритмів. Доцільніше організувати на зразках розв’язання однієї двох задач колективний пошук алгоритму [24].

Гарний приклад використання алгоритмічного підходу до розв’язування задач на побудову, що складається з наступних кроків: 1) аналіз задачі, мета якого встановити зв’язок між шуканими й даними з умови задачі, знаходження плану виконання побудови, 2) власне побудова за знайденим планом, 3) доведення вірності міркувань і 4) дослідження умов, при яких існує розв’язок та їх кількості.

Головною метою курсу "Аналітична геометрія", як і інших розділів вищої геометрії, є формування у майбутнього вчителя широкого погляду на геометрію та її методи; озброєння його конкретними знаннями, які б дали можливість викладати геометрію в середній школі, проводити кваліфіковано факультативні заняття, причому виробити здатність здійснювати це на базі довільного навчального посібника або підручника; сформувати у студентів знання, навички та вміння з курсу аналітичної геометрії, які необхідні студенту при подальшому вивченні фізико-математичних дисциплін.

Озброєння студентів прийомами алгоритмізації значно спрощує засвоєння та закріплення нового матеріалу на прикладі розв’язування задач. Навчання алгоритмам можна виробляти по-різному: на репродуктивному рівні давати готовий, на продуктивному – спрямовувати студентів до творчого складання плану дій.

Для закріплення кроків дослідження рівняння лінії другого порядку у відповідній самостійній контрольній роботі з аналітичної геометрії [25] наводимо готовий алгоритм та пропонуємо кожному студенту розв'язати типову задачу.

Алгоритм зведення рівняння лінії другого порядку

$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ ***до канонічного вигляду:***

1) скласти характеристичне рівняння лінії:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ і знайти його корені } \lambda_1, \lambda_2;$$

2) знайти кут повороту системи координат за формулами:

$$tg\alpha = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}, \quad \sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}};$$

3) записати формули повороту системи координат:

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,$$
$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$$

і, підставивши їх у відповідне рівняння лінії, знайти коефіцієнти a'_{13}, a'_{23}, беручи до уваги, що коефіцієнти при квадратах змінних дорівнюють λ_1, λ_2, а коефіцієнт при добутку $x'y'$ дорівнює 0. Записати рівняння лінії в новій системі координат:

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a_{33} = 0;$$

4) паралельним перенесенням системи координат одержати канонічне рівняння лінії.

Приклад розв'язання типової задачі на поданий вище алгоритм

Задача 1. *Визначити тип лінії другого порядку, скласти її канонічне рівняння та зробити рисунок:* $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$.

Розв'язання.

1) Складемо характеристичне рівняння лінії і знайдемо його корені:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (1-\lambda)^2 - 1 = 0, \quad \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2;$$

2) Знайдемо кут повороту системи координат:

$$tg\alpha = \frac{0-1}{-1} = 1, \text{ отже, } \alpha = \frac{\pi}{4}, \ \cos\alpha = \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

3) Запишемо формули повороту системи координат:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y',$$
$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'$$

Запишемо рівняння лінії в новій системі координат $OX'Y'$:

$$0\cdot(x')^2 + 2\cdot(y')^2 - 10\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right) - 6\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right) + 25 = 0;$$

$$2\cdot(y')^2 - 8\sqrt{2}x' + 2\sqrt{2}y' + 25 = 0$$

4) Виділимо повний квадрат по y', згрупуємо лінійний доданок з x' з вільним членом і отримаємо: $\left(y' + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 4\sqrt{2}\left(x' - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = 0$.

Здійснивши паралельне перенесення за формулами $x'' = x' - \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $y'' = y' + \frac{\sqrt{2}}{2}$, або $x' = x'' + \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $y' = y'' - \frac{\sqrt{2}}{2}$, дістанемо $(y'')^2 - 4\sqrt{2}x'' = 0$, або $(y'')^2 = 4\sqrt{2}x''$.

Отже, дана лінія – це парабола з параметром $p = 2\sqrt{2}$ (рис. 10).

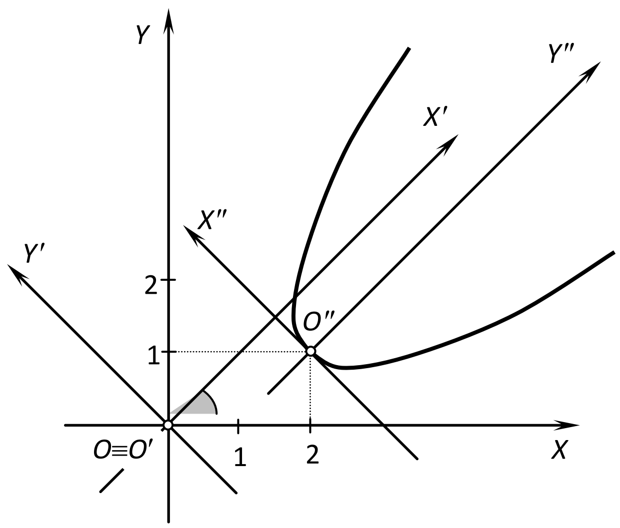


Рис. 10

Але можна й так організувати навчальний процес, щоб алгоритми "відкривалися" студентам. Цей спосіб, найбільш цінний в дидактичному плані, проте вимагає великих витрат часу. Прикладом складання так званих "творчих" алгоритмів може бути розв'язання задач з аналітичної геометрії на пряму на площині та в просторі. Для формування уміння складати алгоритми студентів потрібно навчити: знаходити загальний спосіб дії; виділяти основні, елементарні дії, з яких складається умова; планувати послідовність виділених дій; правильно записувати алгоритм.

Основними моментами в роботі з опорою на алгоритми є наступні форми:

- розв'язування простих задач на одну дію;
- розв'язування опорних (базових) задач теми;
- підведення студентів до розуміння алгоритму, його структури і техніки застосування;
- тренування в післяопераційному застосуванні алгоритму;
- виконання самостійної контрольної роботи.

Наведемо приклад розв'язання задач 2 та 3 з опорою на алгоритм.

Задача 2. *Знайти координати точки A, симетричної до точки P (2, -5, 7) відносно прямої, що проходить через точки M (5, 4, 6) і T (-2, -17, -8).*

Розв'язання.

Зробимо схематичний рисунок до задачі 2 (рис. 11).

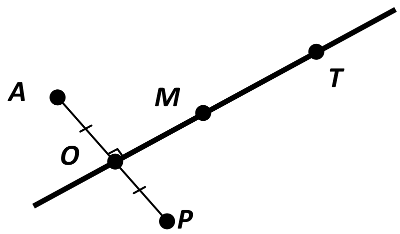


Рис. 11

Геометрично ця задача розв'язується таким чином: в площині, заданою точкою P і прямою MT, через точку P проводимо перпендикуляр до прямої MT; знаходимо точку перетину даного перпендикуляра і прямої MT (це буде точка O); відкладаючи $PO = AO$, знайдемо шукану точку A. Але в нашому випадку для знаходження точки O використаємо наступне: в просторі точку можна задати перетином прямої і площини. Ми це можемо зробити, провівши площину через точку P і перпендикулярно до прямої MT.

Отже, наш алгоритм знаходження точки *A* буде таким:

1) проводимо площину ρ через точку *P* і перпендикулярно до прямої *MT* (вектор *MT* буде вектором нормалі для шуканої площини);
2) складемо рівняння прямої *MT*;
3) шукаємо точку перетину площини ρ з прямою *MT* (це буде точка *O*);
4) *PO = AO* (за серединою і одним із кінців відрізка шукаємо нашу точку *A).*

Тепер знайдемо координати точки *A* за складеним алгоритмом.

1. Рівняння площини ρ записуємо як рівняння площини через точку і вектор нормалі: $A\,(x-x_0)+B\,(y-y_0)+C\,(z-z_0)=0$

Як точку візьмемо точку $P\,(2, -5, 7)$, як вектор – вектор $MT\,(-2-5, -17-4, -8-6)=(-7, -21, -14)$ або $(1, 3, 2)$.

$$1\,(x-2)+3\,(y-(-5))+2\,(z-7)=0.$$

Розкриємо дужки і отримаємо $x+3y+2z-1=0.$

2. Рівняння прямої *MT* запишемо як рівняння прямої через дві точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Підставимо координати точок *M* і *T*: $\frac{x-5}{-2-5}=\frac{y-4}{-17-4}=\frac{z-6}{-8-6}$. Спростимо і отримаємо $\frac{x-5}{1}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-6}{2}$.

3. Щоб знайти координати точки *O*, розв’яжемо систему рівнянь з пункту (1) і (2): $\begin{cases} x+3y+2z-1=0 \\ \frac{x-5}{1}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-6}{2}=t \end{cases}$,

Звідки $t=-2$, отже $O\,(3, -2, 2)$.

4. Для знаходження координат точки *A* використаємо формулу середини відрізка:

$$x_A = 2\,x_0 - x_P = 2\;3-2 = 4,$$

$$y_A = 2\,y_0 - y_P = 2\,(-2)-(-5) = 1,$$

$$z_A = 2\,z_0 - z_P = 2\;2-7 = -3,$$

Відповідь: шукана точка A має координати $(4, 1, -3)$.

Задача 3. *Дано рівняння двох медіан трикутника $x + y - 5 = 0$, $3x + y - 7 = 0$ і рівняння однієї з його сторін $2x + y - 5 = 0$. Скласти рівняння двох інших сторін трикутника і знайти координати його вершин.*

Розв'язання.

Зробимо схематичний рисунок (рис. 12), поклавши, що $x + y - 5 = 0$ – рівняння медіани AM, $3x + y - 7 = 0$ – рівняння медіани BT, $2x + y - 5 = 0$ – рівняння сторони AC.

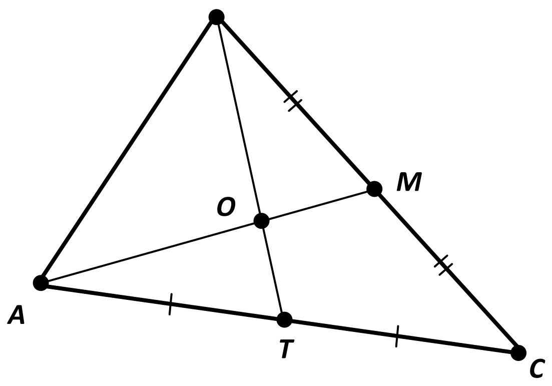


Рис. 12

Для того, щоб скласти рівняння невідомих сторін трикутника, потрібно знати координати двох точок на цих прямих. Для знаходження невідомих вершин скористаємось заданням точки як перетин двох прямих та використаємо означення та властивості медіани.

Тому план розв'язання задачі буде наступним:

1) шукаємо координати точки A (перетин AM і AC);
2) шукаємо координати точки O (перетин AM і BT);
3) шукаємо координати точки M (медіани діляться у відношенні 2:1, починаючи з вершини);
4) шукаємо координати точки T (перетин AC і BT);
5) шукаємо координати точки C (медіана BT ділить сторону AC навпіл);
6) шукаємо координати точки B (медіана AM ділить сторону BC навпіл);
7) записуємо рівняння AB;

8) записуємо рівняння *BC*.

Тепер зробимо обчислення за складеним алгоритмом.

1. Розв'яжемо систему $\begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ 2x + y - 5 = 0 \end{cases}$. Звідки $x = 0$, $y = 5$ – координати точки *A*.

2. Розв'яжемо систему $\begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ 3x + y - 7 = 0 \end{cases}$. Звідки $x = 1$, $y = 4$ – координати точки *O*.

3. Використаємо формули складного відношення:

$$x = \frac{\lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2}{\lambda_2 + \lambda_1},\ y = \frac{\lambda_2 y_1 + \lambda_1 y_2}{\lambda_2 + \lambda_1}$$

У нашому випадку $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Отже $1 = \dfrac{2x_M + 1 \cdot 0}{2 + 1}$, $4 = \dfrac{2y_M + 1 \cdot 5}{2 + 1}$,

Звідки $x = \dfrac{3}{2}$, $y = \dfrac{7}{2}$ – координати точки *M*.

4. Розв'яжемо систему $\begin{cases} 3x + y - 7 = 0 \\ 2x + y - 5 = 0 \end{cases}$. Звідки $x = 2$, $y = 1$ – координати точки *T*.

5. Використаємо формули середини відрізка: $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

Для нашого випадку $2 = \dfrac{0 + x}{2}$, $1 = \dfrac{5 + y}{2}$. Отже, $x = 4$, $y = -3$ – координати точки *C*.

6. Використаємо формули середини відрізка:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Для нашого випадку $\dfrac{3}{2} = \dfrac{4 + x}{2}$, $\dfrac{7}{2} = \dfrac{-3 + y}{2}$. Отже, $x = -1$, $y = 10$ – координати точки *B*.

7. Використаємо рівняння прямої через дві точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Підставимо координати точок A і B: $\frac{x-0}{-1-0}=\frac{y-5}{10-5}$.

Спростимо і отримаємо $5x + y - 5 = 0$ – рівняння сторони AB.

8. Аналогічно підставимо координати точок B і C: $\frac{x-(-1)}{4-(-1)}=\frac{y-10}{-3-10}$.

Спростимо і отримаємо $13x + 5y - 37 = 0$ – рівняння сторони BC.

Відповідь: координати вершин трикутника $A\ (0,\ 5),\ B\ (-1,\ 10),\ C\ (4,\ -3)$; рівняння сторони AB: $5x + y - 5 = 0$; рівняння сторони BC: $13x + 5y - 37 = 0$.

Висловлюється побоювання, що навчання алгоритмам може привести до стандартизації мислення та до пригнічення творчих сил студентів. Але, як відповідають прибічники алгоритмізації, потрібно виховувати не лише творче мислення. Величезне місце в навчанні займає вироблення різних автоматизованих дій – навичок, що є необхідним компонентом творчого процесу, без них він просто неможливий.

Правильне навчання алгоритмам не зводиться до їх заучування. Воно припускає самостійне відкриття та побудову алгоритмів, а це є творчий процес. Таким чином, алгоритмізація може бути прекрасним засобом навчання творчому мисленню. Нарешті, алгоритмізація охоплює далеко не увесь учбовий процес, а лише ті його компоненти, де вона представляється доцільною.

Подані методичні рекомендації відповідають цілям, що визначені потребами розвитку суспільства, науки, культури та особистості; зорієнтовані на ті знання, уміння й навички, які відповідають сучасному рівню розвитку соціуму, наукового знання й забезпечують можливості особистісного зростання майбутнього фахівця.

Удосконалення методики викладання геометричних дисциплін у вищому навчальному закладі сприятиме пошуку нових педагогічних технологій навчання, інтенсивному впровадженню сучасних комп'ютерних технологій, удосконаленню змісту математичної підготовки фахівців відповідно до профілю навчання та вибору оптимальних форм та методів для цікавого навчання геометрії.

ЛІТЕРАТУРА

1. Педагогическая энциклопедия / [пор. и ред. И. А. Каирова]. – М. : Сов. энциклопедия, 1964–1988 г.г. – Т. 3. – 880 с.
2. Семиченко В. А. Концепция целостности и её реализация в профессиональной подготовке будущих учителей / автореф. дис. на соискание степеня докт. псих. наук: спец. 19.00.07 / В. А. Семиченко. – К., 1992. – 20 с.
3. Про Національну доктрину розвитку освіти: Указ Президента України / Законодавчі акти України з питань освіти. – К. : Парламент. вид-во, 2004.
4. Концептуальні засади розвитку педагогічної освіти та її інтеграції в європейський освітній простір / Затверджено наказом МОН № 998 від 31.12.2004 р. – Харків, 2004. – 10 с.
5. Івченко А. О. Тлумачний словник української мови / А. О. Івченко. – Х. : Фоміс, 2000. – 540 с.
6. Садовничий В. А. Пока не поздно. Уже опаздываем. Образование, которое мы можем потерять / В. А. Садовничий. – М. : МГУ, 2002. – 199 с.
7. Українська радянська енциклопедія. – 2-е вид. – К., 1985. – Том 12. – С. 73.
8. Кузьмина-Гаршина Н. В. Акмеологические законы развития продуктивной компетентности специалиста фундаментального образования / Нина Кузьмина // Модернізація вищої освіти у контексті євроінтеграційних процесів: Збірник наукових праць учасників Всеукраїнського методологічного семінару з міжнародною участю. – Житомир : Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2007. – С. 7-43.
9. Бабак В. Фундаментальна підготовка в сучасному університеті: традиції та перспективи / В. Бабак, Е. Лузік // Вища освіта України. – 2003. – № 1. – С. 78-83.
10. Програми для фізико-математичних факультетів педагогічних інститутів. Збірник № 1 // Рекомендовано комісією з математичних наук науково-методичної ради Міністерства освіти України (протокол № 3 від 4.06.92). – К., 1993. – 176 с.
11. Корець М. Професійна спрямованість фундаментальних навчальних дисциплін у фаховій підготовці вчителів технології / М. Корець // Вища освіта України. – 2006. – № 1. – С. 49-53.
12. Величко О. Г. Якість освіти – проблеми й перспективи / О. Г. Величко, С. Й. Пинчук, С. Т. Плiскановський // Проблеми освіти: Наук.-метод. зб. / Кол. авт. – К. : Наук.-метод. центр вищої освіти, 2003. – Вип. 34. – 341 с.
13. Корсак К. Формування культури оцінювання і забезпечення якості роботи вищих шкіл / К. Корсак // Вища освіта України. – 2004. – № 1. – С. 41-48.
14. Освітньо-професійна програма «Бакалавр» для спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика) [затверджено Вченою радою ЖДУ ім. І. Франка, протокол № 3 від 14.10.2016)]. – Житомир, 2016. – 17 с.
15. Ляшенко О. І. Якість освіти як основа функціонування й розвитку сучасних систем освіти / О. І. Ляшенко // Педагогіка і психологія. – 2005. – № 1 (46). – С. 5-12.
16. Навчальні плани та робочі програми для дисциплін геометричного циклу / Розроблено кафедрою алгебри та геометрії (протокол № 1 від 31 серпня 2017)

(рекомендовано радою фізико-математичного факультету Житомирського державного університету імені Івана Франка). – Житомир, 2017.
17. Дичківська І. М. Інноваційні педагогічні технології : навчальний посібник / І. М. Дичківська. – К. : Академвидав, 2004. – 352 с.
18. Станжицький О. М. Основи математичного моделювання : навчальний посібник / О. М. Станжицький, Є. Ю. Таран, Л. Д. Гординський. – К. : Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2006. – 96 с.
19. Панченко Л. Л. Деякі психологічні особливості формування вмінь математичного моделювання у майбутніх учителів математики / Л. Л. Панченко // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики : зб. наук. праць : [у 3 т.]. Випуск VII – Кривий Ріг : Видавничий відділ НМетАУ, 2008. – Т. 1 : Теорія та методика навчання математики. – С. 34-41.
20. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики: учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов / [Е. И. Лященко, К. В. Зобкова, Т. Ф. Кириченко и др.; под ред. Е. И. Лященко]. – М. : Просвещение, 1988. – 233 с.
21. Боровик В.Н. Курс вищої геометрії : навч. посіб. / В. Н. Боровик, В. П. Яковець. – Суми : ВТД «Університетська книга», 2004. – 464 с.
22. Вікова та педагогічна психологія : навч. посіб. / [О. В. Скрипченко, Л. В. Долинська, З. В. Огороднійчук та ін.]. – К. : Просвіта, 2001. – 416 с.
23. Беспалько В. П. Педагогика и прогрессивные технологии обучения / В. П. Безпалько. – М., 1995. – 412 с.
24. Капуста В. Алгоритмізація навчання в геометрії [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://www.donnu.edu.ua/math/heuristic/dist_conf...B0.pdf
25. Мосіюк О. О. Лінії другого порядку: навчальний посібник / О. О. Мосіюк, А. В. Прус, О. А. Чемерис. – Житомир : Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2010. – 16 с.

Чемерис Ольга Анатоліївна – доцент, кандидат педагогічних наук.

Наукові інтереси: якість викладання дисциплін геометричного циклу для студентів фізико-математичного факультету освітньо-кваліфікаційного рівня “Бакалавр”.

Дисципліни, які викладає: аналітична геометрія, основи геометрії, конструктивна планіметрія.

РОЗДІЛ IV. ТЕХНОЛОГІЇ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ В СЕРЕДНІЙ ТА ВИЩІЙ ШКОЛІ

Карплюк С. О.
кандидат педагогічних наук, доцент
Франовський А. Ц.
кандидат фізико-математичних наук, доцент

ВИКОРИСТАННЯ ТЕХНОЛОГІЇ ВЗАЄМОНАВЧАННЯ У ПРОЦЕСІ ПІДГОТОВКИ МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНОГО ПРОФІЛЮ

Головним завданням сучасної системи освіти є створення умов для розвитку та самореалізації кожної особистості як громадянина України, формування покоління, здатного навчатися впродовж усього життя, розвивати й примножувати цінності громадянського суспільства, як зазначено у концептуальних положеннях "Національної доктрини розвитку освіти України у XXI столітті" [13] та концепції "Про розвиток загальної середньої освіти" [12]. Відповідно до цих завдань виникає необхідність вдосконалення традиційних та пошуків якісно нових способів організації навчання, спрямованих на підвищення ефективності освітнього процесу. Одним із шляхів вирішення окреслених проблем є розробка та впровадження інноваційних ефективних педагогічних технологій на засадах взаємоспівпраці або взаємонавчання, що сприятиме всебічному розвитку учнівської і студентської молоді, формуванню почуття як власної відповідальності, так і відповідальності за спільну (колективну, командну) роботу, а також поваги до наукового та культурного надбання українського народу.

В ході аналізу психолого-педагогічної літератури та сучасних досліджень відомих вітчизняних та зарубіжних науковців (А. Алексюк, Е. Белль, О. Болан, М. Брейтерман, С. Гончаренко, А. Границька, Р. Грановська, М. Данілов, В. Дяченко, С. Карплюк, Квінтіліан, Я. Колкер, Конфуцій, Я. Коменський, В. Котова, Л. Лагунова, Д. Ланкастер, И. Литвинська, М. Мкртчян, І. Підласий Є. Полат, Н. Поліванова, М. Скаткін, К. Ушинський, Г. Цукерман, Г. Щукіна, О. Ярошенко та інші), ми прийшли до висновку, що усі надбання науково-педагогічної спільноти суттєво вплинули на становлення та розвиток взаємонавчання, яке, інколи, розуміють як групову або ж колективну організаційну форму навчальної роботи.

Однак, попри накопичення значного досвіду дослідження проблеми підготовки майбутніх учителів фізико-математичного профілю на засадах взаємонавчання, ряд аспектів потребує подальшого вивчення, зокрема створення і використання педагогічної технології, яка б змогла забезпечити належний рівень готовності майбутніх учителів до своєї професійно-педагогічної діяльності.

Таким чином, виходячи із окресленої проблеми, метою нашого дослідження буде визначення особливостей технології взаємонавчання у процесі підготовки майбутніх учителів фізико-математичного профілю.

Розуміння сутності "взаємонавчання" у нашому дослідженні, неможливе без розгляду першочергового поняття, яке обумовлює його змістове наповнення – "форма організації навчання".

У тлумачному словнику С. І. Ожегова поняття "форма" подається як вид, пристрій, тип, структура, конструкція чого-небудь, обумовлена певним змістом [14, с. 801]. У "Філософському словнику" дано визначення: "внутрішня організація змісту, що... окреслює систему стійких зв'язків предмета", яке виражає внутрішній зв'язок і спосіб організації, взаємодію елементів і процесів явищ, як між собою, так і з зовнішніми умовами. Формі притаманна відносна самостійність, яка підсилюється в процесі власної історії [1, с. 358].

У педагогічній науці існують різні підходи до тлумачення й поняття "форма організації навчання". Аналіз поглядів сучасних дослідників щодо сутнісної характеристики даної категорії представлено у таблиці 1.

Сучасна педагогічна наука вирізняє загальні та конкретні форми організації процесу навчання, але усі вони так чи інакше базуються на характері міжособистісної взаємодії учасників навчального процесу та мають реальні можливості доповнення та вдосконалення за рахунок взаємопоєднання їх у бік соціальної спрямованості, врахування індивідуальних особливостей, здійснення спеціальної підготовки до спільної роботи [8].

Таблиця 1

Тлумачення поняття "форма організації навчання"

Зміст поняття	***Науковці-дослідники***
Вияв *узгодженої* діяльності, *керуючої* – вчителя й *керованої* – учнів щодо засвоєння певного змісту навчального матеріалу та оволодіння практичними способами діяльності, яке включає розподіл організаційних функцій	Ю. К. Бабанський, Н. Є. Мойсеюк, М. М. Скаткін, І. М. Чередов
Цілеспрямовану, чітко організовану, змістовну й методично забезпечену систему пізнавального та виховного *спілкування* та *відносин* у процесі взаємодії вчителя та учнів	І. Я. Бурлака, В. К. Дяченко, І. Я. Лернер, Б. Т. Лихачев
визначений *порядок* та певний *режим* пізнавальної діяльності – часовий і просторовий	Н. П. Волкова, Б. П. Єсипов, П. А. Жильцов, І. Я. Лернер, В. І. Лозова, Ю. І. Мальований, Н. Є. Мойсеюк, І. П. Підласий, М. М. Фіцула, І. М. Чередов
спосіб організації суб’єктів пізнання шляхом підбору й послідовності ланок навчальної роботи	Я. І. Бурлака, О. В. Востокова, Б. П. Єсипов, П. А. Жильцов, І. Я. Лернер, Б. Т. Лихачев, В. І. Лозова, М. А. Уфімцева
процес *досягнення* визначених *дидактичних цілей*	І. Я. Бурлака, В. К. Дяченко, М. І. Махмутов, М. А. Уфімцева, І. М. Чередов
зовнішню сторону організації навчального процесу, що характеризується кількістю учнів, часом і місцем навчання, а також порядком його здійснення	В. О. Вихрущ, С. У. Гончаренко, В. К. Дяченко, І. Я. Лернер, М. М. Скаткін

В сучасних умовах оновлення системи освіти такі можливості надає взаємонавчання, яка є особливою формою організації навчання, що спрямована на вирішення завдань освіти, здійснюється шляхом інтеграції загальних форм навчання, на засадах діяльнісного підходу, активного співробітництва та товариської взаємодопомоги суб’єктів навчання під безпосереднім та опосередкованим керівництвом учителя [10].

Ґрунтовний аналіз даної педагогічної категорії дозволив виявити особливості та переваги взаємонавчання у навчальному процесі:

•у ході реалізації взаємонавчання усвідомлюється колективна відповідальність за виконання навчальних завдань та отримується відповідна соціальна оцінка;

•організація та виконання навчальних завдань здійснюється колективом, окремими групами під опосередкованим та безпосереднім керівництвом учителя;

•діє спеціальний розподіл праці, який враховує інтереси, задатки та здібності кожного, дозволяє краще виявити себе у загальній діяльності, значно підвищує навчальну мотивацію;

•є можливість застосування на всіх рівнях навчального процесу завдяки використанню різноманітних засобів;

•проводиться постійний взаємний контроль, існує відповідальність кожного перед колективом;

•потребує особливо високого ступеня активності та самостійності суб'єктів навчального процесу, створює сприятливі умови для налагодження позитивних зв'язків у колективі [11].

Попри значні переваги, взаємонавчання у сучасній педагогічній практиці використовується не у повній мірі. Це пояснюється труднощами методичного характеру, оскільки принцип колективного характеру навчання вимагає пошуку відповідних форм організації пізнавальної діяльності.

Крім того, складність та багатогранність даної проблеми вимагає обґрунтування методологічних основ, які забезпечуватимуть технологічну підготовку майбутніх учителів інформатики до організації взаємонавчання у своїй подальшій професійно-педагогічній діяльності.

