4. Одинец В. П. Построение элементарных функций [Текст] : учеб. пособие / В. П. Одинец, А. И. Поволоцкий ; Российский педагогический ун-т им. А. И. Герцена. – СПб. : Образование, 1995. – 71 с.

5. Бродский Я.С. Функциональные уравнения [Текст] / Я. С. Бродский, А. К. Сліпенко. – К.: Вища шк., 1983. – 96 с.

6. Лихтарников Л. М. Элементарное введение в функциональные уравнения [Текст] / Л.М. Лихтарников. – Спб.: Лань, 1997. – 160 с.

7. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей: В 2 - х томах. Т. 1. Арифметика. Алгебра. Анализ: Пер. с нем. Под ред. В. Г. Болтянского. – 2-е изд. – М.: Наука. Гл. ред. фнз. - мат. лит., 1987. – 432 с.

РИСУНКОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ СТЕРЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

Іван Ленчук

Житомирський державний університет імені Івана Франка

Розв'язування задач стереометрії не обмежується виключно геометричною складовою, в них «левову частку» місця займають формально-аналітичні перетворення й вираження, а завершують операції арифметичні обчислення. Звісно, схожі вправи не зайві у навчанні, демонструючи, зокрема, тісні міжпредметні зв'язки у середовищі математичних дисциплін. Усе таки, із фахово-змістового погляду поза предметні дії нівелюють сутність задач, оскільки: «Геометрія має бути геометричною». Це означає, що її ***головним*** діючим об'єктом повинна стати ***фігура*** …, а ***головним*** засобом навчання – ***рисунок***, **картинка»** [1, с. 75].

У посібниках методичного характеру превалює думка, що рисунки в стереометрії є допоміжним засобом розв'язування задач ([2, с. 6]; [3, с. 15]). Проте без рисунка непросто дійти результату в більш-менш серйозній задачі, а майбутній учитель (учень), уважно прочитавши умову, моделює бінарним зображенням уявлювану конструкцію й лише опісля ґрунтовно аналізує реальну просторову ситуацію. Отож, немає сумнівів, що грамотно виконаний рисунок – перший, головний і вкрай необхідний стереометричний засіб. Окрім того, на якісному рисунку побудовними методами (зокрема, із застосуванням сучасних ІКТ) з надвисоким ступенем точності розв'язуються різного роду позиційні та метричні задачі, що візуально демонструє ***прикладну*** сутність дисципліни «Геометрія» [4, 5].

Геометрія формує життєво важливі для учня *знання*, *вміння* і *навички*, адже: «… викладання геометрії включає три тісно пов'язані, але поряд із тим і протилежні елементи: ***логіку***, ***наочне уявлення***, ***застосування до реальних речей***. Цей «трикутник» складає … **душу *викладання геометрії*»** [6, с. 57].

Такі якості особистості ефективно розвиватимуться лише за умови, якщо в закладі вищої педагогічної освіти першій з наук буде відведено одне із пріоритетних місць.

Найменше, що у змозі зробити вчитель, – це геометрично підсилити, максимально унаочнити задачу на обчислення, додаючи конструктивізму і рисункової візуалізації алгоритму її покрокового розв'язання, орієнтуючи тих хто вчиться на примітивний (поки що), але ***практичний*** результат.

Як цього досягти? Продемонструймо прикладом.

Задача. *Задано правильну трикутну піраміду SABC зі стороною основи a. Бічне ребро піраміди у два рази більше сторони основи.*

1. *Побудуйте на поверхні піраміди* ГМТ *рівновіддалених від вершин S і A.*

2. *Знайдіть формально-логічно та графічно площу фігури, яку утворює* ГМТ. *Оцініть точність рисункових операцій.*

3. *Побудуйте розгортку зрізаної піраміди.*

Насамперед варто змоделювати загальногеометричний підхід до уявлюваного вирішення сформульованої пропозиції, тобто визначитися із правило-орієнтиром покрокових операцій у просторовій конструкції.

Наразі відомо, що ГМТ простору, рівновіддалених від вершин S і A, є площина Σ, перпендикулярна SA й така, яка точкою P ділить відрізок навпіл (рис. 1). Отже, за логікою міркувань, першим кроком слід провести через точку P ($SP = PA$) площину Σ (метрична операція), а другим – відшукати фігуру перерізу поверхні піраміди цією площиною (позиційна операція). Розуміння, «бачення» в уявленнях цих дій забезпечує правильний шлях у наступних побудовах безпосередньо на зображенні тривимірного тіла.

1-й спосіб (рис. 1). Скористаємося залежностями між визначальними елементами піраміди, котрі випливають з умови задачі.

