НАЙПЕРШІ ОПЕРАЦІЇ КОНСТРУКТИВНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Іван ЛЕНЧУК, професор кафедри алгебри та геометрії Житомирського державного університету імені Івана Франка, доктор педагогічних наук

Знаний німецький астроном і математик Й. Кеплер (1571 – 1630) зазначав, що «Геометрія володіє двома скарбами: один із них – це *теорема Піфагора*, а другий – це *поділ відрізка у крайньому і середньому відношенні*. Перший можна порівняти з мірою *золота*, а другий більше нагадує *коштовний камінь*».

У геометрії побудови прямокутного трикутника за гіпотенузою і гострим кутом, за катетом і гіпотенузою відносять до основних. А поділ відрізка у заданому відношенні регламентує теорема Фалеса: *Якщо паралельні прямі, що перетинають сторони кута, відтинають на одній його стороні рівні відрізки, то вони відтинають рівні відрізки і на іншій стороні цього кута.*

Ми не подаємо доведення теореми, адже на шляху до висновку досить скористатися відомими фактами і в суто геометричному стилі продемонструвати покрокову логіку міркувань. Тут неабияку роль в озвученні незаперечних умовиводів, як і в геометрії в цілому, відведено якісному рисунку (рис. 1).

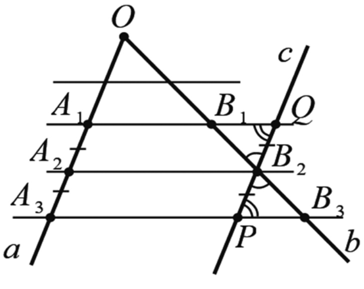


Рис. 1

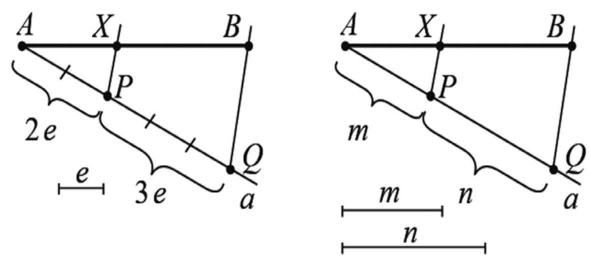
Теорема Фалеса неспроста вважається однією із стрижневих у розбудові конструктивної геометрії. Найперше, вона має узагальнення – на її основі доводиться теорема про пропорційні відрізки: *Паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають від його сторін пропорційні відрізки.* Саме цей результат дозволяє розв'язати питання поділу відрізка в будь-якому відношенні, незалежно від способу його задавання.

Поділити відрізок AB у відношенні:

$$1)\ \frac{2}{3};\quad 2)\ \frac{m}{n},$$

де e – довільно взята одиниця довжини, а *m* і *n* – *накреслені відрізки.*

На рисунках 2, *а*, 2, *б* продемонстровано обидва випадки поділу відрізка *AB* у заданому відношенні. Тут *a* – промінь, проведений із точки *A* під яким завгодно нерозгорнутим кутом до відрізка *AB*.



а *б*

Рис. 2

Теорема уможливлює розв'язання однієї з основних конструктивних задач алгебричного характеру – побудову четвертого пропорційного відрізка: *Задано відрізки a, b, c. Побудувати відрізок* $x = \frac{bc}{a}$ (*).

Щоб глибше осмислити побудову, запишемо рівність (*) у вигляді пропорції $\frac{x}{c} = \frac{b}{a}$.

Далі діємо просто (рис. 3):

1) Зображуємо будь-який нерозгорнутий кут із вершиною в точці O.

2) На одній стороні кута відкладаємо відрізки $OA = a$ і $OB = b$, на другій стороні – відрізок $OC = c$.

3) Сполучаємо точки A і C прямою, а через точку B проводимо паралельну їй пряму BD. Відрізок $OD = x$, у чому легко переконатися.

