**І. Г. Ленчук**
Житомирський державний університет
імені Івана Франка
м. Житомир, Україна
lench456@gmail.com

# РИСУНКОВИЙ ПРАКТИЦИЗМ СТЕРЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

Найменше, що у змозі зробити вчитель, – це геометрично підсилити, максимально унаочнити задачу на обчислення, додаючи конструктивізму та рисункової візуалізації алгоритму її покрокового розв'язання, демонструючи учням хоч і не надто значущий (у межах шкільного курсу геометрії), проте ***практичний*** результат.

**Задача.** *Основою піраміди SABCD є ромб ABCD, в якому AC = a, BD = b. Бічне ребро SA перпендикулярне площині основи і SA : AC =* $2\sqrt{2}$ *: 1. Через точку A і середину ребра SC проведено площину Σ, паралельну діагоналі BD. Побудуйте переріз піраміди площиною Σ. З'ясуйте форму фігури перерізу. Знайдіть площу перерізу* **побудовно**.

Нехай *SABCD* – задана піраміда (рис. 1). Площина перерізу **Σ** умовою задачі задається двома точками (прямою *AM*) та її фіксованим розташуванням відносно прямої *BD*, а саме, **Σ** ∥ *BD*. Це свідчить, що для побудови фігури перерізу площину **Σ** варто перезадати двома прямими, які перетинаються. Однією з них буде пряма *AM*, а інша (*p*) повинна мати з *AM* спільну точку й бути паралельною прямій *BD*.

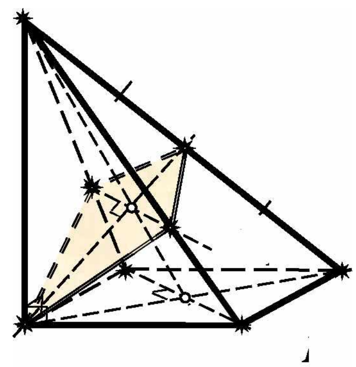

Рис. 1

Очевидно, що багатокутник перерізу розташовується «вище» основи піраміди *ABCD*. Причому, точки *A* і *M* – дві його вершини, а дві інші вершини (нехай це будуть точки *P* і *N*) належать бічним ребрам *SB* і *SD*. Отже, точку *Q* перетину прямих *AM* і *p* краще всього шукати у площині **Λ** трикутника *SBD*. Тоді пряма *p*, проведена через *Q* і паралельна *BD*, лежатиме у площині трикутника *SBD* та висікатиме на ребрах *SB* і *SD* шукані точки *P* і *N*.

Тож задача зводиться до відшукання точки *Q* перетину прямої *AM* із площиною трикутника *SBD*. Це – ***перша основна позиційна задача***. Вона розв'язується строго у три кроки: 1) проведемо через пряму *AM* площину-посередник **Ω** (*SAC*); 2) побудуємо лінію перетину *SO* площин **Ω** (*SAC*) і **Λ** (*SBD*); 3) зафіксуємо у площині **Λ** точку *Q* перетину прямих *SO* і *AM*.

Послідовно з'єднаємо точки *A-P-M-N-A*. *Переріз APMN піраміди побудовано*.

Для з'ясування форми фігури перерізу, уявимо, що піраміда стоїть на столі, яку ми ортогонально проекціюємо на площину столу. Проекцією буде ромб *ABCD* у натуральну величину, ребро *SA*, що виродилося в точку, і пряма *AC* – вироджена проекція площини **Ω** (*SAC*), яка розділяє піраміду на дві симетричні частини. Матимемо дві пари **рівних**, симетричних відносно **Ω** трикутників: $\Delta SAB = \Delta SAD$, $\Delta SBC = \Delta SDC$. Звідси отримаємо, що $\angle ASB = \angle ASD$ і $\angle BSC = \angle DSC$. Відрізки *SB* і *SD* рівні як похилі, проекції яких рівні за умовою ($AB = AD$), тобто трикутник *SBD* – рівнобедрений. Отже, пряма $p \parallel BD$ висікає на бічних ребрах піраміди рівні відрізки ***SP* і *SN***.

Розглянемо інші пари **рівних** трикутників (за двома сторонами і кутом між ними):

($\Delta SAP = \Delta SAN$, бо *SA* – спільна, $SP = SN$ і $\angle ASB = \angle ASD$) $\Rightarrow$ $\boldsymbol{AP = AN}$;

($\Delta SMP = \Delta SMN$, бо *SM* – спільна, $SP = SN$ і $\angle BSC = \angle DSC$) $\Rightarrow$ $\boldsymbol{MP = MN}$.

Таким чином, перерізом піраміди є **дельтоїд**, адже з різних боків від його діагоналі *PN* пари суміжних сторін чотирикутника *APMN* **рівні** ($AP = AN$ , $MP = MN$).