Трикутник APB рівнобедрений ($SP = PA = AB = a$). Тому ділимо відрізок PB точкою Y навпіл і проводимо першу висоту AY цього трикутника. Але у трикутнику SAB, оскільки він теж рівнобедрений ($SA = SB$), медіана SM є одночасно і висотою. Тож відрізок PZ, проведений паралельно SM, є ще однією (другою) висотою трикутника APB. Відомо, що висоти трикутника перетинаються в одній точці. Нехай $N = AY \cap PZ$. Отже, третя висота BX трикутника APB однозначно визначається його вершиною B і ортоцентром N. Цим у грані SAB знайдено перпендикулярний напрям до ребра SA. Тепер через точку P у цій грані проведемо відрізок PQ, паралельний XB, а через точку Q у грані SBC – відрізок QR, паралельний BC (адже площина Σ розділяє ребра SB і SC правильної піраміди у перетині з ними в одному і тому ж відношенні, що очевидно). Точки P, Q і R в об'єднанні зі всіма точками відрізків PQ, QR і RP (трикутник PQR) й будуть шуканим ГМТ на поверхні піраміди.

У такому алгоритмі **конструктивних** операцій спостерігаємо факт злиття, (накладання) кроків проведення через точку P площини, перпендикулярної ребру SA, і побудови перерізу піраміди площиною. Дві, загалом різні за геометричною суттю операції (метрична і позиційна), в цьому конкретному випадку неподільні.

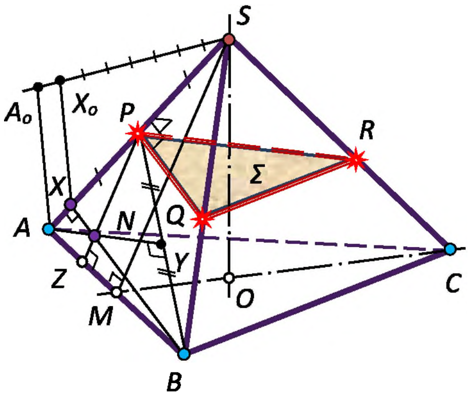


Рис. 1

2-й спосіб (рис. 1). У рівнобедреному трикутнику SAB опустимо із точки B перпендикуляр на його бічну сторону SA, розрахувавши розташування його основи X на цій стороні ***формально-аналітично***.

Отже, $AB = a$; $SA = SB = 2a$. Позначимо $AX = x$, тоді $XS = AS - x$. У трикутнику SAB справедлива рівність: $AB^2 - x^2 = SB^2 - (AS - x)^2$. Звідси маємо: $x = AX = \frac{a}{4}$, $XS = \frac{7a}{4}$ і $AX : XS = 1:7$. ***Графічне*** завершення задачі, яке згідно з узагальненою теоремою про пропорційні відрізки дозволяє змоделювати на зображенні знайдене відношення, не викликає труднощів.

Щоб подати площу рівнобедреного трикутника PQR функцією параметра a, виразимо через a його бічні сторони ($PQ = PR$) і кут QPR між ними.

1. Трикутник AXB прямокутний і $XB^2 = AB^2 - AX^2$, тому $XB = \frac{\sqrt{15}\,a}{4}$.

2. $\Delta\, SXB \backsim \Delta\, SPQ$, отже $\frac{PQ}{XB} = \frac{SP}{SX} \Rightarrow PQ = \frac{\sqrt{15}\,a}{7}$, а $PQ : XB = 4 : 7 = k$.

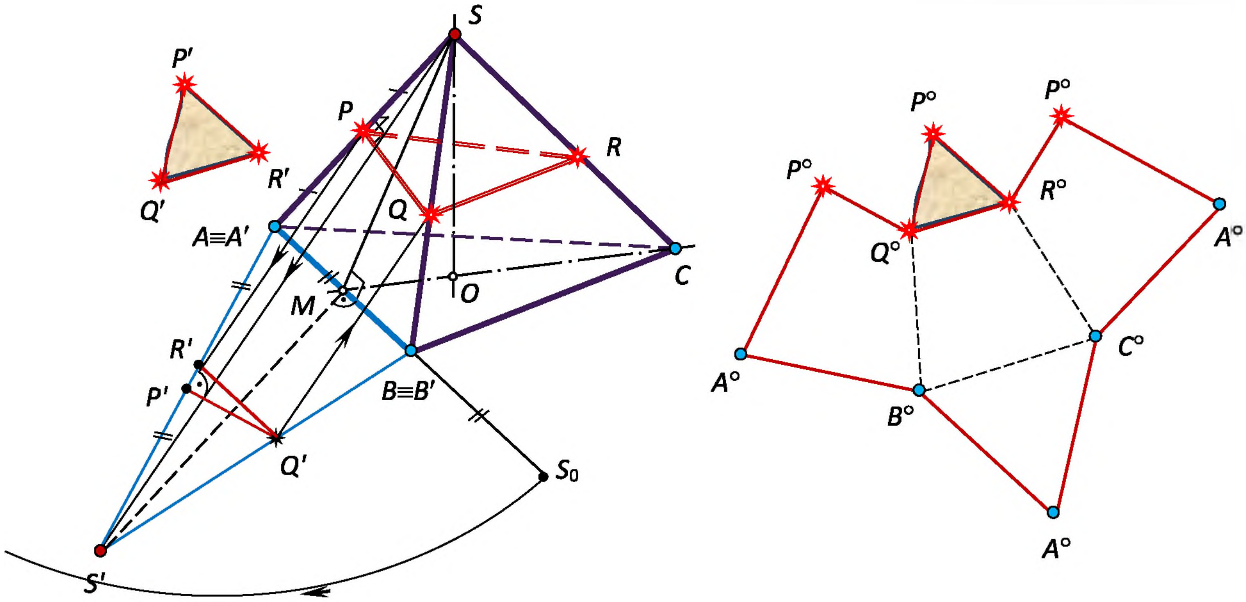
3. $\angle CXB = \angle RPQ$ ($XB = XC$, $BC = a$); із трикутника CXB за теоремою косинусів отримаємо $\cos \angle RPQ = \frac{7}{15}$ і, отже, $\sin \angle RPQ = \frac{4\sqrt{11}}{15}$.