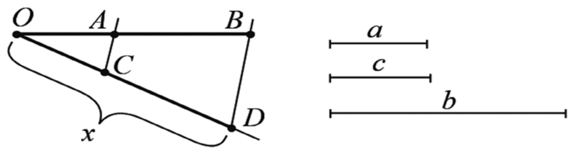


Рис. 3

Справді, за теоремою про пропорційні відрізки:

$$\frac{OD}{OB} = \frac{OC}{OD} \Rightarrow OD = \frac{OB \cdot OC}{OA} = \frac{bc}{a}.$$

Таким чином, $OD = x$ – шуканий відрізок.

Скориставшись теоремою Фалеса, доводять, наприклад, два важливих факти, які стосуються середніх ліній трикутника і трапеції, а саме:

1. *Середня лінія трикутника, яка сполучає середини двох його сторін, паралельна третій стороні й дорівнює її половині* (рис. 4).

2. *Середня лінія трапеції паралельна основам і рівна їх півсумі* (рис. 5).

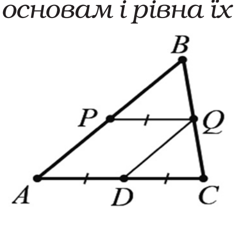


Рис. 4

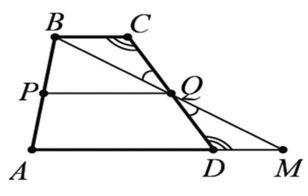


Рис. 5

Якщо a, b, c, … суть задані (накреслені) відрізки, то відомо, що за допомогою циркуля і лінійки, тобто проводячи лише прямі лінії і кола, можна легко побудувати ще й такі відрізки (x):

1) $x = a + b$; 2) $x = a - b$ ($a > b$);

3) $x = \frac{m}{n}a$ (де m і n – дані натуральні числа);

4) $x = \frac{ab}{c}$; 5) $x = \sqrt{ab}$;

6) $x = \sqrt{a^2 + b^2}$; 7) $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ ($a > b$).

Комбінуючи ці ***основні*** операції, повторюючи їх, можна побудувати відрізки, які в результаті виражень мають складніше формальне представлення. Загалом же, піддається побудові всякий відрізок, що виражається формулою через дані відрізки за допомогою скінченного числа раціональних операцій (додавання, віднімання, множення, ділення) і добування квадратних коренів. На цьому твердженні ґрунтується надзвичайно вживаний у практиці розв'язування конструктивних задач планіметрії метод **алгебричного** аналізу (алгебричний метод).

У стереометричних задачах на побудову теж досить часто трапляються випадки, коли для відшукання того чи іншого елементу конструкції слід скористатися методом, в якому посилаються на відомі графічні перетворення відрізків, описаних формулами. До речі, саме завдячуючи властивості інваріантності відношення відрізків на прямій (чи на паралельних прямих), у методі паралельних проекцій має надто широке застосування узагальнена теорема про пропорційні відрізки.

Метричну визначеність бінарних зображень геометричних фігур, виконаних методом паралельних проекцій, гарантують виключно шляхом затрати на них чітко визначеного числа метричних параметрів. Зокрема, й у формі кількісних співвідношень між визначальними елементами фігури-оригіналу. При цьому інші прямолінійні компоненти останньої можна подати, за потреби, в алгебричних виразах, а отже описати через уже задані елементи у вигляді достовірних залежностей і, частково, у квадратних радикалах.

Оскільки алгебричний метод до дрібниць вивчений і детально описаний у навчальній літературі, не варто торкатися навіть найпростіших його побудов. Однак на деяких суто геометричних фактах, які мають пряме відношення до сформульованої теми і фігурують більш-менш часто у стереометричних побудовах, зупинитися хоча б коротко конче потрібно.

Відомі прийоми побудови за накресленим відрізком a відрізка $x = a\sqrt{n}$, де $n = 2, 3, 4, \ldots$.

