МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЖИТОМИРСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

Прус Алла Володимирівна
Фонарюк Олена Василівна

ОКРЕМІ ПИТАННЯ МЕТОДИКИ РЕАЛІЗАЦІЇ КОМПЕТЕНТНІСНОГО ПІДХОДУ ДО НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ В ОСНОВНІЙ ШКОЛІ

Частина 1

Навчально - методичний посібник

Житомир
2022

УДК 378.147:37.016:51:373
О-51

Рекомендовано до друку Вченою радою
Житомирського державного університету імені Івана Франка
(протокол № 10 від 24 червня 2022 року)

Рецензенти:

Ірина СВЕРЧЕВСЬКА – кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри фізики та вищої математики Державного університету «Житомирська політехніка»

Тетяна МАХОМЕТА – кандидат педагогічних наук, доцент, декан факультету фізики, математики та інформатики, професор кафедри вищої математики та методики навчання математики Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини

Олена КОРОЛЮК – кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри математичного аналізу, бізнес-аналізу та статистики Житомирського державного університету імені Івана Франка

Окремі питання методики реалізації компетентнісного підходу до навчання математики в основній школі. Частина 1: Навчально-методичний посібник / А. В. Прус, О. В. Фонарюк. – Житомир : Вид-во ЖДУ імені Івана Франка, 2022. – 94 с.

У посібнику схарактеризовано шляхи та засоби формування професійної компетентності майбутніх учителів математики на основі раціональної пропорції між традиційними та інноваційними технологіями навчання. Продемонстровано методичні розробки окремих тем курсу математики основної школи.

Для вчителів математики та старшокласників, науково-педагогічних працівників і здобувачів вищої освіти фізико-математичних факультетів педагогічних спеціальностей усіх форм навчання, здобувачів післядипломної освіти, а також авторів підручників з математики для основної школи.

УДК 378.147:37.016:51:373

ЗМІСТ

ВСТУП

На сучасному етапі відбувається реформування системи освіти в усіх її ланках. Компетентнісний підхід як засіб оновлення перш за все, змісту освіти, його відображення на цілях та методах, засобах та організаційних формах навчання викликає низку питань у вчителів, викладачів. Тому розробка концептуальних засад компетентнісного підходу, дослідження його упровадження в практику вищої та загальноосвітньої школи, технологізація цього процесу перебуває в центрі наукових педагогічних досліджень. Слід зазначити, що ми зосередимось на компетентнісному підході у розрізі математичної освіти, оскільки математична компетентність є однією з базових компетентностей, яку набуватимуть учні НУШ, та яка безумовно повинна бути сформована у майбутніх учителів математики.

Мета нашої роботи: окреслити шляхи формування професійної компетентності майбутніх учителів математики на основі раціональної пропорції між традиційними та інноваційними технологіями навчання.

Завдання:

- проаналізувати науково-методичну літературу предмета дослідження;
- з’ясувати зміст та обсяг базових понять роботи: компетентність, фахова компетентність вчителя математики, математична компетентність, технологія навчання, традиційні технології навчання, інноваційні технології навчання;
- визначити окремі види традиційних технологій навчання та подати їх коротку характеристику;
- визначити окремі види інноваційних технологій навчання та подати їх коротку характеристику;
- представити окремі результати анкетування здобувачів вищої освіти щодо формування їх професійної компетентності;
- виокремити засоби формування професійної компетентності майбутніх учителів математики на сучасному етапі;
- продемонструвати методичні розробки окремих тем курсу математики основної школи.

1. Фахові компетентності

Розвиток компетентнісного підходу у закордонних країнах, складові його реалізації в освітньому процесі України досліджено у роботах Н.М. Бібік, Л. С. Ващенко, М. С. Голованя, О. І. Локшиної, О. В. Овчарук, Л. І. Паращенко, О. І. Пометун, І. В. Родигіної, Г. К. Селевка та ін. Роботи цих науковців охоплюють питання, які пов'язані з визначенням основних математичних компетенцій та напрямів їх набуття, формуванням математичної компетентності майбутнього вчителя математики на основі дослідницького підходу з використанням ІКТ; підготовкою майбутніх учителів до формування математичної компетентності учнів.

Поняття «компетенція» та «компетентність» є визначальними категоріями компетентнісного підходу в освіті, які в педагогічній науці досить плідно розробляються та різнобічно розглядаються, проте однозначного змісту і визначення не мають. У результаті аналізу ознак цих понять із різних джерел, зупинимось на такому. Терміном «компетенція» характеризується те різноманіття знань, умінь, особистісних якостей, властивостей, яким повинна володіти людина відповідно до свого місця у соціальній та професійній діяльності. Термін «компетентність» вказує на відповідність реального та необхідного в особистості фахівця, на ступінь освоєння особистістю змісту компетенцій, тобто, це, перш за все, якісний показник. У сфері освіти компетенція – це об'єктивна категорія, суспільно визнаний рівень знань, умінь, навичок, ставлень тощо у певній сфері діяльності людини; компетентність – це інтегративне утворення особистості, що поєднує знання, уміння, навички, досвід й особистісні якості, які зумовлюють прагнення, готовність і здатність розв'язувати завдання, що виникають у реальних життєвих ситуаціях, усвідомлюючи при цьому значущість предмета і результату діяльності.

До структури компетентностей входять фахові компетентності. До основних фахових компетенцій вчителя математики належать: *предметна (математична)*, яка включає вміння розв'язувати типові математичні задачі; володіння дедуктивним методом доведення та спростування тверджень;

володіння сучасними інформаційно-комунікаційними технологіями підтримки математичної діяльності; володіння методами дослідження соціально та індивідуально значущих задач математичними методами; уміння оцінювати доцільність використання математичних методів для розв'язування індивідуально й суспільно значущих задач та ін.; *методична*, яка включає знання мети навчання математики, змісту навчання математики; знання та володіння методами, організаційними формами і засобами навчання математики; знання та вміння щодо виховання учнів у процесі навчання математики та ін.; *особистісно-професійна*, яка включає позитивну мотивацію до навчання; ціннісне ставлення до майбутньої фахової діяльності; прагнення до самовдосконалення; наявність математичних, педагогічних, комунікативних, організаційних, креативних та рефлексивних здібностей.

Методичні компетентності є провідним компонентом у системі фахових компетентностей і мають яскраво виражений прикладний характер. Проблемі їх формування присвячені дослідження В. Г. Бевз, Г. П. Бевза, М. І. Бурди, О. С. Дубінчук, М. В. Метельського, Г. О. Михаліна, А. Г. Мордковича, З. І. Слєпкань, О. І. Скафи, Н. А. Тарасенкової, В. О. Швеця, Н. М. Шунди та ін.

