УДК 378. 147: 515. 4

І.Г. Ленчук,
кандидат технічних наук, професор;
А.Ц. Франовський,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
(Житомирський педуніверситет)

ПРОДУКТИВНО-УЯВНІ УЗАГАЛЬНЕННЯ В ЗАДАЧАХ СТЕРЕОМЕТРІЇ

Пропонується об'єднуюча концепція навчання аналітичних та конструктивних методів стереометрії.

Потреба в належному рівні розвитку просторових уявлень і уяви школярів для успішного засвоєння не лише стереометрії, а й інших загальноосвітніх предметів і подальшої професійної (зокрема, математичної або технічної) освіти доведена дослідженнями багатьох педагогів і психологів. Разом з тим, це одна з найскладніших задач навчання в загальноосвітній школі та вузі. Усім відомо: чим вищий рівень просторових уявлень учнів чи студентів, тим простіше навчити їх геометрії, тим більш цікаві та змістовні задачі можна ставити перед ними.

Психологи чітко розрізняють поняття "*уявлення*" та "*уява*". Уявлення трактують як образ раніше сприйнятого предмета або явища – уявлення пам'яті, а також образ, створений продуктивною уявою; це вища форма чуття, відображення у вигляді наочно-образного знання: "... необхідною передумовою уяви є запас уявлень, які підлягають дальшій переробці"[1:30]. Уява – це психічна діяльність, що репродукує створення уявлень і мислених образів та ситуацій, які ніколи в цілому не сприймалися людиною. Виділяють *відтворюючі* і *творчі* уяви: "Відтворююча уява – це уява чогось нового для даної людини, що спирається на словесний опис або умовне зображення (рисунок, схема тощо). У шкільному віці уява спирається вже на досить значний життєвий досвід і на дедалі більші знання" [1:30].

На думку А.Д. Александрова, *геометрія у своїй сутності є таке поєднання живої уяви і строгої логіки, в якому вони взаємно організовують і спрямовують одна одну*. Уява дає безпосереднє бачення факту і підказує логіці його вираження та доведення, а логіка, у свою чергу, надає точності уяві і спрямовує її на створення картин, що виявляють потрібні логіці зв'язки: "Особливість елементарної геометрії серед інших розділів математики полягає в тому, що вона об'єднує в собі строгу логіку з наочним уявленням, логічний аналіз – з цілісним статистичним сприйняттям предмета. Можна сказати, що по суті своїй ***геометрія і є не що інше, як органічне поєднання строгої логіки з наочним уявленням: наочне уявлення пройняте і організоване строгою логікою, і логіка, пробуджена наочним уявленням. Там, де немає однієї із цих складових, немає також істинної геометрії***" [2:282-283].

Програми технічних вузів, як відомо, вміщують у собі аналітичну геометрію окремим розділом курсу математики, а нарисну геометрію – окремим розділом курсу інженерної графіки. Традиційно ці два предмети відносять до різних кафедр і читаються вони різними викладачами, хоч є внутрішньо спорідненими єдиною метою: навчити студентів прийомів образного мислення і методів чи то векторно-координатно, чи то конструктивно (побудовно) розв'язування загалом тих самих стереометричних задач. Цікаво: якщо в першому випадку викладачу краще мати вищу базову математичну освіту, то у другому – допустимо й вищу технічну.

Звичайно, обидві геометрії є специфічними відгалуженнями математики, проте нарисна геометрія є ще й "граматикою креслення" (за висловом В.І. Курдюллова). Останнє, власне, й визначає її місце серед інженерних дисциплін. Все ж таки, в загальногеометричному аспекті аналітична та нарисна геометрія споріднені [3].

Проілюструємо висловлену тезу задачами.

Задача 1. *Знайти довжину відрізка (АВ) загального розташування.*

Відомо [4], що аналітична геометрія побудована на зіставленнях: кожній точці простору – трійки чисел (координат); кожній поверхні (площині) – рівняння, яке пов'язує біжучі координати; кожній кривій (прямій) – два таких рівняння. Завдяки цьому геометричні факти можуть бути перекладені на мову алгебри, після чого результат за допомогою оберненого переходу знову тлумачать на геометричній мові. Основна ідея тут, очевидно, полягає в тому, щоб змусити потужний і дійовий апарат алгебри регулярним чином працювати для геометричних цілей.

У випадку щойно сформульованої задачі відрізок AB задається координатами його кінців $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$ у прямокутній декартовій системі координат $Oxyz$. Це задання потрібно уявляти ("бачити") і вміти відтворити в наочному рисунку (рис. 1) з тим, щоб вочевидь спростити аналітичне вираження формулою довжини відрізка AB через відомі координати точок A і B.

