СТАРША ШКОЛА: ВСТУП ДО ТЕМИ «БАГАТОГРАННИКИ»

Іван ЛЕНЧУК, професор кафедри алгебри та геометрії Житомирського державного університету імені Івана Франка, доктор педагогічних наук

І. Г. ЛЕНЧУК

СТАРША ШКОЛА: ВСТУП ДО ТЕМИ «БАГАТОГРАННИКИ»

Анотація. Наголошується на важливості означеної теми в евклідовій геометрії, місці й ролі багатогранників у живій і неживій природі та в різних галузях промислового виробництва. Матеріал вміщує окремі елементи історизму, подається з означеннями і найпершими поняттями. Привертається належна увага до побудови розгорток багатогранників, зокрема на основі методів конструктивізму. Наведено прості приклади побудови перерізів тіл площиною тільки з використанням понять належності точок, прямих і площин.

Ключові слова. Геометричні тіла, багатогранник, поверхня, розгортка, метод конструктивізму, переріз.

И. Г. ЛЕНЧУК

СТАРШАЯ ШКОЛА: ВВЕДЕНИЕ К ТЕМЕ «МНОГОГРАННИКИ»

Аннотация. Отмечается важность обозначенной темы в эвклидовой геометрии, месте и роли многогранников в живой и неживой природе и в различных отраслях промышленного производства. Материал содержит отдельные элементы историзма, подается с определениями и первейшими понятиями. Привлекается должное внимание к построению разверток многогранников, в частности, на основе методов конструктивизма. Приведены простые примеры построения сечений тел плоскостью только с использованием понятий принадлежности точек, прямых и плоскостей.

Ключевые слова. Геометрические тела, многогранник, поверхность, развертка, метод конструктивизма, сечение.

I. G. LENCHUK

HIGH SCHOOL: AN INTRODUCTION TO THE THEME «POLYTOPES»

Summary. The importance of this topic in Euclidean geometry, the place and role of polyhedrons in animate and inanimate nature and in various industries is noted. The material contains individual elements of historicism, is presented with definitions and first concepts. Due attention is drawn to the construction of unfolding polyhedra, in particular, based on the methods of constructivism. Simple examples of constructing sections of bodies by a plane are given only using the concepts of belonging of points, lines and planes.

Keywords. Geometric solids, polyhedron, surface, development, constructivism method, section.

Початкові поняття. У переліку фігур стереометрії, конструктивними елементами яких є найпростіші об'єкти геометрії (точки, прямі та площини), особливе місце належить ***геометричним тілам***. В уявленнях людини геометричне тіло – це *просторова замкнена область*, зайнята фізичним тілом і *обмежена власною поверхнею*.

У живій і неживій природі, серед предметів, які оточують нас, можна часто зустріти чимало таких об'єктів, поверхні яких сформовані скінченним числом багатокутників. Їх спостерігають у побуті, архітектурі, в художньому та декоративно-прикладному мистецтві, ювелірному виробництві, техніці тощо (рис. 1).

Багатогранник – це тіло, поверхня якого складається із скінченної кількості плоских багатокутників. Багатогранник називається *опуклим*, якщо його тіло лежить по один бік від площини кожного з плоских багатокутників, які обмежують його поверхню. Спільна частина обмежуваної площини і поверхні опуклого багатогранника називається його *гранню*. Грані багатогранника є плоскими опуклими багатокутниками. Сторони граней називаються *ребрами*, а вершини – *вершинами* багатогранника.