Розглянемо окремі означення математичної компетентності (див. табл. 1) із науково-методичних робіт.

Таблиця 1

Джерело	*Суть*
PISA	Поєднання математичних знань, умінь, досвіду та здібностей людини, які забезпечують успішне розв'язування різноманітних проблем, що потребують застосування математики. При цьому мають на увазі не конкретні математичні вміння, а більш загальні уміння, що включають математичне мислення, математичну аргументацію, постановку та розв'язання математичної проблеми, математичне моделювання, використання різних математичних мов, інформаційних технологій, комунікативні вміння.

Продовження таблиці 1

М. С. Головань	Інтегративне утворення особистості, що поєднує в собі математичні знання, уміння, навички, досвід математичної діяльності, особистісні якості, які обумовлюють прагнення, готовність і здатність розв'язувати проблеми і завдання, що виникають в реальних життєвих ситуаціях і потребують математичних методів розв'язування, усвідомлюючи при цьому значущість предмета і результату діяльності.
І. М. Зіненко	Якість особистості, яка поєднує в собі математичну грамотність та досвід самостійної математичної діяльності.
С. А. Раков	Уміння бачити та застосовувати математику в реальному житті, розуміти зміст і метод математичного моделювання, уміння будувати математичну модель, досліджувати її методами математики, інтерпретувати отримані результати, оцінювати похибку обчислень.

Кожне з означень корелюється одне з одним та по-своєму розкриває зміст визначеного поняття.

Розуміння математичної компетентності як діяльнісної характеристики особистості дозволили І. М. Зіненко виокремити та обґрунтувати її структурні компоненти (див. табл. 2).

Таблиця 2

№	*Компонент*	*Що включає цей компонент*
1	Мотиваційно-ціннісний	Мотивацію та відношення (інтереси, цінності) до математичної діяльності
2	Когнітивний	Систему уявлень учня, які характеризують глибину обізнаності в математичному знанні та математичній діяльності
3	Операційно-технологічний	Оволодіння загальними математичними вміннями (уміння оперувати математичними знаннями та розв'язувати математичні задачі, уміння міркувати, комунікативні вміння, прикладні вміння), готовність їх застосовувати у різноманітних проблемних та нестандартних ситуаціях
4	Рефлексивний	Самоконтроль, самоаналіз, самооцінка

Зміст математичної компетентності – це процедурна компетентність; логічна компетентність; технологічна компетентність; дослідницька компетентність; методологічна компетентність (див. табл. 3).

Таблиця 3

1	Процедурна компетентність	вміння розв’язувати типові математичні задачі (використовувати алгоритми розв’язування типових задач; уміти їх розпізнати та систематизувати; здійснювати пошук необхідних алгоритмів за допомогою різних джерел тощо).
2	Логічна компетентність	володіння дедуктивним методом доведення та спростування тверджень (використовувати математичну та логічну символіку; відтворювати доведення теорем та доводити правильність розв’язань типових задач тощо).
3	Технологічна компетентність	володіння сучасними математичними пакетами (пакети символьних перетворень, динамічної геометрії – Gran-2D (3D), GeoGebra, електронні таблиці (Excel) тощо).
4	Дослідницька компетентність	володіння методами дослідження практичних та прикладних задач математичними методами (формулювати математичні задачі та будувати їх моделі; висувати та перевіряти справедливість гіпотез; інтерпретувати результати та досліджувати межі їх справедливості; встановлювати зв’язки з попередніми результатами, шукати аналогії тощо).
5	Методологічна компетентність	уміння оцінювати доцільність використання математичних методів для розв’язування практичних та прикладних задач (володіти методологією дослідження математичними методами та за допомогою ІКТ; розуміти переваги та обмеженість математичних методів, оцінювати їх ефективність; рефлексувати власний досвід розв'язання задач тощо).

2. Традиційні та інноваційні технології навчання

Технологія навчання – це шлях засвоєння конкретного навчального матеріалу в межах предмета, теми, питання. Педагогічна технологія – це продумана у всіх деталях модель спільної навчальної та педагогічної діяльності з проєктування, організації та проведення навчального процесу з безумовним забезпеченням комфортних умов для учнів і вчителя. Педагогічна технологія забезпечує реалізацію ідеї повної керованості навчальним процесом.

В українській школі часто використовують традиційні технології навчання. До традиційних технологій навчання належать такі: пояснювально-ілюстративне навчання; проблемне навчання; програмоване навчання; диференційоване навчання та ін.

Пояснювально-ілюстративне навчання є такою технологією навчання, при якій пізнавальна діяльність має репродуктивний характер: учитель (викладач) передає учням, студентам «готові» знання, використовуючи пояснення, доведення із застосуванням різноманітних ілюстрацій. Це унаочнює характер їх сприймання, сприяє свідомому запам'ятовуванню.

Проблемне навчання є одним із видів розвиваючого навчання, істотною рисою якого є здатність формувати творче мислення особистості та прищеплювати навички наукового пошуку. Проблемне навчання передбачає послідовні й цілеспрямовані пізнавальні завдання, які учні (студенти) виконують під керівництвом учителя (викладача), активно засвоюючи нові знання.

Програмоване навчання є різновидом репродуктивного підходу до навчання, передбачає використання спеціальних програм управління процесом засвоєння знань, умінь та навичок. Під час програмованого навчання навчальний матеріал подають невеликими частинами, що легко засвоюються. їх називають кроки (порції, фрагменти) інформації. Засвоєння кожної порції інформації можливе завдяки поділу пізнавальної діяльності учнів, студентів на елементарні дії.

Диференційоване навчання в загальноосвітній школі – спеціально організована навчально-пізнавальна діяльність, яка враховує вікові та індивідуальні особливості учнів, їхній життєвий досвід і спрямована на оптимальний фізичний, духовний та психічний розвиток, засвоєння необхідного обсягу знань, практичних умінь та навичок, передбачених навчальними програмами.

Групова (колективна) технологія навчання передбачає організацію навчального процесу, за якої навчання здійснюється у процесі спілкування між учнями у групах. Групові форми навчання дають змогу диференціювати та індивідуалізувати процес навчання, формують внутрішню мотивацію до активного сприйняття, засвоєння та передачі інформації, сприяють формуванню комунікативних якостей учнів, активізують розумову діяльність.

Технології ігрового навчання – це така організація навчального процесу, педагогічних під час якої навчання здійснюється у процесі включення учня в навчальну гру (ігрове моделювання явищ, "проживання" ситуації). Сьогодні віддають перевагу терміну "імітація" замість "гра" (акцент переноситься на внутрішню сутність дії).