Проведемо через точки A та B прямі, паралельні осі z (рис. 1, *а*). Вони перетнуть площину xy у точках A_1, B_1, які мають ті ж абсцису і ординату, що й точки A та B, а апліката z у них дорівнює нулю. Якщо ж провести ще й у площині $\Sigma(AA_1 \| BB_1)$ через точку A пряму, паралельну A_1B_1, то одержимо прямокутний трикутник ADB ($\angle D = 90^0$), який, між іншим, й буде ключем до загальногеометричного вирішення питання про довжину відрізка AB, адже його катет $AD=A_1B_1$, що є ортогональною проекцією заданого відрізка на координатну площину $xy(\Pi_1)$, а ще один катет BD дорівнює різниці відстаней $(|z_2 - z_1|)$ точок A і B до цієї ж координатної площини, що очевидно.

Таким чином, довжина відрізка загального розташування будується як гіпотенуза прямокутного трикутника,

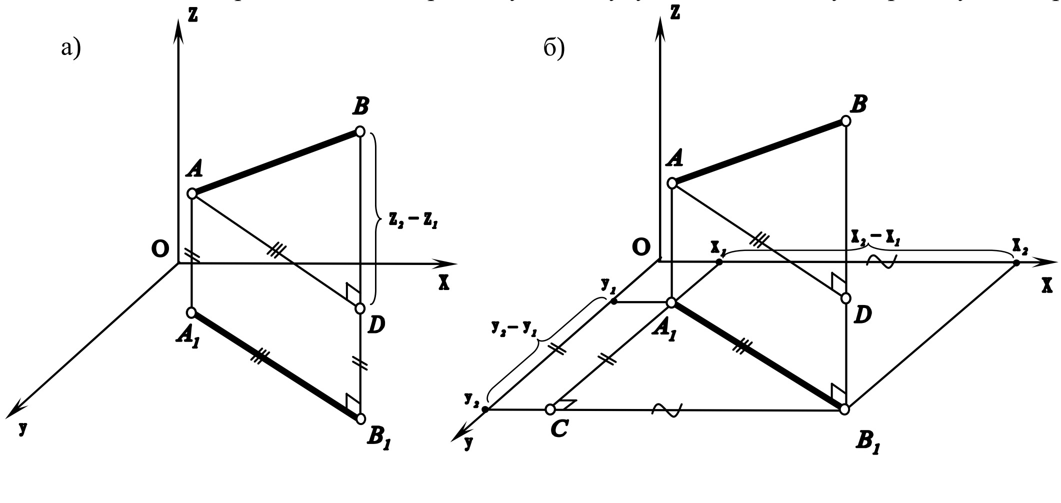


Рис.1

одним катетом якого буде ортогональна проекція відрізка на вибрану (виконавцем побудови) площину проекцій, а іншим – різниця відстаней кінців відрізка до площини проекцій, на якій взято перший катет.

У нарисній геометрії, що не менш відомо [5], тривимірні об'єкти зображають за методом Г.Монжа ортогонального проеціювання на дві (три) попарно ортогональні площини проекцій:, $xy \equiv \Pi_1$, $xz \equiv \Pi_2$, $yz \equiv \Pi_3$ (горизонтальна, фронтальна і профільна – відповідно). Однак тут в уяві розрізають ортогональний