На думку М. Кларіна, Б. Блума, В. Монахова та І. Я. Лернера технологічна підготовка являє собою "...сукупність способів (методів, прийомів, операцій) педагогічної взаємодії, що створюють умови розвитку учасників педагогічного процесу й гарантують результат"; набір процедур, які поновлюють професійну діяльність викладача та гарантують кінцевий запланований результат;

систематичне втілення у практику заздалегідь спроектованого навчально-виховного процесу [2].

Аналіз значної кількості наукових джерел із окресленого питання дозволив виділити та охарактеризувати основні *критерії технологічності*:

- *системність* (наявність логіки процесу, взаємозв'язку частин, цілісність, послідовність дій суб'єктів навчальної взаємодії);
- *керованість* (можливість діагностики досягнення цілей, планування навчання на основі чіткого визначення еталону, відбору навчальних процедур, корекції);
- *ефективність* (відповідність результатам, оптимальні затрати, гарантоване досягнення певного стандарту навчання, поетапна діагностика, виявлення пізнавального прогресу);
- *відтворюваість* (можливості застосування в інших однотипних навчальних закладах іншими суб'єктами) [11].

У ході розробки експериментальної технології підготовки майбутніх учителів фізико-математичного профілю до організації взаємонавчання учнів основної школи аналізувалися та враховувалися недоліки традиційної системи фахової підготовки студентів педагогічних спеціальностей, яка не стимулює прагнення до інновацій, знижує самостійність, фахову активність, веде до формалізму і догматизму у подальшій практичній діяльності, нівелює професійну індивідуальність майбутнього педагога.

Проведений семантичний та змістово-логічний аналіз сутності педагогічних технологій дозволив сформулювати означення поняття "*технологія підготовки майбутніх учителів фізико-математичного профілю до організації взаємонавчання учнів основної школи*", яку розглядаємо, як особливу організацію професійної підготовки, що має ознаки педагогізації, технологізації, та інтеграції, пробуджує позитивну соціальну мотивацію суб'єктів навчального процесу, сприяє розвитку професійних знань, оволодінню способами використання форм, методів, засобів колективної роботи; готує до реалізації взаємонавчання у майбутній професійно-педагогічній діяльності [10].

Залежно від вимог до змісту, результату та форм, які використовуються як основні в авторській технології, її розробка виконана на *концептуальному, змістовому та процесуальному* рівнях. На кожному із них побудова технології спрямована на об'єкт або на його окремі структурні компоненти, зв'язки між ними; змінює предмет та завдання розробки; збільшує ступінь конкретизації вимог до розв'язання та форм подання [10].

Концептуальний рівень – орієнтований на створення загальної концепції технології (визначення основних теоретичних підходів до її побудови) або прогностичне (модельне) представлення, що передбачає опору на певну наукову концепцію, яка включає філософське, психологічне, дидактичне та соціально-педагогічне обґрунтування досягнення освітньої мети.

Основними концептуальними підходами до розробки авторської технології підготовки майбутніх учителів фізико-математичного профілю до організації взаємонавчання учнів основної школи є – *педагогізація, технологізація та інтеграція* навчальної діяльності студентів вищих навчальних закладів освіти шляхом використання колективних форм навчання в процесі професійної підготовки з метою подальшого їх втілення у власну педагогічну діяльність.

Для успішного оволодіння знаннями необхідно забезпечити всіх, а особливо слабких студентів, позитивною мотивацією навчання; пробудити внутрішні, суб'єктивні чинники стимулювання пізнавального інтересу, інтелектуального зростання, усвідомлення сутності учіння. Це досягається шляхом формування свідомого ставлення до процесу оволодіння знаннями, відбору способів та процедур процесу пізнання, включенням студентів у своєрідну навчальну педагогічно-орієнтовану діяльність, яка активно сприяє становленню їх професійної готовності.

Відтак, *педагогізація* діяльності кожного учасника занять полягає в тому, що під час спеціально організованої пізнавальної діяльності він одночасно виступає в ролі як об'єкта, так і суб'єкта навчання. Таким чином, зберігаються основні традиційні вчительсько-учнівські зв’язки всередині колективу, які побудовані на поетапній професійно-педагогічній взаємодії, необхідними умовами впровадження якої є добровільність і партнерство, визначальними ознаками – особистісний і професійний розвиток як викладачів, так і студентів, а результатом – якість фундаментальної підготовки майбутніх учителів фізико-математичного профілю.

Інтеграція досягається шляхом розповсюдження ідей взаємонавчання, загальновідомих та авторських форм, а також методів колективної роботи на інші навчальні дисципліни з урахуванням їх специфіки. Такий підхід дозволяє ефективно реалізувати сучасні вимоги до освіченості фахівця, організації навчання на високому рівні складності, сутність якого полягає у включенні студентів в активну пізнавальну діяльність шляхом постійного збагачення їх різноманітним змістом наукових знань. Альтернативні навчальні технології повинні розвиватися також завдяки *інтеграції* та оптимальному поєднанню різних форм організації навчальної діяльності учнів. Залежно від мети навчання, складності та обсягу матеріалу добираються оптимальні варіанти поєднання загальних форм навчальної роботи, причому кожна наступна має компенсувати недоліки попередньої для раціонального використання часу й підвищення результативності навчального процесу в цілому.

Технологізація заснована на розумінні та використанні ефекту спільності та регламентованої поетапності дій перетворюючого характеру, що поширюється на всі компоненти, змістовну й технологічну варіативність діяльності. Ідея технологізації втілюється завдяки розробці й впровадженню в навчальний процес спеціально створених засобів та *активних* форм – *локальних технологій* – особливої організації пізнавальної діяльності, при якій навчальні заняття супроводжуються, направляються, підтримуються, способами, що активізують самостійну пізнавальну діяльність, сприяють становленню самостійності мислення, активності пізнавальних процесів. Проведення навчальних занять з елементами технологізації, забезпечує включення кожного студента в активну пізнавальну діяльність на всіх етапах професійного становлення завдяки вдосконаленню відомих та розробці нових локальних технологій.

Змістовий рівень безпосередньо представляє розроблену технологію, можливості її використання, функціональне призначення та включає наступні основні компоненти: суб'єкти навчальної діяльності, загальні цілі, принципи їх ефективного досягнення, змістове наповнення.

Для визначення сутності змістового компоненту в межах досліджуваної проблеми важливу роль відіграють *позиції суб'єктів* навчальної діяльності, які включені у суб'єкт-суб'єктну взаємодію. Роль педагога у класно-урочній системі та при організації й використанні колективного способу навчання істотно відрізняється, а оскільки однією з провідних концептуальних ідей даної технології є педагогізація навчальної діяльності, то *функції* у більшості параметрів збігаються (табл. 2) [11].

Крім того, всі суб'єкти, побудованої таким чином взаємодії, починають з часом виконувати й додаткові функції: *аналітичну* – постійний аналіз і самоаналіз діяльності та отриманої інформації; *діагностичну* – оцінка, самооцінка та передбачення майбутніх ускладнень *проектувальну* – прийняття участі та самостійне планування майбутньої взаємодії; *інформаційну* – є носіями основної та додаткової пізнавальної інформації; *самоосвітню* – стимулювання до вдосконалення подальшої освіти та самоосвіти.

Мета запропонованої технології – створити комфортні умови для спільної активної пізнавальної діяльності щодо сприйняття та засвоєння нової інформації шляхом її багаторазового відтворення в процесі взаємодії суб'єктів або застосування у різних видах діяльності. Такий підхід дозволяє поєднувати розробку та обґрунтування двох типів технологій (викладацької та навчально-пізнавальної діяльності суб'єктів), формує здатність майбутніх учителів не тільки передавати знання, але й вчити своїх учнів здобувати їх самостійно, вміти використовувати їх для вирішення нових пізнавальних та практичних завдань.

Таблиця 2

Порівняльна характеристика функцій суб'єктів пізнавальної діяльності під час взаємонавчання

Функції	***Викладача***	***Студентів***
Навчальна	• досконале знання предмету; • необов'язковість систематичного викладу нового матеріалу; • надання зразків та способів діяльності; • включення студентів у самостійне вивчення теми; • сприяння та допомога у формуванні системи ЗУН	• виконання обов'язків викладача; • навчання інших у поєднанні з самостійною роботою; • здобуттям знань, формування умінь та навичок
Розвивальна	розвиток навичок самостійної роботи та пізнавальної сфери суб'єктів навчальної діяльності	
Виховна	формування у студентів умінь та здібностей педагогічного спілкування, позитивних рис та якостей	формування у спільній діяльності позитивних рис та якостей
Організаторська	• налаштування на навчальну роботу; • організація освітнього та самоосвітнього студентського колективу	• розподіл та контроль навчального часу; • організація власної роботи та своїх товаришів

Для підвищення ефективності технологій колективного навчання пропонуються наступні *принципи* з практики роботи досвідчених учителів:

- орієнтації на кінцевий результат;
- невідкладності й безперервності передачі знань (інформації);
- загального співробітництва, взаєморозуміння та товариської взаємодопомоги;
- розмаїтості завдань, функцій та способів досягнення результату;
- індивідуалізації темпів і прийомів навчання;
- опори на суб'єктивний досвід учнів;

- педагогізації освітнього середовища та соціалізації кожного з учасників пізнавальної діяльності;
- інтеграції процесу навчання;
- спрямованості на саморозвиток, самореалізацію, творчість;
- усвідомлення ходу своїх розумових дій;
- включення емоційної сфери у процесі навчання;
- формування дослідницьких умінь, працювати з інформацією, приймати оптимальні рішення;
- розвитку комунікативних здібностей, підвищення рівня комунікативної культури;
- чергування індивідуальної та колективної роботи;
- рівності всіх учасників спільної діяльності;
- вибору виду діяльності, способів рішення;
- моральної відповідальності кожного за вибір, процес і результат діяльності;
- мовного розвитку в процесі діалогічного спілкування.

Обсяг та зміст матеріалу з навчального предмету визначається шляхом попереднього його структурування та поділу на фрагменти – навчальні елементи, що підлягають засвоєнню. Поряд із цим створюється комплект програм-опитувальників та план роботи студента на декілька занять, який складається з теоретичної та практичної частини, включає також самостійні, контрольні та залікові роботи. Особливістю відбору навчальної інформації є також її інтеграція, що полягає в поєднанні змісту предметів педагогічного циклу, додаткової інформації з інших джерел, використанні окремих тем з предметів за фахом для досягнення мети взаємонавчання

Процесуальний рівень передбачає безпосереднє впровадження розробленої технології в реальний навчальний процес, з використанням конкретних форм, методів, засобів та надання конкретних рекомендацій щодо практичного застосування. До його складу належать такі компоненти: *організація* *навчального процесу* відповідно до поставлених *цілей*; *методи і форми* навчальної діяльності учнів та викладачів; *управління* навчальним процесом.

Цикл навчання в межах педагогічної технології підготовки майбутніх учителів фізико-математичного профілю до організації взаємонавчання учнів основної школи є традиційним (постановка цілей, їх конкретизація; зміст, сукупність навчальних процедур і коректування відповідно до результатів зворотного зв'язку; підсумкова оцінка результатів і постановка нової мети), але має свої особливості.

Визначення та подальша *конкретизація цілей* відбувається діагностично на основі представлених дидактичних завдань та дотримання наступних вимог: адресність, конкретність, забезпечення участі виконавців у її постановці, помірна складність, послідовність та наступність, операційність, можливість контролю. Етапність упровадження авторської технології вимагає також їх конкретизацію відповідно до особливостей, спрямованості та конкретних завдань етапу її впровадження.

Особливістю *змісту* пропонованої технології є можливість індивідуалізації змісту і темпів навчання, що досягається оперативним зворотним зв'язком, корекцією дій та операцій при розв'язанні конкретних завдань, здійсненням постійного контролю та самоконтролю. Застосування гнучких алгоритмів у ході засвоєння навчального матеріалу, передбачає попереднє проектування фахової підготовки, але не заперечує можливості реалізації творчої пізнавальної діяльності суб'єктів, урахування їх інтелектуальних здібностей, що гарантує досягнення високого рівня якості знань розвитку особистісних рис.

Навчально-виховний процес реалізується через використання *загальних форм організації навчання*, які характеризуються кількістю учнів, змістом, цільовими установками, дидактичними засобами та застосовуються як в процесі використання традиційних форм, так і під час самостійної роботи. Пізнавальна діяльність у процесі функціонування даної технології *забезпечується в основному колективною формою*, яка вважається провідною, але в комбінації відомих методик і прийомів, спрямованих на розвиток пізнавального інтересу; використанням та поєднанням інших загальних форм (індивідуальна, парна, групова, фронтальна); розробкою різноманітних наочних та дидактичних матеріалів, використанням інформаційних технологій.

Колективна форма реалізується як за методиками Рівіна-Дяченка, інших педагогів (взаємні диктанти в парах змінного складу, робота в парах змінного складу за картками, взаємообмін завданнями, робота з опитувальниками, обернена методика тощо), так і за розробленими у власній практичній діяльності.

Навчальне співробітництво в процесі взаємонавчання складається зі сукупності взаємодій та загальногрупової взаємодії у колективі, що допомагає збереженню особистісних контактів та зв'язків на суб'єкт-суб'єктній основі. При реалізації даної технології можуть використовуватися наступні *різновиди колективної роботи*:

▪динамічна пара, яка об'єднує двох студентів (за власним бажанням або призначенням викладача), що обмінюються ролями "вчитель" – "учень". Так можуть працювати два слабких, два сильних, сильний і слабкий за умови гарних взаємин між ними;

▪статична пара, в якій кожен студент працює самостійно та обмінюється змістом інформації з іншим, що сидить поруч, або разом виконують спільне завдання;

▪варіаційна четвірка, в якій кожен член групи одержує "своє" завдання, виконує його, аналізує разом із викладачем, проводить взаємонавчання за описаною вище схемою роботи в динамічній четвірці. В результаті такої роботи кожен студент засвоює чотири порції навчального змісту;

▪мала група, що об'єднує до семи студентів під час виконання загального або диференційованого завдання. В роботі, яка організована таким чином, існують особливі правила, виникає спільне інтелектуальне поле, насичена взаємодія між учасниками пізнавальної діяльності, що змушує їх сумлінно одержувати ефективні результати [3, 4].

Отже, навчальні завдання можуть виконуватися окремими студентами, парами, групами під прямим та опосередкованим керівництвом викладача з кінцевою колективною відповідальністю. Доцільне комбінування методик і організаційних форм дозволяє гнучко будувати навчальні заняття, головна мета яких – розвиток способів мислення, комунікативних умінь, різноманітних способів комунікативної взаємодії, навичок колективної праці, загальновизнаних норм поведінки.

Поділ праці між учасниками пізнавальної діяльності робить реальним співробітництво, взаємодопомогу, особистісну відповідальність кожного за доручену справу. Спільна зацікавленість у загальному успіху стає підставою для формування почуття колективізму, ствердження себе як індивідуальності. Застосування таких підходів до організації навчання в процесі реалізації запропонованої технології активно формує знання, уміння та навички, які необхідні у майбутній професійній діяльності та дозволяє отримати наступні види *результатів*:

▪*організаційні*: у ході відтворення навчального матеріалу послідовно відбувається зміна позицій (з позиції учня на позицію вчителя); постійна зміна робочого місця учасників, робочий шум, праця в індивідуальному темпі; відпадає необхідність у стримуванні темпу просування одних й у спонуканні інших; розвиваються організаційні здібності.

▪*дидактичні*: в основі навчальної діяльності лежить співробітництво всіх учасників; засвоєння й застосування відбувається майже одночасно на основі мобілізації й актуалізації попереднього досвіду; обговорення однієї інформації з декількома змінними партнерами збільшує кількість асоціативних зв’язків, що забезпечує більш міцне та повне засвоєння; відповідність змісту навчального матеріалу до індивідуальних можливостей; самостійність, активність та ініціативність.

▪*розвивальні*: студенти стають одночасно і суб’єктом, і об’єктом навчання; вчаться виступати, міркувати, доводити; приймаючи участь у вправах, які регулярно повторюються; вдосконалюються навички логічного мислення, розуміння; у процесі мови розвиваються навички мислення; активізується робота пам’яті (слухова, зорова, моторна, вербальна).

▪*виховні:* відбувається формування навичок спілкування у навчальному діалозі; виникають взаємини відповідальної залежності; підвищується відповідальності не лише за свої успіхи, але й за результати колективної праці; формується адекватна самооцінка власних можливостей; формується позитивний мікроклімат у колективі [5].

Отже, використання технології підготовки майбутніх учителів фізико-математичного профілю до організації взаємонавчання учнів основної школи у навчальному процесі вищих педагогічних навчальних закладів освіти дозволяє студентам бути суб’єктами навчально-виховного процесу, ставити перед собою ціль, планувати її досягнення, самостійно здобувати нові знання, адекватно оцінювати себе та своїх товаришів, результати власної діяльності, нести персональну відповідальність за доручену справу.

Втілення розробленої технології підготовки майбутніх учителів фізико-математичного профілю до організації взаємонавчання учнів основної школи здійснюється поетапно, відповідно до поступової реалізації основних концептуальних ідей: на *підготовчому, занурення та етапі інтеграції* (рис. 1). Розкриємо сутність кожного етапу, спираючись на характеристику виділених компонентів технології [11].

Метою першого, *підготовчого* етапу, є знайомство студентів фізико-математичного факультету з можливостями ідей колективного навчання в рамках традиційної лекційно-семінарської системи. В процесі вивчення курсів "Загальні основи педагогіки", "Теорія та методика виховної роботи" засвоюються окремі локальні технології колективної роботи. При вивченні курсу "Дидактика" студенти отримують теоретичні знання щодо організаційних форм навчання, які стають підґрунтям для свідомого використання технології взаємонавчання, її подальшого використання та вдосконалення у професійній діяльності. У курсі "Історія педагогіки" – прослідковуються причини виникнення, шляхи розвитку технологій взаємонавчання та аналізуються можливості їх подальшого вдосконалення.

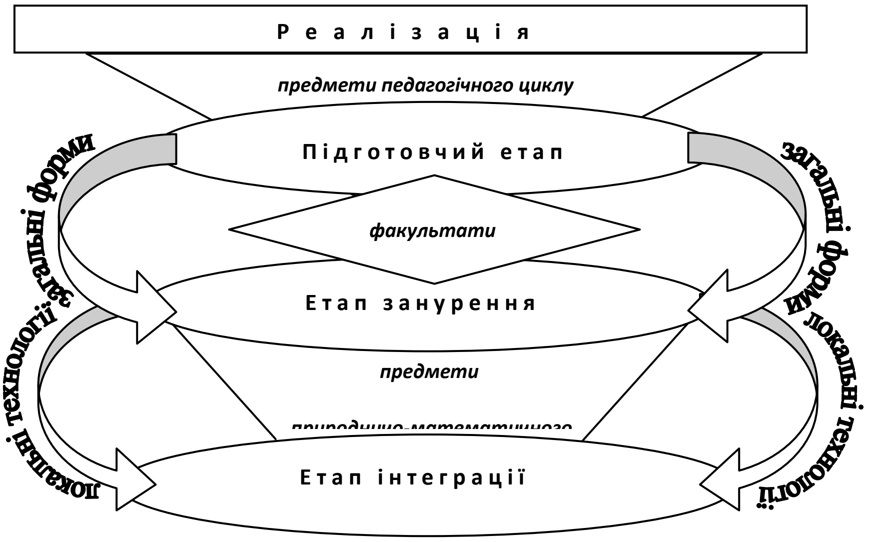


Рис. 1. Етапи реалізації технології підготовки майбутніх учителів фізико-математичного профілю до організації взаємонавчання учнів основної школи

Основною колективною формою навчання залишається *лекція*, на якій студенти одержують значну частину знань про педагогічні технології. Крім досягнення традиційних дидактичних завдань у ході лекції студентів залучають до міркування, обговорення проблем, взаємообміну думками, використання елементів взаємонавчання. Зміст лекцій, що безпосередньо пов’язаний з проблемою навчання та виховання в колективі, будується таким чином, щоб увага акцентувалася на можливостях та особливостях технології взаємонавчання та їх зв’язку з основними положеннями теорії виховання, історії педагогіки. З метою реалізації зазначених завдань спеціально підготовлені студенти виступають на лекціях з інформацією, яка розширює обізнаність інших, створює позитивну мотивацію, пробуджує інтерес до проблеми.

Поряд із традиційними, використовуються бінарні лекції, під час яких відбувається взаємопов’язана діяльність двох викладачів або викладача та студентів; лекція-діалог, у ході якої реалізуються елементи діалогу між викладачем та студентами; мозкова атака, що передбачає включення студентів у пошук швидких рішень; проблемна лекція, заснована на спільному вирішені поставлених проблемних питань; фронтальна, що дозволяє включити в роботу значну частину аудиторії та здійснити оперативний зворотній зв'язок. Такий підхід до організації та проведення лекцій дозволяє значно активізувати подальшу самостійну творчу діяльність студентів щодо підготовки до практичних занять та прищепити початкові навички колективної роботи.

Подальше включення студентів у процес взаємонавчання на підготовчому етапі відбувається на *практичних заняттях* з педагогічних дисциплін, що мають на меті розширення обсягу самостійної роботи, залучення до свідомого вивчення навчальних предметів. Продуктивною формою практичного заняття є *семінар-диспут*, перевагами використання якого, в межах запропонованої технології, є можливість висловити власну точку зору, дати оціночне судження, твердження, представити власну світоглядну позицію, що сприяє збереженню та подальшому розвитку традицій колективної роботи.

Рішення поставлених завдань здійснюється також шляхом використання різноманітних *активних методів* навчання студентів. Серед них провідне місце займають бесіда, дискусія, робота з навчально-методичною літературою (вироблення вмінь складати план, тези, схеми; виділяти найбільш важливі та складні частини навчального матеріалу), які розвивають інтелектуальні вміння, комунікативні здібності, навички самостійної роботи, що необхідні для успішного занурення в технологію взаємонавчання.

На підготовчому етапі входження в технологію взаємонавчання на практичних заняттях з педагогічних дисциплін починають також використовуватися деякі елементи *локальних технологій* в ході застосування індивідуально-групової та диференційовано-групової роботи (особливо в межах методики колективних творчих справ – КТС): мозковий штурм, ділові, рольові та імітаційні ігри.

Постійне застосування та подальше вдосконалення локальної технології *"мікровикладання"* дозволяє закріплювати суб'єкт-суб'єктні відносини взаємонавчання. Використання зазначеної форми навчальної роботи дозволяє спільно розробляти та використовувати прийоми та методи пізнавальної діяльності, виробляти загальну стратегію вирішення проблем, приймати колективні рішення, генерувати нові ідеї. Навчання у співробітництві передбачає спільну роботу студентів, для успішності якої використовуємо *алгоритми* діяльності, інструкції, пам’ятки.

Важливою формою навчальної роботи на етапі підготовки стають *консультації*, під час яких студент одержує відповіді від викладача на конкретні запитання, пояснення відповідних теоретичних положень або можливостей їх практичного застосування. Залежно від навчальної ситуації вони можуть бути індивідуальними (індивідуальні завдання, що виконують студенти) або груповими (обговорення загальних теоретичних питань з навчального предмету). В ході підготовки до занять нами застосовуються горизонтальна та вертикальна локальні технології взаємонавчання, які дозволяють індивідуальній самостійній роботі надати колективного характеру. Такий підхід дає можливість розробляти нестандартні різновиди консультації, що відбуваються у парах змінного складу (консультантом стає студент, який краще знає матеріал) або в малих групах (консультантом є викладач або студент-старшокурсник). У подальшому, проводячи консультації, використовуємо форми динамічних пар, в яких студент по черзі виступає або в ролі викладача, або отримує консультацію.

Отже, на підготовчому етапі у студентів формуються загальні уявлення про сутність ідей взаємонавчання, шляхи їх розвитку, особливості та способи їх реалізації на практиці, окреслюються умови подальшої пізнавальної діяльності.

Етап занурення передбачає активне включення студентів фізико-математичного факультету у теоретичне та практичне опанування й усвідомлення особливостей втілення ідей взаємонавчання з метою педагогізації суб’єктів спільної пізнавальної діяльност; соціалізації особистості в процесі постійної взаємодії; оволодіння специфікою використання форм та методів взаємонавчання; окреслення можливостей власної інноваційної діяльності.

Реалізація етапу відбувається у межах розробленого *факультативу* "*Сучасні технології взаємонавчання*".

Запропонований факультатив став результатом систематизації інформації про існуючі технології взаємонавчання, історію їх виникнення та розповсюдження, узагальнення передового педагогічного досвіду вчителів та авторів альтернативних технологій. Добір змісту здійснювався з урахуванням місця кожної із представлених технологій у розвитку ідеї колективного навчання, часу створення та ступеня впровадження у педагогічне середовище.

Умовами ефективності факультативу є врахування вимог суспільства до рівня підготовки випускників вищих навчальних закладів освіти, постійне відновлення й удосконалення його змісту на основі досягнень педагогічної науки та практики. Склад учасників факультативу – студенти 2, 3, 4 та 5 курсів фізико-математичного факультету, які виявили інтерес та бажання ознайомитися з технологіями взаємонавчання й отримати навички їх практичного застосування у навчальних предметах за фахом.

Основна *мета* факультативу – дати студентам знання про розмаїття технологій взаємонавчання та умови їх успішної реалізації, здійснити підготовку майбутніх фахівців до їх подальшої професійно-педагогічної інноваційної діяльності. У ході вивчення даного курсу вирішуються наступні завдання:

- формування уявлень про сутність педагогічних технологій;
- ознайомлення з виникненням та розповсюдженням ідей взаємонавчання у різні історичні епохи та у різних країнах світу;
- усвідомлення сутності та можливостей загальних форм в організації колективного навчання;
- формування потреб постійно вивчати, аналізувати, узагальнювати історичний та передовий педагогічний досвід;
- розвиток творчих здібностей, спрямованих на створення власних педагогічних технологій.

В основу успішної реалізації мети навчально-пізнавальної діяльності факультативу покладено наступні принципи:

▪варіативності конструювання педагогічного процесу шляхом інтеграції існуючих моделей, включаючи авторські розробки;

▪варіативності змісту навчального матеріалу, в якому можливе використання елементів запропонованої технології;

▪спрямованості на розвіток професійної освіти щляхом розробки різних варіантів змісту, форм, методів, засобів та умов колективного навчання;

▪індивідуального підходу – врахування можливостей, інтересів, здібностей майбутніх учителів, що спонукатиме до вдосконалення майбутньої професійної діяльності.

Навчально-тематичний план складається з 8 лекцій та 16 практичних занять, які розбиті на 2 модулі. Зміст лекцій чітко визначений, кожна з них супроводжується практичними заняттями, на яких відпрацьовуються теоретичні знання з використанням методик взаємонавчання та активних локальних технологій, що допомагає, поряд із отриманням основної та додаткової навчальної інформації, формувати вміння та навички колективної роботи. Важливими компонентами запропонованої технології є: вибір і підготовка завдань самостійної роботи, індивідуальне та колективне їх виконання студентами, подальше представлення на практичних заняттях і лекціях. До кожної теми пропонується самостійна робота, яка включає систему індивідуальних завдань розвивального характеру а також список рекомендованої літератури.

Вивчення *першого модуля* "*Теоретичні засади технологій взаємонавчання*", який реалізується протягом семестру, спрямоване на доповнення та розширення знань студентів про зміст, сутність та особливості існуючих технологій взаємонавчання. Залучення майбутніх учителів до ознайомлення з інноваційними педагогічними дослідженнями, подальшого аналізу та участі у їх колективному обговоренні є умовою активного цілеспрямованого включення в реалізацію авторської технології.