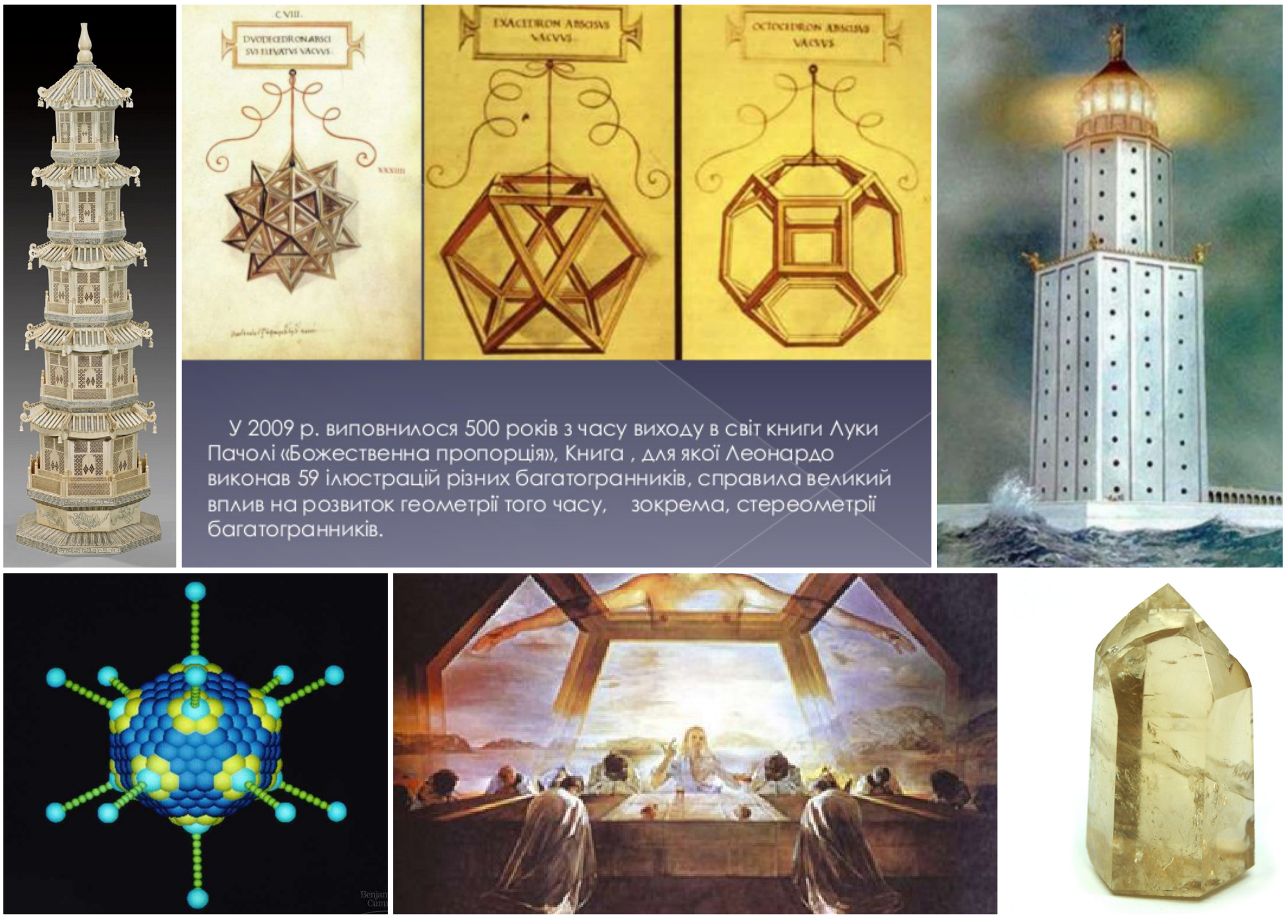


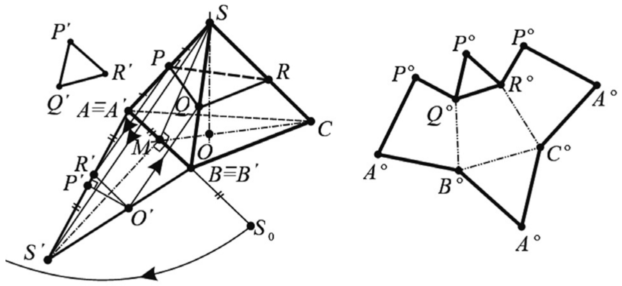
Рис. 1

Кожне ребро багатогранника є спільним для двох і лише двох граней, які в жодному разі не лежать в одній площині. Спільну вершину можуть мати щонайменше три суміжні грані багатогранника.