*Форму фігури перерізу з'ясовано*. **Площа** ж дельтоїда відшукується за формулою $S = \frac{1}{2}AM \cdot PN$ (*). Це дозволяє досить легко розв'язати задачу ***обчислювально***.

Тепер змоделюємо рисунком ***графічний*** шлях до результату задачі.

Уявимо собі, що ми тримаємо піраміду *SABCD* в руках і, рухаючись у просторі, кладемо її діагоналлю $AC \equiv A'C'$ на картинну площину (рис. 2).

Для визначеності, оберемо довжини відрізків $A'C'$ = = $a$ = 4 од. м. і $B'D' = b = \frac{3a}{4}$ = 3 од. м. Узявши до уваги, що трикутник $S'A'C'$ прямокутний, а катет $S'A'$ в оригіналі дорівнює $2\sqrt{2}a$, **сумістимо** його (точку $S'$) із картинною площиною шляхом обертання навколо прямої нульового рівня $A'C'$. На гіпотенузі $S'C'$ відмітимо точку $M'$, яка є її серединою. Тоді $A'M'$ буде більшою із двох діагоналей дельтоїда $A'P'M'N'$, а $Q'$ у перетині $A'M'$ з медіаною $S'O'$ трикутника $S'A'C'$ – точкою перетину його діагоналей. Оскільки з подібності трикутників *SPN* і *SBD* випливає, що $P'N' = \frac{2}{3}b$ = 2 од. м., то на прямій, яка проходить через точку $Q'$ і перпендикулярна $A'M'$, в обидва боки від неї відкладемо по 1 од. м. Отримаємо дві інші вершини $P'$ і $N'$ дельтоїда, тепер уже зображеного в натуральну величину (із вибраною одиницею довжини).

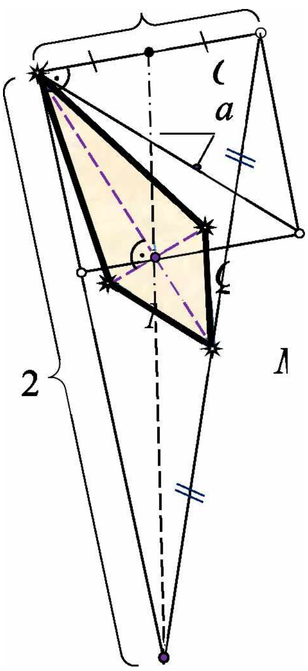


Рис. 2

Оригінальну довжину відрізка $P'N'$ можна також отримати суто **графічно**, якщо за акуратно знятими з рисунка 2 розмірами сумістити із площиною зображень рівнобедрений трикутник $S'B'D'$ – з основою $B'D' = \frac{3a}{4}$ і висотою $S'O'$, адже відомо, що $S'Q' = \frac{2}{3}S'O'$, а $P'N' \parallel B'D'$.

Щоб оцінити точність графічних операцій, варто заміряти на рисунку (наприклад, у міліметрах) довжини трьох відрізків: $A'C' = a$, $A'M'$ і $P'N'$. За умови, що $b = \frac{3a}{4}$ й урахувавши формулу (*), маємо: $S^* = ab/2 = \frac{3a^2}{8}$ (мм$^2$). Так знайдену площу вважатимемо **оригінальною**. Підставивши довжини відрізків $A'M'$ і $P'N'$ у формулу площі дельтоїда $S_p = \frac{1}{2}\, A'M' \cdot P'N'$, дістанемо її **рисункове** значення. Далі відомим прийомом знаходимо абсолютну та відносну похибки виконаних конструктивних операцій. Окремо зауважимо, що рисунок 2 вміщує всю потрібну інформацію для побудови **розгортки** зрізаної піраміди, яку опісля неважко склеїти **моделлю**.

**Анотація. Ленчук І. Г. Рисунковий практицизм стереометричних задач.** *Конкретним прикладом продемонстровано візуальне моделювання задач стереометрії. Засобом позиційних і метричних операцій з фігурами обрано метод суміщення з картинною площиною.*

**Ключові слова:** *конструктивна геометрія, графічний шлях, суміщення, рисунок.*

**Summary. Lenchuk I. G. Picturesque practicality of stereometric problems.** *A concrete example demonstrates the visual modeling of stereometry problems. By means of positional and metric operations with figures, the method of alignment with the picture plane is selected.*

**Key words:** *constructive geometry, graphic path, combination, drawing.*

**Аннотация. Ленчук И. Г. Рисуночный практицизм стереометрических задач.** *Конкретным примером продемонстрировано визуальное моделирование задач стереометрии. Средством позиционных и метрических операций с фигурами выбран метод совмещения с картинной плоскостью.*

**Ключевые слова:** *конструктивная геометрия, графический путь, совмещение, рисунок.*