Розглянемо більш детально специфіку та особливості першого модуля. На вступній лекції-інструкції викладач готує студентів до сприймання нового матеріалу за темою та дає загальний алгоритм подальшої роботи. На наступних лекціях отримують інформацію щодо сутності та змісту педагогічних технологій, шляхи розвитку у різний час, основні особливості та класифікації. У процесі розгляду виділяються різні точки зору на способи використання та ефективність представлених технологій, аналізуються різні позиції як науковців, так і педагогів-практиків.

Лекції побудовані на основі діяльнісного підходу: студенти, за рахунок спеціальної попередньої підготовки (індивідуальні та групові завдання, ключові запитання, бібліографічні дослідження тощо), активно включаються в обговорення, надають додаткові відомості, ставлять проблемні питання, дискутують з викладачем та товаришами, що сприяє розвитку вміння аналізувати, узагальнювати й систематизувати матеріал, формує навички комунікативної взаємодії.

Теоретичний матеріал кожної лекції супроводжується його ґрунтовним засвоєнням в ході двох практичних занять. Особливістю їх у першому модулі є знайомство з сутністю, змістом та правилами роботи в межах основних та допоміжних форм – локальних технологій колективного навчання (ділові та рольові ігри, мікровикладання, огляд періодичних педагогічних видань) та їх первинне використання для засвоєння змісту навчального матеріалу.

Важливим завданням реалізації технології є вироблення вмінь працювати в парах змінного складу, що відбувається поступово, поелементно на попередньому етапі (статичні пари), під час індивідуальних та групових консультацій (динамічні пари). Таким чином, за короткий час не лише зміцнюються знання здобуті самостійно, але й збільшується їх обсяг та міцність за рахунок роботи з товаришами, які володіють іншою навчальною інформацією, відбувається підготовка до роботи у другому модулі.

Завдання *другого модулю* "*Практичне застосування технологій взаємонавчання*" полягає у включенні майбутніх учителів в активну діяльність щодо оволодіння формами, методами, засобами колективного навчання, формування вмінь критично аналізувати шляхи та способи їх використання в організації навчальних занять із природничо-математичних дисциплін та у подальший професійній діяльності.

Лекційний матеріал подається, в основному, нетрадиційним шляхом: за допомогою ділових ігор ("Лекція", "Прес-конференція") або спеціально підготовлених студентів, а також при роботі в парах змінного складу. Доповнення теоретичного матеріалу, з метою усвідомлення його практичної спрямованості, здійснюється в ході проведення екскурсій, що передбачають ознайомлення з досвідом роботи освітніх установ і окремих учителів, які реалізують повністю або частково технології взаємонавчання.

Важливим елементом будь-якого практичного заняття другого модуля є використання *методики колективного способу навчання* (КСН): заняття в парах, малих групах, методика взаємопередачі тем О. Г. Рівіна, методика взаємотренажерів, ділові ігри, моделювання навчальних ситуацій; створення банку локальних технологій тощо. Під час експериментальної роботи учасниками факультативу засвоюються також методики співробітництва "по горизонталі" – методика Рівіна, взаємний тренаж, взаємодиктанти, взаємообмін завданнями. "По вертикалі" – метод безперервної передачі знань, що полягає в організації вивчення матеріалу програми зверху вниз (сходинками), коли студенти, що випереджають засвоєння навчального матеріалу, стають викладачами та консультантами для невстигаючих [3, 4, 5]. Майбутні вчителі вчаться ставити запитання, конструювати відповіді, продумувати заперечення та репліки, проектувати виступ, будувати діалоги. В ході використання представлених локальних технологій виробляються вміння критикувати й розуміти критику, переконувати, роз’яснювати, доводити, оцінювати.

Ідеї О. Г. Рівіна та В. К. Дяченка [3, 4, 5] нами використовуються при організації та проведенні практичних занять у вигляді *ділових та рольових ігор* – з метою отримання основної та додаткової інформації із зазначеної теми, реального засвоєння майбутніми вчителями способів організації колективної діяльності в процесі розв'язання педагогічної проблеми шляхом імітації та відтворення в ролях основних видів поведінки, моделей професійної діяльності за певними, закладеними в умовах гри правилами і в умовних ситуаціях. У ході організованих занять саме в такий спосіб, виробляються вміння працювати за колективними формами організації пізнавального процесу.

Наприклад, для відпрацювання *локальної технології роботи в парах змінного складу* проводилася рольова гра "Запуск". Студенти, які поділені на групи по-чотири, отримують пакети з набором текстів та алгоритм дій. Для успішності організованої діяльності необхідно також продумувати розташування студентів, варіанти роботи, послідовність дій. Кожен спочатку працює індивідуально, вивчаючи текст, складаючи план повідомлення та запитання на розуміння прочитаного. Після чого починається робота в парах змінного складу, у процесі якої студенти повинні розповісти партнерові свій текст так, щоб він міг сам структурувати його й сформулювати висновки; задати йому питання на розуміння прослуханого тексту; спільно структурувати обговорений текст й сформулювати висновки. Студенти обмінюються інформацією, за таких умов кожен тричі змінює партнера, розповідає і сам одержує необхідну інформацію.

Така діяльність має колективний характер, у ході якої спільними зусиллями засвоюється навчальний матеріал. Розвиваються вміння слухати, ставити запитання, давати поради; виникає інтерес до спілкування й отримання нових знань, відзначається зростання почуття особистої відповідальності за рівень засвоєння матеріалу, що пояснюється. Набуття навичок згортання та розгортання навчальної інформації полегшує засвоєння й подальше запам'ятовування. Діалог мобілізує комунікативні вміння, розвивається рухливість комунікативних процесів. Робота в парах змінного складу надає також можливість здійснення індивідуального підходу, що досягається за рахунок індивідуалізованого пояснення нового матеріалу, яке відбувається багаторазово з додатковими питаннями та відповідями. Зміна ролей впливає на розвиток можливостей управління навчальним процесом: відбувається педагогізація діяльності, що допоможе у застосуванні методики в майбутній професійній діяльності.

Ефективним способом колективного обговорення навчальних проблем є організація ділової гри у вигляді *міні-конференції*. Студенти отримують спільне завдання: підібрати матеріал відповідно до теми заняття, виділити проблемні або цікаві моменти та підготуватися до його представлення. Під час виступу інші учасники отримують роздатковий матеріал (опорні схеми, роздруківки), роблять нотатки у вигляді тез, готують питання групі, яка виступає. Студенти, що виступають, вибираються групою, за бажанням, призначенням, чергою. По закінченню виступу кожна міні-група готує і задає доповідачу по одному запитанню. Ці запитання й відповіді на них виражають ступінь засвоєння навчального матеріалу студентами групи в цілому. Після закінчення міні-конференції підводять підсумки ділової гри.

У ході рольової гри відпрацьовується й локальна технологія *групової роботи*. З цією метою утворюються декілька груп (за кількістю варіантів завдань), що об’єднують учасників, які готують одну тему. Перед ними ставиться завдання обговорити й вибрати оптимальну структуру навчального тексту, підготувати виступ від групи й представити допоміжні матеріали (опорні схеми, сигнали, плани, алгоритми тощо) всім учасникам заняття. Протягом певного часу в групі ведеться обговорення змісту завдання, що дає можливість кожному студенту активно формувати навички співпраці, прийняття рішень; уміння очолювати команду, організовувати справи, керувати іншими, спрямовувати їх роботу.

Участь у процесі підготовки до виступу представника від групи сприяє процесу самовдосконалення, оскільки кожен учасник, таким чином, вивчає власні можливості, дає їм реальну оцінку, отримує задоволення від пізнавальної діяльності, відчуває комфорт під час спілкування. У ході такої діяльності студенти розвивають уміння сприймати інформацію на слух, ставити питання; вдосконалюють навички логічної аргументації. Обговорення наслідків роботи покращує навички спілкування. Складання різного роду опорних схем допомагає засвоїти навчальний матеріал на високому рівні.

На *етапі занурення* відбувається усвідомлення можливостей інтеграції загальних форм організації навчання завдяки ознайомленню, накопиченню та подальшій систематизації *локальних технологій взаємонавчання* з метою їх випробовування на практичних заняттях та свідомого використання у майбутній професійній діяльності. В ході колективної роботи можна використовувати різноманітні локальні технології, які допоможуть обговорити завдання, визначити ставлення (думку) партнера до того чи іншого питання, провести критичний аналіз роботи, сформулювати підсумок теми, яка вивчається. Під час накопичення локальних технологій відбувається їх обговорення, усвідомлення сутності та перспективності використання у професійно-педагогічній діяльності, що дозволяє розподілити їх на загальні (можливість їх використання в усіх навчальних предметах) та спеціальні (застосовуються в окремих навчальних предметах).

Такий підхід дає можливість свідомо застосовувати локальні технології при викладанні різних навчальних предметів у вищій та основній школі (під час педагогічної практики). У студентів з’являється можливість спробувати адаптувати спеціальні локальні технології до особливостей навчальних предметів за фахом, що стимулює майбутніх учителів фізико-математичного профілю до пошуку найбільш ефективного розв’язання навчальних завдань. Локальні технології, якщо вони відображають сутність майбутньої професії, формують якості фахівців, допомагають студентам відпрацьовувати професійні навички у спеціально створених умовах.

Продуктивним способом роботи в межах запропонованої технології є "*Огляд періодичної педагогічної преси*". Під час такої роботи студенти групи використовують додаткові джерела інформації: мережа-Інтернет, газети, журнали тощо. Пошук інформації може бути використаний з метою підготовки коротких відомостей за темою або цікавого доповнення до основного навчального матеріалу. Така пошуково-пізнавальна діяльність дає можливість постійно поповнювати класифікацію локальних технологій взаємонавчання та випробовувати окремі з них під час мікровикладання. Крім того, такий підхід сприяє виробленню бажання та первинних умінь розробки власних методів колективної роботи.

Звітом про участь у роботі факультативу "Сучасні технології взаємонавчання" стає написання реферату на запропоновану тематику та його захист під час підсумкової ділової гри "Прес-конференція", а також випуск студентської збірки наукових робіт. Основною перевагою використання такої форми є високий ступінь самостійності студентів, систематичність у роботі, можливість виявляти слабкі сторони в їх підготовці. Глибокий аналіз помилок викладачем та самоаналіз студентів при підведенні підсумків ділової гри знижує ймовірність їх повторення у реальній дійсності, що сприяє скороченню часу адаптації молодого фахівця до повноцінного виконання професійної діяльності. Підсумки роботи факультативу студенти оцінюють з точки зору педагогіки співробітництва, ефективності засвоєння знань, формування вмінь щодо подальшого успішного використання у майбутній професійній діяльності та при викладанні предметів за фахом.

Навчально-методичним забезпеченням факультативу є навчальні посібники з педагогіки та педагогічних технологій, сучасні наукові та методичні видання, а також розроблені та виготовлені студентами картки завдань з різних тем та навчальних предметів, картотека статей періодичних педагогічних видань з означеної теми.

Оволодіння навичками й уміннями колективної роботи потребує тривалого та систематичного тренування. Для прискорення цього процесу та підвищення його ефективності нами розроблені різноманітні *рекомендації виконання завдань, пам'ятки, опорні, схеми, алгоритми дій*. Таке методичне забезпечення допомагає зрозуміти навчальне завдання, вести контроль дій, перевірку власної роботи та своїх товаришів, надає можливість продуктивніше працювати з джерелами знань, вести самостійну практичну діяльність.

Така послідовність навчальної роботи в межах загальної технології дозволяє перейти до наступного етапу – *інтеграції,* на якому вона стає монопредметною, міжпредметною та надпредметною (або позапредметною). Це, на наш погляд, пояснюється самою сутністю колективного навчання, що полягає в можливості навчання інших у процесі багаторазової передачі інформації, міркуванні, використанні отриманих знань у різноманітних ситуаціях. Взаємонавчання є перспективним шляхом підвищення ефективності викладання будь-яких навчальних предметів, зокрема, природничо-математичного циклу.

Метою даного етапу є інтеграція локальних технологій взаємонавчання шляхом поєднання, подальшого вдосконалення, розробки авторських, використання у вивчені навчальних предметів за фахом та в майбутній професійно-педагогічній діяльності.

Розглянемо можливості та специфіку використання окремих локальних технологій взаємонавчання при викладанні фахових дисциплін у вищий школі. Елементи колективного навчання використовуються викладачами під час *лекцій* (виступи спеціально підготовлених студентів, колективний розгляд проблемних ситуацій, міні-дискусії, мозкова атака тощо). Навчальні завдання, які вирішуються в такий спосіб, дозволяють студентам та викладачу активізувати пізнавальну діяльність, сприймати інформацію, визначати рівень та якість знань з теми.

Форми взаємонавчання застосовуються викладачами кафедри фізико-математичного профілю у процесі роботи зі студентами на частині практичних і лабораторних занять зі шкільного курсу (в парах, малих групах, методика взаємопередачі тем Рівіна, методика взаємотренажерів, ділові ігри, моделювання навчальних ситуацій, створення банку власних завдань). На заняттях з інших математичних дисциплін проводять взаємодиктанти, пропонують виконання вправ за підручником на основі роботи в парах змінного складу. При роботі над темами, що заплановані для самостійної роботи, використовують поабзацне опрацювання текстів за методикою О. Г. Рівіна.

Успішно використовують викладачі кафедри *фізики* метод взаємного навчання Еріка Мазура. Його застосування надає можливість посилити сприймання навчального матеріалу завдяки частковій попередній підготовці, активному включенню у міркування, обговоренню виділених концептуальних питань, наявного зворотного зв'язку під час лекції, що допомагає в подальшому або повернуться до більш детального вивчення питання або перейти до наступного. Такий підхід допомагає кожному студенту вчитися міркувати самостійно та включатися у колективне обговорення.

Ідеї Еріка Мазура у поєднанні з локальними технологіями взаємонавчання реалізуються також на заняттях з фізики для теоретичного та практичного закріплення знань. Наприклад, у ході засвоєння теми "Магнітне поле" на першому етапі заняття ідея концептуального питання інтерпретується у завдання сформулювати запитання-відповіді, які б розкривали зміст основних понять, положень, законів теми, що дозволяє створити повне і цілісне уявлення про матеріал, що вивчається. На наступних етапах для його подальшого спільного обговорення використовуються локальні технології взаємонавчання (робота в парах, четвірках та їх поєднання), що дозволяє розглянути навчальний матеріал теми з різний боків, отримати додаткову інформацію [6, 8].

При використанні колективної роботи на практичних заняттях вирішується й завдання диференційованого підходу до вивчення *фізики*, оскільки кожен студент у групі може виконувати функції відповідно до своїх можливостей, що створює умови для особистісного розвитку кожного. Частину часу студенти присвячують самостійній роботі в парах і групах постійного й змінного складу. Така організація роботи дозволяє формувати навчально-комунікативні вміння: слухати й чути партнера, обґрунтовувати свою точку зору, формулювати й передавати думки різними способами, задавати питання. Застосування контрольно-оцінної діяльності дозволяє студентам оцінювати діяльність, обґрунтовувати оцінку та самооцінку. Елементи управлінської діяльності під час взаємонавчання формують навчально-організаційні вміння: розподіляти обов'язки серед учасників групи, самостійно планувати й здійснювати пізнавальну діяльність, брати участь у колективних формах спілкування.

Ефективно використовується на заняттях з *педагогічних* та *природничо-математичних* дисциплін відомий метод Е. Аронсона, який він назвав "*ажурна пилка*" [6, 8]. Студенти (по 4-6 осіб) об'єднуються в групи для роботи над навчальним матеріалом, що розділений на фрагменти. Кожен член групи знаходить необхідну інформацію по запропонованій темі та обмінюється зі студентами інших груп, що працюють з таким самим питанням. Відбувається "зустріч експертів", після чого неодноразово передають навчальну інформацію членам своєї групи та отримують її від них. На заключному етапі можна провести "Міні-конференцію" або загальну дискусію, де підводяться загальні підсумки.

Другим варіантом запропонованого методу може бути робота груп над спільним матеріалом. За таких умов кожен член групи отримує свою підтему та стає експертом з цього питання. Можливим *третім варіантом* – є виконання групою завдання, яке є частиною спільної теми групи. Результатом колективної роботи окремих груп є засвоєння навчального матеріалу в повному обсязі.

Інформаційні технології, що є сукупністю знань про способи та засоби організації а також сам процес навчання в умовах використання комп'ютера як технічного засобу навчання, надають можливість організувати колективну пізнавальну діяльність. За допомогою комп'ютерів як технічних засобів навчання традиційно використовують дві форми організації занять: індивідуальна (студент – комп'ютер) та групова (група студентів – один комп'ютер). У межах локальних технологій взаємонавчання колективна форма (викладач – група студентів – група комп'ютерів) забезпечує новий підхід щодо отримання та передачі інформації та може використовуватися як при вивченні окремих предметів, так і викладанні курсу інформатики.

Наведемо приклад розробленої та адаптованої локальної технології взаємонавчання "*Рух назустріч*" [9, 11], яка застосовується на лабораторних заняттях при вивченні навчальних курсів "Нові інформаційні технології" та

"Інформатика". Вона реалізується впродовж п’яті етапів, на кожному з яких студенти працюють у різній кількості та за певними правилами у загальному колі. Велика кількість учасників дозволяє відтворити навчальний матеріал багаторазово, що збільшує його запам’ятовування та розуміння. Розподіл студентів на групи та призначення експертів веде до виникнення здорової конкуренції, можливість їх зміни робить процес навчання демократичним. Використання пам’яток та рекомендації допомагає викладачу у чіткій організації діяльності, здійсненні контролю та самоконтролю.

При опрацюванні тестових матеріалів, вивченні математичних термінів, теорем, понять також можуть бути використані локальні технології взаємонавчання з використанням комп’ютерів. Робота в парах є ефективною при взаємоопитуванні, у процесі засвоєння нових понять, а також на інших етапах занять з різних навчальних предметів.

Подальше інтегрування ідей взаємонавчання у професійну діяльність відбувається під час *педагогічної практики в загальноосвітній школі*. Майбутні вчителі застосовують локальні технології колективної роботи на уроках за фахом (частково) з метою подальшого обговорення їх ефективності та доцільності використання під час спільного аналізу.

Використання ідей колективного навчання надає можливість навіть студентам зі слабкою підготовкою відчути себе в ролі лідера, що відповідає за важливу ділянку роботи, без якого неможливий загальний успіх групи. Такий підхід до організації пізнавальної діяльності посилює інтеграцію навчальних предметів, сприяє оновленню змісту освіти, інтенсифікації процесу навчання, корекції індивідуального розвитку студентів.

Пропонована авторська технологія, що побудована на основі гуманізації, демократизації, поєднання загально фахової та спеціальної підготовки майбутнього вчителя, регламентує характер спільної пізнавальної діяльності, визначає співвідношення індивідуального й колективного в ході її реалізації, обумовлює ступінь активності студентів у процесі навчання та окреслює способи керівництва з боку викладача, що у свою чергу сприяє якісній підготовці майбутніх учителів фізико-математичного профілю.

ЛІТЕРАТУРА

1. Блауберг И. В. Краткий словарь по философии / И. В. Блауберг, И. К. Панин. – М. : Политиздат, 1982. – 431 с.
2. Дичківська І. М. Інноваційні педагогічні технології : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / Ілона Миколаївна Дичківська. – К. : Академвидав, 2004. – 351, [1] с. – (Серія "Альма-матер").
3. Дьяченко В. К. Коллективно-групповые способы обучения / В. К. Дьяченко // Педагогика. – 1998. – № 2. – С. 43–45.
4. Дьяченко В. К. Коллективный способ обучения. Дидактика в диалогах / Валентин Кузьмич Дьяченко. – М. : Народное образование, 2004. – 352 с.
5. Дьяченко В. К. Новая педагогическая технология и ее звенья / В. К. Дьяченко. – Красноярск : Изд-во Красноярск. ун-та, 1994. – 182 с.
6. Карплюк С. О. Деякі аспекти проблеми організації взаємонавчання в історії зарубіжної педагогіки / С. О. Карплюк // Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців : методологія, теорія, досвід, проблеми : зб. наук. праць / редкол. : І. А. Зязюн (голова) та ін. – К.-Вінниця : ДОВ "Вінниця", 2008. – Вип. 19. – С. 41–45.
7. Карплюк С. О. Досвід Рівіна-Дяченка у проектуванні методики взаємонавчання / С. О. Карплюк // Вісник Житомирського державного університету імені Івана Франка. – Житомир : Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2009. – Вип. 43. – С. 121–125.
8. Карплюк С. О. Педагогічні технології: досвід проектування на засадах взаємонавчання : навч.-метод. посіб. для студ. та викл. / Світлана Олександрівна Карплюк; [за заг. ред. В. М. Єремєєвої]. – Житомир : Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2008. – 120 с.
9. Карплюк С. О. Проблема розробки та впровадження інноваційних освітніх технологій / С. О. Карплюк. // Вісник Житомирського державного університету імені Івана Франка. –Житомир : Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2008. – Вип. 39. – С. 118–121.
10. Карплюк С.О. Технологія підготовки майбутніх учителів до організації взаємонавчання учнів основної школи : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук : спец. 13.00.04 "Теорія і методика професійної освіти" / С. О. Карплюк. – Житомир, 2009. – 20 с.
11. Карплюк С.О. Технологія підготовки майбутніх учителів до організації взаємонавчання учнів основної школи : дис. … канд. пед.

наук : 13.00.04 / Карплюк Світлана Олександрівна. – Житомир, 2009. – 270 с
12. Концепція "Про розвиток загальної середньої освіти" // Директор школи. – 2002. – № 1 (193). – С. 11–15.
13. Національна доктрина розвитку освіти України у ХХІ столітті // Вища освіта в Україні / Нормативно-правове регулювання / за заг. ред. А. П. Зайця, В. С. Журавського. – К. : Форум, 2003. – 24 с.
14. Ожегов С. И. Словарь русского языка / С. И. Ожегов . – М. : Советская энциклопедия, 1973. – 847 с.

Карплюк Світлана Олександрівна доцент, кандидат педагогічних наук.
Дисципліни: використання педагогічних програмних засобів у професійній діяльності, програмне забезпечення ПЕОМ, інформаційно аналітичні Web-орієнтовані системи управління процесом навчання, прикладні пакети статистичної обробки, методи математичної обробки даних у педагогіці і психології, інформатика, використання педагогічних програмних засобів у професійній діяльності, програмне забезпечення ПЕОМ, інформаційно аналітичні Web-орієнтовані системи управління процесом навчання, прикладні пакети статистичної обробки, методи математичної обробки даних у педагогіці і психології, інформатика.

Франовський Анатолій Цезарович – декан факультету, доцент, кандидат фізико-математичних наук.
Наукові інтереси: диференціальна геометрія і застосування ІКТ при вивченні курсу "Диференціальна геометрія і топологія"
Дисципліни, які викладає: диференціальна геометрія і топологія

Поліщук З.П.
старший викладач

ТЕХНОЛОГІЯ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ЧИСЛОВІ МНОЖИНИ» В КУРСІ ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

Предметом вивчення навчальної дисципліни «Елементарна математика» є математичні моделі, що складають змістову основу шкільного курсу математики.

Мета навчальної дисципліни – підвищення загальної математичної культури студентів до рівня, достатнього для вивчення спеціальних математичних дисциплін і оволодіння методикою навчання математики, узагальнення знань з елементарної математики у сучасному її викладі, формування цілісного уявлення про шкільний курс математики, навчання розв'язуванню різнорівневих завдань шкільного курсу математики, завдань інтелектуальних конкурсів, олімпіад юних математиків.

Робоча програма навчальної дисципліни «Елементарна математика» включає змістовий модуль «Числа та дії над ними», інформаційний обсяг якого наступний: *натуральні числа, арифметичні дії і їх властивості; подільність натуральних чисел; розподіл простих чисел в натуральному ряді; решето Ератосфена; ділення з остачею; розв'язування нестандартних задач на подільність; відношення і пропорції; раціональні і дійсні числа та дії над ними; десяткові наближення раціональних чисел; раціональні наближення дійсних чисел.*

У результаті вивчення матеріалу змістового модуля студенти повинні

знати: логічну схему розширення поняття про число; означення та властивості дій над натуральними, раціональними, дійсними числами; ознаки подільності натуральних чисел; означення відношення, пропорції, алгоритми розв'язування основних задач на дроби;

вміти: виконувати дії над натуральними, раціональними, дійсними числами; розкладати натуральні числа на прості множники, розв'язувати задачі на подільність натуральних чисел, на дроби, розв'язувати сюжетні задачі арифметичним способом.

Пропонований матеріал спрямований на забезпечення організації самостійної роботи студентів, узагальнення, систематизацію, розширення їх теоретичних знань та формування практичних умінь і навичок при вивченні змістового модуля «Числа та дії над ними», а також може бути використаний для підготовки і проведення практичних занять з елементарної математики.

Натуральні числа

Поняття натурального числа

Існують два основних підходи до означення натуральних чисел:

- числа, що використовуються при **лічбі предметів** (*перший, другий, третій…*) – ***аксіоматичний підхід***, загальноприйнятий у більшості країн світу; формалізованим різновидом цього підходу є аксіоматичне описання системи натуральних чисел за допомогою аксіом Пеано.

Аксіоми Пеано

1. Одиниця (1) є натуральне число, яке не слідує ні за яким натуральним числом (натуральний ряд починається з 1).
2. За кожним натуральним числом n слідує одне натуральне число n' (натуральний ряд нескінченний).
3. Кожне натуральне число, крім одиниці, слідує за одним натуральним числом (у натуральному ряді немає повторень).
4. Аксіома індукції. Нехай множина ***M*** натуральних чисел така, що:

1) $1 \in M$;

2) Якщо $n \in M$, то $n' \in M$, де n' - натуральне число, що слідує безпосередньо за натуральним числом n. Тоді кожне натуральне число є елементом множини ***M***.

На аксіомі індукції ґрунтується метод доведення тверджень, який називають методом математичної індукції.

- числа для **позначення кількості предметів** (*відсутність предметів, один предмет, два предмети…*) – ***конструктивний підхід***, прийнятий у роботах Ніколя Бурбакі, де натуральне число означається як потужність скінченних множин; при такому підході, як правило, 0 відносять до натуральних чисел.

У шкільному курсі математики поняття натурального числа вводиться так. Числа 1, 2, 3, 4, 5,…, які використовуються при лічбі, називають **натуральними**. Усі натуральні числа, записані в порядку зростання, утворюють **ряд натуральних чисел (**або **натуральний ряд)**. Множину натуральних чисел позначають **N**. Множина натуральних чисел нескінченна.

Класи і розряди натуральних чисел

Натуральні числа записують за допомогою спеціальних знаків, які називають ***цифрами***. Таких цифр десять: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Запис натурального числа розбивається на групи справа наліво по 3 цифри в кожній групі. Кожна з цих груп називається **класом**; розміщені вони справа наліво в такому порядку: клас одиниць, клас тисяч, клас мільйонів, клас мільярдів і т.д.

Кожний клас має **3 розряди**: розряд одиниць, розряд десятків, розряд сотень.

Щоб прочитати багатоцифрове число, його уявно розбивають на класи, починаючи з класу одиниць. Числа кожного класу читають, починаючи зліва, як трицифрове, двоцифрове чи одноцифрове число, але при цьому додають назву класу; назва останнього класу (класу одиниць) не додається. Наприклад, число 409023263045 читають так: “чотириста дев’ять мільярдів двадцять три мільйони двісті шістдесят три тисячі сорок п’ять”.