Для виготовлення великогабаритних ємностей сільськогосподарського чи хімічного призначення, захисних кожухів верстатів, вентиляційних пристроїв, трубопроводів та багатьох інших виробів виникає потреба вирізати з листового матеріалу їх розгортки. ***Розгорткою*** *багатогранної поверхні* називають плоску фігуру, отриману в результаті послідовного суміщення з картинною площиною всіх граней багатогранника. Побудова розгортки включає в себе з'ясування натуральної величини кожної грані й послідовне їх розташування на площині. Розміри граней, якщо вони проєкціюються не в натуральну величину, знаходять способом обертання навколо нульової лінії рівня (суміщення) грані з площиною зображень.

Площа поверхні багатогранника – це сума площ усіх його граней, вона дорівнює площі розгортки заданого багатогранника.

На рисунку 2 суто геометрично (конструктивним методом) розв'язано задачу: *Задано правильну трикутну піраміду SABC зі стороною основи a. Бічне ребро піраміди у два рази більше сторони основи.*



а *б*

Рис. 2

1. Побудуйте на поверхні піраміди ГМТ рівновіддалених від вершин S і A.

2. Знайдіть (рисунково) площу фігури, яку обмежує ГМТ.

3. Побудуйте розгортку зрізаної піраміди.

Учням не зашкодить *знайти площу перерізу обчислювально й оцінити точність графічного результату* (якщо $AB = A'B' = a$ – нульова лінія рівня).

Теорія багатогранників перенасичена цікавими пізнавальними фактами. Наведемо лише один приклад.

Розрізом багатогранника називається усяка проста замкнена ламана лінія, сторони якої – ребра багатогранника (плоский багатокутник вважається частинним випадком багатогранної поверхні). Як з'ясувалося, у природі існує два різновиди багатогранників – *нульового* і *ненульового* роду. До ***нульового*** роду відносять такі з них, кожен розріз яких розбиває їх поверхні на дві багатогранні поверхні, а *ненульового* – в яких існує хоча б один розріз, що не розбиває поверхню на дві багатогранні поверхні.

Спочатку з розмаїття багатогранників вирізняють багатогранники **нульового** роду. Таким багатогранником є, наприклад, куб.

Видатний німецький математик XVIII ст. Л. Ейлер довів теорему про те, що *число вершин **разом** із числом граней і **без** числа ребер багатогранника нульового роду дорівнює двом.* У формальному запису це матиме такий вигляд: $e + f - k = 2$.

Із багатогранників нульового роду вирізняють топологічно правильні багатогранники. ***Топологічно правильним*** називають багатогранник, у якого всі грані мають одне і те саме число вершин, а всі багатогранні кути – одне і те саме число граней. За допомогою теореми Ейлера і простих міркувань доведено, що ***різновидів*** топологічно правильних багатогранників у природі існує ***п'ять і лише п'ять*** (рис. 3).

	n	s	e	f	k	ТП багатогранник
I	3	3	4	4	6	Тетраедр
II	4	3	8	6	12	Гексаедр (Куб)
III	3	4	6	8	12	Октаедр
IV	3	5	12	20	30	Ікосаедр
V	5	3	20	12	30	Додекаедр

У таблиці: n – число вершин у кожної грані; s – число граней зі спільною вершиною; e – число вершин, f – число граней, k – число ребер багатогранника.

Леонард Ейлер (1707 – 1783)

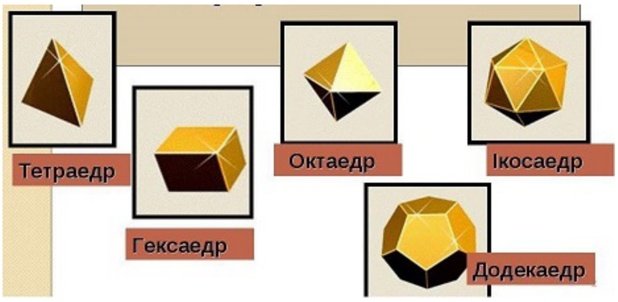
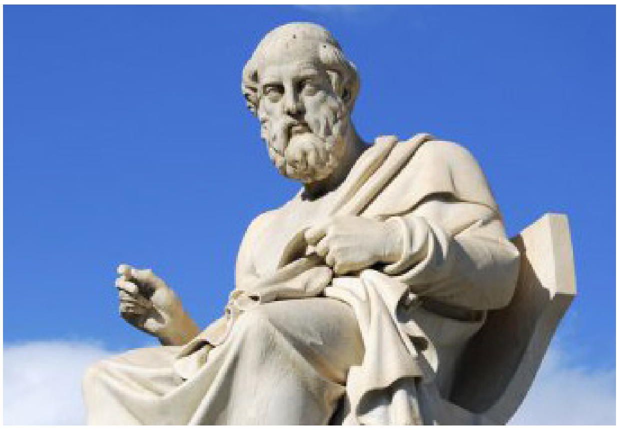