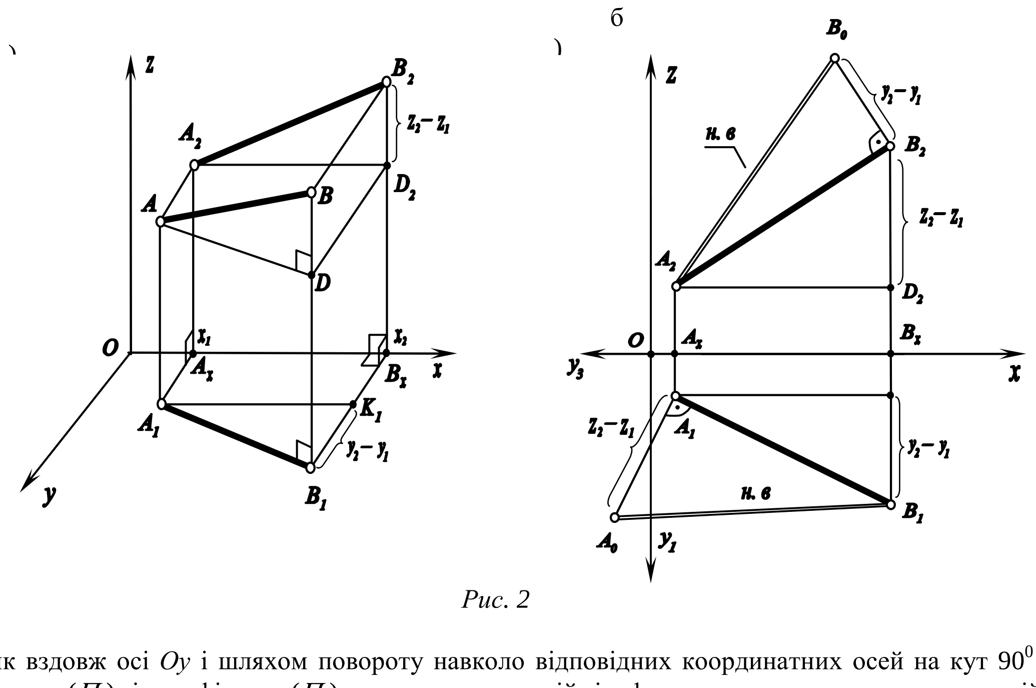


Рис. 2

тригранник вздовж осі *Oy* і шляхом повороту навколо відповідних координатних осей на кут 90^0 суміщують горизонтальну (Π_1) і профільну (Π_3) площини проекцій із фронтальною площиною проекцій (Π_2). Так здійснюють перехід від наочних уявлень геометричних фігур у просторі до їх так званих комплексних креслень – епюрів Г. Монжа (рис. 2).

Визначальною, *характеристичною ознакою креслень є те, що два виміри будь-якої точки простору, паралельні відповідній площині проекцій* (координатній площині вихідного тригранника), *проеціюються на цю площину без спотворення, а третій вимір, перпендикулярний їй, зникає (вироджується).* Наприклад, на рисунку 2,*б*) $A_2A_x = z_1$, $B_2B_x = z_2$ і, отже, $B_2D_2 = |z_2 - z_1|$. Тому якщо на епюрі відрізка *AB* першим катетом шуканого прямокутного трикутника взяти його горизонтальну проекцію A_1B_1, то різницею відстаней (висот) точок *A* і *B* до площини проекцій Π_1 буде відрізок $A_1A_0 = B_2D_2$, який займе розташування до A_1B_1 істинно під кутом 90^0. Напевно, що гіпотенуза A_0B_1 побудованого прямокутного трикутника й визначатиме натуральну довжину відрізка *AB* ($A_0B_1 = AB$). Очевидно, що так само успішно першим катетом (тепер іншого) прямокутного трикутника можна взяти фронтальну проекцію A_2B_2 заданого відрізка. Тоді вже різниця глибин точок *A* і *B*

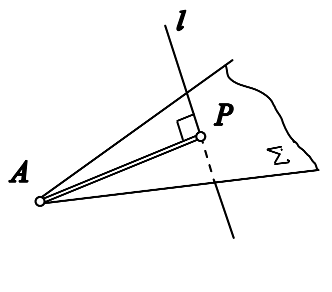
($(A_1A_x = y_1,\ B_1B_x = y_2) \Rightarrow \quad B_1K_1 = |y_2 - y_1|$) буде ще одним його катетом. Суттєво, й це легко перевірити на рисунку, що $A_0B_1 = A_2B_0$ (з точністю до виконання побудови).

Повернувшись до рисунка 1, помічаємо, що, за теоремою Піфагора, $AB^2 = BD^2 + AD^2$. Але ж $BD = |z_2 - z_1|$, а $AD = A_1B_1$. Тому, для вираження ще й A_1B_1 через координати кінців відрізка AB, проведемо у площині xy через точки A_1 і B_1 дві пари прямих, паралельних відповідно координатним осям Ox і Oy (рис. 1,б). У прямокутному трикутнику A_1CB_1 ($\angle C$=90^0), який утворився, A_1B_1 – його гіпотенуза, а $A_1C = |y_2 - y_1|$ і $CB_1 = |x_2 - x_1|$, що зримо легко обґрунтовується рисунком. Отже, $A_1B_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, і в трикутнику ADB остаточно матимемо: $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Таким чином, у розумінні фактичного матеріалу стосовно пошуку графічного й аналітичного розв'язків цієї загалом не найскладнішої (однак важливої) метричної задачі, нами нібито нічого нового не запропоновано. Проте в такий спосіб навчання викладач обов'язково привертає увагу слухачів до вузлових, природних (стереометричних) взаємозв'язків, наголошує на узагальнюючих моментах унаочнених уявно-логічних міркувань і умовиводів по відношенню до елементарних геометричних фігур і конструкцій в цілому, що задіяні до розгляду. Із цього безпосередньо випливає, що будь-яку стереометричну задачу потрібно спочатку вирішувати в загальногеометричному плані, без урахування конкретного методу її реалізації чи то в обчислювальних, чи то в проеційно-закономірних побудовних представленнях на папері. Якщо ж, окрім цього, студент власноруч – за конкретними числовими значеннями координат визначальних точок – знайде і порівняє результати обох розв'язків, то він наочно одержить підтвердження того факту, що і аналітика, і графіка є лише надійним (все ж таки придуманим людьми, а не природою) інструментом вираження і фіксації позиційних чи метричних взаємозалежностей між певним чином заданими геометричними фігурами.

