Богорадова Д. Ю., студентка
Житомирський державний університет імені Івана Франка
Науковий керівник – к.п.н., доцент Кривонос О. М.

ЧИСЛА КАТАЛАНА

Багатьом напевно знайома послідовність натуральних чисел 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, у якій кожне наступне число є сумою двох попередніх. Ці числа мають ім'я знаменитого середньовічного італійського математика Фібоначчі, також відомого як Леонардо Пізанський. Ці цифри мають безліч чудових властивостей [2].

Існують інші чудові послідовності натуральних чисел. Ця послідовність починається числами 1, 2, 5, 14, 42,132, …; її члени називаються числами Каталана. Вони виражаються формулою (1), де знак оклику, як зазвичай, позначає факторіал.

$$C(n) = (2n)!/n!(n+1)! \tag{1}$$

Числа Каталана – це числова послідовність, що зустрічається у багатьох завданнях комбінаторики. Послідовність названа на честь бельгійського математика Ежена Шарля Каталана, хоч була відома ще Леонарду Ейлеру. Ці числа пов'язані з різними завданнями комбінаторики, теорії ймовірностей, теорії чисел. Про закономірності побудови наступного члена послідовності за попередніми її членами ми поговоримо трохи пізніше.

Є дві формули для каталонських чисел: **рекурсивна та аналітична**.

Насправді числа Каталана *C (n)* визначаються так: нульове число Каталана дорівнює одиниці. Число з номером n дорівнює сумі наступних творів: нульового числа на *(n - 1)* –е, першого числа на *(n - 2)* –е, другого на *(n - 3)* –е, …, *(n - 1)* –го на нульове, так щоб сума номерів двох чисел, що перемножуються, дорівнювала *n-1* . Це є рекурсивна формула:

$$C(n) = \sum_{i=0}^{n-1} C(i)C(n-1-i) \tag{2}$$

Аналітична формула:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \tag{3}$$

Тут $\binom{n}{k}$ позначає звичайний біноміальний коефіцієнт, тобто кількість способів вибору k об'єктів з набору n об'єктів). Наведену вище формулу можна легко зробити з проблеми монотонних шляхів у квадратній сітці. Загальна кількість монотонних шляхів у розмірі решітки n×n дається від(2nn) [1].

Тепер підраховуємо кількість монотонних шляхів, які перетинають головну діагональ. Розглянемо такі шляхи, що перетинають головну діагональ, і знайдіть у ній перше ребро, яке знаходиться над діагоналлю. Відобразіть шлях навколо діагоналі на всьому шляху, ідучи за цим краєм. Результатом завжди є монотонний шлях у сітці(п−1)×(п+1). З іншого боку, будь-який монотонний шлях в решітці(п−1)×(п+1)повинні перетинати діагональ. Отже, ми перерахували всі монотонні шляхи, що перетинають головну діагональ в решітціп×п.

Кількість монотонних шляхів у решітці (n−1)×(n+1) є (2nn−1). Назвемо такі шляхи «поганими». В результаті, щоб отримати кількість монотонних шляхів, які не перетинають головну діагональ, ми віднімаємо наведені вище «погані» шляхи, отримуючи формулу:

Відомо щонайменше 66 різних конструкцій, які призводять до появи чисел Каталана. Прикладом слугують правильні дужкові послідовності – набори дужок, що відкриваються і закриваються, в яких кожній дужці, що відкривається, відповідає дужка, яка закривається. Число можливих послідовностей з фіксованою кількістю пар дужок виражається числом Каталана. Наприклад, 14 правильних послідовностей з чотирьох пар дужок:

(((()))), ((()())), ((())()), ((()))(), (()(())), (()()()), (()())(), (())(()), (())()(), ()((())), ()(()()), ()(())(), ()()(()), ()()()()

Розглянемо ситуацію з багатокутниками: ми фіксуємо деяке ребро і розглядаємо трикутник, що примикає до цього ребра, див. рис. 1.

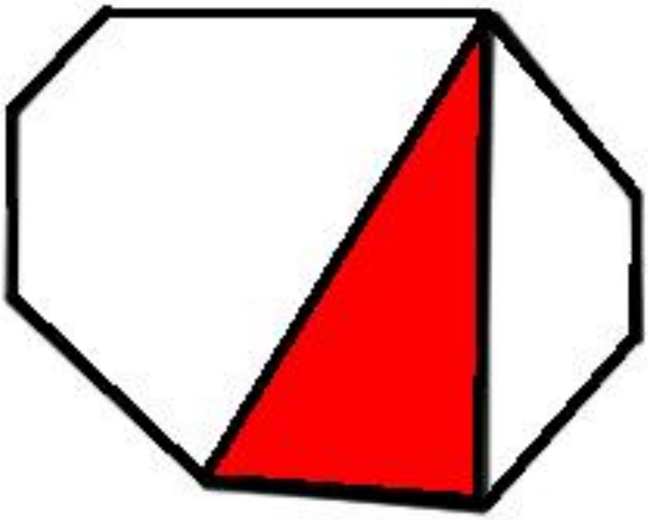

Рис.1. Багатокутник

Він розбиває $(n+2)$ -кутник на $(p+2)$ -кутник і $(q+2)$ -кутник, де $p+q=n-1$. Ці два багатокутники повинні бути розбиті на трикутники своїми діагоналі, що не перетинаються, які є діагоналями вихідного багатокутника. Будь-яке таке розбиття двох "маленьких" багатокутників породжує розбиття початкового багатокутника.

Каталонський номер C_n застосовується в різних комбінаторних задачах. Він є рішенням для:

- Номер правильної послідовності дужок, що складається з n-відкриваючої і n-закриваючі дужки.
- Кількість вкорінених повних бінарних дерев з n+1 листків (вершини не нумеруються). Кореневе бінарне дерево є повним, якщо кожна вершина має дві дочірні або не має жодного дочірнього дерева.
- Кількість способів повного закріплення в дужках n+1 факторів.
- Кількість способів підключення 2n точки на колі, щоб утворити n розрізнені акорди.
- Кількість неізоморфних повних бінарних дерев з n внутрішніх вузлів (тобто вузлів, які мають хоча б одного сина).
- Кількість перестановок, довжини n яких можна відсортувати стеком (тобто можна показати, що переупорядкування відсортовано стеком тоді і тільки тоді, коли такого індексу немає i<j<k, такий, що $a_k<a_i<a_j$).
- Кількість неперехресних розділів набору n елементів.
- Кількість способів покриття сходів 1…n використання n прямокутників (Сходи складаються з n колони, де i^{th} стовпчик має висоту i).

Числа Каталана є чудовим фактом в природі. Розбирати і знаходити їх на практиці є дійсно цікавою роботою. На жаль, вони випадають із розгляду типової шкільної програми, саме тому не всі про них знають, але кожен фахівець комп'ютерни наук має бути з ними знайомий.

Список використаних джерел

1. Ландо, С.К. Введение в дискретную математику / С.К. Ландо. – М.: МЦНМО, 2012. – 265 с.
2. Шень А. Программирование: теоремы и задачи. – 2-е изд., испр. и доп./ А. Шень - М.: МЦНМО, 2004. – 296 с