Рис. 3

Великий давньогрецький вчений Платон (427 – 347 рр. до н. е.) вважав, що ці п'ять тіл уособлюють сутність природи. Людству були відомі чотири сутності: вогонь, вода, земля і повітря. На думку Платона, їх атоми мали вигляд правильних багатогранників: вогню – тетраедр, землі – гексаедр, повітря – октаедр, води – ікосаедр. Платон припустив, що існує ще одна сутність – світовий ефір, атоми якого мають вигляд додекаедра. Платон і його учні у своїх роботах приділяли велику увагу правильним багатогранникам, а тому їх ще називають «Платоновими тілами». Ця теорія була викладена в роботі «Діалог Тіней».

У 9-му класі учні отримують початкові відомості зі стереометрії. Зокрема, їм відомо, що ***призмою*** називають багатогранник, компонентами якого є два плоскі й рівні між собою багатокутники, розміщені в різних, але паралельних площинах, відповідні вершини яких з'єднані відрізками прямих.



Платон

Згадані багатокутники називають верхньою і нижньою ***основами*** призми, а відрізки – сторони цих багатокутників – ***ребрами основ***. Відрізки, які сполучають відповідні точки верхньої і нижньої основ, – ***бічними ребрами*** призми. Грані призми, що не є основами, називають ***бічними гранями***.

Якщо бічні ребра призми нахилені до площини основи під кутом, відмінним від 90°, то таку призму називають ***похилою*** (рис. 4), а у випадку, коли бічні ребра перпендикулярні площині основи, – ***прямою*** (рис. 5). У похилої призми всі бічні грані – паралелограми, а у прямої – прямокутники.

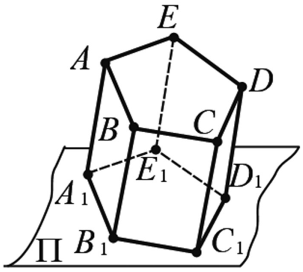


Рис. 4

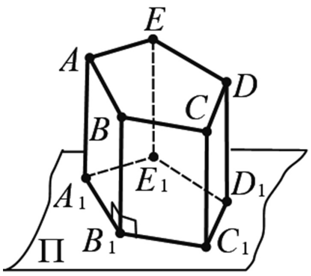


Рис. 5

Висотою призми називають перпендикуляр, проведений із будь-якої точки однієї основи на площину іншої основи. Пряму призму, основою якої є правильний багатокутник, називають ***правильною***.

Учням добре знайомий із пропедевтичного курсу ще один багатогранник – піраміда. ***Пірамідою*** називають багатогранник, поверхня якого вміщує плоский багатокутник і певне число трикутників з однією спільною для них точкою (рис. 6). Плоский багатокутник виконує роль ***основи*** піраміди, а трикутники, кількість яких дорівнює кількості сторін багатокутника в основі піраміди, – ***бічних граней***. Спільну точку бічних граней називають ***вершиною*** піраміди. Сторони багатокутника в основі піраміди називають ***ребрами основи***, а ребра бічних граней, окрім ребер основи, – ***бічними ребрами***. Вершин у піраміди завжди на одну більше кількості вершин в її основі.

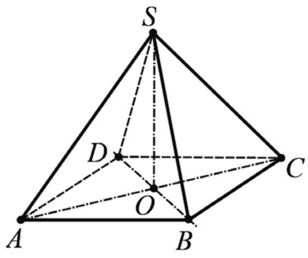


Рис. 6

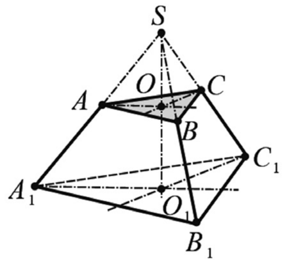


Рис. 7

Із багатовиду пірамід вирізняють піраміди, зрізані площиною, паралельною площині основи (рис. 7). Їх називають «зрізана 3-кутна, 4-кутна, 5-кутна, … піраміда» в залежності від числа вершин в основі піраміди.