Для графічного (графоаналітичного) відшукання істинної форми плоскої фігури, що практикується повсюдно у вигляді окремої сполучної ланки іншої, більш складної метричної задачі стереометрії, корисно уміти виконувати циркулем та лінійкою обернену операцію: володіти алгоритмами побудов за заданим відрізком $AB = a\sqrt{n}$ відрізка a (рис. 6, *а – ж*).

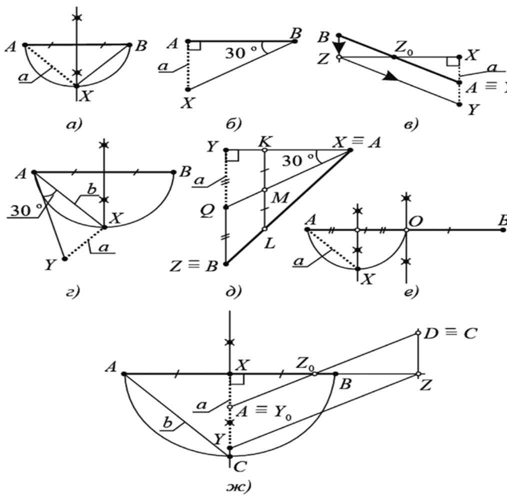


Рис. 6

1) $AB = a\sqrt{2}$. Півколо, проведене на відрізку AB, як на діаметрі, у перетині з серединним перпендикуляром цього відрізка висікає таку точку X, що $AX = a$. 2) $AB = a\sqrt{3}$. Катет AX прямокутного трикутника ABX, в якого $AB = a\sqrt{3}$ і $\angle ABX = 30°$, що відкладається елементарно у вибрану півплощину, буде шуканим відрізком a.

3) $AB = a\sqrt{5}$. Спочатку слід побудувати будь-який прямокутний трикутник XY_0Z_0 за умови, що один з його катетів у два рази більший іншого. Далі, за відомою гіпотенузою $YZ = AB$, – йому подібний трикутник XYZ. Катет XY останнього прямокутного трикутника й буде зображати шуканий відрізок a.

4) $AB = a\sqrt{6} = a\sqrt{3}\cdot\sqrt{2} = b\sqrt{2}$, де $b = a\sqrt{3}$. Отже, послідовно реалізовані перша та друга побудови приводять до результату.

5) $AB = a\sqrt{7}$. Тут формується ланцюжок із елементарних дій, що включає побудови:

а) будь-якого прямокутного трикутника XKM із гострим кутом у 30°;

б) на базі цього трикутника – прямокутного трикутника XKL, в якого катет $KL = 2KM$;

в) ще одного прямокутного трикутника XYZ, подібного XKL і з гіпотенузою $XZ = AB$. Половина катета YZ – шуканий відрізок.

6) $AB = a\sqrt{8} = 2a\sqrt{2}$. Побудова 1-ша на відрізку $AO = \dfrac{AB}{2}$ дасть бажаний результат.

7) $AB = a\sqrt{10} = a\sqrt{5}\cdot\sqrt{2} = b\sqrt{2}$, де $b = a\sqrt{5}$.

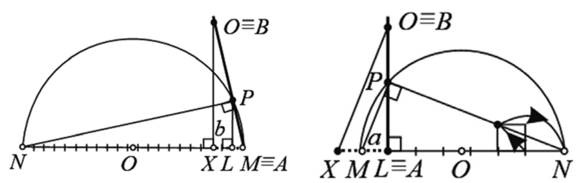
Відрізок a зручно знайти через послідовне виконання 1-шої та 3-тьої побудов.

Аналогічно можна змоделювати прості правила-орієнтири рисункових дій для наступних натуральних значень n. Однак, у деяких випадках варто віддати перевагу універсальному методу, в основу якого покладено відомі побудови відрізка, що є середнім геометричним до двох даних відрізків. Зокрема, такий шлях виконання графічних операцій конструктивно більш ефективний за обставин дещо складніших представлень відрізків числовими виразами у квадратних радикалах.