4. $S_{\Delta\, PQR} = \frac{1}{2} PQ^2 \cdot \sin \angle RPQ = \frac{2\sqrt{11}}{49} a^2$. (*)

Можна скористатися також відомим фактом про те, що *площі подібних фігур відносяться як квадрати їх відповідних лінійних елементів*. У такій ситуації площу трикутника CXB неважко знайти, наприклад, за основою BC і висотою XK, проведеною з вершини X на сторону BC.

3-й спосіб (рис. 2, *а*). Сумістимо ліву грань піраміди SAB із картинною площиною: **змоделюємо**

її ***виносне*** креслення, обравши на зображенні в якості оригінального ребро $AB \equiv \equiv A'B'$. У побудові $M'S' \perp A'B'$ і $A'S' = B'S' = 2A'B'$. Провівши через точку P' ($A'P' = P'S'$) відрізок $P'Q'$ справді під кутом 90° до $A'S'$, одержимо точку Q', котра з шуканою точкою Q пов'язана пропорцією: $S'Q' : Q'B' = SQ : QB$. Точки Q і R будуємо вже звичним прийомом.



а) *б*)

Рис. 2

Тут рівнобедрений трикутник PQR (рис. 2, *а*) неважко зобразити у натуральну величину ($A'B' = a$), адже його бічні сторони і основа мають розміри відрізків $Q'R'$ і $P'Q'$ відповідно, де $Q'R' \parallel A'B'$.

Щоб методом трикутників побудувати розгортку піраміди, зрізаної площиною Σ, усі потрібні розміри ребер «знімаємо» з виносного креслення грані $S'A'B'$. Тут: $A°B° = B°C° = C°A° = = A'B'$; $A°P° = A'P'$; $B°Q° = C°R° = B'Q'$; $P°Q° = P°R° = P'Q'$ і $Q°R° = Q'R'$. Умовно розрізаємо піраміду вздовж ребер $A'P'$, $A'B'$, $A'C'$, $P'Q'$, $P'R'$ і «розкладаємо» її бічні грані та нижню й верхню основи на площину зображень (рис. 2, *б*). За розгорткою, виконаною на цупкому папері, неважко склеїти модель. Задачу розв'язано повністю.

Заміри (див. винесене креслення на рис. 2, *а*), виконані на ПК у системі автоматизованого проектування «КОМПАС 3D-LT v.10» із точністю 4-го знаку після коми, мають такі значення: $A'B'$ = 23,4232 мм, $P'Q' = P'R'$ = 12,9087 мм, $Q'R'$ = 13,4972 мм. Підрахунок площі трикутника PQR за формулою Герона дає результат: $S_{\Delta\,PQR}$ = 74,2625 мм^2.

Якщо a = 23,4232 мм підставити у формулу (*), отримаємо дещо інше значення шуканої площі: $S_{\Delta\,PQR}$ = 74,2716 мм^2, яке приймаємо за істинне.

Абсолютна похибка комп'ютерних випробувань складає 0,0091 мм^2, а відносна похибка – $1{,}222 \cdot 10^{-2}$ %. Констатуємо, що останній (конструктивний) спосіб є найпростішим!

Висновки. Знаменитий італійський вчений, фізик і астроном, один із засновників достотного природознавства Г. Галілея (1564-1642 рр.) писав: «*Геометрія є наймогутнішим засобом для витончення наших розумових здібностей і дає нам можливість правильно мислити і розмірковувати*». Французький філософ і енциклопедист Д. Дідро (1713-1784) був переконаний, що «*Країна, в якій навчали б рисувати так, як учать читати і писати, перевершила б незабаром всі інші країни у всіх науках і мистецтвах*».