Висотою піраміди називають перпендикуляр, опущений з точки, що є її вершиною, на площину основи.

Піраміду, в основі якої лежить правильний багатокутник, а висота проєкціюється в центр основи, називають ***правильною***. Якщо в основі піраміди лежить неправильний багатокутник, а бічні ребра рівні або рівнонахилені до площини основи, або бічні грані рівнонахилені до площини основи, то таку піраміду називають ***напівправильною***.

Багатогранники евклідової геометрії, які вивчають за програмою школи, зручно ілюструвати схемою, представленою рисунком 8. Куб є найпростішою стереометричною фігурою серед призм, а тетраедр – серед пірамід.

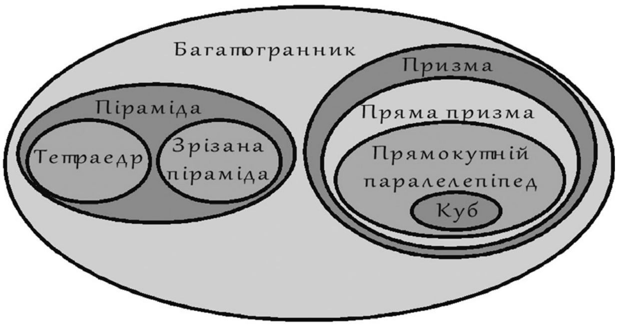


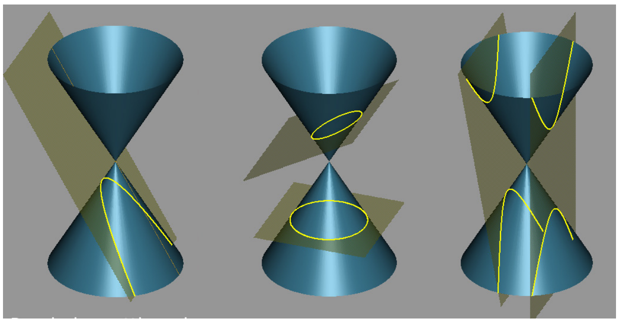
Рис. 8

Формули, що стосуються метричних параметрів багатогранників (площ поверхонь і об'ємів тіл), інші характеристичні поняття й залежності між їх елементами обґрунтовано вводять у стереометрії 11-го класу.

Найпростіші задачі на побудову перерізів багатогранників. Із давніх-давен учені-математики цікавилися перерізами тіл стереометрії площиною.

Аполлоній Перзький

Давньогрецький математик і астроном Аполлоній Перзький (260 – 170 рр. до н. е.) є автором багатьох математичних праць, найвизначнішою з яких є «Конусні». Ця праця (у 8-ми книгах) присвячена конічним перерізам – *кривим другого порядку* (рис. 9). При відсутності аналітичного методу дослідження, Аполлоній розглянув загальний випадок утворення конічних перерізів при перетині довільного кругового конуса площиною під будь-яким кутом до його осі. Вчений отримав еліпс, параболу та гіперболу залежно від того, перетинає площина всі твірні конуса, паралельна одній твірній чи паралельна двом його твірним. Він уперше ввів назви кривих: «парабола», «гіпербола» й «еліпс». Аполлоній відкрив і довів усі основні властивості цих кривих.



Мал. 9

У сьогоденні еліпс, гіпербола і парабола набули вельми широкого застосування в науці та техніці. Наприклад, одна з головних задач виробництва літальних апаратів у процесі проєктування, розрахунків і геометричного моделювання обводів аеродинамічних поверхонь, як-от дотримання заданої геометрії зовнішньої поверхні фюзеляжу чи крила досягається завдяки «чудовим» властивостям цих кривих.

Щоб грамотно розв'язати стереометричну задачу на обчислення, у значній кількості випадків потрібно попередньо здійснити побудову перерізу того чи іншого тривимірного тіла січною площиною (див., напр., рис. 2). *Це – суто позиційна задача.* Фігура, яка складається з усіх точок стереометричного тіла і січної площини, називається *перерізом* цього тіла.