Нехай, наприклад, $AB = \dfrac{a\sqrt{21}}{6}$. Для відшукання відрізка a спочатку слід побудувати відрізок b такий, що $AB = b\sqrt{21}$, а потім взяти 6 (шість) таких відрізків. Тут (рис. 7, *а*) середнім геометричним є катет MP прямокутного трикутника MPN із гіпотенузою у 21 одиничний відрізок, а $MQ = AB$ на промені MP. Очевидно, що D$MPL \sim$ DMQX. Звідси, $\dfrac{MX}{ML} = \dfrac{MQ}{MP}$. Однак, $ML = 1$, $MP = \sqrt{21}$. Тому $MX = \dfrac{AB}{\sqrt{21}} = b$.

Нехай тепер $AB = a\sqrt{5+\sqrt{2}}$. У цьому випадку (рис. 7, *б*) середнім геометричним є перпендикуляр PL, опущений з вершини прямого кута (P) прямокутного трикутника MPN на гіпотенузу $MN = 1+5+\sqrt{2}$ одиничних відрізків, а $LQ = AB$ на промені LP. Очевидно, що D$MPL \sim$ DXQL. Звідси маємо: $\dfrac{XL}{ML} = \dfrac{LQ}{LP}$. Але, $ML = 1$, а $LP = \sqrt{5+\sqrt{2}}$. Тому $XL = \dfrac{AB}{\sqrt{5+\sqrt{2}}} = a$.

Цим методом доцільно користуватися у більшості випадків, однак його не завжди резонно визнавати найпростішим у розу-



а б

Рис. 7

мінні логіки міркувань, умовиводів і графічного представлення. Тому, потрапивши в аналогічну ситуацію, не варто поспішати. Потрібно попередньо зримо провести елементарний аналіз умови. І якщо тільки є можливість, удається число під коренем розкласти у вигляді суми чи різниці квадратів двох натуральних чисел, то це означає, що корінь можна побудувати як гіпотенузу чи катет прямокутного трикутника, що без сумніву значно простіше.

Отож, для порівняння, представимо

$$\sqrt{21}=\sqrt{25-4}=\sqrt{5^2-2^2}.$$

За цих умов, $AB=\dfrac{a\sqrt{21}}{6}=\dfrac{ab}{6}$ $(b=\sqrt{21})$ і побудова відрізка a за відомими відрізками AB та b стає очевидною (рис. 8, *а*). Привертаємо увагу до факту, що не обов'язково, щоб обидва доданки під коренем були квадратами виключно натуральних чисел. Не набагато складнішим варіантом умови є той, коли один із них буде просто двійкою, трійкою тощо. Наприклад, нехай $AB=a\dfrac{2\sqrt{11}}{7}$. Або, що рівноцінно, $AB=\dfrac{ab}{3{,}5}$, де $b=\sqrt{11}=\sqrt{3^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}$. Погляньте на рисунок 8, *б*. Як неважко переконатися, останній за складністю рисункових дій не перевершує попереднього.

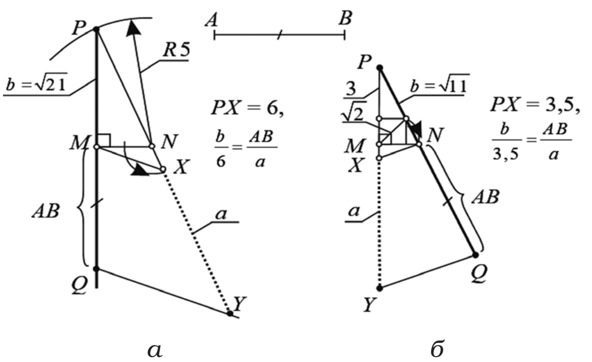


Рис. 8

Навіть поверхневий аналіз наведених побудов свідчить, що реалізовані на рисунках 7, 8 циркулем та лінійкою операції, подані дещо в іншій послідовності, призведуть до вирішення й прямої задачі на побудову відрізка $x=a\sqrt{n}$ за відомим відрізком a. Суттєво, що така однотипність графічних реалізацій для різних натуральних n у прямій і оберненій задачах, як окремий геометричний факт, цілком уписується в постановку і вирішення досить злободенної проблеми системної комп'ютеризації окремих математичних курсів і, найперше, геометрії, а у глобальному масштабі – й педагогічно виваженого впровадження сучасних ІКТ і ППЗ навчання у школі та ЗВО, що на якісно вищий рівень поставить наріжні питання організації ефективної ***самостійної роботи*** учнів, самоконтролю їх знань, умінь і навичок.