Мультимедійні технології пов'язані із створенням мультимедіа-продуктів: електронних книг, енциклопедій, комп'ютерних фільмів, баз даних. У цих продуктах об'єднаються текстова, графічна, аудіо- та відеоінформація, анімація. Мультимедіа-технології перетворили комп'ютер на повноцінного співрозмовника, дозволили учням (будь-якого віку), не виходячи з навчальної аудиторії, будинку, офісу брати участь у конференціях, діалогах, вести кореспонденцію.

В Україні розроблена та пропагується *технологія інтерактивного навчання* О. Пометун. Інтерактив (від англ. – «взаємний» та «діяти»). Інтерактивне навчання – це спеціальна форма організації пізнавальної активності, що має за мету створення комфортних умов навчання, за яких кожен учень відчуває свою успішність та інтелектуальну спроможність. Суть інтерактивного навчання полягає в тому, що навчальний процес відбувається за умови постійної, активної взаємодії всіх учнів; учитель і учень є рівноправними суб'єктами навчання. Інтерактивне навчання сприяє формуванню навичок а вмінь як предметних, так і загальнонавчальних; виробленню життєвих цінностей; створенню атмосфери співробітництва, взаємодії; розвитку комунікативних якостей. Технологія передбачає моделювання життєвих ситуацій, використання рольових ігор, спільне розв'язання проблем. Інтерактивне навчання – це навчання діалогу, під час якого відбувається взаємодія учасників педагогічного процесу з метою взаєморозуміння, спільного розв'язання навчальних завдань, розвитку особистісних якостей учнів.

Наприкінці 90-х років XX століття в педагогічній літературі з’явився новий термін – «інноваційна технологія». Інноваційні педагогічні технології базовані на інакших формах та методах навчання, ніж вкорінені традиційні. Пропонуємо розглянути окремі з них.

Інтегральна педагогічна технологія – це модель навчання, яка ґрунтується на виявленні в різних навчальних предметах споріднених елементів (проблем, сюжетів, подій, закономірностей) і поєднання їх у якісно нову цілісність з певною визначеною метою. Дана технологія, була розроблена для школярів середньої загальноосвітньої школи, втім, виявилася гнучкою і адаптивною, що зробило можливим її застосування у вищій школі, системі професійної освіті.

Технологія рівневої диференціації – це, як вважається, спосіб організації навчального процесу, що дозволяє максимально задовольнити кожного з огляду на його право і спроможність опановувати навчальний матеріал. Така можливість якраз і забезпечується диференційованими програмами різного ступеня складності: від базового рівня підготовки до підвищеного.

Технологія сугестивного навчання – це навчання на основі емоційного навіювання в стані неспання, що спричиняє надзапам’ятовування. Воно передбачає комплексне використання усіх вербальних, зовнішніх і внутрішніх засобів сугестії (навіювання). Сугестивна технологія навчання ґрунтується на використанні двох об’єктивних закономірностей запам’ятовування:

1) запам’ятовується усе, що потрапляє у людську свідомість: люди, слова, події, але в активному стані залишається тільки те, що важливо людині, цікаво чи потрібно, що її хвилює і пов’язане з якимось переживаннями; 2) закономірність пов’язана зі своєрідним механізмом, що нагадує ворота: цікаво – ворота відкриті, дуже цікаво – ворота широко відкриті, нецікаво – зачинені.

Технологія мотивації успіхом – цілеспрямоване, організоване поєднання умов (об’єктивних і суб’єктивних), за яких створюється можливість досягати значних результатів у діяльності особистості, колективу в цілому. Це, отже, результат продуманої стратегії і тактики викладача, педагога, сім’ї; навмисне створені й зорганізовані умови для успішного навчання, які спонукають студента до дій і сприяють позитивним, радісним переживанням.

Модульне навчання – це педагогічна технологія, яка передбачає перегляд змісту навчання, вибір форм, методів і засобів навчання, організацію самостійної роботи, діагностику й контроль рівня знань, умінь та навичок за модульним принципом.

Під проектною технологією («методом проектів») розуміють спосіб досягнення дидактичної мети через системну організацію проблемно-орієнтованого навчального пошуку, який повинен завершитися цілком реальним, відчутним практичним результатом, оформленим тим або іншим чином.

Інтерактивна технологія – реалізує новий тип навчальної взаємодії та педагогічного спілкування між викладачами і студентами. Навчальний процес розглядається у цій парадигмі як спільна, організована й керована взаємодія студентів з оволодіння життєвими та професійними компетентностями, що протікає в різних формах і характеризується вмотивованістю, предметністю й цілеспрямованістю.

3. Нові поняття предметних методик

Слід також зупинитись на такому популярному напрямку в освіті як **STEM** (природничі науки (Science), технології (Technology), технічна творчість (Engineering) та математика (Mathematics)) або STEAM (S – science, T – technology, E – engineering, A – art, M – mathematics). Це сучасний підхід до навчання, який поєднує природничі науки, технології, інженерію, мистецтво і математику. Мета технології – комплексно формувати ключові фахові і соціально особистісні компетентності молоді, які визначають її конкурентоспроможність на ринку праці.

Поряд з інноваційними технологіями та методиками у навчання, зокрема, математики, ввійшли ряд термінів, здебільшого англійських, що позначають собою нові поняття, нові методи, нові інструменти які використовуються для ефективного формування компетентностей учнів, студентів. Наприклад, такі.

- **QR-код** (з англійської Quick Response Code «швидкий відгук»). Це графічне зображення, в якому зашифрована певна інформація, посилання на сайт чи окрему його сторінку. Зчитування QR-коду відбувається за допомогою звичайної камери типового смартфона. Для цього на ньому має бути попередньо встановлена відповідна програма-сканер. Принцип такого кодування було створено японською компанією DensoWave в 1994 р. для потреб машинобудування.
- **Сторітеллінг** (story – історія; telling – розповідати) – це ефективний метод донесення інформації до аудиторії шляхом розповідання смішних, зворушливих або повчальних історій з реальними або вигаданими персонажами. Він поєднує в собі психологічні, управлінські та інші аспекти і дозволяє не лише ефективно донести інформацію до аудиторії, а й мотивувати її на певні вчинки і отримати максимально високі результати. Ця методика була розроблена та успішно випробувана на особистому досвіді Девідом Армстронгом, головою міжнародної компанії Armstrong International.
- **Кейс-метод** (або метод конкретних ситуацій, аналіз ситуацій) – це засіб активного проблемно-ситуаційного аналізу, що ґрунтується на навчанні шляхом розв’язування задач-ситуацій (кейсів). Головне його призначення – не

надання готових знань, а розвиток в учнів здатності розв’язувати проблеми і знаходити їх рішення самостійно. Батьківщиною методу case-study є Сполучені Штати Америки, а саме – школа бізнесу Гарвардського університету.