Назви класів натурального числа

1 – одиниця

1 000 – тисяча

1 000 000 – мільйон

1 000 000 000 – мільярд (більйон)

1 000 000 000 000 – трильйон

1 000 000 000 000 000 – квадрильйон

1 000 000 000 000 000 000 – квінтильйон

1 000 000 000 000 000 000 000 – секстильйон

1 000 000 000 000 000 000 000 000 – септильйон

1 000 000 000 000 000 000 000 000 000 – октильйон

1 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 – нонильйон

1 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 – децильйон

1 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 – ундецильйон

1 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 – дуодецильйон

1 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 - тредецильйон

1 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 - кваттуордецильйон

1 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 - квіндецильйон

1 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 - седецильйон

1 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 - септдецильйон

1 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 – дуодевігінтильйон

1 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 – ундевігінтильйон

1 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 – вігінтильйон

……………………………………………………………………………………………

$1\underbrace{0...0}_{100}$ – гугол

……………………………………………………………………………………………

$10^{10^{100}}$ – гуголплекс

Запис натурального числа у вигляді суми розрядних доданків

Якщо запис натурального числа має $n\ (n \geq 1)$ цифр, то це число називають $n-$значним. Будь-яке $n-$значне число можна подати у вигляді:

$\overline{a_1 a_2 ... a_n} = a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + ... + a_n$, де $a_1, a_2, ..., a_n$ – цифри десяткової системи числення.

Дії над натуральними числами

Додавання. Властивості додавання

Збільшення натурального числа на декілька одиниць здійснюють дією *додавання*.

Числа, які додають, називають *доданками*. Одержаний результат називають *сумою*.

У записі $a + b = c$ числа a і b – доданки, число c – сума. Вираз $a + b$ також називають сумою.

Переставна (комутативна) властивість

Від перестановки доданків сума не змінюється : $a+b=b+a$.

Сполучна (асоціативна) властивість

Якщо до суми двох чисел додати третє число, то отримаємо таке ж значення, що й коли до першого числа додати суму другого і третього чисел: $(a+b)+c=a+(b+c)$

Зміна суми при зміні доданків

Якщо збільшити (зменшити) один із доданків на кілька одиниць, то на стільки ж одиниць збільшиться (зменшиться) сума.

Додавання нуля

Якщо один з двох доданків дорівнює нулю, то сума дорівнює іншому доданку: $a+0=a$ *і* $0+a=a$.

Письмове додавання

Натуральні числа додають за розрядами. При цьому потрібно враховувати, що десять одиниць кожного розряду дають одну одиницю вищого розряду. Тому додавання починають з найнижчого розряду, тобто з розряду одиниць.

Віднімання. Властивості віднімання

Дію, за допомогою якої за відомою сумою двох доданків і одним з них знаходять інший доданок, називають дією *віднімання*.

Число, від якого віднімають, називають *зменшуваним*; число, яке віднімають, називають *від'ємником*; одержаний результат називають *різницею*.

Віднімання є дією, оберненою до дії додавання.

Якщо $x+b=a$, де a – сума, x – невідомий доданок, b – відомий доданок, то $x=a-b$. У записі $x=a-b$ число a називають *зменшуваним,* b – *від'ємником.* Число x, а також вираз $a-b$ називають *різницею*.

Різниця $a-b$ показує, на скільки число a більше за число b або на скільки число b менше від числа a.

На множині натуральних чисел дія віднімання не завжди можлива, тобто не завжди різниця двох натуральних чисел є натуральним числом. Різниця двох натуральних чисел є натуральним числом, якщо зменшуване більше за від'ємник.

Правило віднімання суми

Щоб від числа відняти суму двох доданків, можна від цього числа відняти один з доданків і потім від результату відняти другий доданок: $a-(b+c)=(a-b)-c$

Правило додавання різниці

Щоб додати до числа різницю двох чисел, можна додати до цього числа зменшуване і потім від результату відняти від'ємник: $a+(b-c)=(a+b)-c$

Правило віднімання різниці

Щоб відняти від числа різницю двох чисел, можна від цього числа відняти зменшуване і потім до результату додати від'ємник: $a-(b-c)=(a-b)+c$

Це правило можна застосувати у випадку, коли дане число більше за зменшуване ($a>b$).

Правило віднімання числа від суми

Щоб від суми двох доданків відняти число, можна відняти це число від одного з доданків і потім до результату додати другий доданок:

$$(a+b)-c=(a-c)+b \text{ або } (a+b)-c=(b-c)+a$$

Це правило можна застосувати у випадку, коли хоча б один з доданків не менший, ніж від'ємник ($a \geq c$ або $b \geq c$).

Зміна різниці при зміні зменшуваного або від'ємника

Якщо збільшити (зменшити) зменшуване на кілька одиниць, то на стільки ж одиниць збільшиться (зменшиться) різниця.

Якщо збільшити (зменшити) від'ємник на кілька одиниць, то на стільки ж одиниць зменшиться (збільшиться) різниця.

Віднімання нуля і рівних чисел

Різниця будь-якого числа a і нуля дорівнює числу a: $a-0=a$.

Різниця двох рівних чисел дорівнює нулю: $a-a=0$.

Письмове віднімання

Віднімають багатоцифрові числа за розрядами. Якщо число якогось розряду зменшуваного менше від відповідного числа від'ємника, то «позичаємо» одиницю вищого розряду.

Множення. Властивості множення

Помножити число a на число b, що не дорівнює 1, означає знайти суму b доданків, кожний з яких дорівнює a: $a \cdot b = \underbrace{a + a + a + ... + a}_{b \text{ доданків}}$

Числа a і b називають *множниками*, а вираз $a \cdot b$ і його значення називають *добутком*. Добутком двох натуральних чисел є натуральне число

Переставна (комутативна) властивість

Від перестановки множників добуток не змінюється : $a \cdot b = b \cdot a$.

Сполучна (асоціативна) властивість

Якщо добуток двох чисел помножити на третє число, то отримаємо таке ж значення, якби перше число помножити на добуток другого та третього чисел:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Розподільна (дистрибутивна) властивість

Щоб помножити суму на число, можна кожний доданок помножити на це число і знайдені добутки додати: $(a + b) \cdot c = ac + bc$

Щоб помножити різницю на число, можна зменшуване і від'ємник помножити на це число і від першого добутку відняти другий: $(a - b) \cdot c = ac - bc$

Зміна добутку при зміні множників

Якщо збільшити один із множників у кілька разів, то у стільки ж разів збільшиться добуток.

Особливі випадки множення

Якщо один із двох множників дорівнює 1, то добуток дорівнює іншому множнику: $a \cdot 1 = a$

Якщо один із двох множників дорівнює нулю, то добуток дорівнює нулю: $a \cdot 0 = 0$

Якщо добуток дорівнює нулю, то хоча б один із множників дорівнює нулю.

Множення натуральних чисел на розрядну одиницю

Щоб помножити натуральне число на розрядну одиницю (10, 100, 1000,…), потрібно приписати до цього числа праворуч стільки нулів, скільки їх є в розрядній одиниці.

Множення натуральних чисел, які закінчуються нулями

Щоб помножити натуральні числа, які закінчуються нулями, можна:

- відкинути нулі та перемножити утворені числа;
- до одержаного добутку дописати праворуч стільки нулів, скільки їх відкинули в усіх множниках разом.

Письмове множення

Для множення багатоцифрових чисел користуються правилами множення у стовпчик, які ґрунтуються на використанні запису числа у вигляді суми розрядних доданків і розподільної властивості множення.

Якщо множити у стовпчик, то один або кілька рядків складатимуться з нулів, ці рядки не впливають на результат додавання, тому у записі їх пропускають.

Якщо множники закінчуються нулями, то на ці нулі не множать, їх просто приписують праворуч до результату множення чисел з відкинутими нулями.

Ділення. Властивості ділення

Ділення є дією, оберненою до дії множення, за допомогою якої за відомим добутком і одним із множників знаходять другий множник. Запис $a:b=c$ означає, що $c\cdot b=a$. Тут a *– ділене,* b *– дільник,* c *– частка.*

Частка показує, у скільки разів ділене більше, ніж дільник.

Поділити число a на число b означає знайти таке число c, що $c\cdot b=a$.

Правило ділення суми на число

Щоб поділити суму на число, можна кожний доданок поділити на це число (якщо це можливо) і знайдені частки додати: $(a+b):c=a:c+b:c$

Правило ділення різниці на число

Щоб поділити різницю на число, можна зменшуване і від'ємник поділити на це число (якщо це можливо) і від першої частки відняти другу: $(a-b):c=a:c-b:c$

Ділення добутку на число

Щоб поділити добуток на число, можна один із множників поділити на це число(якщо це можливо), і знайдену частку помножити на інший множник: $(a\cdot b):c=a:c\cdot b$

Ділення числа на добуток

Щоб поділити число на добуток, можна це число поділити на один із множників, і знайдену частку поділити на інший множник: $a:(b\cdot c)=a:c:b$

Зміна частки при зміні діленого чи дільника

Якщо збільшити ділене (дільник) у кілька разів, то у стільки ж разів збільшиться (зменшиться) частка.

Особливі випадки ділення

Частка двох рівних чисел дорівнює одиниці: $a:a=1$

Якщо будь-яке число поділити на 1, то частка дорівнює діленому: $a:1=a$

Якщо нуль поділити на будь-яке, відмінне від нуля число, то частка дорівнює нулю: $0:a=0$

Ділення натуральних чисел на розрядну одиницю

Щоб поділити натуральне число, що закінчується нулями, на розрядну одиницю (10, 100, 1000,…), потрібно відкинути в цьому числі праворуч стільки нулів, скільки їх є в розрядній одиниці.

Письмове ділення

Письмове ділення включає наступні операції:

- визначення першого неповного діленого;
- визначення найвищого розряду частки;
- визначення кількості цифр в частці;
- виконання ділення з остачею під час ділення неповного діленого на дільник;
- перевірка правильності знайденої цифри частки;

•утворення наступного неповного діленого.

Подільність націло та її властивості

Число a ділиться націло на число b, якщо існує таке число c, що $a = bc$.

Якщо число a ділиться націло на число b, то пишуть: $a \vdots b$.

Властивості подільності:

1) $a \vdots a$.
2) $0 \vdots a$.
3) Якщо $a \vdots b$ то $ka \vdots b$.
4) Якщо $a \vdots b$ і $b \vdots c$, то $a \vdots c$.
5) Якщо $a \vdots m$ і $b \vdots n$, то $ab \vdots mn$.
6) Якщо $a \vdots c$ і $b \vdots c$, то $(a \pm b) \vdots c$.
7) Із n послідовних натуральних чисел $a, a+1, a+2, ..., a+n-1$ одне і тільки одне ділиться на n.

Ділення з остачею

Якщо ділене дорівнює a, а дільник – b, то завжди існують такі числа c і r, що $a = bc + r$, де $r < b$. Число c називають неповною часткою, r – остачею.

Якщо при цьому $r = 0$, то $a = bc$, тобто число a ділиться як на число b, так і на число c.

Записують так: 343272:382= 898 (ост. 236) або $343272 = 898 \cdot 382 + 236$, де 343272 – ділене, 382 – дільник, 898 – неповна частка, 236 – остача.

Отже, щоб знайти ділене, ділячи з остачею, потрібно неповну частку помножити на дільник і до знайденого добутку додати остачу.

Теорема. Числа a і b при діленні на число m дають однакові остачі тоді і тільки тоді, коли $(a-b) \vdots m$.

Подільність натуральних чисел

Будь-яке натуральне число, на яке ділиться дане натуральне число, називається *дільником* цього числа.

Будь-яке натуральне число, яке ділиться на дане натуральне число, називається *кратним* даному числу.

Кожне натуральне число n має безліч кратних, найменшим з яких є саме число n.

Числа, що діляться на 2, називають *парними,* а числа, що на 2 не діляться, – *непарними*.

Для того, щоб дізнатися, чи ділиться натуральне число a на натуральне число b, не обов'язково виконувати дію ділення, а досить скористатися ознаками подільності.

Ознаки подільності

Ознака подільності суми.

Якщо кожен із доданків ділиться на дане натуральне число, то і сума ділиться на це число.

Ознака подільності добутку.

Якщо хоч один із множників ділиться на дане натуральне число, то й добуток ділиться на це число.

Ознака подільності на 2

Натуральне число ділиться на 2 тоді і тільки тоді, коли його запис закінчується одноцифровим парним числом.

Ознака подільності на 5

Натуральне число ділиться на 5 тоді і тільки тоді, коли його запис закінчується цифрою 0 або 5.

Ознака подільності на 10

Натуральне число ділиться на 10 тоді і тільки тоді, коли його запис закінчується цифрою 0.

Ознака подільності на 3

Натуральне число ділиться на 3 тоді і тільки тоді, коли сума його цифр ділиться на 3.

Ознака подільності на 9

Натуральне число ділиться на 9 тоді і тільки тоді, коли сума його цифр ділиться на 9.

Ознака подільності на 6

Натуральне число ділиться на 6 тоді і тільки тоді, коли воно ділиться одночасно на 2 і на 3.

Ознака подільності на 4

Натуральне число ділиться на 4 тоді і тільки тоді, коли число, утворене двома його останніми цифрами, ділиться на 4.

Ознака подільності на 25

Натуральне число ділиться на 25 тоді і тільки тоді, коли число, утворене двома його останніми цифрами, ділиться на 25.

Ознака подільності на 7

Натуральне число ділиться на 7, якщо потроєна кількість десятків, додана до кількості одиниць, ділиться на 7.

Ознаки подільності на 8

Якщо число, утворене трьома останніми цифрами даного числа, ділиться на 8, то і дане число ділиться на 8.

На 8 ділиться кожне парне трицифрове число, у якого двоцифрове число, утворене цифрами сотень і десятків, додане до половини числа одиниць, ділиться на 4.

Ознаки подільності на 11

1. Якщо сума цифр даного числа через одну дорівнює сумі решти цифр через одну, то дане число ділиться на 11.

2. Якщо різниця суми цифр даного числа, що стоять на парних місцях і суми цифр, що стоять на непарних місцях, ділиться на 11, то і дане число ділиться на 11.

3. Число $M = 10a + b$ ділиться на 11 тоді і тільки тоді, коли різниця ($a - b$) ділиться на 11, тобто різниця між числом десятків даного числа і числом його одиниць ділиться на 11.

Загальна ознака подільності

Для того, щоб ціле число ділилось на дане число, необхідно і достатньо, щоб сума добутків цифр числа на остачі, одержані від ділення відповідних степенів числа 10 на дане число, ділилася на це число.

Приклад Перевіримо, чи ділиться число 578 935 на 7.

Число 578 935 можна представити в такому вигляді:

$$578935 = 5\cdot10^5 + 7\cdot10^4 + 8\cdot10^3 + 9\cdot10^2 + 3\cdot10 + 5$$

В правій частині рівності маємо суму добутків цифр даного числа на відповідні степені числа 10.

Знайдемо остачі від ділення чисел $10^5, 10^4, 10^3, 10^2, 10^1, 10^0$ на 7.

Маємо:

$10^5 = 14285\cdot7 + 5$ остача 5

$10^4 = 1428\cdot7 + 4$ остача 4

$10^3 = 142\cdot7 + 6$ остача 6

$10^2 = 14\cdot7 + 2$ остача 2

$10 = 1\cdot7 + 3$ остача 3

$1 = 0\cdot7 + 1$ остача 1.

$$578935 = 5\cdot10^5 + 7\cdot10^4 + 8\cdot10^3 + 9\cdot10^2 + 3\cdot10 + 5 = 5\cdot(14285\cdot7+5) + 7\cdot(1428\cdot7+4) +$$
$$+ 8\cdot(142\cdot7+6) + 9\cdot(14\cdot7+2) + 3\cdot(1\cdot7+3) + 5\cdot1 = 7\cdot(5\cdot14285 + 1428\cdot7 + 142\cdot8 + 14\cdot9 + 3\cdot1) +$$
$$+ (5\cdot5 + 7\cdot4 + 8\cdot6 + 9\cdot2 + 3\cdot3 + 5\cdot1)$$

Перший доданок ділиться на **7**. Щоб число 578 935 ділилось на **7**, необхідно і достатньо, щоб і другий доданок ділився на **7.**

$5\cdot5 + 7\cdot4 + 8\cdot6 + 9\cdot2 + 3\cdot3 + 5\cdot1 = 133$. Число 133 ділиться на 7. Отже, 578 935 $\vdots$ 7.

- *Узагальнена ознака подільності багатоцифрових чисел на групи простих чисел.*

І група – це всі цілі множники р числа $d = 10^n + 1,\ n \in N$.

Щоб визначити подільність даного числа на будь-яке з чисел р, треба:

а) розбити дане число справа наліво на грані по n цифр

(кожному р відповідає своє n; крайня ліва грань може мати цифр менше n);

б) додати грані через одну, починаючи з крайньої правої;

в) додати інші грані;

г) від більшої суми відняти меншу.

Якщо результат ділиться (не ділиться) на р, то на р ділиться (не ділиться) і дане число.

II група – це всі цілі множники р числа $d = 10^n - 1$, n – непарні натуральні числа.

Щоб визначити подільність якого-небудь числа на будь-яке з цих чисел р, треба:

а) розбити дане число справа наліво (від одиниць) на грані по n цифр (кожному р відповідає своє n, крайня ліва грань може мати цифр менше n);

б) усі грані додати;

Якщо знайдений результат ділиться (не ділиться) на p, то ділиться (не ділиться) на p і дане число.

Зауваження: число, у якому всі n розрядів – одиниці (починаючи з n = 3), також ділиться на відповідне р.

Приклад Перевірити, чи ділиться число 837 362 172 504 831 на числа 73 і 137.

Числа 73 і 137 є цілими множниками числа $d = 10^n + 1$, при $n = 4$, тобто числа 10001.

1. Розіб'ємо дане число справа наліво на грані по 4 цифри.

837 |3621 |7250 |4831

2. Додаємо грані через одну, починаючи з крайньої правої. 4831+3621=8452

3. Додаємо інші грані. 837+7250=8087

4. Від більшої суми віднімаємо меншу.8452-8087=365

5. Перевіряємо, чи ділиться результат на 73. 365:73=5

6. Перевіряємо, чи ділиться результат на 137. 365:137$\approx$2,7

Згідно ознаки число 837 362 172 504 831 ділиться на 73 і не ділиться на 137.

Приклад Перевірити, чи ділиться число 50209 на 37.

Число 37 є цілим множником числа $d = 10^n - 1$ при $n = 3$, тобто числа 999.

1. Розіб'ємо дане число справа наліво на грані по 3 цифри. 50 |209

2. Додаємо усі грані. 50+209=259

3. Перевіряємо, чи ділиться сума граней на 37. 259:37=7

Згідно ознаки число 50209 ділиться на 37.

Прості і складені числа

Натуральне число, відмінне від одиниці, називають *простим*, якщо воно має тільки два різних натуральних дільники: одиницю і саме це число.

Натуральне число, яке має більше, ніж два дільники, називають *складеним*.

Властивості простих чисел

1. Число 1 не є ні простим, ні складеним.
2. Найменшим простим числом є число 2.
3. Множина простих чисел є нескінченною, тобто найбільшого простого числа не існує.
4. Кожне просте число, більше трьох, можна записати у вигляді $6k+1$ або $6k-1$, де $k \in N$.

Для того щоб натуральне число $n>1$ було простим, необхідно і достатньо, щоб число $(n-1)!+1$ ділилося націло на n.

5. Складене число n має не менше одного простого дільника, що не перевищує $\sqrt{n}$.
6. Якщо натуральне число n, відмінне від 1, не ділиться на жодне просте число, що не перевищує $\sqrt{n}$, то воно просте.

Решето́ Ератосфе́на – простий стародавній алгоритм знаходження всіх простих чисел, менших за деяке натуральне числа n, що був створений давньогрецьким математиком Ератосфеном.

Якщо потрібно знайти всі прості числа, менші за певне число n, то:

1. Виписують всі числа від 1 до n.
2. Перше просте число – два. Підкреслюємо його і викреслюємо всі числа, які діляться на два (4, 6, 8 …).
3. Наступне незакреслене число 3 є простим. Підкреслюємо його і викреслюємо всі числа, які діляться на три (6, 9, 12 …).
4. Підкреслюємо наступне незакреслене число 5, яке є простим і

т.д.

Це викреслювання продовжимо до тих пір, доки не дійдемо до першого простого числа, не меншого $\sqrt{n}$.

У такий спосіб серед чисел, що не перевищують n, можна висіяти усі прості числа:

$\cancel{1}$	$\underline{2}$	$\underline{3}$	$\cancel{4}$	$\underline{5}$	$\cancel{6}$	$\underline{7}$	$\cancel{8}$	$\cancel{9}$	$\cancel{10}$
$\underline{11}$	$\cancel{12}$	$\underline{13}$	$\cancel{14}$	$\cancel{15}$	$\cancel{16}$	$\underline{17}$	$\cancel{18}$	$\underline{19}$	$\cancel{20}$
$\cancel{21}$	$\cancel{22}$	$\underline{23}$	$\cancel{24}$	$\cancel{25}$	$\cancel{26}$	$\cancel{27}$	$\cancel{28}$	$\underline{29}$	$\cancel{30}$
$\underline{31}$	$\cancel{32}$	$\cancel{33}$	$\cancel{34}$	$\cancel{35}$	$\cancel{36}$	$\underline{37}$	$\cancel{38}$	$\cancel{39}$	$\cancel{40}$
$\underline{41}$	$\cancel{42}$	$\underline{43}$	$\cancel{44}$	$\cancel{45}$	$\cancel{46}$	$\underline{47}$	$\cancel{48}$	$\cancel{49}$	$\cancel{50}$

Основна теорема арифметики. Будь-яке натуральне число, відмінне від 1, або є простим, або можна єдиним чином (з точністю до порядку множників) подати у вигляді добутку простих чисел.

Розклад числа на прості множники можна записати у вигляді $n = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}$, де $n_1, n_2, \ldots, n_k$ - натуральні числа; $p_1, p_2, \ldots, p_k$ - різні прості числа. Такий запис називають *канонічним* розкладом натурального числа на прості множники.

Під час розкладання чисел на прості множники використовують ознаки подільності та користуються спеціальною схемою.

$$\begin{array}{r|l} 3144 & 2 \\ 1572 & 2 \\ 786 & 2 \\ 393 & 3 \\ 131 & 131 \\ 1 & \end{array}$$

Отже, $3144 = 2^3 \cdot 3 \cdot 131$.

Найбільший спільний дільник

Якщо кожне з натуральних чисел a, b ділиться на натуральне число c, то c називається спільним дільником чисел a, b. Будь-які два натуральні числа a, b мають принаймні один спільний дільник – число 1.

Найбільше натуральне число, на яке ділиться кожне з даних чисел, називають *найбільшим спільним дільником* цих чисел.

Найбільший спільний дільник чисел a і b позначають так: НСД (a, b).

Наприклад, НСД (15, 20) = 5, НСД (11, 25) = 1.

Якщо найбільший спільний дільник двох натуральних чисел дорівнює 1, то їх називають *взаємно простими*. Числа 11 і 25 – взаємно прості.

Очевидно, що будь-які два простих числа є взаємно простими.

Правило знаходження НСД

Щоб знайти найбільший спільний дільник двох чисел, потрібно розкласти ці числа на прості множники і знайти добуток їх спільних множників.

Є спосіб знаходження НСД без попереднього розкладання чисел на множники – **алгоритм Евкліда**.

Алгоритм Евкліда

Щоб знайти НСД двох натуральних чисел, треба більше число поділити на менше, потім менше число поділити на остачу від ділення, а тоді остачу від першого ділення поділити на остачу від другого ділення і т.д. Остання відмінна від нуля остача і буде НСД даних чисел.

Цей алгоритм зручно виконувати за допомогою ділення «кутом».

Властивості НСД

1. Якщо число b є дільником числа a, то НСД $(a, b) = b$.

2. Якщо $a > b$, то НСД (a, b)=НСД $(a - b, b)$.

3. Якщо $a = bq + r$, де $0 < r < b$, то НСД (a, b)=НСД (b, r).

Найменше спільне кратне

Якщо натуральне число c ділиться на кожне з натуральних чисел a і b, то c називається спільним кратним чисел a, b. Найменше з усіх спільних кратних даних чисел називають *найменшим спільним кратним* цих чисел.

Найменше спільне кратне чисел a і b позначають так: НСК (a, b).

Наприклад, НСК (15, 20) = 60, НСК (11, 25) = 275.

Правило знаходження НСК

Щоб знайти найменше спільне кратне двох чисел потрібно кожне з них розкласти на прості множники і розклад одного з них помножити на ті множники іншого числа, яких немає в розкладі першого.

Властивості НСК

1. Якщо число a є дільником числа b, то НСК $(a, b) = b$.

2. Якщо НСД $(a, b) = 1$, то НСК$(a, b) = a \cdot b$.

3. НСК (a, b) є дільником будь-якого спільного кратного чисел a і b.

Зв'язок між НСД і НСК

$$\boxed{НСК(a; b) \cdot НСД(a; b) = a \cdot b}$$

Дробові числа

Звичайні дроби

Числа, які використовують для позначення кількох частин цілої величини, називають *дробовими*. Наприклад, $\frac{1}{5}, \frac{3}{3}, \frac{5}{7}, \frac{13}{12}$. Ці числа записані *звичайними дробами*.

Звичайні дроби записуються за допомогою двох натуральних чисел і горизонтальної риски. Риска означає ділення цілого на кілька рівних частин.

Число, записане під рискою, називають *знаменником дробу*. Знаменник вказує, на скільки рівних частин поділено ціле (одиницю). Число, записане над рискою, називають *чисельником дробу*. Чисельник вказує, скільки рівних частин цілого (одиниці) взято.

Частка від ділення одного числа на інше дорівнює дробу, чисельник якого дорівнює діленому, а знаменник – дільнику. Результат ділення двох натуральних чисел може бути натуральним або дробовим числом.

Отже, звичайний дріб – це число виду $\frac{m}{n}$, де m, n – натуральні числа; m – чисельник дробу, n – знаменник дробу.

Правильним називається звичайний дріб, чисельник якого менший за знаменник.

Неправильним називається звичайний дріб, чисельник якого більший за знаменник або дорівнює йому.

У неправильному дробі завжди можна виділити *цілу частину*.

Щоб виділити цілу і дробову частини з неправильного дробу, потрібно чисельник поділити на знаменник. Одержана неповна частка буде цілою частиною дробу, остача – чисельником дробової частини, а знаменник неправильного дробу – знаменником дробової частини.

Числа, які мають цілу і дробову частину, яка є звичайним дробом, називаються ***мішаними числами***.

Кожне мішане число дорівнює відповідному неправильному дробу.

Щоб мішане число перетворити у неправильний дріб, потрібно цілу частину помножити на знаменник дробової частини і до отриманого добутку додати чисельник дробової частини. Ця сума є чисельником відповідного неправильного дробу, а знаменник дорівнює знаменнику дробової частини мішаного числа. Правильні та неправильні дроби і мішані числа – це дробові числа.

Основна властивість дробу

Якщо чисельник і знаменник дробу помножити або поділити на одне й те ж саме натуральне число, то одержимо дріб, що дорівнює даному.

Зведення дробу до нового знаменника

Щоб звести дріб до нового знаменника, потрібно:

- ✓ знайти *додатковий множник*, поділивши новий знаменник на знаменник даного дробу;
- ✓ помножити чисельник і знаменник даного дробу на додатковий множник.

Скорочення дробу

Ділення чисельника і знаменника дробу на їх спільний дільник, відмінний від одиниці, називають скороченням дробу.

Дріб, чисельник і знаменник якого – взаємно прості числа, називають нескоротним.