З а д а ч а 2. Знайти відстань від точки A до прямої l.

Усі знають, що через точку поза прямою можна провести у просторі геометричне місце прямих (площину Σ, див. рис. 3), перпендикулярних заданій прямій. І лише одна пряма цього геометричного місця, яка містить точку A, перетинає пряму l у деякій точці P. Очевидно, що відрізок AP й буде розв'язком задачі.



Ці прості логічні висновки з уяви індукують *загальнометричний* шлях до відповіді: 1) через задану точку *A* проводимо площину *Σ*, перпендикулярну заданій прямій *l* (метрична задача); 2) шукаємо інциденцію (точку перетину) прямої *l* і площини *Σ* (позиційна задача); 3) з'єднуємо точки *A* і *P* відрізком прямої.

З метою побудовної реалізації цього правила-орієнтира на епюрі Г. Монжа, спочатку доводять теорему ([5], основна теорема метрики) про проеціювання прямого кута, а потім – наслідок із неї. Сформулюємо ці твердження.

Теорема. Прямий кут проеціюється ортогонально в натуральну величину тоді і тільки тоді, коли хоча б одна його сторона паралельна площині проекцій, а інша – не перпендикулярна до неї.

Наслідок. Пряма l перпендикулярна площині Σ тоді і тільки тоді, коли на комплексному кресленні її горизонтальна проекція (l_1) перпендикулярна горизонтальній проекції горизонталі (h_1) площини Σ, а її фронтальна проекція (l_2) перпендикулярна фронтальній проекції фронталі (f_2) цієї ж площини (або, у символьному запису: $l \perp \Sigma \Leftrightarrow \begin{cases} l_1 \perp h_1, \\ l_2 \perp f_2, \end{cases} (h, f) \subset \Sigma$).

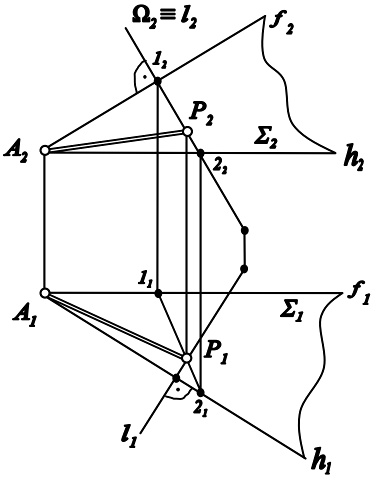


Рис. 4

Тепер, за кроками сформульованого правила-орієнтира, оформити графічний розв'язок задачі методом нарисної геометрії зовсім нескладно (див. рис. 4). Зауважимо лише, що для встановлення довжини відрізка AP (A_1P_1, A_2P_2) у будь-яких лінійних одиницях варто звернутися до попередньої задачі.

В аналітичній геометрії точка A задається її координатами (x_0; y_0; z_0), а пряма l – рівняннями (наприклад, параметричними): $x = x_1 + a_1t$, $y = y_1 + a_2t$, $z = z_1 + a_3t$, де (x_1; y_1; z_1) – координати фіксованої точки прямої, а (a_1; a_2; a_3) – координати її напрямного вектора.

Й тут задача розв'язується досить переконливо (алгебраїчно) шляхом послідовного виконання тих самих трьох кроків відпрацьованого у просторі правила-орієнтира.

1) Напрямний вектор $\overline{a}(a_1; a_2; a_3)$ прямої *l* є водночас вектором нормалі шуканої площини *Σ*, а тому $a_1(x - x_0) + a_2(y - y_0) + a_3(z - z_0) = 0$ –її рівняння.
2) Розв'язки (*x*; *y*; *z*) системи рівнянь

$$\begin{cases} a_1(x-x_0)+a_2(y-y_0)+a_3(z-z_0)=0, \\ x=x_1+a_1t, \\ y=y_1+a_2t, \\ z=z_1+a_3t \end{cases}$$

будуть координатами точки P перетину прямої l і площини Σ.