Коли йдеться про переріз багатогранника площиною, то зрозуміло, що на картинній площині (на дошці, в зошиті) найперше потрібно правильно і наочно змоделювати рисункове зображення призми або піраміди, а також – позиційно визначитися з умовним заданням та зображенням січної площини, яка перетинає тіло.

Отже, акуратне, обґрунтовано усвідомлене розв'язання позиційної задачі на переріз тіла площиною спирається на два основоположні фактори: *вміння* рисунково моделювати з уявлень правильні й наочні зображення фігур стереометрії та *знання* теорії позиційної визначеності різних зображень.

Однак зараз ми говоримо про найпростіші перерізи.

Оскільки в задачах стереометрії на грані тіла більшою мірою оперують трикутними й чотирикутними призмами і пірамідами, ми ще раз привертаємо вашу увагу до рисунків 6 і 7. Дивлячись на них навіть уперше, ви зможете чітко сказати, що на першому рисунку зображено правильну чотирикутну, а на другому – правильну (зрізану) трикутну піраміди. Річ у тім, що так виконані рисунки вільно прочитуються, адже вони правильні й наочні.

Алгоритми побудов якісних зображень тіл узяті нами з досвіду провідних *вітчизняних* методистів-математиків.

Отже, рисунок 6:

1. На горизонтальній прямій відкладаємо будь-який відрізок AB.

2. Із точок A і B під кутом, *меншим* 45°, проводимо паралельні промені.

3. На цих променях від їх початку відкладаємо відрізки, довжина яких *приблизно у два рази менша* довжини відрізка AB ($AD = BC$). $ABCD$ – паралелограм, що зображує квадрат в основі правильної чотирикутної піраміди.

4. Перетин діагоналей AC і BD дає точку O – центр квадрата основи.

5. *Вертикально* (перпендикулярно до основи) з точки O проводимо промінь і на ньому на власний розсуд обираємо точку S – вершину піраміди.

6. З'єднуємо точку S із точками A, B, C, D.

На зображенні ребра видимого контуру подають *суцільною основною лінією*; ребра невидимого контуру – *штриховою*, товщина якої приблизно у два рази менша товщини суцільної основної лінії, а центрові й осьові лінії – *штрихпунктирною*, товщина якої приблизно у три рази менша товщини суцільної основної лінії.

Число невидимих граней має бути найменшим, ребра тіл не повинні накладатися на інші ребра й висоту зображуваних призми чи піраміди.

Тепер стосовно рисунка 7:

1. Приблизно під кутом 15° – 25° до горизонту проводимо пряму лінію і на ній задаємо відрізок A_1B_1, помірний за довжиною.

2. Приблизно під кутом 100° – 120° до відрізка A_1B_1 із точки B_1 проводимо промінь і на ньому відкладаємо відрізок B_1C_1 приблизно вдвічі менший відрізка A_1B_1.

3. З'єднуємо відрізком точки A_1 і C_1.

4. У трикутнику $A_1B_1C_1$ проводимо дві його медіани, які в перетині висікають точку O – центр трикутника основи піраміди.

5. Завершуємо побудову, як на рисунку 6.

На рисунку 7 продемонстровано також побудову одного з найпростіших перерізів піраміди площиною, паралельною площині її основи. В цій ситуації задача мала б мати таке формулювання: *Побудуйте переріз піраміди* (призми) *площиною, паралельною площині основи, за умови, що січна площина розділяє ребро* (висоту) *багатогранника у відношенні $m : n$.*

На початку, скориставшись узагальненою теоремою про пропорційні відрізки, ділимо візок SA_1 точкою A у відношенні $m : n$. Потім у гранях SA_1B_1 і SA_1C_1 проводимо $AB \parallel A_1B_1$ і $AC \parallel A_1C_1$ та з'єднуємо відрізком точки B і C у грані SB_1C_1.

Розглянемо ще кілька простих задач на побудову перерізів багатогранних тіл площиною.