Якщо скоротити дріб на найбільший спільний дільник чисельника і знаменника, то отримаємо нескоротний дріб.

Зведення дробів до спільного знаменника

Спільний знаменник двох дробів – це спільне кратне їх знаменників.

Найменший спільний знаменник двох дробів – це найменше спільне кратне їх знаменників.

Щоб звести дроби до найменшого спільного знаменника, потрібно:

- ✓ знайти найменше спільне кратне знаменників;
- ✓ знайти додаткові множники для кожного дробу, поділивши НСК знаменників на знаменник кожного дробу;
- ✓ чисельник і знаменник кожного дробу помножити на відповідний додатковий множник.

Порівняння звичайних дробів

Із *двох звичайних дробів з однаковими знаменниками* більший той, у якого чисельник більший; і менший той, у якого чисельник менший. Із *двох звичайних дробів з однаковими чисельниками* більший той, знаменник якого менший; і менший той, знаменник якого більший.

Усі правильні дроби менші від 1. Правильний дріб, у якого чисельник і знаменник рівні, дорівнює 1. Неправильний дріб, у якого чисельник більший від знаменника, більший від 1. Щоб порівняти дроби з різними чисельниками і знаменниками, досить звести її до спільного знаменника, а потім застосувати правило порівняння дробів з однаковими знаменниками. Із двох мішаних чисел більшим є те, у якого ціла частина більша. Якщо два мішані числа мають однакові цілі частини, то порівнюємо їх дробові частини. Із двох мішаних чисел, цілі частини яких рівні, більшим буде те, дробова частина якого більша.

Додавання звичайних дробів

Щоб *додати дроби з однаковими знаменниками*, потрібно додати їхні чисельники і суму записати в чисельнику, а знаменник залишити той самий.

Щоб *додати дроби з різними знаменниками*, потрібно:

- ✓ звести дроби до найменшого спільного знаменника;
- ✓ додати одержані дроби з однаковими знаменниками.

Якщо в результаті додавання дробів одержимо скоротний дріб, то потрібно виконати його скорочення.

Якщо в результаті додавання дробів одержимо неправильний дріб, то потрібно перетворити його у мішане число.

Сумою двох мішаних чисел є мішане число, ціла частина якого є сумою цілих частин доданків, а дробова частина є сумою дробових частин доданків.

Якщо в результаті додавання одержимо мішане число, дробова частина якого є неправильним дробом, треба виділити з неї цілу частину і додати її до цілої частини мішаного числа.

Віднімання звичайних дробів

Щоб *відняти дроби з однаковими знаменниками*, потрібно від чисельника зменшуваного відняти чисельник від'ємника і різницю записати в чисельнику, а знаменник залишити той самий.

Щоб *відняти дроби з різними знаменниками*, потрібно:

- ✓ звести дроби до найменшого спільного знаменника;
- ✓ відняти одержані дроби з однаковими знаменниками.

Якщо в результаті віднімання дробів одержимо скоротний дріб, то потрібно виконати його скорочення.

Щоб *від одиниці відняти звичайний дріб*, треба одиницю подати у вигляді неправильного дробу з однаковими чисельником і знаменником, що дорівнюють знаменнику від'ємника, і відняти дроби з однаковими знаменниками.

Різницею двох мішаних чисел є мішане число, ціла частина якого є різницею цілих частин зменшуваного і від'ємника, а дробова частина є різницею дробових частин зменшуваного і від'ємника.

Множення звичайних дробів

Добутком двох звичайних дробів є дріб, чисельник якого дорівнює добутку чисельників цих дробів, а знаменник – добутку їх знаменників.

Щоб помножити звичайний дріб на натуральне число, потрібно натуральне число записати у вигляді неправильного дробу зі знаменником 1 і застосувати правило множення дробів.

Щоб помножити мішані числа, потрібно записати ці числа у вигляді неправильних дробів і застосувати правило множення дробів.

Множення мішаного числа на натуральне число зручно виконувати, використовуючи розподільний закон множення.

Правило. Щоб знайти дріб від числа, потрібно число помножити на цей дріб.

Два числа, добуток яких дорівнює 1, називають *взаємно оберненими*.

Наприклад, числа $\frac{5}{7}$ і $\frac{7}{5}$ – взаємно обернені, бо $\frac{5}{7}\cdot\frac{7}{5}=\frac{5\cdot 7}{7\cdot 5}=1$; число $\frac{5}{7}$ називають оберненим до числа $\frac{7}{5}$, а число $\frac{7}{5}$ – оберненим до числа $\frac{5}{7}$.

Число, обернене до 1, є саме число 1. Числа, оберненого 0, не існує.

Якщо n – натуральне число, то оберненим до нього є число $\frac{1}{n}$.

Ділення звичайних дробів

Щоб поділити один дріб на інший, потрібно ділене помножити на число, обернене до дільника.

Особливі випадки ділення. $1:\frac{a}{b}=\frac{b}{a}$; $0:\frac{a}{b}=0$

Правило. Щоб знайти число за даним значенням його дробу, потрібно це значення поділити на дріб.

Перетворення звичайних дробів у десяткові

Періодичні десяткові дроби

Звичайний дріб можна розглядати як частку від ділення чисельника на знаменник.

Щоб перетворити звичайний дріб у десятковий, потрібно чисельник поділити на знаменник.

$\frac{3}{5}=3:5=1{,}6$ $\quad\frac{1}{9}=1:9=0{,}111\ldots$ $\quad\frac{1}{6}=1:6=0{,}166\ldots$

1,6 – скінченний десятковий дріб;

0,111…; 0,166… – нескінченні періодичні десяткові дроби.

Група цифр, що повторюється, називається періодом дробу.

Періодичні дроби прийнято записувати так: 0,(1); 0,1(6) і читати: «нуль цілих і один у періоді»; «нуль цілих одна десята і шість у періоді».

Якщо період починається одразу після коми, то дріб називається чистим періодичним. Якщо період починається не одразу після коми, то дріб називається змішаним періодичним.

Дріб 0,(1) – чистий періодичний десятковий дріб, а дріб 0,1(6) – змішаний періодичний десятковий дріб.

Якщо в розкладі знаменника звичайного нескоротного дробу на прості множники є лише числа 2 і 5, то такий дріб перетворюється у скінченний десятковий дріб.

Якщо в розкладі знаменника звичайного нескоротного дробу на прості множники, крім чисел 2 і 5, є інші числа, то такий дріб перетворюється у нескінченний періодичний десятковий дріб.

Будь-який звичайний дріб можна перетворити або у скінченний десятковий дріб, або у нескінченний періодичний десятковий дріб.

Десяткове наближення звичайного дробу

Щоб знайти десяткове наближення звичайного дробу до потрібного розряду, необхідно:

1) виконати ділення чисельника на знаменник до наступного розряду;
2) отриманий десятковий дріб округлити до потрібного розряду.

Десяткові дроби

Звичайні дроби, знаменники яких є степенями числа 10, називають десятковими дробами.

Десяткові дроби можна записувати за правилами, аналогічними до правил запису натуральних чисел у позиційній десятковій системі числення:

$$\frac{8}{10}=0{,}8 \qquad \frac{3}{1000}=0{,}003 \qquad 17\frac{24}{1000}=17{,}024.$$

Запис кожного десяткового дробу складається із двох частин – цілої та дробової. Ліворуч від коми стоять цифри цілої частини, праворуч – цифри дробової частини. Цифри дробової частини називають десятковими знаками.

Вважають, що ціла частина правильного дробу дорівнює 0. Дробова частина містить стільки цифр, скільки нулів у знаменнику відповідного звичайного дробу. Якщо в чисельнику звичайного дробу цифр менше, ніж нулів у знаменнику, то в десятковому дробі після коми дописують стільки нулів, щоб кількість цифр після коми дорівнювала кількості нулів у знаменнику звичайного дробу.

Порівняння десяткових дробів

Якщо до десяткового дробу дописати праворуч нуль або кілька нулів, то одержимо дріб, який дорівнює даному.

Якщо деякий десятковий дріб закінчується нулями, то ці нулі можна відкинути і отримаємо дріб, який дорівнює даному.

Десяткові дроби порівнюють за правилами, аналогічними до правил порівняння натуральних чисел, тобто порозрядно, починаючи з найстаршого розряду.

Із двох десяткових дробів більший той, у якого більша ціла частина. Якщо десяткові дроби мають рівні цілі частини, то порівнюють дробові частини, зрівнявши у них кількість цифр за допомогою приписування нулів справа: більшим буде той дріб, у якого більше число десятих; якщо десяті частини рівні, то більшим буде той дріб, у якого більше число сотих і т. д.

Округлення десяткових дробів

Округлюючи десятковий дріб до певного розряду, всі цифри, записані за цим розрядом, замінюють нулями або відкидають, якщо вони стоять після коми.

Якщо першою цифрою за цим розрядом є 0, 1, 2, 3, 4, то останню залишену цифру не змінюють. Якщо ж першою цифрою за цим розрядом є 5, 6, 7, 8, 9, то останню залишену цифру збільшують на 1.

Додавання десяткових дробів

Щоб додати два десяткові дроби, потрібно:

1) записати числа так, щоб однакові розряди були записані один під одним, і кома стояла під комою;

2) додати десяткові дроби так, як і натуральні числа, не зважаючи на коми;

3) у сумі кому поставити під комою.

Приклад

Обчислити: 576,4208 + 35,846.

Розв’язання

1. У доданках зрівняємо кількість знаків після коми	576,4208 + 35,8460
2. Доданки запишемо один під одним так, щоб кома стояла під комою	576,4208 + 35,8460
3. Додаємо дроби за правилом додавання натуральних чисел	576,4208 + 35,8460 612 2668
4. У знайденій сумі поставимо кому під комами в доданках	576,4208 + 35,8460 612,2668
5. Записуємо відповідь	576,4208 + 35,846=612,2668

Віднімання десяткових дробів

Щоб відняти два десяткові дроби, потрібно:

1) підписати від’ємник під зменшуваним так, щоб однакові розряди були записані один під одним, і кома стояла під комою;

2) відняти десяткові дроби так, як і натуральні числа, не зважаючи на коми;

3) у різниці кому поставити під комою.

Приклад

Обчислити: 576,4208 – 35,846.

Розв’язання

1. Зрівняємо кількість знаків після коми у зменшуваного і від'ємника	576,4208 – 35,8460
2. Числа запишемо одне під одним так, щоб кома стояла під комою	576,4208 – 35,8460
3. Віднімаємо десяткові дроби за правилом віднімання натуральних чисел	576,4208 – 35,8460 540 5748
4. Поставимо кому під комами у зменшуваному і від'ємнику	576,4208 – 35,8460 540,5748
5. Записуємо відповідь	576,4208 – 35,846=540,5748

Додаючи і віднімаючи дроби з різною кількістю десяткових знаків, цю кількість можна зрівняти, дописавши нулі. Нулі можна не дописувати, а подумки уявляти їх на тих місцях, де немає розрядних одиниць.

Множення десяткових дробів

Щоб помножити два десяткові дроби, потрібно:

1) не зважаючи на коми, виконати множення цих чисел як натуральних;

2) у добутку відокремити праворуч комою стільки десяткових знаків, скільки їх мають обидва множники разом.

Приклад Обчислити: 576,4208·35,846.

Розв’язання

1. Виконуємо множення даних чисел як натуральних, не зважаючи на коми	576,4208 × 35,846 34585248 23056832 + 46113664 28821040 17292624 206623799968
2. Відокремлюємо праворуч комою стільки десяткових знаків, скільки їх мають обидва множники разом	576,4208 × 35,846 34585248 23056832 + 46113664 28821040 17292624 20662,3799968
3. Записуємо відповідь	576,4208·35,846=20662,3799968

Окремі випадки множення десяткових дробів

Щоб помножити десятковий дріб на 10, 100, 1000 і т. д., потрібно перенести в ньому кому праворуч на одну, дві, три і т. д. цифри.

Щоб помножити десятковий дріб на 0,1, 0,01, 0,001 і т. д., потрібно перенести в ньому кому ліворуч на одну, дві, три і т. д. цифри.

Ділення десяткових дробів

Ділення десяткового дробу на натуральне число

Ділення десяткового дробу на натуральне число виконується так само, як ділення натуральних чисел, тільки після закінчення ділення цілої частини потрібно в частці поставити кому.

Якщо ціла частина діленого менша за дільник, то ціла частина частки дорівнює нулю.

При діленні десяткового дробу на 10, 100, 1000 і т. д. потрібно перенести кому ліворуч на одну, дві, три і т. д. цифри.

Ділення на десятковий дріб

Щоб поділити число на десятковий дріб, потрібно в діленому і дільнику перенести кому праворуч на стільки десяткових знаків, скільки їх є в дільнику, а потім виконати ділення на натуральне число.

Перетворення десяткового дробу у звичайний дріб

Щоб перетворити скінченний десятковий дріб у звичайний, потрібно в чисельнику дробу записати число, яке стоїть після коми, а в знаменнику одиницю з нулями, причому нулів повинно бути стільки, скільки десяткових знаків.

Щоб перетворити періодичний десятковий дріб у звичайний, потрібно від числа, що стоїть до другого періоду відняти число, що стоїть до першого періоду, і записати цю різницю в чисельнику, а в знаменнику записати цифру 9 стільки разів, скільки цифр в періоді, і після дев'яток дописати стільки нулів, скільки цифр між комою і першим періодом. Символічно це правило записується так.

а) чистого $0,\left(d_1d_2d_3\ldots d_n\right)=\dfrac{d_1d_2d_3\ldots d_n}{10^n-1}=\dfrac{d_1d_2d_3\ldots d_n}{\underbrace{999\ldots 9}_{n}}$

Приклад $0,(7)=\dfrac{7}{9}$; $0,(117)=\dfrac{117}{999}=\dfrac{13}{111}$.

б) змішаного

$$0,d_1d_2d_3\ldots d_k\left(d_{k+1}d_{k+2}d_{k+3}\ldots d_n\right)=\frac{d_1d_2d_3\ldots d_n-d_1d_2d_3\ldots d_k}{(10^{n-k}-1)\cdot 10^k}=\frac{d_1d_2d_3\ldots d_n-d_1d_2d_3\ldots d_k}{\underbrace{999\ldots 9}_{n-k}\underbrace{000\ldots 0}_{k}}$$

де $d_1,d_2,\ldots,d_n$ - цифри десяткової системи числення, $n\in N, k\in N, k<n$.

Приклад $0,35(7)=\dfrac{357-35}{900}=\dfrac{322}{900}=\dfrac{161}{450}$;

$0,6(117)=\dfrac{6117-6}{9990}=\dfrac{6111}{9990}=\dfrac{679}{1110}$.

Раціональні числа

Для позначення числових значень величин, які можуть змінюватися у двох протилежних напрямках, використовують *додатні* та *від'ємні* числа.

Числа +7; +5,8; $+\frac{1}{3}$, тобто числа зі знаком «+», називають додатними.

Числа -11; -3,1; $-2\frac{5}{8}$, тобто числа зі знаком «-», називають від'ємними.

При записі додатних чисел знак «+», як правило, опускають, розуміючи при цьому, що +7=7, +5,8=5,8, $+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$.

Усі додатні числа і нуль називають *невід'ємними* числами.

Усі від'ємні числа і нуль називають *недодатними* числами.

Два числа, що відрізняються одне від одного лише знаком, називають *протилежними* числами.

Натуральні числа, протилежні їм числа і число нуль називають *цілими* числами. Множину цілих чисел позначають Z.

Додатні числа (цілі та дробові), від'ємні числа (цілі та дробові) і число нуль називають ***раціональними числами***. Множину раціональних чисел позначають Q.

Кожне раціональне число можна подати у вигляді нескоротного дробу $\frac{m}{n}$, де m – ціле, n – натуральне число.

Кожне раціональне число можна подати у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу і навпаки, кожний нескінченний періодичний десятковий дріб є записом деякого раціонального числа.

Будь-який періодичний десятковий дріб, який має своїм періодом дев'ятку, дорівнює нескінченному десятковому дробу з періодом нуль, у якого десятковий розряд, що передує періоду, збільшений на одиницю порівняно з відповідним розрядом першого дробу.

Наприклад, нескінченні періодичні дроби 0,6(9) і 0,7(0) є записом одного й того самого раціонального числа $\frac{7}{10}$. Дійсно, ураховуючи, що сума нескінченно спадної геометричної прогресії з першим членом a_1 і знаменником q обчислюється за формулою $S=\frac{a_1}{1-q}$ маємо:

$$0{,}6(9)=0{,}6999\ldots=\frac{6}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\frac{9}{10000}+\ldots=\frac{6}{10}+\frac{\frac{9}{100}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{6}{10}+\frac{1}{10}=\frac{7}{10}$$

У подальшому, записуючи раціональні числа за допомогою нескінченних періодичних десяткових дробів, домовимося не розглядати нескінченні періодичні дроби, період яких дорівнює дев’яти.

Порівняння раціональних чисел

- Будь-яке додатне число більше від нуля.
- Будь-яке від’ємне число менше від нуля.
- Будь-яке від’ємне число менше від будь-якого додатного числа.
- Із двох від’ємних чисел меншим є те, модуль якого більший.

Додавання раціональних чисел

Щоб додати два від’ємні числа, потрібно додати їхні модулі й поставити перед одержаним числом знак «-»: –15+(–89)= –104

Щоб додати два числа з різними знаками, потрібно від більшого модуля відняти менший і поставити перед одержаним числом знак того доданка, модуль якого більший: –33+67=34

Сума двох протилежних чисел дорівнює нулю: $a+(-a)=0$

Віднімання раціональних чисел

Щоб від одного числа відняти інше, досить до зменшуваного додати число, протилежне від’ємнику: $a-b=a+(-b)$; 27–(–56)=27+56=83

Множення раціональних чисел

Добутком двох чисел з різними знаками є число від’ємне; модуль добутку дорівнює добутку модулів множників: $-13\cdot 26=-338$

Добутком двох від’ємних чисел є число додатне; модуль добутку дорівнює добутку модулів множників: $-13\cdot(-26)=338$

Ділення раціональних чисел

Часткою двох від'ємних чисел є число додатне. Щоб знайти модуль частки, потрібно модуль діленого поділити на модуль дільника: $-338:(-13)=26$

Часткою двох чисел з різними знаками є число від'ємне. Щоб знайти модуль частки, потрібно модуль діленого поділити на модуль дільника: $338:(-13)=-26$

Стандартний вигляд числа

Стандартним виглядом числа називають його запис у вигляді добутку $a\cdot10^n$, де $1\le a<10,\ n\in Z$.

Число n називають порядком числа, записаного у стандартному вигляді.

Дійсні числа

Числа, які не є раціональними, називають *ірраціональними*.

Жодне ірраціональне число не можна подати у вигляді дробу $\frac{m}{n}$, де m – ціле, n – натуральне число, а значить і у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу.

Ірраціональні числа – це нескінченні неперіодичні десяткові дроби.

Теорема 1. Не існує раціонального числа, квадрат якого дорівнює 2.

Теорема 2. Сума ірраціонального та раціонального чисел є число ірраціональне.

Теорема 3. Добуток ірраціонального та раціонального чисел є число ірраціональне.

Теорема 4. Між двома раціональними числами існує ірраціональне число.

Наприклад, $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, e, \sin 1^\circ$ – ірраціональні числа.

Множину ірраціональних чисел позначають I.

Щоб довести, що дане число α – ірраціональне, потрібно показати, що його не можна представити у вигляді дробу $\frac{m}{n}$, де m – ціле, n – натуральне число, тобто у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу.

Об’єднання множин раціональних та ірраціональних чисел називають множиною *дійсних* чисел.

Множину дійсних чисел позначають R.

Кожне дійсне число можна записати у вигляді нескінченного десяткового дробу: раціональні числа – у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу, ірраціональні – у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу.

Піднесення до степеня та добування кореня

Показник, p / Основа, a	$p \in N, p > 1$	$p = 1$	$p = 0$	$p \in Z_-$	$p = \frac{m}{n}$, *де* $m \in Z$, $n \in N$, $n \geq 2$	$p \in \boldsymbol{I}$
$a > 0$	$a^p = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{p\ \text{разів}}$	a	1	$a^p = \frac{1}{a^{-p}}$	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$a^p = \lim\limits_{r_n \to p} a^{r_n}$, де r_n– послідовність раціональних чисел
$a = 0$	0	0	Не існує	Не існує	$0^p = 0$, якщо $p>0$	$0^p = 0$, якщо $p>0$
$a < 0$	$a^p = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{p\ \text{разів}}$	a	1	$a^p = \frac{1}{a^{-p}}$	Не існує	Не існує

Корінь n-го степеня з числа

Коренем n-го степеня з числа a називається таке число, n-ий степінь якого дорівнює a. Арифметичним коренем *n-го* степеня з невід’ємного числа a називається таке невід’ємне число, n-ий степінь якого дорівнює a. Арифметичний корінь n-го степеня позначається так: $\sqrt[n]{a}$. Для порівняння дійсних чисел і виконання дій над ними у випадку, коли хоча б одне з них не є раціональним, використовують наближені значення цих чисел.

Відношення і пропорції

Відношенням двох чисел, які не дорівнюють нулю, називають частку цих чисел. Відношення чисел a і b вказує, у скільки разів число a більше за число b або яку частину число a становить від числа b. У відношенні $\frac{a}{b}$ числа a і b називають *членами відношення*, число a – *попереднім* членом відношення, число b – *наступним*.

Основна властивість відношення. Якщо кожен з членів відношення помножити або поділити на одне й те ж саме число, відмінне від нуля, то відношення не зміниться. Відношення дробових чисел можна замінити відношенням натуральних чисел.

Ділення числа на частини, прямо пропорційні даним числам

Якщо $y = kx$, де k – коефіцієнт пропорційності (стала величина), то $\frac{y}{x} = k$, тобто відношення залишається незмінним. Такі величини називаються прямо пропорційними.

Правило. Щоб поділити число на частини, прямо пропорційні даним числам, треба поділити це число на суму даних чисел і результат помножити на кожне з них. Зокрема, якщо поділити число a на частини, прямо пропорційні числам m і n, то дістанемо числа $\frac{am}{m+n}$ і $\frac{an}{m+n}$.

Ділення числа на частини, обернено пропорційні даним числам

Якщо $y = \frac{k}{x}$, де k – коефіцієнт пропорційності (стала величина), то $y \cdot x = k$, тобто добуток залишається незмінним. Такі величини називаються обернено пропорційними.

Правило. Щоб поділити число на частини, обернено пропорційні даним числам, треба поділити це число на частини, прямо пропорційні числам, оберненим до даних. Зокрема, якщо поділити число a на частини, обернено пропорційні числам m і n, то дістанемо числа $\frac{an}{m+n}$ і $\frac{am}{m+n}$.

Рівність двох відношень називають *пропорцією*. Записують пропорцію так:

$a:b=c:d$ або $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Ці записи читають так: «відношення a до b дорівнює відношенню c до d», «a відноситься до b, як c відноситься до d». У пропорції $a:b=c:d$ $\left(\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\right)$ числа a і d називають *крайніми* членами пропорції, а числа b і c – *середніми* членами пропорції Якщо значення лівої і правої частин пропорції рівні, то пропорція називається *правильною*.

Основна властивість пропорції. У правильній пропорції добуток крайніх членів дорівнює добутку середніх членів. Тобто, якщо пропорція $a:b=c:d$ $\left(\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\right)$ правильна, то $ad=bc.$ Правильне і обернене твердження: якщо добуток крайніх членів дорівнює добутку середніх членів, то ця пропорція правильна.

Похідні пропорції

Якщо пропорція $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ правильна, то правильними будуть пропорції:

$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$; $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$; $\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$; $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$; $\frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+d}$; $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$, якщо $a\neq b, c\neq d$.

Якщо пропорції $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$ і $\frac{b}{c}=\frac{n}{p}$ – правильні, то $a:b:c=m:n:p$ або $\frac{a}{m}=\frac{b}{n}=\frac{c}{p}$. Одержані рівності називаються *подвоєними пропорціями*.

Розв’язування пропорцій

Щоб знайти крайній член правильної пропорції $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, потрібно добуток її середніх членів поділити на інший крайній член: $a=\frac{bc}{d}$; $d=\frac{bc}{a}$.

Щоб знайти середній член правильної пропорції $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, потрібно добуток її крайніх членів поділити на інший середній член: $b=\frac{ad}{c}$; $c=\frac{ad}{d}$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бевз Г. П. Довідник з математики. Посібник для учнів / Г. П. Бевз. – К. : Радянська школа, 1981. – 263 с.
2. Вибрані питання елементарної математики / [За ред. чл. –кор. АН УРСР А. В. Скорохода] / [вид. третє, переробл. і доповн.]. – К. : Вища школа, 1982. – 456 с
3. Завало С. Т. Арифметика, алгебра і елементи аналізу / С. Т. Завало. – К. : Радянська школа, 1969. – 503 с.
4. Кордемський Б. А. Математична кмітливість [переклад з рос. видання] / [вид. друге, переробл.] / Б. А. Кордемський. – К. : Державне учб.-пед. вид-во „Радянська школа”, 1963. – 568 с.
5. Крамор В. С. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа / В. С. Крамор. – М. : Просвещение, 1990. – 416 с.
6. Мерзляк А. Г. Алгебра : Підруч. для 8 кл. з поглибл. вивченням математики / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полянський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2009. – 386 с.
7. Ушаков Р. П. Повторювальний курс математики : навч. посіб. для учнів середніх закладів освіти / Р. П. Ушаков; ред. М. Й. Ядренко. – К. : Техніка. 1999. – 503 с.
8. Янченко Г. М. Математика. Підручник для 5 класу / Г. М. Янченко, В. Р. Кравчук. – Тернопіль : Підручники і посібники, 2010. – 280 с.
9. Янченко Г. М. Математика. Підручник для 6 класу / Г. М. Янченко, В. Р. Кравчук. – Тернопіль : Підручники і посібники, 2006. – 272 с.
10. Энциклопедический словарь юного математика / [сост. А. П. Савин]. – М. : Педагогика, 1985. – 352 с.

Поліщук Зоя Петрівна – старший викладач.

Наукові інтереси: диференційована підготовка майбутнього вчителя при навчанні елементарній математиці.

Дисципліни, які викладає: методика навчання математики, елементарна математика, вибрані питання тригонометрії, практикум з розв’язування задач шкільного курсу математики.

Толстова О. В.

асистент кафедри алгебри та геометрії

ОСОБЛИВОСТІ ВПРОВАДЖЕННЯ ТЕХНОЛОГІЇ ПІДГОТОВКИ МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ ДО ГУМАНІТАРИЗАЦІЇ МАТЕМАТИЧНОЇ ОСВІТИ УЧНІВ В НАВЧАЛЬНО-ВИХОВНИЙ ПРОЦЕС ВНЗ

Національна стратегія розвитку освіти в Україні на 2012–2021 роки" одним із ключових напрямів державної освітньої політики визначає реформування системи освіти на основі філософії людиноцентризму як стратегії національної освіти на тлі зростання ролі природничо-наукових і технічних знань у системі загальнолюдських цінностей. У зв'язку з цим особливої актуальності набуває ідея гуманітаризації, що викликано необхідністю подолання технократичного стилю мислення та підтверджено державними документами в галузі освіти (Закони України "Про освіту" та "Про вищу освіту", Національній доктрині розвитку освіти). У зазначеному контексті доцільним видається теоретичне обґрунтування шляхів *гуманітаризації математичної освіти*, яка спрямована на формування цілісної картини світу особистості шляхом осягнення нею природничо-наукових і гуманітарних знань у їх взаємозв'язку та впровадження в навчально-виховний процес ефективних методів, моделей його організації.