3) $AP=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$.

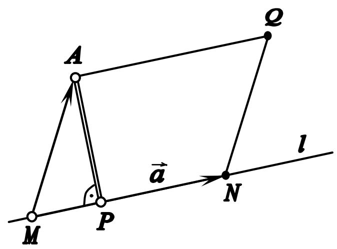


Рис. 5

Підкреслимо, що з позицій ефективного формування і розвитку в студентів навичок конструктивно-геометричного мислення, просторових уявлень і уяви саме цей шлях міркувань найбільш прийнятний. Хоч в теорії аналітичної геометрії [6] є й інший підхід до виведення компактної обчислювальної формули відстані від точки до прямої – з використанням поняття і властивостей векторного добутку векторів. Причому останній шлях не менш геометрично привабливий, адже просторова задача розв'язується у площині, визначеній заданими точкою A і прямою l (рис. 5). Тут $\overline{MN}=\overline{a}(a_1;a_2;a_3)$ і $\overline{MA}(x_0-x_1;\, y_0-y_1;\, z_0-z_1)$ – відомі вектори. Тому, з одного боку, площа паралелограма $MAQN$ $S=\left|\left[\overline{a},\overline{MN}\right]\right|$, а з іншого – $S=MN\cdot AP=\left|\overline{a}\right|\cdot AP$. Таким чином, $\left|\overline{a}\right|\cdot AP=\left|\left[\overline{a},\overline{MA}\right]\right|$. Звідси матимемо: $AP=\dfrac{\left|\left[\overline{a},\overline{MA}\right]\right|}{\left|\overline{a}\right|}$. Так одержаний вираз можна легко записати в координатній формі.

Все ж таки міркування в останньому варіанті планіметричні з самого початку і до кінця. Стереометрією, як такою, знехтували. У вивченні ж просторових зв'язків і взаємозалежностей такий підхід дещо некоректний, хоч у частинному випадку – цікавий.

З а д а ч а 3. Через задану точку А провести пряму а так, щоб вона була паралельна заданій площині Σ і перетинала задану пряму п.

Аналітик у пошуку розв'язку цієї позиційної задачі мав би міркувати так.

Оскільки шукана пряма а містить задану точку А(x_0; y_0; z_0), то її канонічні рівняння матимуть вигляд: $\dfrac{x-x_0}{a_1}=\dfrac{y-y_0}{a_2}=\dfrac{z-z_0}{a_3}$. Останні невідомими мають координати напрямного вектора прямої $\overline{a}(a_1;a_2;a_3)$. Далі, ця ж пряма паралельна, за умовою, заданій площині Ax+By+Cz+D=0. Це означає, що вектор $\overline{a}$ і вектор нормалі $\overline{m}(A;B;C)$ площини Σ взаємно перпендикулярні. Тобто, їх скалярний добуток дорівнює нулю: $Aa_1+Ba_2+Ca_3=0$. Нарешті, пряма а, з рівняннями якої потрібно визначитися, перетинає задану пряму п: $\dfrac{x-x_1}{n_1}=\dfrac{y-y_1}{n_2}=\dfrac{z-z_1}{n_3}$, а це свідчить про те, що рівняння заданої і шуканої прямих сумісні, тобто числа x, y, z є координатами їх спільної точки Р. Якщо до цього ж врахувати, що a_1, a_2 і a_3 не дорівнюють нулю одночасно (нехай, наприклад, $a_3 \neq 0$, тобто пряма а не паралельна площині xy), то визначальна система п'яти лінійних рівнянь із п'ятьма невідомими матиме вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{\frac{a_1}{a_3}}=\dfrac{y-y_0}{\frac{a_2}{a_3}}=z-z_0, \\ \dfrac{x-x_1}{n_1}=\dfrac{y-y_1}{n_2}=\dfrac{z-z_1}{n_3}, \\ A\dfrac{a_1}{a_3}+B\dfrac{a_2}{a_3}+C=0. \end{cases}$$

Розв'язання системи призведе до однозначного запису рівнянь шуканої прямої.