- **Кроссенс** – це сучасний методичний прийом візуалізації навчального матеріалу. Слово «кроссенс» означає «перетин значень» і створено за аналогією зі словом «кросворд». Ця унікальна ідея належить письменнику, педагогу і математику Сергію Федіну і доктору технічних наук, художнику і філософу Володимиру Бусленко. Див. приклад кроссенса в математиці (рис. 1, 2).

Рис. 1


Рис. 2

Кроссенс уперше був надрукований у 2002 році у журналі «Наука і життя». Він являє собою асоціативний ланцюжок, замкнутий у стандартне поле із дев’яти квадратів (як у грі «Хрестики-нулики»).

- **«Фішбоун»** («риб'яча кістка», «риб'ячий скелет») – спрощена назва методу японського вченого Каору Ісікава. Ця графічна техніка представлення інформації дозволяє образно продемонструвати хід аналізу будь-якого явища через виділення проблеми, з'ясування її причин та підтверджуючих фактів і формулювання висновку з питання.

- **Гейміфікація** або ігрофікація – це використання окремих елементів ігор у неігрових практиках. Термін «гейміфікація» вперше виник у 1912 р., коли відома компанія «Крекер» у власну продукцію почала вкладати іграшку-сюрприз, що в подальшому стало популярним і серед інших компаній.

- **Квест** (від англ. quest – пошук, adventure – пригода) – пригодницька гра. У педагогічній науці поняття «квест» визначається як технологія, метод чи форма організації дослідницької діяльності, для виконання якої учні здійснюють пошук інформації, аналізують, систематизують її та виконують певні завдання. Вперше модель web-квесту була представлена викладачами університету Сан-Дієго Берні Доджем та Томом Марчем у 1995 р. Веб-квест визначається ними як «орієнтовна діяльність, де практично вся інформація береться з мережі інтернет».

4. Методика навчання математики у системі фахової підготовки вчителя математики

Зупинимось на окремих результатах опитування студентів фізико-математичного факультету ЖДУ ім. І. Франка, що стосуються предмету нашої роботи. В опитуванні брали участь 194 респондентів, які вивчали (на той момент) дисципліну «Методика навчання математики» один, два та три роки, відповідно, 47, 55 та 92 особи. Відповіді на запитання: «Оцініть за 12-бальною шкалою доцільність та ефективність вивчення курсу «Методика навчання математики» в університеті з точки зору корисності для майбутньої професійної діяльності» (рис. 3), – свідчать, що студенти розуміють важливість вивчення цього курсу для здобуття належного фахового рівня.

Несподіваним є той факт, що для більшості студентів перспектива наукової діяльності та вступу до аспірантури є зовсім непривабливою, тим часом значна частина студентів хоче продовжувати своє навчання далі та здобувати другу вищу освіту. Це може свідчити, звичайно, про певне розчарування окремих студентів у майбутній професії, але, на нашу думку, причина в іншому: з однієї сторони – це складність професії вчителя математики, а з іншої – падіння престижу професії вчителя та невисокий рівень оплати праці. Частково правильність нашої думки підтверджують результати відповідей на таке запитання: «Яким чином можна зробити так, щоб по закінченні фізико-математичних факультетів вузів студенти педагогічних спеціальностей були професійно компетентними у своїй справі?» (рис. 4).

Отже, виокремимо дієві засоби формування професійних, а саме методичних компетентностей вчителя математики на заняттях із методики математики: використання системи методичних задач; вдосконалення організації групової та самостійної роботи; складання професійно орієнтованих індивідуальних завдань тощо.