Гуманітаризація математичної освіти учнів основної школи як процес усвідомлення і використання гуманітарного потенціалу математики, суспільно значущих цінностей математичних знань зумовлює потребу покращення якості професійно-педагогічної підготовки студентів педагогічних навчальних закладів у визначеному напрямі. Технологізація такого процесу та максимальне збагачення всіх його елементів має створити умови для розкриття творчих здібностей, розвитку ініціативи, активізації пізнавально-навчальної та позанавчальної діяльності майбутніх учителів.

Проблему інтеграції математики з суспільно-гуманітарними науками розглядали у своїх працях видатні мислителі минулого (Г. Лейбніц, Б. Паскаль, Платон та ін.). Можливості використання гуманітарного потенціалу природничо-математичних дисциплін досліджували Т. Дідківська [1], І. Родигіна, І. Сверчевська [1] та ін. Проблему комплексного поєднання природничо-наукових, технічних і гуманітарних дисциплін для досягнення системи цілісних знань про людину розглядали Г. Буракова, І. Гашенко, І. Дем'яненко та ін. Суттєвий внесок у розробку питань гуманітаризації сучасної шкільної математичної освіти зробили праці С. Гончаренка, Т. Дригач, Г. Саранцева та ін. Технологічні аспекти гуманітаризації представлено в дослідженнях З. Кондрашової, Г. Селевка, В. Сластьоніна, І. Якиманскої та ін.

Незважаючи на інтерес, який виявляють науковці до різних аспектів гуманізації та гуманітаризації, їх взаємозв'язку та можливостей використання у навчально-виховному процесі, проблема гуманітаризації професійно-педагогічної підготовки майбутніх учителів математики та формування їх готовності до здійснення такої діяльності з учнями залишається недостатньо вивченою, оскільки спрямована, переважно, на вдосконалення традиційних підходів до побудови змісту та способів вивчення окремих дисциплін. Її вирішення має сприяти комплексному використанню ідей гуманітаризації та технологізації в процесі підготовки майбутніх учителів-математиків та формуванню готовності до їх реалізації у професійно-педагогічній діяльності.

Відтак, *метою статті* є окреслення змісту та особливостей впровадження авторської технології в навчально-виховний процес ВНЗ педагогічного спрямування.

Важливим для нашого дослідження стає той факт, що проблема підготовки майбутніх учителів до гуманітаризації в сучасній педагогічній науці розглядається через *гуманітаризацію навчально-виховного процесу* у педагогічному закладі освіти, тобто, гуманітаризацію їх підготовки [2, с. 79]. Виходячи із зазначеного, *підготовку майбутніх учителів до гуманітаризації математичної освіти учнів* будемо розуміти як цілеспрямований та спеціально організований процес якісного засвоєння загально-професійних, спеціально-професійних та гуманітарно-технологічних знань, практичних умінь, навичок та домінантних якостей студентів, що забезпечують накопичення й збагачення суб'єктного досвіду на засадах гуманітаризації, сприяють підвищенню ефективності педагогічної діяльності.

Вважаємо, що процес підготовки майбутнього вчителя до її здійснення повинен відбуватися у поєднанні зі змістом усіх циклів дисциплін, а також охоплювати позанавчальну діяльність студентів. Такий підхід є найбільш ефективним, оскільки дає можливість забезпечити комплексність, повноту й цілісність знань. Це спонукає до розроблення власної технології, що стане цілісною особистісно, гуманно, гуманітарно й професійно орієнтованою системою та створить умови для забезпечення ефективної підготовки майбутніх учителів до гуманітаризації математичної освіти учнів [8, с. 64–102].

Проведений аналіз існуючих *класифікацій педагогічних технологій* (В. Беспалько, І. Дичківська, Л. Крившенко, Г. Селевко та ін.) дозволяє розглядати *технологію підготовки майбутніх учителів до гуманітаризації математичної освіти учнів основної школи* як особливу організацію гуманітарно орієнтованої професійної підготовки майбутніх учителів математики, що сприяє формуванню гуманітаризованих знань, умінь, навичок, професійно-особистісних якостей, свідомості та мислення. Такий підхід пробуджує позитивну соціальну й пізнавальну мотивацію суб'єктів навчально-виховного процесу, забезпечує здійснення гуманітаризації математичної освіти учнів основної школи в майбутній професійно-педагогічній діяльності.

Авторська технологія охоплює основний цикл навчання у вищому педагогічному навчальному закладі (бакалаврат) та передбачає виділення певних *етапів* підготовки студентів, що співпадає з роками їх навчання та ступенем включення у пізнавальний процес. *Цикл навчання* в межах авторської технології є традиційним (постановка цілей та їх конкретизація; зміст; зворотний зв'язок з можливістю корекції; контроль результатів навчально-виховної діяльності; рефлексія та постановка нової мети) та має свої особливості.

Розглянемо кожен з компонентів розробленої експериментальної технології підготовки майбутніх учителів до гуманітаризації математичної освіти учнів основної школи (рис. 1).

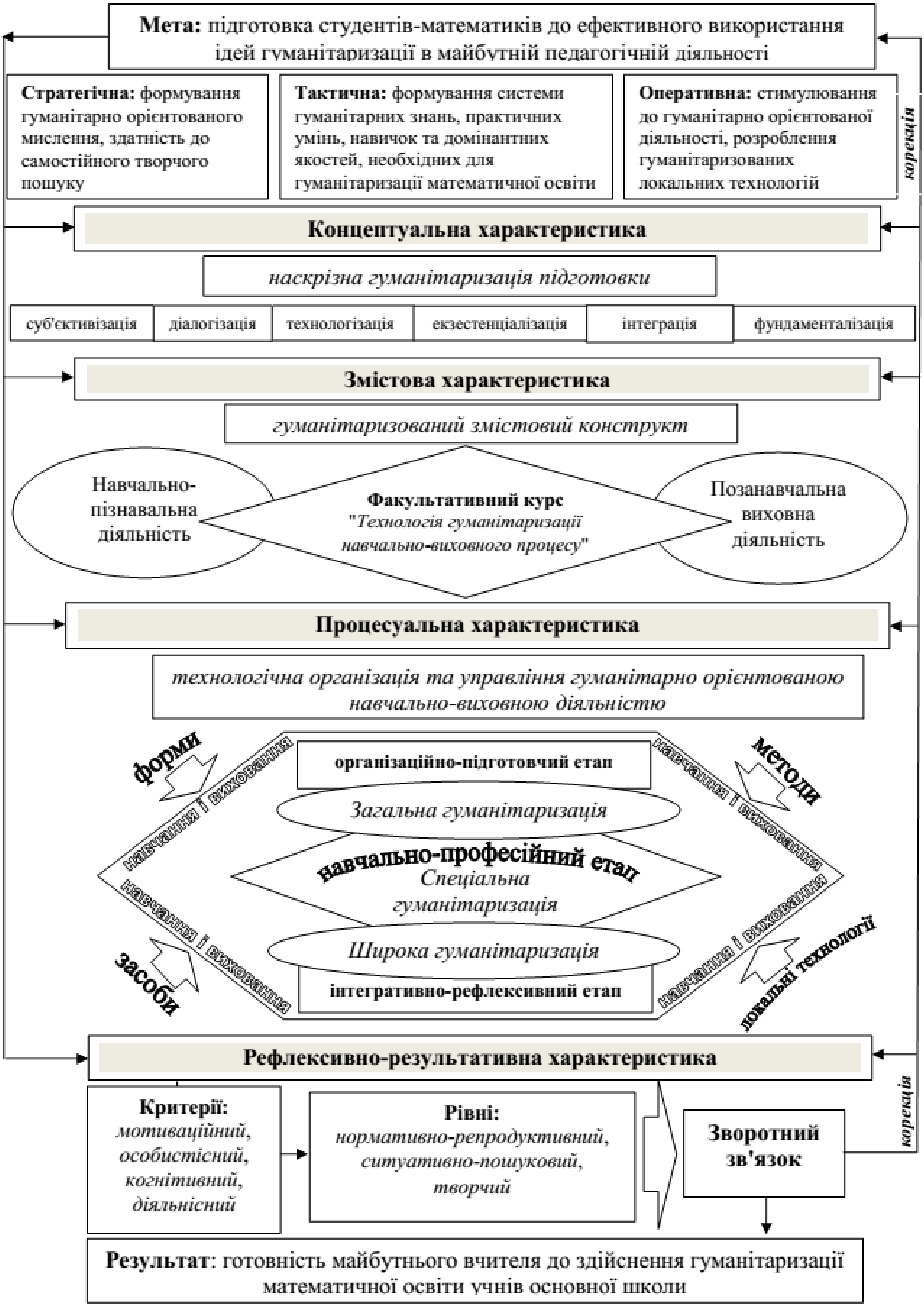


Рис. 1. Технологія підготовки майбутніх учителів до гуманітаризації математичної освіти учнів основної школи

Загальною метою технології є підготовка студентів-математиків до ефективного використання ідей гуманітаризації в майбутній педагогічній діяльності. Для окреслення освітніх орієнтирів не тільки в межах семестру або навчального року, а й протягом усього періоду навчання та подальшої самоосвітньої діяльності, нами визначено *стратегічну*, *тактичну* та *оперативну* мету. Таким чином, подальша конкретизація загальної мети відбувається діагностично на основі врахування особливостей кожного етапу, особистісної, гуманітарної й професійної орієнтації, а також можливості здійснення контролю та самоконтролю.

Опис авторської технології, залежно від основних вимог до її мети, змісту та результату; форм, методів та засобів; характеру навчально-виховної діяльності; способів зворотного зв'язку та корекції, передбачає розкриття її основних *характеристик* (концептуальної, змістової, процесуальної, рефлексивно-результативної). В контексті кожної з них побудова технології спрямована на об'єкт або його окремі структурні компоненти і зв'язки між ними; зміну предмету та завдань розробки; збільшення ступеня конкретизації вимог до їх розв'язання й форм подання.

Концептуальна характеристика є науково-методологічною базою, оскільки філософські, психолого-педагогічні й дидактичні ідеї, що лежать в основі конструювання технологізованої системи, сприяють розумінню її побудови, особливостей функціонування та слугують наскрізною характеристикою авторської технології. Основними *концептуальними ідеями* до розроблення технології підготовки майбутніх учителів до гуманітаризації математичної освіти учнів основної школи є: *суб'єктивізація, діалогізація, технологізація*, *екзестенціалізація*, *інтеграція* та *фундаменталізація* навчально-виховної діяльності студентів вищих навчальних закладів освіти, що забезпечують максимальну реалізацію ідей гуманітаризації як *наскрізної характеристики* професійної підготовки.

Ідея суб'єктивізації проявляється у встановленні суб'єкт-суб'єктної взаємодії учасників навчально-виховного процесу та пов'язаною із нею позиції студента, спрямованої на актуалізацію функцій самореалізації та самоствердження у професійній діяльності. За таких умов, навчальний предмет стає засобом розвитку життєво важливих людських якостей (мислення, волі, моральності тощо), а знання, отримані в процесі гуманітарно орієнтованої діяльності, збагачуються особистісним і ціннісним сенсом, що дозволяє майбутнім учителям усвідомлювати значущість не лише кожної навчальної дисципліни, а й окремої її теми та розділу у їх взаємозв'язку, а отже, сприяє ефективному втіленню ідей гуманітаризації в навчально-виховний процес вищої школи та в майбутню професійну діяльність.

Ідея діалогізації, що зорієнтована на визнання цінності й рівності особистостей на основі їх взаємоповаги, взаємодопомоги, партнерства, спрямована на зростання ролі й значення людських відносин і взаємного сприйняття учасників навчального процесу, формування гуманітарно орієнтованого мислення в процесі духовно-практичної діяльності з саморозвитку й самовдосконалення майбутнього вчителя. Це актуалізує проблемно-діалоговий метод викладання навчального матеріалу, за яким навчання перетворюється на спільний пошук істини, а викладач стає помічником та консультантом в активній пізнавальної діяльності студентів, дозволяє забезпечити досвід діалогічної пізнавальної діяльності, соціально-моральних комунікативних відносин й самопізнання.

Ідея технологізації передбачає спеціальне конструювання навчально-виховної діяльності (форм, методів, засобів, алгоритмів розв'язання окремих навчально-виховних завдань тощо), гуманітаризацію дидактичного матеріалу, використання різноманітних локальних технологій, розроблення форм та методів контролю, способів зворотного зв'язку та корекції процесу підготовки майбутніх учителів до гуманітаризації математичної освіти, що сприяє ефективній реалізації теоретичного та практичного компонентів системи в навчальній сфері (у блоках дисциплін циклу загальної й професійної підготовки, в курсових та дипломних роботах, психолого-педагогічній практиці тощо), а також предметно-перетворювальній та позанавчальній сфері навчально-виховної роботи. Побудований в такий спосіб процес гуманітаризації стимулює активно-діяльнісне відношення, забезпечує включення студентів до різних видів гуманітарно орієнтованої діяльності та дозволятиме використовувати отриманий досвід у майбутньому.

Ідея екзестенціалізації полягає у цілісному підході до людини, що виводить її на рівень розуміння (осягнення глибинних смислів навчального матеріалу) за рахунок оптимального поєднання форм і методів навчально-виховного впливу, спрямованих на розширення світогляду учасників навчально-виховного процесу та їх гармонійного розвитку. Разом із цим, емоційно насичена інформація, яка засвоюється, впливає на різні ділянки головного мозку, збуджує їх, а отже, забезпечує міцне запам'ятовування знань.

Ідея інтеграції, що зумовлює побудову змісту навчальних дисциплін на основі органічної взаємодії суспільно-гуманітарної й природничо-математичної культур як цілісного феномену, передбачає взаємопроникнення загальних і професійних дисциплін, а також введення гуманітарної інформації у їх зміст та позанавчальну діяльність. За такого підходу відбувається оволодіння суспільно-гуманітарними, природничо-науковими й технічними знаннями у їх взаємозв'язку, що сприяє формуванню емоційно-ціннісного відношення до них та гуманітарного стилю мислення як складових наукового світогляду.

Ідея фундаменталізації, що полягає у розкритті всього багатства і глибинного змісту навчального матеріалу в контексті загальнонаукового та загальнолюдського значення, поширенні його не лише на навчальну, а й науково-дослідну та позанавчальну діяльність студентів, призводить до зміни характеру пізнавальної діяльності (з пояснення на самостійне здобуття).

Ключовими *принципами*, що обумовлюють ефективну побудову змісту й функціонування авторської технології виступають: *гуманізм*, *гуманізація* та *гуманітаризація,* що є її рисами та основоположними, наскрізними вимогами. Разом з тим, аналіз освітніх нормативних документів дозволив виділити наступні *загальнодидактичні принципи*: демократизації, відкритості взаємозв'язку навчання і виховання людиноцентризму [3, 4].

Вивчення практики роботи досвідчених педагогів минулого та сучасності, а також наукових розробок з проблеми гуманітаризації підтверджують доцільність використання *спеціальних принципів:* суб'єкт-суб'єктних відносин, цілісності навчально-виховного процесу, структурної та змістової цілісності, індивідуального підходу, творчості [8, с. 94].

Змістова характеристика технології передбачає моделювання гуманітаризованого змістового конструкту навчально-виховного процесу: гуманітарного потенціалу навчальних предметів, позанавчальної предметно перетворювальної й виховної діяльності, спеціально розробленого інтегративного факультативного курсу "Технологія гуманітаризації навчально-виховного процесу" [8]. Змістове наповнення відбувалося шляхом збагачення навчально-пізнавальної та позанавчальної діяльностей гуманітарною складовою (знаннями природничо-наукового, історичного, культурологічного, естетичного, мовного та етичного характеру). Виходячи з концептуальних ідей, мети та принципів технології, розроблення та обґрунтування зазначеного компоненту здійснювалося у двох площинах:

– *гуманітаризації змісту* (навчально-пізнавальної та позанавчальної діяльності студентів), представленої системою гуманітарних знань та професійних умінь і навичок їх творчого використання у майбутньому;

– *гуманітаризації діяльності,* що передбачала встановлення гуманітаризованих моделей поведінки між учасниками освітнього процесу через використання різноманітних форм, методів і засобів навчання та виховання.

Особливістю побудови змісту навчально-виховної діяльності є надання *дисциплінам циклів загальної і професійної підготовки*, *психолого-педагогічній практиці* та *виховній діяльності* ціннісно-смислового, проблемного, діяльнісно-творчого характеру. Такий підхід реалізується завдяки поступовому включенні гуманітарної домінанти та виражається у:

– *загальній гуманітаризації* – епізодичному введенню гуманітаризованої інформації в зміст окремих тем і розділів навчальних дисциплін та позанавчальну діяльність;

– *спеціальній гуманітаризації* – глибокому проникненню гуманітарного знання в зміст навчально-пізнавальної та позанавчальної діяльностей через встановлення гуманітаризованих моделей поведінки між усіма учасниками навчально-виховного процесу (студентами, викладачами, кураторами, бібліотекарями, вчителями) та спеціально розробленому факультативу;

– *широкій гуманітаризації* – поширенню гуманітарної домінанти на зміст, форми і методи дисциплін циклу загальної та професійної підготовки; побудові гуманітаризованих маршрутів тем і розділів начальних предметів психолого-педагогічної практики; спеціальній організації виховної позанавчальної діяльності.

Обсяг та *зміст* навчально-пізнавального матеріалу *факультативного курсу* "*Технологія гуманітаризації навчально-виховного процесу*" визначається шляхом його попереднього структурування та розподілу на фрагменти – елементи, що підлягають засвоєнню. Поряд із цим створюється *комплект навчально-гуманітарних карток,* що складає індивідуальний план роботи студента на декілька занять, а також *блок контролю результатів* виконаної діяльності (гуманітарно орієнтовані завдання для самостійної роботи). Зміст навчально-гуманітарних карток включає:

– *теоретичний аспект* (лекції, що містять основний теоретичний матеріал навчальної дисципліни та завдання для самостійної роботи);

– *технологічний аспект* (окреслення гуманітарно орієнтованого підходу до вивчення теоретичного матеріалу із визначенням форм, методів і засобів навчально-пізнавальної діяльності);

– *практичний аспект* (система гуманітарно орієнтованих завдань та повідомлень щодо практичного відпрацювання теоретичного матеріалу);

– *рефлексивний аспект* (встановлення зворотного зв'язку та контролю результатів виконаної діяльності).

Розроблена нами система *гуманітарно орієнтованих завдань та повідомлень* різного рівня складності сприяє пізнавальній активності майбутнього вчителя. Спрямованість професійної підготовки на гуманітаризацію досягається розширенням обсягу навчальної інформації гуманітарною складовою, інтеграцією наукового знання, структуруванням, узагальненням й усвідомленням його цілісності, постійним узгодженням суб'єктного досвіду студентів з науковим змістом.

Це надає можливість використовувати отриманні знання, уміння та навички під час психолого-педагогічної практики, майбутній професійно-педагогічній діяльності та у різних сферах життя. Зокрема, *гуманітарно орієнтовані повідомлення* дозволяють розкрити основний зміст навчальної інформації за допомогою гуманітарного потенціалу наукового знання та міжпредметних зв'язків. Такі повідомлення гармонійно інтегруються в основний зміст теми або розділу певної дисципліни, забезпечуючи при цьому цілісне сприйняття наукових фактів.

Процесуальна характеристика передбачає представлення технологічної організації та управління гуманітарно орієнтованої навчально-виховної діяльності, що включає розроблення педагогічного інструментарію, опис безпосереднього впровадження авторської технології та складається з наступних компонентів:

– організація цілісного гуманітаризованого навчально-виховного процесу відповідно до поставлених цілей;

– відбір форм, методів та засобів навчальної взаємодії;

– гуманітаризація процесу (встановлення гуманітаризованих моделей поведінки між усіма учасниками);

– діяльність вчителя з керування навчально-виховним процесом, діагностика (контроль), корекція.

Навчально-виховний процес здійснюється у межах зазначеного часу з використанням *традиційних форм* організації навчання (лекції, семінари, лабораторні та практичні заняття). Окрім того, використовуються *нетрадиційні форми* організації навчально-пізнавального процесу з досвіду викладачів вищої школи (В. Бевз, Ю. Бойчук, Т. Дригач [2], Д. Мальцев, І. Югфельд та ін.):

бінарні лекції, проблемні лекції, лекції-тренінги, лекції міжпредметних занурень, бінарні семінари-тренінги, практичні заняття проблемного характеру, практичні заняття у вигляді рольових, ділових, імітаційних ігор тощо.

З*агальні форми організації навчання*, які відрізняються кількістю учасників, змістом, цільовими установками, дидактичними засобами (колективна, групова, парна та індивідуальна робота), набувають в авторській технології гуманітарного збагачення та технологізованості, що надає їм спецефічних особливостей *гуманітаризованих локальних технологій*:

– *колективна гуманітаризація* – активна й емоційно-насичена суб'єкт-суб'єктна та рефлексивна взаємодія усіх учасників, які навчають один одного у парах змінного складу;

– *групова гуманітаризація* – активна суб'єкт-суб'єктна й рефлексивна взаємодія, що здійснюється у групах (від 3-10 осіб) під час виконання її учасниками спільного завдання;

– *парна гуманітаризація* – пара (студент-студент або студент-викладач), об'єднані за власним бажанням або за призначенням викладача, активно взаємодіють, виконуючи завдання разом або самостійно, обмінюючись між собою змістом навчальної інформації;

– *індивідуальна гуманітаризація* – індивідуальна або індивідуалізована робота, в якій студенти самостійно працюють з навчальним завданням, підібраним відповідно до індивідуальних особливостей або власно обраним.

Особливістю використання різних форм організації навчання є характер взаємодії. *Діалогічна взаємодія* (в парах, в мікрогрупах, бригадах, між бригадами) є колективним обговоренням та розв'язуванням питань, проблем і пошукових завдань, заснованих на діалоговому мисленні у взаємодіючих дидактичних системах (учень-навчальний матеріал, учень-комп'ютер-учень, учень-учень, вчитель-учень тощо). Організація *групової взаємодії* передбачає моделювання спілкування та інтерактивної взаємодії студентів в групі (стабільних парах, парах змінного складу, в малих групах тощо) для спільного вирішення навчально-виховних завдань. Способи *творчої взаємодії* передбачають організацію процесу гуманітаризації як особливого простору неімітаційної або імітаційної ігрової взаємодії суб'єктів діяльності (рольові, ділові, культурознавчі, бліц-ігри), заснованої на принципах проблемності, активності особистості в навчанні, зв'язку теорії і практики, рольової організації навчання, розвитку творчої індивідуальності.

Пізнавальна діяльність у процесі функціонування даної технології забезпечується завдяки комплексному використанню системи *традиційних (загальних) методів навчання*, *нетрадиційних методів з практики роботи педагогів-новаторів* (В. Біблера, І. Волкова, П. Ерднієва, Є. Ільїна, В. Караковського, А. Окунєва та ін.), *авторських гуманітарно орієнтованих локальних технологій*, різноманітних наочних і дидактичних матеріалів (в тому числі їх електронних колекцій) [7]. Навчальне співробітництво в процесі гуманітаризації навчально-виховного процесу, що зорієнтоване на поетапне формування гуманітарно орієнтованих моделей поведінки (суб'єкт-суб'єктних взаємин та гуманітарного мислення), реалізується завдяки методам організації гуманістичної взаємодії, що відповідають наступним вимогам:

– цілеспрямованість, вмотивованість й особистісний сенс навчально-виховної діяльності студентів;

– взаємозв'язок різних видів діяльності (спілкування, навчально-пізнавальна, науково-дослідна, практична, перетворювальна, виховна, ігрова);

– мовленнєва та розумова активність як постійна включеність студентів у процес розв'язання гуманітарно орієнтованих завдань;

– партнерська взаємодія студентів та викладачів;

– комплексність використання форм, методів та засобів.

Накопичення, розроблення та систематизація методів дозволило створити авторську класифікацію локальних технологій [7]. Окреслимо характерні особливості кожної групи гуманітарно орієнтованих локальних технологій авторської класифікації.

Локальні технології організації гуманістичної взаємодії ("Культурознавча гра", "Познайомимось!", "Буква плюс буква", "Решето Ератосфена" тощо) передбачають побудову демократичних, партнерських відносин між суб'єктами навчально-виховної діяльності, спільне узгодження мети, змісту, правил, процедур гуманітаризованої діяльності в процесі діалогічної, групової або творчої (ігрової, рольової) взаємодії [7]. Залежно від характеру взаємодії, студенти вступають в особистісний, емоційний і смисловий контакт з навчальним матеріалом (в тому числі, представленим на комп'ютері), збагаченим гуманітарним змістом, один з одним, викладачем або групою в процесі ігрової або імітаційної діяльності.

Локальні технології змістового збагачення загальнокультурною складовою ("Знайди задачу", "Дух старовини", "Спеціалісти з різних наук" тощо) зорієнтовані, в першу чергу, не тільки на звичайне засвоєння предметних знань, а й на розуміння єдності світу, гуманітарної та природничо-наукової складової знання, культури та науки як універсальних мов сприйняття та відображення світу [7]. Таким чином, дана група методів забезпечує реалізацію світоглядно-ціннісної функції освіти за допомогою використання внутрішньопредметних (всередині однієї дисципліни) та міжпредметних (між суспільно-гуманітарними та природничо-математичними дисциплінами) зв'язків навчального матеріалу (текстів лекції, практичних завдань), а також шляхом розширення цілісного наукового знання, збагачення його природничо-науковою, історичною, культурологічною, естетичною складовими у вигляді гуманітарно орієнтованих повідомлень і гуманітаризованих завдань.

Локальні технології стимулювання гуманітарного мислення ("Гуманітарні дебати", "Етимологія", "Уяви собі") спрямовані на виявлення емоційно-ціннісного та смислового аспектів в пізнавальній діяльності, формування позитивної мотивації до навчання, що забезпечується завдяки зміні акцентів з пояснення змісту матеріалу на його розуміння та осмислення [7]. Разом з тим, відбувається усвідомлення практичної значущості гуманітаризації (опора на особистий досвід студента) та засвоєння наукових знань і досвіду в процесі міжособистісної взаємодії.

Локальні технології спонукання до рефлексії та здійснення контролю ("Підсумуй!", "Презентація книжкових та періодичних видань", "Презентаційне портфоліо") спрямовані на встановлення зворотного зв'язку студента з викладачем, текстом, іншими студентами та передбачають їх залучення до контролю за розвитком навчальної діяльності, порівняння отриманого результату з еталоном, виправлення помилок, осмислення їх причин, переживання ситуації успіху, підкріплення позитивної мотивації щодо здійсненої діяльності тощо [7].

Характерною особливістю локальних технологій усіх груп є їх зорієнтованість на включення кожного студента в процес пізнання та спілкування. Разом з тим, їх розподіл у класифікації відбувається за рахунок найбільш домінуючого в них гуманітарно орієнтованого компоненту.

Гуманітарно орієнтована позанавчальна діяльність (предметно перетворювальна та виховна) спрямована на використання та розширення знань, отриманих в навчально-пізнавальному процесі, виявлення і задоволення пізнавальних запитів студентів, розвиток їх задатків, формування інтересів, надання можливості проявити себе у різноманітних видах діяльності університету (*внутрішня гуманітаризація*) та поза його межами (*зовнішня гуманітаризація*). Процес гуманітаризації позанавчальної діяльності здійснюється з використанням системи гуманітарно орієнтованих *форм виховання*, що передбачають взаємодію студентів з викладачами, вчителями загальноосвітніх шкіл, працівниками бібліотек:

– *словесні:* гуманітарні семінари та майстер класи в університеті; виступи студентів на тематичних педрадах для вчителів та на методичних семінарах для викладачів; факультетські конференції; проведення відкритих занять в університеті тощо;

– *практичні:* робота гуманітарної майстерні, в межах якої здійснюється інтерактивна взаємодія студентів з викладачами, кураторами, вчителями, працівниками бібліотеки; організація та проведення культурознавчих медіа ігор; комплексні екскурсії; тиждень фізико-математичного факультету тощо;

– *наочні:* виставки проектних робіт; відео лекторії в бібліотеці; відвідування різноманітних виставок, музеїв тощо.