На запропонованому шляху до розв'язку виконавець, головним чином, удається до логічних роздумів, що

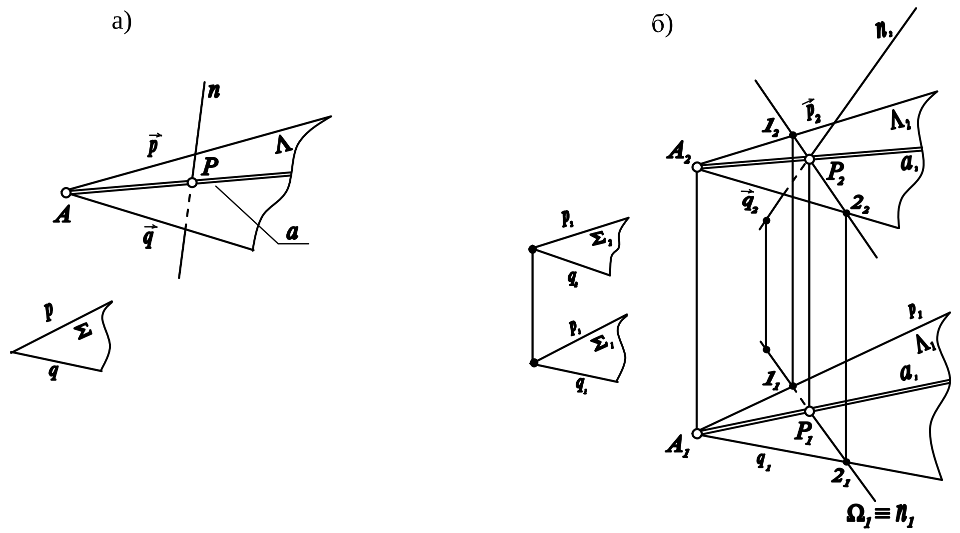


Рис. 6

базуються на первісно відомому і надто важливому в геометрії відношенні належності точок, прямих і площин; тут прослідковується осмислене трансформування "геометрії – в алгебру".

Однак, на нашу думку, мислення просторово-уявне, стереометрично-конструктивне більш важливе в навчанні геометрії не лише тому, що побудовні кроки чіткі в формулюванні і однозначні в реалізації; вони ненадумано природні, простіші й краще зрозумілі студенту.

1. Пригадаємо одну із ознак паралельності прямої і площини: "Усяка пряма площини, паралельної заданій площині (остання не співпадає з першою), теж паралельна цій площині". Тому, щонайперше, через задану точку *A* проведемо площину *Λ*, вектором нормалі якої буде вектор нормалі заданої площини *Σ* (рис. 6, *а*): $A(x\text{-}x_0)+B(y\text{-}y_0)+C(z\text{-}z_0)=0$. Саме в ній варто шукати пряму *a*.
2. Знайдемо точку $P(x;\, y;\, z)$ перетину прямої *n* з площиною *Λ*:

$$\begin{cases} A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0, \\ \dfrac{x-x_1}{n_1}=\dfrac{y-y_1}{n_2}=\dfrac{z-z_1}{n_3}. \end{cases}$$

3. Запишемо рівняння прямої $AP \equiv a$, що визначається тепер уже двома її точками.

Цей останній шлях, безсумнівно, більш привабливий своїм конструктивно-геометричним правилом-орієнтиром дій. Адже щойно (алгебраїчно) знову реалізовано *загальногеометричний* шлях до розв'язку задачі.

Графічно – на комплексному кресленні Г.Монжа – побудовні операції виконані за цією ж загальногеометричною схемою, з використанням інваріантів паралельних проекцій та – для пошуку точки *P* перетину прямої *n* з площиною *Λ* – методу посередників. Усі дії прості і не потребують додаткових пояснень (рис. 6, *б*).

З а д а ч а 4. Знайти відстань між заданими мимобіжними прямими m і n.

Відомо [7], що "Відстанню між мимобіжними прямими називається довжина їх спільного перпендикуляра. Вона дорівнює відстані між паралельними площинами, що проходять через ці прямі".

Класичне означення підштовхує до формулювання правила-орієнтира конструктивних (а потім і аналітичних) дій: 1) через одну із двох заданих прямих проведемо площину, паралельну іншій прямій; 2) на цій другій прямій виберемо будь-яку точку; 3) знайдемо відстань від вибраної точки до проведеної площини (рис. 7, *а*).