Не нехтуючи формальними обчисленнями, а доповнюючи висновок стереометричної задачі конструктивною складовою, алгоритмізуючи та візуалізуючи шлях її покрокового розв'язання у рисунковому моделюванні, навіч демонструючи достовірність теоретично з'ясованих закономірностей і прикладний характер дисципліни, ми наближаємо студентів університету до життєвих реалій, вчимо образно мислити, діяти розумом й руками, відчутно геометризуємо та унаочнюємо їхні міркування і зміст дисципліни «Геометрія» в цілому.

Можливість *побачити на рисунку* чи *визначитися за допомогою рисунка* з різними питаннями взаємних розташувань фігур або метричного вираження одних фігур через інші й є тією притягальною силою, яка формує в кожного індивідуума прихильність, потяг до геометрії. Якраз рисунковою моделлю як джерелом інформації та графічним втіленням уявлень, що реалізовуються за чіткими правилами і які є органічно невід'ємною складовою цього курсу, й вирізняється евклідова геометрія з інших розділів математики.

Ще в 40-х роках минулого століття проф. Четверухін М.Ф. наголошував: «Недоліком сучасного викладання є *надлишкова штамповка вимірювальних задач*, переважання у виборі задач таких, в яких розв'язання зводиться до підстановки в завчену формулу числових даних і до підрахунку результату. Задачі такого роду мало дають учням у розумінні їх геометричного розвитку. Такі задачі, швидше, потрібно вважати арифметичними. *Таким чином, в області вимірювальної геометрії потрібно переглянути питання про підбір задач із тим, щоб* ***підсилити їх геометричний зміст***» [7, с. 11].

Прикро усвідомлювати, однак позитивних зрушень по суті цієї проблеми у школі немає й сьогодні, питання недосконалості змісту і методики навчання диво-науки не вирішуються. Програма курсу евклідової геометрії з роками набула дивного (надприродно нестрогого) характеру, а тому стан справ у її **викладанні** й **учінні** не покращується.

Список використаних джерел

1. Шарыгин И.Ф. Нужна ли школе XXI века Геометрия? / И.Ф. Шарыгин. // Математика в школе. - №4. – 2004. – С. 72-79.

2. Гольдберг Я.Е. С чего начинается решение стереометрической задачи: Пособие для учителей / Я.Е. Гольдберг. – К.: Радянська школа, 1990. – 120 с.

3. Жовнір Я.М. Позиційні задачі в стереометрії: Посібник для вчителів / Я.М. Жовнір. – К.: «Освіта», 1991. – 96 с.

4. Ленчук І.Г. Психолого-педагогічні передумови застосування геометричних знань до розв'язування задач / І.Г. Ленчук, М.В. Працьовитий // Наукові записки: [збірник наукових статей] / МОН України, Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова; упор. Л.Л. Макаренко. – К.: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 2018. – Випуск СХХХХІ (141). – С.113-121.

5. Ленчук І.Г. Конструктивна стереометрія в задачах: Навчальний посібник / І.Г. Ленчук. – Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2010. – 368 с.

6. Александров А. Д. О геометрии / А.Д. Александров // Математика в школе. – 1980. – № 3. – С. 56-62.

7. Четверухин Н.Ф. О научных принципах преподавания геометрии в советской школе / Н.Ф. Четверухин. – М.: Известия АПН РСФСР, 1951– Вып. 31. – С. 5-12.

ПРО ДЕЯКІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ МАТРИЧНОЇ АЛГЕБРИ З КОМП'ЮТЕРНОЮ ПІДТРИМКОЮ

Володимир Листопад

Національний університет харчових технологій, Київ

Виконання будь-яких операцій з матрицями (додавання, віднімання, множення, знаходження оберненої, транспонування тощо) або їх елементами є достатньо громіздкими та довготривалими в часі. На практичному занятті по темі «Дії з матрицями та обчислення оберненої матриці» вдається розібрати максимально 2-3 приклади. Якщо при вивченні цієї теми скористатися комп'терною підтримкою, то кількість виконаних завдань зросте в 4-5 разів. Для роботи кожен викладач обирає програму (для комп'ютерної підтримки), яка є в наявності, або ту, з якою здобувачі освіти знайомились на практичних/лабораторних заняттях з інформатики раніше.

Нагадаємо деякі відомі факти з матричної алгебри [1, с.92](без доведення).

Теорема 1. Довільну невироджену матрицю A з допомогою елементарних перетворень можна звести до одиничної матриці E .

$$A \to E . \quad (1)$$