Крім того, студенти включаються також у *різноманітні форми індивідуальної гуманітаризації:* самостійна робота у бібліотеці з енциклопедичними, довідковими та періодичними виданнями з проблеми гуманітаризації, виконання творчих самостійних завдань, створення методичної скарбнички (гуманітаризованих методичних матеріалів) із позакласної роботи, виступи, публікації статей.

За таких умов відбувається поступове, послідовне і систематичне залучення студентів до реальної професійно-педагогічної діяльності шляхом моделювання ними відповідних навчально-пізнавальних та виховних справ, що допомагає їх адаптації до майбутньої професії та стимулює до активного використання ідей гуманітаризації. Отже, змістовий конструкт розробленої нами технології характеризується орієнтацією навчально-виховної і позанавчальної роботи студентів на гарантоване досягнення цілей та ідею повного засвоєння гуманітаризованого навчального матеріалу в різних видах гуманітарно орієнтованої діяльності.

Рефлексивно-результативна характеристика технології передбачає визначення її ефективності та результативності з позиції готовності майбутніх учителів до гуманітаризації математичної освіти учнів. Її результатом є багаторівневе утворення, що залежить від ступеня сформованості всіх її компонентів (ціннісно-мотиваційного, особистісного, змістового, операційно-діяльнісного, рефлексивно-результативного).

Зворотний зв'язок і корекція органічно пронизують усі структурні компоненти пропонованої технології та мають свої особливості на кожному етапі її реалізації [8].

Здійснення корекції передбачає корегування способів організації гуманітаризованих моделей поведінки, змістового конструкту, мети, завдань, результату технологічно організованої навчально-виховної діяльності.

Такий підхід до побудови авторської технології забезпечує її ефективність, оскільки сприяє формуванню гуманітарно орієнтованої свідомості та мислення майбутніх учителів за рахунок гуманітаризації загально-професійної підготовки. Це надає можливості для стимулювання творчості та пізнавальної активності суб'єктів навчально-виховного процесу, гарантує досягнення високого рівня засвоєння системи знань і розвитку особистісних та професійно-значущих якостей студентів, готує до реалізації ідей гуманітаризації у майбутній професійній діяльності.

Упровадження розробленої нами технології здійснюється з урахуванням окреслених концептуальних ідей та передбачає їх конкретизацію відповідно до особливостей, спрямованості та завдань її реалізації (*організаційно-підготовчий, навчально-професійний* та *інтегративно-рефлексивний*) (рис. 1). На кожному із зазначених етапів гуманітаризація навчально-виховної діяльності має свої відмінності у побудові суб'єкт-суб'єктних відносин, активності студентів у розвитку особистісних і професійних здібностей та якостей, а також рівня засвоєння гуманістичних цінностей педагогічної діяльності (загальнолюдських, духовних, практичних, особистісних) усіма учасниками навчально-виховного процесу. Відповідно до цього, гуманітарно орієнтована діяльність набуває варіативного характеру та проходить такі рівні:

– *репродуктивний* (засвоєння та відтворення готової інформації з проблеми гуманітаризації);
– *проблемний* (організація пошукової діяльності соціально-культурного значення науки, що передбачає стимулювання суб'єктної позиції, прояв ініціативи й самостійності);
– *творчий* (самостійна діяльність з проектування та реалізації елементів гуманітаризації).

Розкриємо сутність кожного етапу авторської технології з позиції суб'єктивізації, діалогізації, технологізації, екзестенціалізації, інтеграції та фундаменталізації навчально-виховного процесу.

І етап – організаційно-підготовчий – орієнтований на початковий розвиток ціннісно-мотиваційного, змістового й операційно-діяльнісного компонентів готовності майбутніх учителів до здійснення гуманітаризації математичної освіти, носить загально-гуманітарний характер та здійснюється на 1 і 2 курсах.

Метою даного етапу є формування позитивної мотивації навчання у студентів завдяки розвитку гуманітарно орієнтованої свідомості студентів у навчальному процесі, виховній діяльності, а також самоосвіті та самовихованні шляхом проникнення загальнокультурного компоненту.

Задля ефективної організації гуманітаризованої навчально-виховної діяльності, сприянню усвідомлення її важливості та актуальності, нами було розроблено рекомендації кураторам академічних груп щодо втілення різних аспектів гуманітаризації у загально-факультетську виховну роботу. Також перед початком експериментальної роботи були проведені семінари з викладачами факультету та працівниками бібліотек щодо можливостей ознайомлення майбутніх учителів з ідеями гуманітаризації на предметах циклу загальних та професійних дисциплін. Озброєння загальнонауковими, загальнокультурними, психолого-педагогічними знаннями студентів фізико-математичного факультету відбувається під час навчально-пізнавальної діяльності в межах традиційної лекційно-семінарської системи в процесі вивчення дисциплін циклу загальної та професійної підготовки. Важливого значення для успішної підготовки студентів до гуманітаризації математичної освіти набувають навчальні предмети, що складають гуманітарну складову навчально-виховного процесу ("Філософія", "Екологія", "Іноземна мова" "Культурологія", "Історія та культура України", "Педагогіка", "Історія педагогіки", "Психологія"), які за своїм змістом і сутністю є дієвими способами гуманітаризації.

Особливо важливими на організаційно-підготовчому етапі є *педагогічні дисципліни,* зміст яких ґрунтується на основних положеннях загальних основ педагогіки, теорії та методики виховання, дидактики, історії педагогіки. Так, під час вивчення курсів "*Педагогіка*" та "*Історія педагогіки*" майбутні вчителі засвоюють та аналізують:

– первинні відомості про принципи гуманізму, гуманізації та гуманітаризації освіти, їх специфіку й функції;
– уявлення щодо традиційної, гуманістичної й гуманітарної парадигм сучасної освіти;
– причини виникнення і розвитку ідей гуманізації й гуманітаризації в історичній ретроспективі й можливості їх сучасного вдосконалення;
– гуманітаризовані форми та принципи діяльності;
– локальні гуманітарно орієнтовані технології навчання.

У курсі навчального предмету "*Психологія*" студенти отримують спеціальні знання щодо різних теорій розвитку особистості у зарубіжній і вітчизняній науці, індивідуальних особливостях психіки людини (пам'ять, сприйняття, мислення, уява тощо), законів вищої нервової діяльності (взаємної індукції та динамічного стереотипу), що дозволяє пов'язати проблему міжпівкулевої асиметрії головного мозку з процесами пізнання.

Основною формою навчально-пізнавальної діяльності при вивченні зазначених курсів залишається *лекція,* на якій студенти, разом із розв'язуванням традиційних дидактичних завдань, залучаються до міркування, обговорення особливостей гуманітаризації змісту соціально-гуманітарних та психолого-педагогічних дисциплін. Враховуючи специфічну побудову змісту навчальних дисциплін "Історія та культура України", "Екологія", "Іноземна мова", "Філософія" в контексті гуманітаризації, ефективною формою навчання стає *бінарна лекція*, під час якої відбувається взаємодія двох викладачів, що працюють над однією темою або проблемою. Такі лекції оптимізують та інтенсифікують навчальну й педагогічну діяльність, посилюють світоглядну спрямованість пізнавальних інтересів студентів, що сприяє усвідомленню цілісності знань. Емоційна насиченість бінарної лекції підвищується завдяки використанню в різних наочних та технічних засобів навчання. В процесі проблемної бінарної лекції студенти разом із викладачами узагальнюють інформацію щодо важливості використання міжпредметних зв'язків, які множинно стимулюють різні ділянки головного мозку, а отже, позитивно впливають на процес засвоєння знань.

Включення студентів у гуманітаризований освітній процес відбувається також завдяки створенню емоційно-насиченої взаємодії на *семінарських заняттях* з зазначених навчальних дисциплін, де відбувається розгляд проблем гуманізації та гуманітаризації освіти, озброєння первинними вміннями та навичками відшукання гуманітарного потенціалу науки. Наприклад, під час проведення бінарного семінару-тренінгу з психології, на якому обговорюються індивідуальні відмінності, що пов'язані із функціональною асиметрією півкуль головного мозку, отримуються знання щодо індивідуальних особливостей мнемонічної та розумової діяльності кожного студента та узагальнюються уявлення щодо взаємозв'язку гуманітарного й логічного стилю мислення в процесі обробки інформації.

Оволодіння первинними знаннями та уміннями з проблеми гуманітаризації на етапі входження в технологію відбувається ефективніше порівняно з традиційними формами навчання завдяки ігровій організації навчально-пізнавальної діяльності. Підготовка та проведення відповідних гуманітарно орієнтованих занять допомагає вирішенню важливих навчальних проблем, включенню в спільну діяльність всіх студентів відповідно до наданої ролі та створює позитивну пізнавальну мотивацію. В процесі таких ігор навчальна інформація "програється", а отже стає особистісно-значущою для кожного студента. Отже, особливістю традиційних та нетрадиційних семінарів з гуманітарною спрямованістю є те, що вони базуються на обміні думками між усіма учасниками, що привчає студентів до продуктивного, творчого мислення, сприяє розвитку аналітичних навичок, розвиває здатність до виваженої аргументації, власну точку зору, повагу до думок інших, а отже, сприяє підвищенню їх загальнокультурного рівня. Крім того, на лекційних та семінарських заняттях в межах запропонованої технології застосовуються як *традиційні* так і *авторські гуманітарно орієнтовані методи роботи.*

Таким чином, проблемний й альтернативний характер викладання психолого-педагогічних дисциплін сприяє гуманітаризації отриманих знань та стає підґрунтям для ґрунтовного осмислення ідей гуманітаризації в процесі подальшого вивчення дисциплін циклу загальної та професійної підготовки ("Елементарна математика", "Шкільний курс фізики", "Основи інформатики" та ін.). Надання практичним заняттям з цих дисциплін проблемного та міжпредметного характеру, на наш погляд, дає можливість студентам побачити їх багатоаспектність, неоднозначність розв'язання, що створює ситуації вибору, породжує потребу в більш глибокому усвідомленні навчальних проблем. Це стає важливим чинником включення студентів у гуманітаризовану навчально-виховну роботу на наступних етапах реалізації технології та сприяє свідомому використанню ідей гуманітаризації в майбутній професійній діяльності.

Майбутні вчителі мають можливість закріпити первісні знання та уміння використання методів гуманітаризації навчально-виховного процесу під час *пасивної психолого-педагогічної практики*. Студенти отримують завдання вивчати досвід учителів-предметників щодо впровадження елементів гуманітаризації в навчальну діяльність учнів основної школи, складають протоколи уроків, описують методи, прийоми та форми роботи вчителя. Разом із класними керівниками під час проведення позакласних навчальних та виховних заходів, реалізують отримані на практичних заняттях знання й уміння гуманітаризації позанавчальної діяльності.

Гуманітарна орієнтація *позанавчальної діяльності* на етапі входження в технологію передбачає розширення світогляду студентів загальнокультурною інформацією шляхом здійснення внутрішньої (на факультеті) та зовнішньої (поза межами університету) гуманітаризації за наступною програмою:

– проведення гуманітарно орієнтованих семінарів (представлення досвіду роботи в контексті гуманітарної парадигми) та майстер-класів (з питань педагогічної техніки);

– проведення працівниками бібліотеки відео лекторіїв соціально-гуманітарного спрямування з мультимедійними презентаціями ("Мистецтво публічного виступу", "Толерантність як елемент світогляду і культури в роботі вчителя", "Видатні вчені-енциклопедисти планети", "Восьме диво світу: цікаві сторінки з історії української книги", "Історія України в іменах і подіях");

– індивідуальна пошукова діяльність в бібліотеці в процесі підготовки до практичних занять з соціально-гуманітарних і професійно-педагогічних дисциплін та пасивної психолого-педагогічної практики;

– організація комплексних екскурсій до музеїв, художніх та книжкових виставок та переглядів відеофільмів ("Наука в особах та особистість в науці", "Інтелектуальний Олімп" тощо).

Отже, на підготовчому етапі у студентів розширюється загальнокультурний світогляд та формуються уявлення про сутність гуманітаризації, шляхи її розвитку, особливості та умови реалізації в навчально-пізнавальній та виховній діяльності, окреслюються умови подальшої пізнавальної діяльності.

ІІ етап – навчально-професійний – орієнтований на збагачення змістово-організаційного компоненту готовності майбутніх учителів до гуманітаризації освіти шляхом озброєння системою гуманітарних знань і способів дій та носить характер *спеціальної гуманітаризації.*

Метою даного етапу є поглиблення та розширення гуманітаризованих знань, умінь, моделей поведінки (гуманістичного характеру міжсуб'єктних відносин та гуманітарно орієнтованого мислення) у процесі спеціально організованої навчально-виховної діяльності.

Реалізація зазначеного етапу відбувається в межах розробленого та впровадженого у практику *факультативного курсу* "*Технологія гуманітаризації навчально-виховного процесу*", спрямованого на ознайомлення студентів з різноманітними підходами до створення педагогічних технологій та формування умінь конструювання локальних технологій гуманітаризації математичної освіти [8]. Запропонований факультатив став результатом систематизації науково-практичної інформації про існуючі форми, методи, засоби та технологізовані системи педагогів-новаторів, в яких простежується ідея "олюднення" характеру пізнавальної діяльності, змісту навчального предмету та способів взаємодії. Він є основним теоретичним та практичним компонентом авторської технології, що охоплює всі сфери навчально-виховної роботи студентів фізико-математичного факультету (навчально-пізнавальну, позаназавчальну предметно перетворювальну й виховну), забезпечує включення кожного в цілісний гуманітарно орієнтований навчально-виховний процес.

Основними принципами його розроблення є: забезпечення суб'єктної позиції студента; врахування його особистого досвіду та вимог суспільства до рівня підготовки майбутнього вчителя; постійне оновлення й удосконалення змісту на основі досягнень педагогічної науки та практики.

Склад учасників факультативу – студенти 3 курсу фізико-математичного факультету, які виявили інтерес та бажання включитися в роботу з гуманітарно орієнтованими методами, отримати навички їх практичного застосування у навчальних предметах за фахом і позанавчальній діяльності та навчитися створювати власні локальні технології гуманітаризації.

Навчально-тематичний план складається з 12 лекцій та 18 практичних занять (три модуля), що реалізуються протягом двох семестрів.

Основна *мета* факультативу – здійснити підготовку майбутніх фахівців до гуманітаризації математичної освіти учнів та розвинути прагнення до професійно-педагогічних інновацій. У ході досягнення даної мети вирішуються наступні *завдання*:

– ознайомлення з особливостями виникнення та розповсюдження ідей гуманітаризації у різних країнах світу;

– формування суспільно-гуманітарної, природничо-наукової та технічної культури студентів у їх взаємозв'язку;

– формування уявлень про сутність педагогічних технологій;

– формування знань, умінь та навичок створення власних локальних технології гуманітаризації математичної освіти;

– активізація духовного та емоційного розвитку студентів.

В основу успішної реалізації мети та завдань навчально-пізнавальної діяльності факультативу покладено наступні *принципи*:

– варіативності конструювання педагогічного процесу шляхом інтеграції існуючих моделей та авторських розробок;
– варіативності змісту навчального матеріалу;
– вільний вибір різних елементів інших технологій;
– варіативність форм, методів, засобів гуманітаризації;
– включення професійно-особистісних цінностей майбутнього вчителя у систему підготовки (ідеальна модель);
– врахування можливостей, інтересів, схильностей майбутніх учителів, орієнтирів вдосконалення майбутньої професійної діяльності;
– співробітництво викладачів, кураторів, вчителів, бібліотекарів в організації і проведенні гуманітаризованої навчально-виховної діяльності;
– зв'язок навчального матеріалу зі шкільним курсом соціально-гуманітарних та природничо-математичних предметів як передумови формування цілісного наукового знання.

Навчально-пізнавальна діяльність здійснюється не лише в межах університету, а й у бібліотеці, музеях міста, театрі. У проведенні занять приймають участь викладачі-предметники, куратори академічних груп, працівники бібліотеки, вчителі шкіл.

Навчально-методичним забезпеченням факультативу є навчально-педагогічна література з проблеми гуманітаризації; навчальний посібник [7]; навчально-гуманітарні картки, що дозволяють структурувати теоретичний матеріал, розуміти навчальні завдання, продуктивно працювати з джерелами знань, вести самостійну практичну діяльність, здійснювати зворотний зв'язок та корекцію; студентські колекції гуманітаризованих матеріалів (повідомлення, завдання, методи, уривки уроків та виховних заходів з різних тем та навчальних предметів); картотека посібників та періодичних видань з зазначеної теми.

Теоретичний блок курсу представлений інтегрованими знаннями з суспільно-гуманітарних та природничо-математичних дисциплін. Зміст лекцій чітко визначений, кожна з них супроводжується практичними заняттями, на яких відпрацьовуються теоретичні знання з використанням локальних технологій гуманітаризації, що дозволяє, поряд із отриманням основної та додаткової навчальної інформації, формувати вміння та навички гуманітаризації природничо-математичних дисциплін.

Важливою особливістю факультативу є *варіативність гуманітаризованих завдань,* що створює для майбутнього вчителя простір вибору, привчає діяти в ситуації невизначеності, враховувати власні інтереси, потреби, оцінювати потенційні можливості, надавати можливість вибору своїм учням у майбутній професійній діяльності. Такі завдання, разом із гуманітарно орієнтованими повідомленнями (до відповідних тем лекцій), індивідуальним планом підготовки до практичного заняття та списком рекомендованої літератури, знаходяться в індивідуальних *навчально-гуманітарних картках,* що студент отримує на кожен модуль. Разом з тим, вибір і підготовка гуманітаризованих завдань та самостійної роботи з кожної теми передбачає індивідуальне, парне, групове й колективне їх виконання студентами та подальше представлення на лекціях і практичних заняттях. Викладач дає методичні рекомендації щодо підготовки до практичних занять та виконання *гуманітаризованих завдань самостійної роботи* у процесі індивідуальних та колективних консультацій.

Дамо загальну характеристику *структури факультативу* та особливостей кожного модуля. *Перші два модулі* ("Теоретичні засади гуманітаризації" та "Практичні основи конструювання гуманітаризованих технологій"), що реалізуються протягом першого семестру, спрямовані на ознайомлення студентів зі змістом і сутністю існуючих технологій гуманітаризації та особливостями їх практичного використання в навчальній та позанавчальній діяльності. Залучення майбутніх учителів до аналізу та спільного обговорення є умовою їх активного включення у реалізацію технології. *Третій модуль* "Практична гуманітаризація математичної освіти" (другий семестр) передбачає включення майбутніх учителів в активну практичну діяльність із конструювання власних локальних технологій гуманітаризації, розроблення гуманітаризованих маршрутів вивчення окремих тем і розділів предметів за фахом та виховних заходів.

Розглянемо *специфіку організації навчально-виховного процесу* в межах запропонованого факультативу, що складається з лекційних та практичних занять з використанням локальних технологій гуманітаризації та способів організації навчально-пізнавального процесу, завдяки яким студенти опрацьовують навчальний матеріал в процесі індивідуальної, парної, групової та колективної роботи. Теоретичний матеріал подається з допомогою *системи лекцій,* що носять як традиційний, так і нестандартний характер (*проблемні лекції, лекції-тренінги, бінарні лекції, лекцій-міжпредметних занурень тощо)*, на яких відбувається активна співпраця студентів із викладачами та працівниками бібліотек. На лекціях студенти засвоюють типи, види та основні підходи до створення проблемних ситуацій, алгоритми дослідницького пошуку в галузі соціально-культурного значення науки (світоглядного, історичного, культурологічного, естетичного, мовного, етичного), основні вимоги до конструювання дидактичного забезпечення і різні способи його представлення.

Характерною особливістю лекцій є також їх побудова на основі особистісно орієнтованого та діяльнісного підходів: студенти, за рахунок спеціальної попередньої підготовки (гуманітаризовані завдання репродуктивного, частково-пошукового, творчого характеру для самостійної роботи), активно включаються в обговорення теми, надають додаткові відомості, дискутують з викладачем та товаришами. Це сприяє розвитку вміння аналізувати, узагальнювати й систематизувати матеріал, формує навички діалогічної взаємодії.

Вступна *лекція-інструкція* носить пропедевтичний характер, де викладач акцентує увагу студентів на значущості факультативу, мотивує подальшу пізнавальну діяльність, роздає навчально-гуманітарні картки та пояснює їх специфіку. На лекціях, що побудовані у вигляді *проблемного викладу знань*, майбутні вчителі отримують інформацію щодо сутності та змісту педагогічних технологій, шляхів їх розвитку у різний час, основних особливостей та класифікацій. Ефективним способом організації проблемного викладу знань у процесі оволодіння новим матеріалом є "Розширена лекція", під час якої здійснюється виділення та обговорення навчальних проблем у гуманістичній взаємодії [7]. Запропоновані на лекціях наукові факти, приклади, що спроектовані на основі загальнокультурного матеріалу (світоглядного, історичного, літературного, естетичного характеру), сприяють розширенню змісту природничо-математичних дисциплін міжпредметною інформацією (історичною, художньою, естетичною тощо) та дозволяють зрозуміти способи конструювання гуманітаризованого змісту навчального предмету.

Бінарна лекція, що, наприклад, проводиться разом із викладачем дисципліни "Історія математики", побудована у вигляді міжпредметного занурення. За такої побудови її зміст спрямований на ознайомлення студентів із можливостями проникнення наукової інформації з історії науки (наукові біографії, історія відкриттів і виникнення понять, "іменні" та стародавні задачі тощо) у зміст інших фундаментальних дисциплін (в першу чергу, математичних); представлення алгоритмів пошуку й конструювання таких матеріалів на основі використання гуманітарно орієнтованих методів ("Ланцюжок із цитат" та ін.).

Сформованість професійно-педагогічної культури майбутнього вчителя в контексті його підготовки до гуманітаризації залежить від рівня його інформаційної культури. Реалізації цього завдання сприяє проведення *бінарної лекції* разом із викладачем інформатики, на якій студенти засвоюють технологію проектування гуманітарно орієнтованої навчально-виховної діяльності з використанням інформаційно-комунікаційних засобів навчання. Ознайомлення з варіантами організації зворотного зв'язку та корекції здійснюється під час відео-екскурсу, на якому викладач інформатики за допомогою програмного забезпечення "Teacher" в лаконічній формі окреслює можливості табличного процесора MS Excel, програм для створення презентацій Microsoft Power Point, Prezi, пакета динамічної геометрії DG, пакета програм Gran1, контрольно-діагностичної системи MyTest.

Зворотний зв'язок викладача зі студентом під час лекційних занять підтримується завдяки заповненню анкет рефлексії (локальна технологія "Підсумуй!"), які викладач збирає та аналізує після кожної лекції [7]. Такий підхід дозволяє здійснювати корекцію навчально-виховної діяльності. Студенти аналізують та осмислюють власну навчально-пізнавальну діяльність, виявляють проблеми та усувають їх за допомогою викладача або товаришів.

Теоретичний матеріал лекцій супроводжується його ґрунтовним засвоєнням у ході *практичних занять,* на яких у процесі гуманістичної взаємодії відбувається не лише формування гуманітаризованих моделей поведінки, а й продовжується ґрунтовне засвоєння та поглиблення нової інформації, оскільки знання спочатку особистістю присвоюються, а потім під час взаємодії та обговорення з партнером чи в групі, виробляються вміння слухати й чути інших, співтворити. Їх особливістю є:

– використання локальних технологій гуманітаризації (ділові та рольові ігри, презентація періодичних видань, мікровикладання тощо);

– вироблення дослідницьких та комунікативних умінь;

– формування початкових навичок створення локальних технологій.

Важливе місце у вирішенні проблем гуманітаризації займають *практичні заняття проблемного характеру,* на яких відбувається подальше відпрацювання гуманітарно орієнтованих методик, конструювання й презентація власних активних елементів гуманітаризації, що здійснюється у різноманітних формах з використанням як традиційних так і авторських методів. Реалізація *проблемного пошуку* на заняттях здійснюється за наступною схемою (алгоритмом): формулювання проблеми → організація роботи (індивідуальної, парної, групової або колективної) → створення гуманітаризованих маршрутів пошуку форм, методів, засобів (вибір або створення алгоритму пошуку) → розв'язання проблеми. Майбутні вчителі вчаться створювати проблемні ситуації; формулювати проблемні запитання; знаходити гуманітарний потенціал фундаментальних (математичних) наук; конструювати гуманітарно орієнтовані повідомлення (суспільно-гуманітарного й природничо-математичного характеру), завдання проблемного і пошуково-дослідного характеру (дослідні й прикладні задачі, практичні ситуації), творчі вправи (фольклорні задачі, кросворди, казки, ребуси, вірші, мнемонічні правила тощо); організовувати гуманістичну взаємодію (рефлексивну, комунікативну, групову, творчу).

Проведення практичних занять *у вигляді ігор* (рольових, ділових, імітаційних тощо) дозволяє створювати різноманітні ситуації гуманітаризованого характеру, що сприяють глибокому усвідомленню та засвоєнню навчального матеріалу. Зокрема, бліц-гра "Решето Ератосфена", що спрямована на оволодіння способами планування та конструювання позакласної роботи з математики в контексті її гуманітаризації, передбачає побудову діалогічної взаємодії студентів та викладачів з використанням мультимедійного забезпечення [7]. У ході ділової гри "Міні конференція", що проводиться з метою оволодіння технологією конструювання технологічної мети, студенти самостійно працюють над заздалегідь отриманими завданнями (підібрати матеріал, що розкриває практичну значущість фундаментальних наук), вчаться створювати проблемні ситуації ("Уяви собі "), реалізовувати проблемний пошук за схемою ("Сімка") та розв'язувати проблеми ("Фехтувальники") [7]. Викладач, який виконує роль ведучого, стимулює їх залучення у спільне обговорення проблем, надає можливість доповнити сценарій, правила та процедуру гри.

Проведення *тренінгів,* наприклад, на базі Житомирської обласної універсальної наукової бібліотека імені Олега Ольжича передбачає сприйняття та засвоєння студентами особливостей та алгоритмів пошуку гуманітарного потенціалу фундаментальних дисциплін завдяки використанню гуманітарно орієнтованих методів ("Пошукачі повідомлень", "Математик чи літератор?", "Чи знаєте Ви, що?" тощо) та одночасного їх включення у частково-пошукову діяльність (пошук книжкових та періодичних видань) [7]. Тренінг з інформатики передбачає засвоєння нових знань та способів дій у взаємодіючій дидактичній системі "учень-комп'ютер-учень" за допомогою програми для створення презентацій "Prezi". Реалізація парної форми гуманітаризації при цьому відбувається в он-лайн середі завдяки одночасній роботі двох учасників над створенням інтерактивної презентації з теми: "Локальні технології спонукання до рефлексії та контролю". Ефективним методом роботи в межах такого тренінгу може бути "Презентація книжкових та періодичних видань", що дозволяє студентам здійснювати пошук додаткової інформації в мережі Інтернет з метою підготовки коротких відомостей з конкретного питання теми або *гуманітарно орієнтованого повідомлення* до основного навчального матеріалу. Організація гуманістичної взаємодії в хмарному презентаційному програмному забезпеченні дає можливість засвоїти групу гуманітарно орієнтованих методів ("Математичне королівство", "Портфоліо підготовленості" тощо) [7]. Зворотний зв'язок та корекція навчальної діяльності викладачем відбувається з використання програмного забезпечення "Teacher".