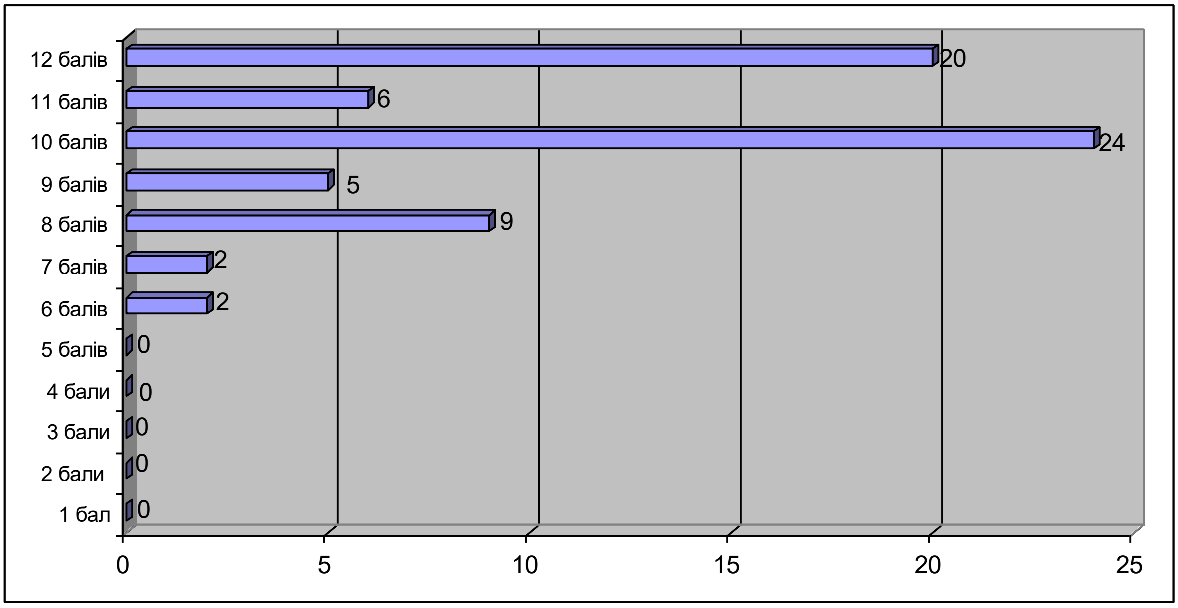


Рис. 3

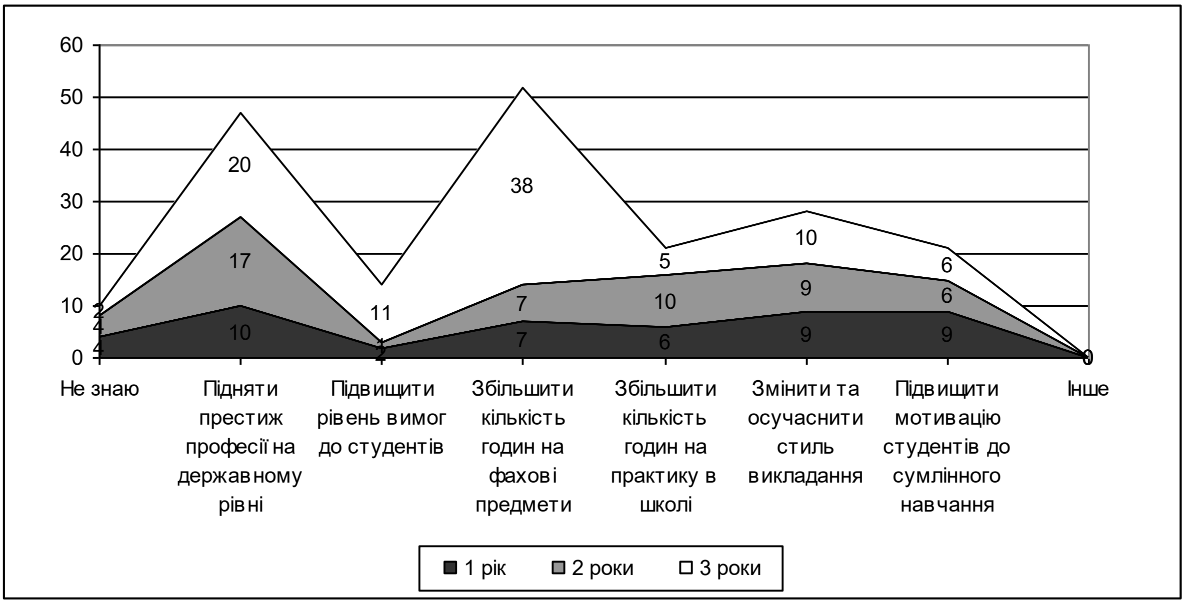


Рис. 4

На наш думку, методика навчання математики є одним із дієвих засобів для створення у студентів цілісної системи бачення плюсів та мінусів кожної з технологій навчання. Що, у свою чергу, є базою для формування власної технології навчання та виховання інноватора та громадянина, який вміє ухвалювати відповідальні рішення та дотримується прав людини, як зазначено у концепції НУШ.

5. Засоби формування математичної та методичної компетентності вчителя математики

У системі фахової підготовки вчителя математики, серед обов’язкових компонент освітніх програм переважають математичні. Вони є основним засобом формування математичної компетентності. Освітня компонента «Методика навчання математики» (МНМ), як ми зазначали, є потужним засобом формування методичної компетентності майбутніх вчителів математики. Основними інструментами чого, ми вважаємо активне використання (протягом проведення ділових ігор) традиційних та інноваційних технологій навчання. Це дозволяє, на основі власного досвіду, формувати авторські методики вивчення окремих математичних предметів, розділів, тем. Виробнича практика (як ще один важливий засіб) дозволить випробувати ці методики. Така свобода у виборі способу навчання, професійна творчість вчителя потрібна сьогодні НУШ. Також важливим є теоретична методична підготовка вчителя математики. Це знайомство з новими поняттями (QR-код, ігрофікація тощо), які можна застосовувати під час навчання математики; з новими засобами навчання (наприклад, за умови дистанційної, змішаної форм навчання); з новими способами дій для підведення під поняття (кросенс) та ін.

Отже, підсумуємо. В основі фундаментальної професійної підготовки майбутніх учителів математики мають бути: належний рівень математичної компетентності розуміння математики як ефективного засобу розвитку особистості учня нової української школи; здатність застосувати при розв’язуванні задач методичної діяльності вчителя математики, комплекс знань та умінь набутих при вивченні методики навчання математики, педагогіки. Одним із завдань підвищення ефективності формування компетентності майбутнього вчителя математики є створення такого освітньо-розвивального середовища, при взаємодії з яким у студента формується система професійних компетенцій, на основі якої мають розвиватися особистісні педагогічні якості та основи власних методичних переконань.

6. ЗВИЧАЙНІ І ДЕСЯТКОВІ ДРОБИ ТА ДІЇ НАД НИМИ

Теоретичні відомості

Частина І. ЗВИЧАЙНІ ДРОБИ

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{3}{10}, \frac{17}{24}$ – **звичайні дроби**

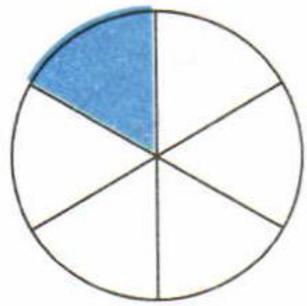
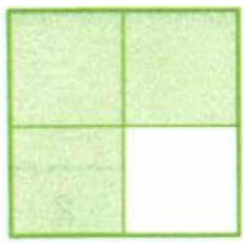
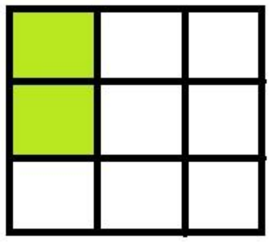
чисельник

$\frac{a}{b}$

знаменник

Ілюстрація звичайних дробів

Таблиця 1

$\frac{1}{6}$ 	$\frac{3}{4}$ 	$\frac{2}{9}$ 

$\frac{2}{3}, \frac{1}{10}, \frac{7}{25}$ – **правильні** дроби, бо $2 < 3, 1 < 10, 7 < 25$.

$\frac{4}{3}, \frac{10}{7}, \frac{9}{9}$ – **неправильні** дроби, оскільки $4 > 3, 10 > 7, 9 = 9$.

$2\frac{3}{5}$ – **мішане число**: 2 – ціла частина, $\frac{3}{5}$ – дробова частина.

Для того, щоб перетворити **мішане число в неправильний дріб**, потрібно цілу частину помножити на знаменник та додати до чисельника і записати дану суму в чисельнику. Наприклад, $2\frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 5 + 3}{5} = \frac{13}{5}$.

Для того, щоб **виділити цілу частину з неправильного дробу**, потрібно поділити чисельник дробу на знаменник. Наприклад, $\frac{12}{7} = 1\frac{5}{7}$, оскільки 7 поміщається в 12 один раз $(12 : 7 = 1)$, а остача 5.