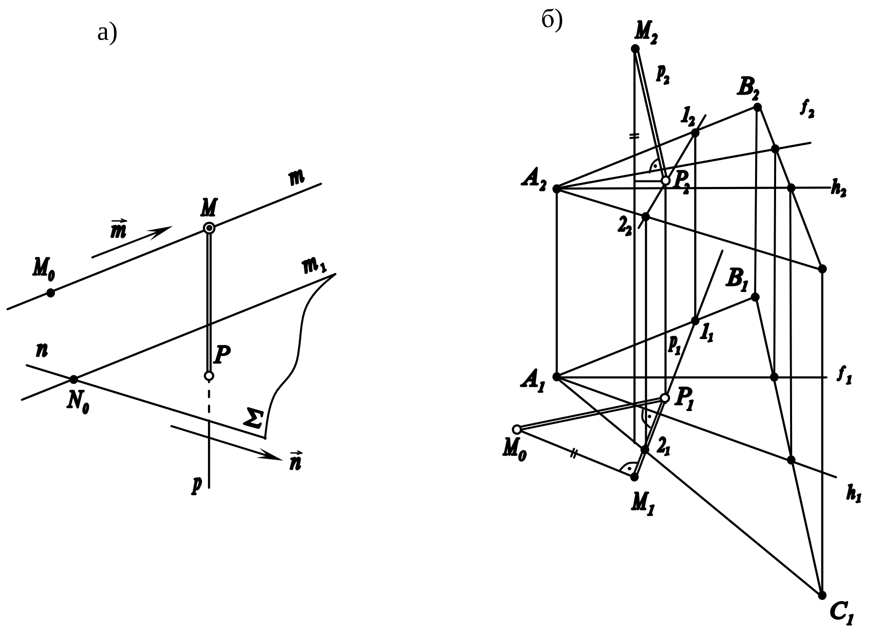


Рис. 7

Отже, сформульована задача зведена, таким чином, до однієї з найважливіших у геометрії метричних задач – на пошук відстані від точки до площини. Останню, щонайперше, обов'язково потрібно розв'язати в *загальногеометричному* вигляді, а потім – вивести формулу шуканої відстані векторно-координатним способом.

Очевидно, що відстань від точки $M(x_0;\ y_0;\ z_0)$ до площини Σ: $Ax+By+Cz+D=0$ вимірюється відрізком перпендикуляра, проведеного з точки на площину. Тому: 1) через точку M проводимо пряму p, перпендикулярну до площини Σ (цей крок на комплексному кресленні (рис. 7,*б*) передбачає перезадання площини загального розташування $\Sigma(ABC)$ її лініями рівня $\Sigma(h\cap f)$ з тим, щоб скористатися умовою перпендикулярності прямої і площини – наслідком із теореми про проеціювання прямого кута (див. задачу 2); 2) шукаємо точку P перетину перпендикуляра p з площиною Σ; 3) методом проямокутного трикутника будуємо відрізок M_0P_1 у натуральну довжину: $M_0M_1 = z_M - z_p$; $M_0M_1 \perp M_1P_1$.

Напевне, що цю ж саму схему дій неважко відтворити аналітично.

Справді, вектор нормалі заданої площини $\overline{p}\,(A;\ B;\ C)$ слугуватиме напрямним вектором перпендикуляра p. Тому ($x=x_0+At$, $y=y_0+Bt$, $z=z_0+Ct$) –його параметричні рівняння. Розв'язавши їх у системі із рівнянням площини Σ, одержимо координати $(x;\ y;\ z)$ шуканої точки P. За вже відомою формулою, обчислимо довжину відрізка MP.

Однак в аналітиці (для зручності) широко використовують готову формулу такої відстані. Виведення її досить просте. Якщо (рис. 8) p – перпендикуляр до площини Σ, проведений із точки M, а точка P – його основа, то вектори $\overline{p}(A;B;C)$ і $\overline{MP}(x-x_0;\ y-y_0;\ z-z_0)$ колінеарні (спів (протилежно) напрямлені). Запишемо скалярний добуток цих векторів у формі: $\overline{n}\cdot\overline{MP} = |\overline{n}|\cdot|\overline{MP}|\cdot cos\,\alpha = |\overline{n}|\cdot|\overline{MP}|\cdot(\pm 1)$, оскільки $\alpha = \{0^0; 180^0\}$. Звідси остаточно випливає: $MP = \dfrac{|\overline{n}\cdot\overline{MP}|}{|\overline{n}|} = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Якщо ж тепер повернутися до заданих мимобіжних прямих m: $\dfrac{x-x_1}{m_1} = \dfrac{y-y_1}{m_2} = \dfrac{z-z_1}{m_3}$ і n: $\dfrac{x-x_2}{n_1} = \dfrac{y-y_2}{n_2} = \dfrac{z-z_2}{n_3}$, то площина Σ, яка містить, наприклад, пряму n (див. рис. 7,*а*) та паралельна прямій m, однозначно визначається точкою $N_0(x_2; y_2; z_2)$ і парою неколінеарних векторів $\overline{m}(m_1; m_2; m_3)$, $\overline{n}(n_1; n_2; n_3)$. Біжучий вектор цієї площини $\overline{N_0N}(X-x_2; Y-y_2; Z-z_2)$ компланарний із векторами $\overline{m}$ і $\overline{n}$, тому їх мішаний добуток дорівнює нулю: $(\overline{N_0N}, \overline{m}, \overline{n})=0$. Або, по-іншому: $\begin{vmatrix} X-x_2 & Y-y_2 & Z-z_2 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} = 0$. Це й буде рівняння площини Σ. За точку прямої m, з якої потрібно опускати перпендикуляр p на площину Σ, краще всього взяти її фіксовану точку $M_0(x_1;\ y_1;\ z_1)$.