Зворотний зв'язок під час практичних занять здійснюється завдяки розробленій діагностиці засвоєння студентами теоретичного матеріалу кожної окремої теми. Він полягає у виявленні вмінь працювати з текстом під час парної, групової й колективної роботи (виділяти ключові слова; систематизувати матеріал у вигляді опорних схем, таблиць, малюнків; складати питання проблемного характеру). Студенти, які успішно пройшли попередню діагностику, отримують право продовжувати навчання у наступному модулі. З іншими викладач працює індивідуально.

У ході лекційних та практичних занять використовуються *різноманітні методи* (традиційні та нестандартні), які допомагають зрозуміти проблему цілісно, виділити в змісті матеріалу загальнокультурну складову, обговорити завдання, визначити ставлення (думку) партнера, провести критичний аналіз роботи, сформулювати підсумки. У процесі розроблення та впровадження авторської технології відбувалося накопичення та їх систематизація у власну класифікацію локальних технологій. Активна пошуково-пізнавальна діяльність, що є особливістю таким чином організованої навчально-виховної діяльності, дає також можливість постійно поповнювати класифікацію власними гуманітарно орієнтованими методами та випробовувати.

Звітом про досягнення кожного студенту у роботі факультативу "Технологія гуманітаризації навчально-виховного процесу" стає *оформлення портфоліо* (локальна технологія "Портфоліо підготовленості"), що дозволяє найповніше продемонструвати уміння й можливості студентів та включає в себе підготовку матеріалів з наступних напрямів:

– *теоретичного –* доповідь (у вигляді реферату) на самостійно обрану тематику з переліку, запропонованого викладачем;

– *технологічного* – мультимедійна презі-презентація власних локальних технологій гуманітаризації;

– *практичного –* відео фрагменти уроку та виховного заходу з використанням гуманітаризованих маршрутів та локальних технологій.

Презентація матеріалів портфоліо відбувається у вигляді *ділової гри* "*Самопрезентація – прийом на роботу*", сюжет якої пов'язаний зі створенням інноваційної гуманітарної школи, до якої підбирають вчителів, готових творчо працювати в межах гуманітарної парадигми освіти. Експертна комісія, що складається з запрошених викладачів, кураторів, вчителів та бібліотекарів, відбирає серед багатьох бажаючих (усі студенти грають роль вчителів) найбільш талановитих професіоналів. Визначення кращих портфоліо здійснюється членами журі, що відзначають кращі роботи з кожного напрямку. Наприкінці ділової гри здійснюється рефлексивна оцінка студентів (локальна технологія "Їдальня"), що дозволяє проаналізувати й оцінити власні досягнення та досягнення інших [7].

Підсумки роботи факультативу студенти оцінюють за допомогою спеціально розроблених анкет щодо ефективності засвоєння гуманітаризованих знань, формування умінь, навичок та подальшого успішного використання їх в процесі подальшої навчальної роботи (на заняттях, під час педагогічної практики). У студентів з'являється можливість апробування власних локальних гуманітарно орієнтованих технологій, що відображають характер майбутньої професійної діяльності та допомагають відпрацьовувати професійні навички у спеціально створених умовах. Це стимулює до пошуку найбільш ефективного розв'язання навчальних завдань.

Даний етап реалізації *технології підготовки майбутніх учителів до гуманітаризації математичної освіти* передбачає також проникнення гуманітарної складової в зміст позанавчальної (предметно-перетворювальної та виховної) діяльності студентів, що дозволяє глибше усвідомити практичну спрямованість теоретичного матеріалу, скласти власне відношення до нього, а також випробувати гуманітаризований інструментарій. Такий підхід реалізується в змісті *гуманітарної майстерні,* де здійснюється внутрішня гуманітаризація, що передбачає побудову гуманітарних моделей поведінки між студентами, викладачами й кураторами на факультеті, та зовнішня, зорієнтована на активну співпрацю студентів з учителями та працівниками бібліотеки. Відтак, гуманітаризація позанавчальної діяльності на навчально-професійному етапі здійснюється за наступною *програмою*:

– *на факультеті* – організація та проведення культурознавчих ігор ("Посмішка Чеширського кота", "Числовий крокет"), міжпредметної вікторини ("Фізики та Лірики"), конкурсів художніх творів з математичним змістом, ребусів та кросвордів, виставок проектних робіт ("Математичне навколо нас"); участь студентів у методичному семінарі викладачів ("Гуманітаризація: вчора, сьогодні, завтра") тощо;

– *в школі* – допомога матеріалами вчителям-предметникам в організації та проведенні творчих виставок; виступи кращих студентів із матеріалами "Портфоліо підготовленості" на тематичній педраді вчителів "Гуманітарно орієнтовані методи як засіб розвитку цілісного наукового світогляду та загальної ерудиції школярів" тощо;

– *в бібліотеці* – робота студентів з книжковими та періодичними виданнями та розширеними інтернет-ресурсами (на базі функціонуючих бібліотечних проектів "Бібліоміст", "Вікно в Америку"); виконання різнорівневих гуманітаризованих завдань; участь в культурознавчих медіа-іграх (відео-вікторини, поетичні караоке тощо).

Отже, на *навчально-професійному етапі* усвідомлюються можливості гуманітаризації шкільної математичної освіти завдяки накопиченню і систематизації відповідних форм, методів та засобів, створенню власних локальних технологій і гуманітаризованих маршрутів навчальних тем, їх випробовуванню на практичних заняттях. Така послідовність організації навчально-виховної роботи в межах пропонованої технології дозволяє перейти до заключного етапу, на якому вона представлена у вигляді широкої гуманітаризації, що передбачає поширення гуманітарної складової та охоплює предмети циклу загальної і професійної підготовки, а також предметно-перетворювальну й виховну позанавчальну діяльність студентів.

III етап – *інтегративно-рефлексивний* – орієнтований на розвиток операційно-діяльнісного, а також рефлексивно-результативного компонентів готовності, завдяки накопиченню та збагаченню особистісного досвіду використання й подальшого вдосконалення гуманітарно орієнтованих локальних технологій, їх поширенню у зміст дисциплін циклу професійно-педагогічної і фундаментальної підготовки, інтеграції цих ідей в майбутню професійно-педагогічну діяльність. *Метою даного етапу* є стимулювання творчості, ініціативності, самостійності студентів у процесі формування знань, умінь та навичок гуманітаризації, самоаналізі й рефлексії навчально-виховної діяльності.

Розглянемо можливості поширення гуманітарної домінанти на предмети циклу професійно-педагогічної підготовки, що набуває проблемного, діяльнісно-творчого характеру та здійснюється за рахунок використання гуманітарно орієнтованих локальних технологій, які дозволяють розкрити й глибоко усвідомити їх зміст. Гуманітаризовані локальні технології застосовуються на практичних і лабораторних заняттях з різних математичних дисциплін (методики математики, алгебри і теорії чисел, історії математики та ін.).

Елементи гуманітаризації використовуються викладачами під час *лекцій, з* на яких відбувається встановлення діалогічних зв'язків природничо-математичного й гуманітарного знання та способів його отримання в процесі діалогічної взаємодії (виступи спеціально підготовлених студентів з гуманітарними повідомленнями, колективний розгляд та обговорення проблемної або практичної ситуації, міні-дискусії, мозковий штурм тощо). Зміст навчального матеріалу, що використовуються при цьому, спрямований на побудову цілісного знання шляхом виявлення в ньому ціннісно-смислового (практичного) аспекту та міжпредметних (між загальними та фаховими дисциплінами, всередині фахових дисциплін) знань.

На *практичних заняттях* майбутні вчителі продовжують займатися творчою пізнавальною діяльністю, що полягає у конструюванні матеріалів для організації та вивчення навчальних тем з використанням форм та методів гуманітаризації математичної освіти [1]. Студенти аналізують діючі шкільні підручники з математики в контексті особистісно орієнтованого, діяльнісного та проблемного підходів, розробляють конспекти уроків (в тому числі, інтегрованих, міжпредметних, уроків-екскурсій тощо) та виховних заходів з математики з використанням гуманітарно орієнтованих матеріалів, систему гуманітаризованих завдань з математики для урочної та позаурочної діяльності в школі, гуманітаризовані засоби з математики (малюнки та аплікації, кросворди, авторські задачі, математичні казки, віршовані правила для полегшення запам'ятовування формул з окремих тем тощо). Викладачі звертають увагу студентів на важливість включення в урок математики елементів історії і мистецтва, що сприяє зміцненню пізнавальних інтересів учнів, поглибленню їх загальної культури. Під час розроблення конспектів уроку студенти активно використовують гуманітарні повідомлення, що містять цікаві факти з біографій математиків-літераторів (Омар Хайам, Чарльз Л. Доджсон, С. Ковалевська) та гуманітаризовані задачі, що розкривають математичні закономірності в природі.

На заняттях використовуються гуманітарно орієнтовані повідомлення, зміст яких спрямований на встановлення числових математичних закономірностей з мистецтвом, художньою літературою й музикою. Такий підхід емоційно насичує навчальний матеріал загальнокультурною складовою та сприяє формуванню в майбутніх учителів позитивної навчальної мотивації. На практичних заняттях використовуються гуманітарно орієнтовані локальні технології (бліц-ігри "Цифрові вірші", "Художні варіації числа", Вимірювання значень слів"), що дозволяють студентам глибше усвідомити цілісність знань та перетворити їх в особистісно значущі [7]. Особлива увага при цьому надається мистецтву розв'язування гуманітаризованих задач з математики (прикладних, історичних, "іменних", фольклорних задач, практичних та проблемних ситуацій), зміст яких пов'язаний з життям, а сюжет має нестандартну форму. Використання елементів гуманітаризованих методів М. Палтишева (система поетапного навчання) [5], а також Л. Тарасова (ідея холістичного навчання) [6] під час вивчення фізики забезпечує формування в майбутніх учителів загальнолюдської культури, гуманістичних якостей, ціннісного ставлення до навколишнього світу, дозволяє формувати світогляд, сприяє вихованню гуманітарного стилю мислення.

Застосування інформаційних технологій надає можливість ефективно здійснювати гуманітаризацію змісту освіти, що реалізується за допомогою включення загальнокультурного компоненту в зміст системно-цілісного пізнання та відображення об'єктивної реальності. В процесі роботи над *гуманітарними проектами,* тематику яких викладачі інформатики пов'язують з проблемою гуманітаризації, студенти займаються творчою пошуковою діяльністю (встановлюють міжпредметні зв'язки між соціально-гуманітарними та фундаментальними дисциплінами, створюють електронні колекції гуманітаризованих матеріалів з професійно-педагогічних дисциплін тощо). В процесі виконання завдань фахових та професійно-педагогічних дисциплін, спрямованими на збагачення гуманітарно орієнтованими знаннями, вміннями та навичками, підвищується готовність до використання ІКТ та їх гуманітаризації.

Також використовуються різноманітні *авторські гуманітарно орієнтовані локальні технології,* які студенти засвоїли на факультативному курсі. Наприклад, локальні технології "Етимологія", "Дослідники" передбачають вивчення історії походження математичних термінів та понять, створення схем дослідження гуманітаризованих задач, пошук старовинних способів розв'язання задач, формулювання проблемних ситуацій з реального життя тощо; "Будівельники", "Математика в малюнках" – розкривають особливості розв'язування практичних ситуацій, що виникають у реальному житті; "Спеціалісти з різних наук", "Знайди задачу" – пошук та розв'язування прикладних задач, що виникають на стику наук та розв'язуються за допомогою математичного моделювання [7]. Їх використання дозволяє побудувати гуманітарні моделі навчання, що представлені різними формами гуманітаризації (індивідуальна, парна, групова, колективна), за якими кожен студент вступає в активну взаємодію з гуманітаризованим конструктом (текстом, з групою, один з одним).

Таким чином, зміст, форми та методи роботи, що використовуються викладачами професійно-педагогічних та фундаментальних дисциплін в процесі навчально-пізнавальної діяльності сприяють підготовці майбутніх учителів до впровадження ідей гуманітаризації математичної освіти учнів основної школи. Подальше їх інтегрування у професійно-педагогічну діяльність відбувається під час *пошуково-дослідної роботи* студентів, в процесі якої майбутні вчителі готують *курсові проекти* з психології, педагогіки, математики та *дипломні дослідження* з математики та методики навчання математики. Характерною особливістю написання таких робіт є змістове взаємопроникнення гуманітаризованих психолого-педагогічних та фахових знань, завдяки чому відбувається не лише ґрунтовне їх засвоєння, а й усвідомлення наукового пізнання у всій його цілісності та різноманітності. Накопичення та збагачення суб'єктивного особистісного досвіду конструювання, використання й вдосконалення гуманітарно орієнтованих методів відбувається під час *активної психолого-педагогічної практики в загальноосвітній школі*. Майбутні вчителі застосовують гуманітаризований інструментарій (форми, методи, засоби) на уроках за фахом (частково) та в позакласній діяльності з учнями з метою наступного обговорення ефективності та доцільності їх використання під час спільного аналізу. Поширенню гуманітарної домінанти на даному етапі втілення авторської технології сприяє *позанавчальна виховна діяльність* студентів, яка постійно збагачується, ускладнюється й передбачає інтеграцію цілісних наукових знань, отриманих в навчально-пізнавальній діяльності, в науково-дослідну та її розширення загальнокультурною складовою в процесі активної творчої взаємодії з викладачами, кураторами, вчителями й бібліотекарями. Її реалізація здійснюється в двох напрямах – за рахунок внутрішньої (*на факультеті)* та зовнішньої гуманітаризації *(в школі, бібліотеці*) з використанням гуманітарно орієнтованих підходів (емоційна насиченість життя, романтика, мажор, гумор, гра, виховання настроєм, "педагогіка радості") та здійснюється таким чином:

– *на факультеті* – організація та проведення студентами гуманітаризованих навчальних занять (день самоврядування), культурознавчих ігор ("Послідовності слів", "Складач"), тиждень факультету; організація та проведення студентами та кураторами комплексних екскурсій (на природу, до музеїв, до циклів художніх та книжкових виставок); виступи із доповідями та публікації статей з проблем гуманітаризації студентами під керівництвом викладачів до збірки наукових праць (науково-практичні конференції);

– *в школі* – виступи студентів з представленням ідей гуманітаризації на методичних об'єднаннях;

– *в бібліотеці* – робота студентів з книжковими та періодичними виданнями та розширеними інтернет-ресурсами завдяки функціонуючому тренінг-центру "Бібліоміст" та інформаційно-ресурсному центру "Вікно в Америку" в межах виконання пошуково-дослідних та творчих робіт (курсових робіт, дипломних досліджень, статей тощо); продовження соціокультурної взаємодії з бібліотекою ("Дні інформації", "Засідання літературної вітальні", "Тематичні вечори", "Відеолекторій" тощо).

Таким чином, реалізація розробленої авторської технології у вищому навчальному закладі освіти передбачає спеціальну організацію навчально-виховної і позанавчальної діяльності, що створює умови для становлення гуманітарних моделей поведінки (гуманістичного характеру міжсуб'єктних відносин і гуманітарного стилю мислення), дозволяє майбутнім учителям математики усвідомити багатство змісту навчально-виховного матеріалу, продукувати й творчо використовувати гуманістичні ідеї у різні сфери життя та професійну діяльність, сформувати готовність до гуманітаризації математичної освіти учнів основної школи.

До подальших напрямів наукових розробок віднесено: вдосконалення відповідного методичного забезпечення (методичні посібники, рекомендації, комп'ютерні програми), продовження пошукової діяльності у напряму конструювання, систематизації та апробації нових локальних технологій гуманітаризації математичної освіти учнів основної та старшої школи.

ЛІТЕРАТУРА

1. Дідківська Т. В. Старовинні історичні задачі з теорії чисел при підготовці майбутніх педагогів до професійної діяльності / Т. В. Дідківська, І. А. Сверчевська // Вісник Житомирського державного університету імені Івана Франка. – Вип. 57. – 2011. – С. 59–63.
2. Дригач Т. Г. Гуманітарна спрямованість професійної підготовки майбутніх педагогів фізико–математичного профілю / Т. Г. Дригач // Наукові записки кафедри педагогіки. – Вип. XXXIII. – Харків. – 2013. – № 33. – С. 76–85.
3. Закон України "Про вищу освіту" [Электронный ресурс] Режим доступу: http://zakon3.rada.gov.ua/laws/show/1556–18.
4. Концепція гуманітарного розвитку України. Проект від 14.03.2008 [Електронний ресурс]. – Режим доступа : http://naps.gov.ua/uploads/files/gumanitar–2020.pdf.
5. Палтишев М. Педагогічна гармонія / М. Палтишев // Завуч. – 2001. – Червень (№ 17/18). – С. 35–45.
6. Тарасов Л. В. Необходимость перестройки преподавания естественных предметов на основе интегративного – гуманитарного подхода / Л. В. Тарасов // Физика в школе. – 1989. – № 4. – С. 40–41.
7. Толстова О. В. Локальні технології гуманітаризації математичної освіти учнів основної школи : метод. посібник для вчителів, студентів і викладачів вищ. пед. навч. закладів. – Житомир : Вид–во ЖДУ ім. І. Франка, 2016. – 254 с.
8. Толстова О. В. Технологія підготовки майбутніх учителів до гуманітаризації математичної освіти учнів основної школи : дис. на здоб. наук. ступеня канд. пед. наук : 13.00.04 / Толстова Ольга Вікторівна ; наук. кер. Єремєєва В. М. ; М-во освіти і науки України, Житомир. держ. ун-т ім. І. Франка. – Житомир, 2017. – 277 с.

Толстова Ольга Вікторівна – асистент, кандидат педагогічних наук.

Наукові інтереси: вибрані питання математики в контексті гуманітаризації освітнього простору.

Дисципіліни, які викладає: лінійна алгебра, вища математика, вища математика та основи статистики, теорія ймовірностей та математична статистика, історія математики.

ВИСНОВКИ

Державна національна програма відродження освіти в Україні наголошує, що освіта стає основою розбудови української держави, національного, культурного та духовного багатства країни, становлення демократичного суспільства і ринкових відносин, піднесення вітчизняної науки і техніки до найвищих світових рівнів. В основу сьогоднішньої математичної підготовки спеціаліста повинні бути покладені фундаментальність, інтегрованість, активність, зв'язок з майбутньою професійною діяльністю, інноваційність, творчість, інформаційна забезпеченість.

Представлена монографія «Теоретико-методичні аспекти навчання математичних дисциплін» є результатом роботи колективу науковців фізико-математичного факультету Житомирського державного університету імені Івана Франка.

У першій частині монографії увага зосереджена на проблемах класичної математики у розрізі ґрунтовної математичної підготовки вчителя математики.

Михайленко Василь Васильович обґрунтовує достатню умову кубовності просторових фігур з відомими площами паралельних перерізів: якщо для тіла існує система квадровних паралельних перерізів, що накладаються за винятком, можливо, не більш як зліченного набору точок, то тіло кубовне.

Ленчук Іван Григорович дає короткий аналіз ролі й місця перетворень стереометричних фігур у розбудові геометрії як науки. Серед рухів особлива увага приділяється перетворенню «Поворот навколо прямої», оскільки це дозволяє суто конструктивно розв'язувати різнохарактерні метричні задачі на аксонометричних зображеннях. Помітне місце у статті надано методу позиційної геометрії – внутрішньому проекціюванню, його оптимізації. Метод слідів подано частинним випадком методу внутрішнього проекціювання. Пропагується метод посередників, який є фактично єдиним ефективним прийомом у моделюванні перетинів різного роду тіл і поверхонь. Теорія питань підкріплені значною кількістю задач «із родзинкою».

У другій частині монографії всебічно розглядаються методичні аспекти розбудови сучасної шкільної математичної освіти.

В роботі Бенедисюк Марії Миколаївни показано, що система роботи учителя в школі, по суті, є роботою викладача інтегрованого курсу з математики, фізики та інших природничих наук. У педагогічній і методичній літературі міжпредметні зв'язки висвітлено, як необхідну умову підвищення ефективності навчання, тому що за умови їх систематичного і цілеспрямованого здійснення вони перебудовують і оптимізують увесь освітній процес. Науково обґрунтовано, що для ефективної реалізації міжпредметних зв'язків фізики і математики величезне значення має єдиність вимог учителів, які викладають різні навчальні предмети, у процесі формування природничих і природничо-математичних понять. Використання фізичного матеріалу сприяє розвитку навичок у використанні математичного апарату, дає можливість використовувати різноманітні методи для розв'язування прикладних задач, допомагає формувати в учнів уявлення про роль математики при вивченні навколишнього світу, бачити різницю між реальним та ідеальним, між фізичним явищем і його математичною моделлю, викликає додатковий інтерес і мотивацію до навчання. Тому міжпредметні зв'язки дають змогу розширити світогляд учнів, зробити їхні знання міцнішими і змістовнішими.

Королюк Олена Миколаївна звертається до актуального питання методики навчання учнів розв'язувати текстові задачі в шкільному курсі математики. У відповідному параграфі формулюється поняття математична задача; розкривається зміст поняття «текстова (сюжетна) задача»; виділяються функції таких задач у процесі навчання математики в школі; наводиться класифікація текстових задач і подаються методичні рекомендації щодо розв'язування задач виділених типів, а також представлено цікаву добірку прикладів.

У статті Сверчевської Ірини Анатоліївни досліджено деякі аспекти навчання стереометрії в загальноосвітній школі. Розглянуто різні підходи до структурування змісту розділу стереометрії "Геометричні тіла", проаналізовано та виокремлено найбільш доцільні для застосування у навчанні учнів.

Зосереджено увагу на етапах процесу формування понять розділу "Геометричні тіла". Виділено методичні складові цих етапів, показано їх реалізацію за допомогою великого обсягу вправ та прийомів роботи з учнями. Зроблено висновки, що реалізація запропонованих методичних підходів сприяє формуванню навчальної компетентності, підвищує рівень геометричної підготовки учнів.

У третій частині монографії досліджено умови та засоби формування професіоналізму вчителя математики.

Прус Аллою Володимирівною розглянуто закономірності та можливості формування окремих компетентностей як структурних елементів професійної компетентності вчителя математики засобами математичного курсу «Задачі з параметрами». На підставі аналізу процесу розв'язування завдань із параметрами показані умови для набуття студентами предметної, інформаційної, комунікативної, рефлексивної та творчої компетентностей. Автор доходить висновку, що органічне поєднання математичної та методичної складової є одним із засобів здійснення ефективної фахової підготовки студентів педагогічних спеціальностей.

Фонарюк Олена Василівна наголошує, що одним з пріоритетних напрямків розвитку системи професійної освіти є зростання її якісних показників. Дослідження у царині педагогіки супроводжуються інтенсивним входженням методології проектування в педагогічну галузь, це сприяє зміні цілей, змісту і технологій педагогічної освіти, що ґрунтується на проектуванні як діяльнісному інструменті кожного педагога. Уміння здійснювати конструктивно-проектувальну діяльність стає нині важливим критерієм професіоналізму вчителя. Навчання математики як вид педагогічного проекту вчителя математики може мати вигляд перспективного й оперативного конструювання і планування.

Чемерис Ольга Анатоліївна головну увагу приділяє розгляду питання якісної підготовки майбутніх учителів математики. Проаналізувавши навчальні плани та програми, розроблені випусковими кафедрами фізико-математичного факультету Житомирського державного університету імені Івана Франка, визначено особливості фундаментальної підготовки на прикладі дисциплін геометричного циклу. У статті наведено приклади форм та методів, які автором використовуються при викладанні аналітичної та проективної геометрій. Детально описано метод математичного моделювання та наведено приклади задач на побудову кривих другого порядку на проективній площині. Також обґрунтовано поетапність розв'язання базових задач з аналітичної геометрії на площині та описано використання алгоритмічного підходу. Подані методичні рекомендації дозволяють оптимізувати та урізноманітнити навчальний процес, що дозволить удосконалити зміст математичної підготовки фахівців відповідного профілю.

У четвертій частині монографії порушено питання про технології навчання математики в середній та вищій школі.

В ході дослідження Карплюк Світлані Олександрівні та Франовському Анатолію Цезаровичу вдалося встановити, що з метою формування нового покоління вчителів фізико-математичного профілю, сучасне суспільство ставить чіткі вимоги щодо якості підготовки майбутніх фахівців й обумовлює інновації в галузі професійної освіти, які ґрунтуються на принципах взаємного партнерства учнів і педагогів. Відтак, успішне вирішення завдань організації освітнього процесу у вищій педагогічній школі пов'язане з проблемою вдосконалення професійно-педагогічної підготовки вчителів, формування їх педагогічної майстерності на основі використання ідей взаємонавчання. Такий підхід забезпечить необхідні умови для самореалізації майбутніх фахівців фізико-математичного спрямування та сприятиме включенню студентської молоді у систематичну і цілеспрямовану навчально-пізнавальну та практичну колективну діяльність, що у цілому позитивно впливатиме на динаміку їх подальшого загального та професійного зростання.

Поліщук Зоя Петрівна у своїй статті відповідно до історичної схеми розвитку вчення про число, яка покладена в основу шкільного курсу математики, систематизувала теоретичні відомості про числа та дії над ними.

Більшість сформульованих правил та алгоритмів проілюстровані прикладами. Запропоновані матеріали сприятимуть формуванню фахової компетентності майбутнього вчителя математики, а також можуть бути використані вчителями математики.

Толстовою Ольгою Вікторівною обґрунтовано авторську технологію, яку визначено як особливу організацію гуманітарно орієнтованої професійної підготовки майбутніх учителів математики, що сприяє формуванню гуманітаризованих знань, умінь, навичок, професійно-особистісних якостей, свідомості та мислення. Зазначено, що такий підхід пробуджує позитивну соціальну й пізнавальну мотивацію суб'єктів навчально-виховного процесу, забезпечує здійснення гуманітаризації математичної освіти учнів у майбутній професійно-педагогічній діяльності. Розглянуто специфіку впровадження технології, що охоплює основний цикл навчання (бакалаврат) та передбачає проходження організаційно-підготовчого, навчально-професійного та інтегративно-рефлексивного етапів, забезпечує включення кожного студента в гуманітаризований навчально-виховний процес. Представлено зміст та характеристику факультативу "Технологія гуманітаризації навчально-виховного процесу", впровадження якого спрямоване на охоплення всіх сфер навчально-виховної роботи студентів фізико-математичного факультету (навчально-пізнавальної, предметно перетворювальної і виховної) та забезпечення творчого використання ідей гуманітаризації у різноманітних видах діяльності університету (внутрішня гуманітаризація).

Таким чином, основним напрямом інтеграції математичної і методичної підготовки майбутнього вчителя математики в системі професійної педагогічної освіти, зорієнтованої на формування готовності до інноваційної педагогічної діяльності, є контекстне розкриття при вивченні математичних дисциплін загальних підходів та методики навчання: введення математичних понять, їх систематизації та узагальнення; методики реалізації внутрішньопредметних зв’язків (інтеграції математичних знань); методів розв’язування практичних математичних та прикладних задач із виділенням ролі математичних знань у дослідженні реальних явищ та процесів; методів та прийомів доведень математичних тверджень із приділенням особливої уваги системам теорем. Здійснення такої підготовки сприяє формуванню математичної компетентності та створює необхідні передумови для формування методичної компетентності, звички до креативної інноваційної поведінки, здатності наслідувати та впроваджувати інноваційний педагогічний досвід, здійснювати експериментальну, пошуково дослідницьку діяльність, виступає основою для подальшого формування у процесі навчання дисциплін математичного циклу готовності до інноваційної педагогічної діяльності у майбутніх вчителів математики.