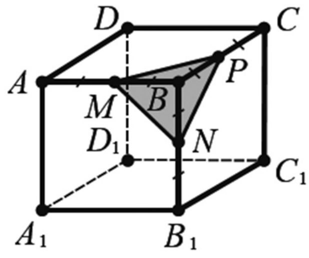
Задача 1

Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною Σ, що задана трьома точками M, N, P, які ділять навпіл ребра куба зі спільною вершиною B_1.

Розв'язання. Точки M і P належать площині верхньої грані куба $ABCD$ і січній площині Σ, а тому ці дві площини перетинаються по прямій MP. Отже, січна площина висікає на верхній грані відрізок MP (рис. 10).

Аналогічно переконуємося, що права грань куба BB_1C_1C має у перетині з площиною Σ відрізок NP, а передня грань AA_1B_1B – відрізок MN.

Таким чином, перерізом куба і січної площини Σ є трикутник MNP.

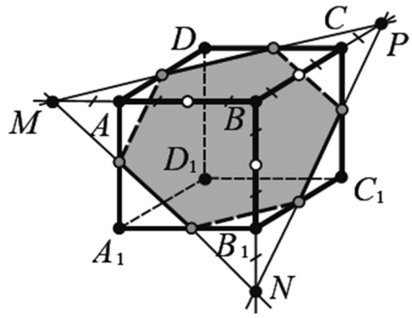


Мал. 10

Якби це була задача на обчислення, в її умові було б задано ребро куба, а у висновку – вимога знайти, приміром, периметр (чи площу) трикутника MNP.

Нехай ребро куба дорівнює a. Оскільки точки M, N, P ділять ребра куба, які виходять із точки B, навпіл, а три плоскі кути при вершині B прямі, то прямокутні трикутники MBN, NBP, PBM із катетами довжиною $\frac{a}{2}$, рівні.

Звідси: $MN = NP = PM = \frac{a}{2}\sqrt{2}$, а периметр трикутника MNP дорівнює $\frac{3\sqrt{2}}{2}a$.



Мал. 11

Схоже будується переріз куба площиною $\Sigma(M, N, P)$, коли задані точки розташовані зовні куба на продовженні ребер. Нехай, наприклад, $AM = B_1N = CP = \frac{a}{2}$ (рис. 11). З'єднавши точки M, N, P між собою, отримаємо трикутник, сторони якого належать площинам, що задаються передньою, правою і верхньою гранями куба відповідно. З урахуванням цього факту, фігура перерізу будується просто. Неважко з'ясувати форму фігури перерізу.

Простими для куба і паралелепіпеда є його діагональні перерізи AA_1C_1C і BB_1D_1D, а також будь-які перерізи площинами, паралельними бічним ребрам.

Для будь-якої піраміди простими вважаються перерізи площиною, яка проходить через її вершину, а також так звані осьові перерізи.

Задача 2

Побудуйте переріз тетраедра *SABC* площиною Σ(*M*, *N*, *P*), якщо точки *M* і *N* лежать на його бічних ребрах, а точка *P* – на ребрі основи.

Розв'язання. Очевидно, що точки *M* і *N*, *N* і *P* можна з'єднати відрізками – сторонами фігури перерізу, оскільки кожна з цих пар належить граням піраміди *SAC* і *SBC* відповідно (рис. 12). Не вистачає точки *Q* перетину ребра *AB* із січною площиною. Проте неважко помітити, що відрізки *MN* і *AC* належать грані тетраедра *SAC* і не паралельні. Тож знайдемо точку *X* перетину прямих *MN* і *AC*, котра явно належить площині Σ, оскільки лежить на прямій цієї площини. Але точка *X* лежить у площині основи піраміди *ABC*, якій належить також точка *P*. Пряма *XP* перетне сторону основи тетраедра в шуканій точці *Q*. Отже, матимемо, що *MNPQ* – чотирикутник перерізу тетраедра площиною Σ.

Задача 3

Побудуйте переріз чотирикутної призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною Σ, що задана точкою *M* на бічному ребрі та прямою 1–2, яка лежить у площині основи призми $A_1B_1C_1D_1$ (пряма 1–2 називається слідом січної площини на площині основи призми).

Розв'язання. Нехай точка *M* належить, наприклад, ребру DD_1 (рис. 13). Напевно, що в цій задачі буде надто корисно скористатися тим фактом, що кожна точка прямої 1–2 належить січній площині Σ.