Дії зі звичайними дробами

Таблиця 2

1. Для того, щоб знайти **суму двох дробів з однаковими знаменниками**, потрібно додати їхні чисельники, а знаменник залишити той самий: $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$	$\frac{2}{9}+\frac{5}{9}=\frac{2+5}{9}=\frac{7}{9}$; $\frac{9}{14}+\frac{5}{14}=\frac{9+5}{14}=\frac{14}{14}=1$
2. Для того, щоб знайти **різницю двох дробів з однаковими знаменниками**, потрібно від чисельника зменшуваного відняти чисельник від'ємника, а знаменник залишити той самий: $\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$	$\frac{4}{13}-\frac{1}{13}=\frac{4-1}{13}=\frac{3}{13}$; $\frac{10}{21}-\frac{5}{21}=\frac{10-5}{21}=\frac{5}{21}$
3. Для того, щоб **додати (відняти) два дроби з різними знаменниками**, потрібно: 3.1 знайти найменший спільний знаменник даних дробів; 3.2 знайти додаткові множники для кожного з дробів, поділивши спільний знаменник на знаменники даних дробів; 3.3 помножити чисельник і знаменник кожного дробу на його додатковий множник; 3.4 застосувати правило додавання (віднімання) дробів з однаковими знаменниками.	$\frac{3}{8}+\frac{1}{6}=$ 1) Спільний знаменник дорівнює 24, оскільки НСК(8;6)=24; 2) 24:8=3, 24:6=4; 3) $\frac{3}{8}+\frac{1}{6}=\frac{3^{\backslash 3}}{8}+\frac{1^{\backslash 4}}{6}=$ $=\frac{9}{24}+\frac{4}{24}$ 4) $\frac{9}{24}+\frac{4}{24}=\frac{9+4}{24}=\frac{13}{24}$
4. **Основна властивість дробу**. Якщо чисельник і знаменник даного дробу помножити або поділити на одне й те саме натуральне число, то отримаємо дріб, що дорівнює даному	$\frac{4}{6}=\frac{2\cdot 2}{2\cdot 3}=\frac{2}{3}$; $\frac{5}{7}=\frac{5\cdot 3}{7\cdot 3}=\frac{15}{21}$
5. Ділення чисельника та знаменника дробу на їхній спільний дільник, відмінний від 1, називають **скороченням** дробу.	$\frac{14}{21}=\frac{14:7}{21:7}=\frac{2}{3}$ $\frac{13}{39}=\frac{13:13}{39:13}=\frac{1}{3}$
6. Щоб **порівняти два дроби з різними знаменниками**, потрібно звести їх до спільного знаменника. А із двох дробів з однаковими знаменниками більший той, у якого чисельник більший.	Порівняти $\frac{2}{5}$ і $\frac{3}{7}$: $\frac{2}{5}=\frac{14}{35}$ і $\frac{3}{7}=\frac{15}{35}$, $\frac{14}{35}<\frac{15}{35}$ Отже, $\frac{2}{5}<\frac{3}{7}$.

Продовження таблиці 2

7. Два числа, добуток яких дорівнює 1, називають **взаємно оберненими**.	$\frac{4}{9}$ і $\frac{9}{4}$, $\frac{5}{8}$ і $\frac{8}{5}$, 5 і $\frac{1}{5}$ - взаємно обернені.
8. **Добутком** двох дробів є дріб, чисельник якого дорівнює добутку чисельників, а знаменник дорівнює добутку знаменників даних дробів: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$.	$\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{11}=\frac{2\cdot 7}{3\cdot 11}=\frac{14}{33}$; $\frac{3}{16}\cdot 5=\frac{3}{16}\cdot\frac{5}{1}=$ $=\frac{3\cdot 5}{16\cdot 1}=\frac{15}{16}$; $\frac{7}{19}\cdot 1=\frac{7}{19}\cdot\frac{1}{1}=\frac{7\cdot 1}{19\cdot 1}=\frac{7}{19}$
9. Щоб **поділити** один дріб на інший, треба ділене помножити на число, обернене до дільника (перший дріб залишити без змін, а другий «перевернути»): $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$.	$\frac{2}{7}:\frac{5}{9}=\frac{2}{7}\cdot\frac{9}{5}=\frac{2\cdot 9}{7\cdot 5}=\frac{18}{35}$

Частина II. ДЕСЯТКОВІ ДРОБИ

Відомості про десяткові дроби

Таблиця 3

1. Звичайні дроби, в яких знаменники є числами 10, 100, 1000 і т.д., можна записати в іншій формі, «одноповерховій з комою», тобто кажуть, записати **десятковими дробами**.	$6\frac{3}{10}=6,3$; (6 цілих 3 десятих) $6\frac{3}{100}=6,03$; (6 цілих 3 сотих) $6\frac{3}{1000}=6,003$ (6 цілих 3 тисячних)
2. Якщо десятковий дріб **округлюють** до одиниць, десятих, сотих і т.д., то всі наступні за цим розрядом цифри відкидають. Якщо при цьому перша з цифр, які відкидають, дорівнює 0, 1, 2, 3, 4, то остання з цифр, які залишають, не змінюється. Якщо ж перша з цифр, які відкидають, дорівнює 5, 6, 7, 8, 9, то остання з цифр, які залишають, збільшують на одиницю.	до одиниць: $5,\underline{6}529\approx 6$; до десятих: $5,6\underline{5}29\approx 5,7$; до сотих: $5,65\underline{2}9\approx 5,65$ і т.д.

Продовження таблиці 3

3. Для того, щоб виконати порівняння десяткових дробів користуються правилами: ➢ із двох десяткових дробів більший той, у якого більша ціла частина. ➢ якщо десяткові дроби мають однакові цілі частини, то більшим буде той дріб, у якого більше число десятих; якщо число десятих однакове, то більшим буде той дріб, у якого більше число сотих, і т. д.	$\underline{5},23 > \underline{4},98$; $5,\underline{2}3 > 5,\underline{1}3$; $5{,}2\underline{3} > 5{,}2\underline{2}$.

Дії над десятковими дробами

Таблиця 4

1. При **додаванні** десяткові дроби записують «стовпчиком» - один під одним так, щоб однойменні розряди стояли один під одним (коми теж будуть в одному стовпчику). Додають десяткові дроби так, як і натуральні числа, не звертаючи уваги на коми. В сумі ставлять кому під комами доданків.	$+\begin{array}{r}12{,}374\\1{,}725\\\hline 14{,}099\end{array}$
2. **Віднімання** десяткових дробів виконують за схемою віднімання натуральних чисел. Від’ємник записують під зменшуваним так, щоб кома була під комою. Потім обчислюють, не звертаючи уваги на кому. В різниці ставлять кому під комами у зменшуваному і від’ємнику.	$-\begin{array}{r}548{,}90\\93{,}01\\\hline 455{,}89\end{array}$
3. Щоб **перемножити** два десяткових дроби, достатньо перемножити їх як натуральні числа, не звертаючи уваги на коми, а в отриманому добутку відокремити комою справа стільки цифр, скільки їх було після ком в обох множникакх разом.	$\times\begin{array}{r}2{,}24\\3{,}6\\\hline +\begin{array}{r}1344\\672\end{array}\\\hline 8{,}064\end{array}$
4. Щоб **поділити** десятковий дріб на десятковий, треба в діленому і в дільнику перенести коми вправо на стільки цифр, скільки їх міститься після коми в дільнику, і виконати ділення на натуральне число. Проте після закінчення ділення цілої частини діленого треба в частці поставити кому.	$43{,}52 : 1{,}7 =$ $= 435{,}2 : 17$ $= 25{,}6$