Тепер наведемо приклад суто стереометричного характеру.

Задача. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, з ребром рівним a. На ребрі D_1C_1 узято точку P_1 – середину цього ребра. Знайти відстань між прямими B_1D_1 і DP_1.

Потрібно обчислити відстань між даними мимобіжними прямими B_1D_1 і DP_1, яка вимірюється, як відомо, відрізком відстані між паралельними площинами, що вміщують ці прямі. Проведемо пряму Q_1P_1 – середню лінію трикутника $B_1C_1D_1$ (рис. 9). Тоді $Q_1P_1 \parallel B_1D_1$, а дві паралельні прямі Q_1P_1 і BD визначають площину, яка проходить через одну із заданих прямих DP_1 і паралельна іншій – B_1D_1. Тепер уже шукана величина рівна відстані від прямої B_1D_1 до площини **S**(Q_1P_1D). Щоб визначитися з останньою на моделі, достатньо з точки O_1 опустити перпендикуляр на площину **S**.

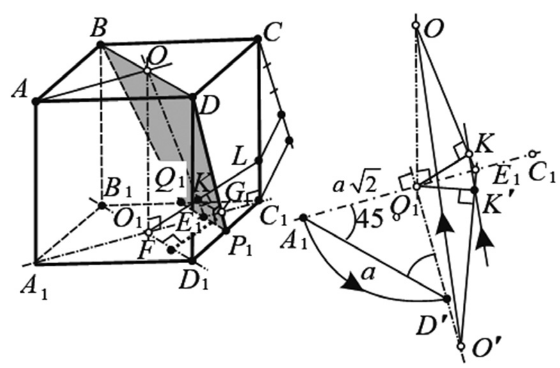


Рис. 9

Оперуючи ***кресленням-картиною***, основу перпендикуляра (точку K) вибираємо будь-де, аби лише вона належала прямій (відрізку) OE_1 перетину площини S(Q_1P_1D) із площиною L(AA_1C_1C), адже Q_1P_1 – перпендикуляр до площини осьового перерізу куба L(AA_1C_1C) $(Q_1P_1 \perp A_1C_1,\ Q_1P_1 \perp OO_1)$.

Помічаємо, що прямокутні трикутники OO_1E_1 і O_1KE_1 подібні ($\angle E_1$ – спільний). Тому матимемо: $\frac{O_1E_1}{O_1K}=\frac{OE_1}{OO_1}$, звідки $O_1K=\frac{O_1E_1\cdot OO_1}{OE_1}$, де $O_1E_1=\frac{a\sqrt{2}}{4}$, $OO_1=a$, а $OE_1=\sqrt{OO_1^2+O_1E_1^2}=\frac{3a}{2\sqrt{2}}$. Отже, $O_1K=\frac{a}{3}$.

Формально пошук результату розв'язання даної задачі на обчислення завершено. Проте умовою на зображення куба затрачено п'ять метричних параметрів ($A_1B_1 = A_1D_1$, $A_1B_1 \perp A_1D_1$, $AA_1 = A_1B_1$, $AA_1 \perp A_1B_1$, $AA_1 \perp A_1D_1$), тобто зображення є повним і метрично визначеним. А це означає, що ми могли б працювати із проекційним рисунком не як із кресленням-картиною, а як із ***кресленням-моделлю***, де сваволя виконавця неприпустима. Тобто, основу перпендикуляра O_1K на відрізку OE_1 можна та, навіть, потрібно будувати, а не вибирати довільно в тому разі, коли постановкою задачі очікується не обчислювальний, а ***побудовний*** результат, що більш важливо.