Графічно, зокрема й на епюрі Г.Монжа, щойно описана позиційна дія виконується елементарно.

Заради повної поінформованості, зауважимо, що можна порівняно простими міркуваннями обґрунтувати також відому [6] обчислювальну формулу відстані між заданими мимобіжними прямими. Її виведення базується на геометричному тлумаченні мішаного та векторного добутків векторів. При цьому роль відстані відіграє висота паралелепіпеда, побудованого на трьох напрямних відрізках $\overline{N_0N}$, $\overline{m}$ і $\overline{n}$ із спільним початком, як на сторонах.

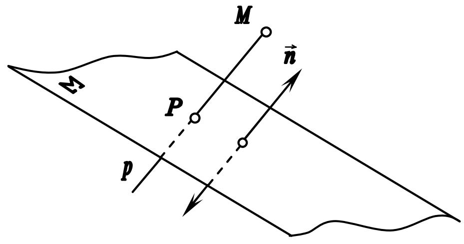


Рис. 8

Аналогічно, концентруючи увагу на загальногеометричних продуктивно-уявних підходах, можна обґрунтувати будь-яку геометричну конструкцію в курсі "Аналітична геометрія з теорією зображень". Зокрема, в конструктивно-аналітичному викладі досить ефективно сприймаються студентами порівняно складні теми: "Поверхні другого порядку", "Конічні перерізи", "Рухи в просторі". Важливо також знати, що відпрацювання правих-орієнтирів конструктивних операцій передує розв'язанню будь-якої позиційної чи метричної задачі в аксонометрії і навіть у її частинному випадку – на проекційних кресленнях М.Ф. Четверухіна (див., приміром, [8]).

Запропонована методична концепція навчання геометрії виключає формалізм у роботі викладача і викликає жваву зацікавленість студентів до предмета. Останні не просто сприймають (чи не сприймають) через слух і зір певні геометричні факти, а переосмислюють їх у мозку образно, через уявлення і уяву. Якщо ще й реальними задачами і фактами підкреслювати прикладний характер першонауки – геометрії, наголошувати на її природній присутності в конструкторській практиці та в усякому технологічному процесі сучасного промислового (і не тільки) виробництва, то успіх у засвоєнні результатів співпраці викладача і студентів буде гарантованим.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Михайленко В.Є., Тесленко І.Ф. Зв'язки у викладанні геометрії і креслення. – К.: Радянська школа, 1965.– 82 с.
2. Александров А.Д. Основания геометрии. – М.: Наука, 1987.– 288 с.
3. Маневич В.А., Котов И.И., Зенгин А.Р. Аналитическая геометрия с теорией изображений. – М.: Высшая школа, 1969.– 304 с.
4. Рашевський П.К. Курс дифференциальной геометрии. – М.- Л.: Госуд. изд. техн.-теорет. литературы, 1950. – 428с.
5. Четверухин Н.Ф., Левицкий Ф.С. и др. Начертательная геометрия. – М.: Высшая школа, 1963.– 458с.
6. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия, ч. I. – М.: Просвещение, 1986. – 336 с.
7. Погорелов А.В. Геометрия /Учебник для 7-11 кл. средней школы. – М.: Просвещение, 1990. – 384 с.
8. Ленчук И.Г., Боравлёв А.Ф. Построение опорных точек конических сечений на проекционно-полном чертеже Четверухина // Сборник научно-методических статей по начертательной геометрии и инженерной графике. – Вып. 17. – М.: МПИ, 1990. – С. 112-119.

Матеріал надійшов до редакції 5.11.02 р.

Ленчук И.Г., Франовский А.Ц. Продуктивно-воображаемые обобщения в задачах стереометрии.

Предлагается объединяющая концепция обучения аналитическим и конструктивным методам стереометрии.

Lenchuk I.G., Franovsky A.Ts. Projecting-imaginary Generalization in Stereometry Tasks.

A suggestion of a unifying conception in teaching analitical and constructive methods of stereometry.