Особливі випадки множення і ділення десяткових дробів

Таблиця 5

1. Щоб **помножити** десятковий дріб **на 10, 100, 1000 і т.д.**, треба в цьому дробі перенести кому вправо на 1, 2, 3 і т. д. цифр.	$17{,}5683 \cdot 10 = 175{,}683;$ $17{,}5683 \cdot 100 = 1756{,}83;$ $17{,}5683 \cdot 1000 = 17568{,}3.$
2. Щоб **поділити** десятковий дріб **на 10, 100, 1000 і т. д.**, треба в цьому дробі перенести кому вліво на 1, 2, 3 і т. д. цифр.	$247{,}56 : 10 = 24{,}756;$ $247{,}56 : 100 = 2{,}4756;$ $247{,}56 : 1000 = 0{,}24756$
3. Щоб **помножити** десятковий дріб **на 0,1; 0,01; 0,001 і т.д.**, достатньо в цьому дробі перенести кому вліво відповідно на 1, 2, 3 і т.д. цифр.	$325{,}47 \cdot 0{,}1 = 32{,}547;$ $325{,}47 \cdot 0{,}01 = 3{,}2547;$ $325{,}47 \cdot 0{,}001 = 0{,}32547;$

Частина III. ЗВИЧАЙНІ ТА ДЕСЯТКОВІ ДРОБИ

Перетворення дробів

Таблиця 6

1. Щоб нескоротний дріб $\frac{a}{b}$ **перетворити в десятковий**, треба звести його до одного зі знаменників 10, 100, 1000 і т.д.	$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10} = 0{,}6;$
2. Щоб **перетворити** звичайний дріб **у десятковий**, можна його чисельник поділити на знаменник.	$\frac{2}{5} = 0{,}4$, тому що $\begin{array}{r\|l} \_2 & 5 \\ \cline{2-2} 20 & 0{,}4 \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$
3. Щоб **перетворити десятковий дріб в звичайний**, потрібно представити його дробову частину у вигляді натурального числа, поділеного на 10 у відповідній степені. Після чого спростити отриманий дріб і до результату приписати цілу частину з відповідним знаком, формуючи мішаний дріб.	$0{,}065 = \frac{65}{1000} = \frac{\cancel{65}^{13}}{\cancel{1000}_{200}} = \frac{13}{200};$ $2{,}6 = 2\frac{6}{10} = 2\frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{10}_{5}} = 2\frac{3}{5}.$

Рекомендуємо повторити:

- розклад числа на прості множники. Наприклад,

$$\begin{array}{r|l} 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 39 & 3 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

- НСД – це найбільше число, на яке ділиться кожне з даних чисел.
- Алгоритм знаходження НСД. Наприклад, НСД(60;32) $= 2 \cdot 2 = 4$ (добуток спільних множників), бо

$$\begin{array}{l|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l|l} 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

- НСК – це найменше число, яке ділиться на кожне з даних чисел.
- Алгоритм знаходження НСК. Наприклад, НСК$(12; 16) = 48$, бо

12: 12, 24, 36, $\underline{48}$, 60,…… 16: 16, 32, $\underline{48}$, 64,…….

Базові завдання з розв'язаннями та відповідями

1. Виділіть з дробу $\frac{18}{7}$ цілу і дробову частини:

Розв'язання.

$\frac{18}{7} = \frac{2 \cdot 7 + 4}{7} = 2\frac{4}{7}$.

Відповідь. $2\frac{4}{7}$.

2. Запишіть число $6\frac{5}{12}$ у вигляді неправильного дробу:

Розв'язання.

$6\frac{5}{12} = \frac{6 \cdot 12 + 5}{12} = \frac{77}{12}$.

Відповідь. $\frac{77}{12}$.

3. Обчисліть: $\frac{5}{19}+\frac{6}{19}$

Розв’язання.

$\frac{5}{19}+\frac{6}{19}=\frac{5+6}{19}=\frac{11}{19}$.

Відповідь. $\frac{11}{19}$.

4. Обчисліть: $\frac{6}{7}-\frac{2}{7}$.

Розв’язання.

$\frac{6}{7}-\frac{2}{7}=\frac{6-2}{7}=\frac{4}{7}$.

Відповідь. $\frac{4}{7}$.

5. Обчисліть $\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{13}$.

Розв’язання.

$\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{13}=\frac{3\cdot 7}{4\cdot 13}=\frac{21}{52}$.

Відповідь. $\frac{21}{52}$.

6. Обчисліть $\frac{3}{8}:\frac{9}{5}$.

Розв’язання.

$\frac{3}{8}:\frac{9}{5}=\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{9}=\frac{\cancel{3}^{1}\cdot 5}{8\cdot\cancel{9}_{3}}=\frac{1\cdot 5}{8\cdot 3}=\frac{5}{24}$.

Відповідь. $\frac{5}{24}$.

7. Обчисліть $3\frac{8}{11}\cdot 2\frac{1}{7}$.

Розв’язання.

$3\frac{8}{9}\cdot 2\frac{1}{4}=\frac{3\cdot 9+8}{11}\cdot\frac{2\cdot 4+1}{4}=\frac{35}{9}\cdot\frac{9}{4}=\frac{35\cdot\cancel{9}^{1}}{\cancel{9}_{1}\cdot 4}=\frac{35}{4}=8\frac{3}{4}$.

Відповідь. $8\frac{3}{4}$.

8. Знайдіть значення виразу $\frac{3}{6}+\frac{5}{9}$.

Розв’язання.

$\frac{5^{\backslash 3}}{6}+\frac{4^{\backslash 2}}{9}=\frac{5\cdot 3}{6\cdot 3}+\frac{4\cdot 2}{9\cdot 2}=\frac{15}{18}+\frac{8}{18}=\frac{15+8}{18}=\frac{23}{18}=1\frac{5}{18}$.

Відповідь. $1\frac{5}{18}$.

9. Знайдіть значення виразу $3\frac{5}{12}+2\frac{3}{4}$.

Розв'язання.

$3\frac{5}{12}+2\frac{3}{4}=3+\frac{5}{12}+2+\frac{3}{4}=(3+2)+\left(\frac{5^{\backslash 1}}{12}+\frac{3^{\backslash 3}}{4}\right)=5+\left(\frac{5}{12}+\frac{9}{12}\right)=$

$=5+\frac{14}{12}=5+\frac{7}{6}=5+1\frac{1}{6}=6\frac{1}{6}$.

Відповідь. $6\frac{1}{6}$.

10. Знайдіть значення виразу $5\frac{1}{6}-2\frac{4}{9}$

Розв'язання.