Графічний метод. Виконаємо послідовно два суміщення з картинною площиною (див. виносне креслення). Першим із них знайдемо справжню форму квадрата $A_1B_1C_1D_1$ в основі куба, а другим – справжню форму прямокутного трикутника OO_1E_1. За вісь суміщення обох перетворень доцільно обрати діагональ квадрата $A_1C_1'A_1'C_1'$, оскільки їй належить також один із катетів O_1E_1 трикутника, визначального у відшуканні розв'язку. Інший його катет OO_1 дорівнює (за умовою) стороні квадрата і, якщо $A_1C_1=a\sqrt{2}$, то $A_1D'=O_1O'=a$. Перпендикуляр O_1K' у суміщеному трикутнику $O'O_1E_1$ опустимо з вершини прямого кута (O_1) на гіпотенузу ($O'E_1$) звичним для площини прийомом, а його зображення O_1K побудуємо, скориставшись узагальненою теоремою про пропорційні відрізки.

Графоаналітичний метод. Розглянемо у площині $L(AA_1C_1C)$ симетрії куба два прямокутні (в оригіналі) трикутники OO_1E_1 і O_1C_1L, де $L=O_1K\cap CC_1$. Вони подібні, оскільки їх відповідні сторони OO_1 і O_1C_1, OE_1 і O_1L попарно перпендикулярні.

Із пропорції: $\frac{O_1C_1}{C_1L}=\frac{OO_1}{O_1E_1}$

Маємо: $C_1L=\frac{O_1C_1\cdot O_1E_1}{OO_1}=\frac{a}{4}$.

Графічні операції в побудові точки L, а за нею й точки K цілком очевидні.

В іншому варіанті ***графоаналітичного*** шляху до результату міркування ще простіші, адже в один крок можна розрахувати розташування точки K на відрізку OE_1. Справді, O_1K – висота прямокутного трикутника OO_1E_1, проведена з вершини прямого кута O_1 на гіпотенузу OO_1. Але не секрет, що квадрати катетів такого трикутника відносяться як їх відповідні проекції на гіпотенузу: $OO_1^2 : O_1E_1^2 = OK : KE_1$. Отже, отримуємо, що $OK : KE_1 = 8 : 1$. А от ділити відрізок у заданому відношенні ми вміємо.

Якщо відрізок (O_1K) відстані від прямої B_1D_1 до площини $S(Q_1P_1D)$ на кресленні-моделі знайдено, то зовсім просто візуально завершити рисункову схему побудови спільного перпендикуляра прямих B_1D_1 і DP_1. Залишилося здійснити дві заключні дії, а саме, через точку K провести пряму, паралельну Q_1P_1 до її перетину із прямою DP_1 у точці G, та через точку G провести пряму, паралельну O_1K, і зафіксувати точку F перетину цієї останньої прямої із прямою B_1D_1. Відрізок FG – зображення шуканого спільного перпендикуляра заданих мимобіжних прямих.

Так, у порівняно нескладній, типовій для ЗОШ задачі, зосередивши увагу на **кресленні-моделі**, можна щоразу зримо розрізнити всі шість кроків загального в геометрії (конструктивного) підходу до візуальної реалізації правила-орієнтиру дій у зображенні спільного перпендикуляра мимобіжних прямих. До того ж, у графічному і графоаналітичному методах її розв'язання використано вже відомий прийом поділу відрізка в заданому відношенні.

Можливість *побачити на рисунку* чи *визначитися за допомогою рисунка* з різними питаннями взаємних розташувань фігур або метричного вираження одних фігур через інші й є тією притягальною силою, яка формує в кожного індивідуума прихильність, потяг до геометрії. Якраз рисунковою моделлю як джерелом інформації та графічним втіленням уявлень, що реалізовуються за чіткими правилами і які є органічно невід'ємною складовою цього курсу, й вирізняється евклідова геометрія з інших розділів математики.