Отже, по аналогії з попередньою задачею, щоб зафіксувати на рисунку точку *N*, спільну для ребра AA_1 і площини Σ (у грані AA_1D_1), знайдемо спочатку точку *X* перетину прямих A_1D_1 і 1–2, а потім з'єднаємо її прямою з точкою *M*. Оскільки пряма *XM* належить січній площині, то $N = XM \cap AA_1$. На другому кроці схожі міркування дають спочатку точку *Y* на прямій 1-2, а потім точку *P* на ребрі BB_1. Третім кроком знаходимо точки *Z* на прямій 1-2 і *Q* – на ребрі CC_1. Чотирикутник *MNPQ* – шуканий.

Задача 4

Побудуйте переріз чотирикутної піраміди *SABCD* площиною Σ, що задана точкою *M* на бічному ребрі та прямою 1-2, яка лежить у площині основи піраміди *ABCD*.

Розв'язання. Нехай точка *M* належить, наприклад, ребру *SA* (рис. 14).

Зараз, на шляху до результату, нам доведеться покроково повторити вже знайомий алгоритм розв'язання задачі на переріз призми площиною (попередній випадок).

1. Продовжимо ребро *AD* в основі піраміди до перетину зі слідом січної площини Σ в точці *X* і, провівши пряму *XM*, яка належить грані *SAD*, у перетині з ребром *SD* зафіксуємо вершину *N* фігури перерізу.

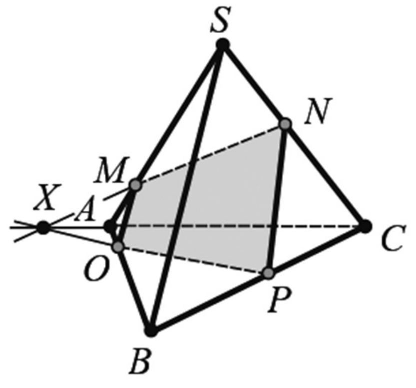
2. Так само, скориставшись ребром *DC* в основі піраміди, яка перетинає слід 1–2 в точці *Y*, та прямою *NY* у лівій грані піраміди, шукаємо вершину перерізу $P = NY \cap SC$.

3. $BC \cap (1\text{-}2) = Z$; $Q = ZP \cap SB$.

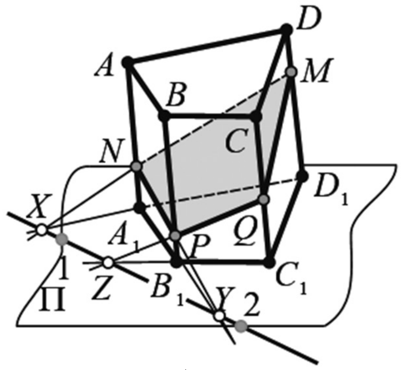
4. З'єднуємо послідовно точки *M* – *N* – *P* – *Q* – – *M*. Чотирикутник *MNPQ* – шуканий.

На завершення зауважимо, що в усіх розв'язаних задачах ми посилалися до елементарних уявлень, простої логіки міркувань й оперували **винятково** поняттями та фактами ***належності*** точок, прямих і площин.

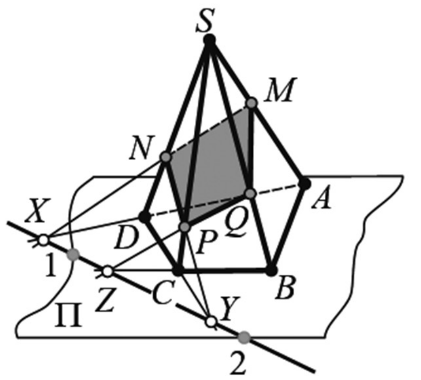
Щоб уміло розв'язувати більш складні задачі на побудову перерізів тіл площиною, потрібно щоразу використовувати чіткі покрокові алгоритми відшукання на зображеннях точки перетину прямої з площиною і лінії перетину двох площин. Ці дві задачі в геометрії мають назву **основних позиційних**.



Мал. 12



Мал. 13



Мал. 14