$5\frac{1^{\backslash 3}}{6}-2\frac{4^{\backslash 2}}{9}=5\frac{3}{18}-2\frac{8}{18}=4\frac{1\cdot 18+3}{18}-2\frac{8}{18}=4\frac{21}{18}-2\frac{8}{18}=(4-2)++\left(\frac{21}{18}-\frac{8}{18}\right)=2\frac{13}{18}$.

Відповідь. $2\frac{13}{18}$.

11. Порівняйте дроби: $0{,}8$ і $\frac{7}{12}$

Розв'язання.

1) $0{,}8=\frac{8}{10}=\frac{4\cdot 2}{5\cdot 2}=\frac{4^{\backslash 12}}{5}=\frac{48}{60}$; 2) $\frac{7^{\backslash 5}}{12}=\frac{35}{60}$; 3) $\frac{48}{60}>\frac{35}{60}$. Отже, $0{,}8>\frac{7}{12}$.

Відповідь. $0{,}8>\frac{7}{12}$.

12. Округліть $0{,}58239$: 1)до цілих; 2)до десятих; 3) до сотих; 4) до тисячних; 5) до десятитисячних.

Розв'язання.

1) до цілих: $0,\underline{5}8239\approx 1$; 2) до десятих: $0{,}5\underline{8}239\approx 0{,}6$;

3) до сотих: $0{,}58\underline{2}39\approx 0{,}58$; 4) до тисячних: $0{,}582\underline{3}9\approx 0{,}582$;

5) до десятитисячних: $0{,}5823\underline{9}\approx 0{,}5823$.

*Відповідь.*1; 0,6; 0,58; 0,582; 0,5823.

13. Обчисліть: $0{,}2568+2{,}63$

Розв'язання.

$0{,}2568+2{,}63=2{,}8868$.

$$+\begin{array}{r}0{,}2568\\2{,}6300\\\hline 2{,}8868\end{array}$$

Відповідь. $2{,}8868$.

14. Обчисліть: $5{,}32 - 3{,}589$

Розв'язання.

$5{,}32 - 3{,}589 = 1{,}731.$

$$-\begin{array}{r} 5{,}320 \\ 3{,}589 \\ \hline 1{,}731 \end{array}$$

Відповідь. $1{,}731.$

15. Обчисліть: $2{,}034 \cdot 0{,}56$

Розв'язання.

$$\times \begin{array}{r} 2{,}034 \\ 0{,}56 \\ \hline +\begin{array}{r} 12204 \\ 10170 \\ \hline \end{array} \\ 1{,}13904 \end{array}$$

$2{,}034 \cdot 0{,}56 = 1{,}13904.$

Відповідь. $1{,}13904.$

16. Обчисліть: $12{,}88 : 4{,}6$

Розв'язання.

12,88:4,6=128,8:46=2,8.

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{r} 128{,}8 \\ 92 \\ \hline -\begin{array}{r} 368 \\ 368 \\ \hline 0 \end{array} \end{array} & \begin{array}{l} 46 \\ \hline 2{,}8 \end{array} \end{array}$$

Відповідь. 2,8.

17. Знайдіть $\frac{3}{7}$ від числа 21*:*

Розв'язання.

$\frac{3}{7} \cdot 21 = \frac{3}{7} \cdot \frac{21}{1} = \frac{3 \cdot \cancel{21}^3}{\cancel{7}_1 \cdot 1} = \frac{3 \cdot 3}{1 \cdot 1} = \frac{9}{1} = 9.$

Відповідь. 9.

18. Знайдіть число $\frac{6}{13}$ якого дорівнюють *24:*

Розв'язання.

$24 : \frac{6}{13} = \frac{24}{1} \cdot \frac{13}{6} = \frac{\cancel{24}^4 \cdot 13}{1 \cdot \cancel{6}_1} = \frac{4 \cdot 13}{1 \cdot 1} = \frac{52}{1} = 52.$

Відповідь. $52.$

19. Знайдіть значення виразу: $12 : 3\frac{3}{8} - 1\frac{1}{4} : \frac{15}{32}$

Розв'язання.

1) $12 : 3\frac{3}{8} = 12 : \frac{3 \cdot 8 + 3}{8} = 12 : \frac{27}{8} = \frac{12}{1} \cdot \frac{8}{27} = \frac{\cancel{12}^4 \cdot 8}{1 \cdot \cancel{27}_9} = \frac{4 \cdot 8}{1 \cdot 9} = \frac{32}{9} = 3\frac{5}{9};$

2) $1\frac{1}{4}:\frac{15}{32}=\frac{1\cdot4+1}{4}:\frac{15}{32}=\frac{5}{4}\cdot\frac{32}{15}=\frac{\cancel{5}^{1}\cdot\cancel{32}^{8}}{\cancel{4}_{1}\cdot\cancel{15}_{3}}=\frac{1\cdot8}{1\cdot3}=\frac{8}{3}=2\frac{1}{3}$;

3) $3\frac{5^{\backslash 1}}{9}-2\frac{1^{\backslash 3}}{3}=3\frac{5}{9}-2\frac{3}{9}=(3-2)+\left(\frac{5}{9}-\frac{3}{9}\right)=1\frac{2}{9}$.

Відповідь. $1\frac{2}{9}$.

20. Розв’яжіть рівняння: $2\frac{2}{11}x-\frac{5}{16}=1\frac{3}{4}$

Розв’язання.

$2\frac{2}{11}x=1\frac{3^{\backslash 4}}{4}+\frac{5^{\backslash 1}}{16}$; $2\frac{2}{11}x=1\frac{12}{16}+\frac{5}{16}$; $2\frac{2}{11}x=1\frac{17}{16}$; $2\frac{2}{11}x=2\frac{1}{16}$; $x=2\frac{1}{16}:2\frac{2}{11}$;

$x=\frac{2\cdot16+1}{16}:\frac{2\cdot11+2}{11}$; $x=\frac{33}{16}:\frac{24}{11}$; $x=\frac{33}{16}\cdot\frac{11}{24}$; $x=\frac{\cancel{33}^{11}\cdot11}{16\cdot\cancel{24}_{8}}=\frac{121}{128}$.

Відповідь. $\frac{121}{128}$.

Задачі для самостійного розв’язування

1. Виділіть цілу та дробову частини з дробу $\frac{59}{7}$.

2. Запишіть число $4\frac{7}{20}$ у вигляді неправильного дробу.

3. Скоротіть: $\frac{22\cdot10}{15\cdot33}$.

4. Скоротіть: $\frac{8\cdot7+8\cdot3}{16\cdot25-16\cdot5}$.

5. Обчисліть: $\frac{9}{17}+\frac{8}{17}$.

6. Обчисліть: $9\frac{5}{12}-6\frac{1}{12}$.

7. Обчисліть: $12\frac{3}{8}+8\frac{1}{6}$.

8. Обчисліть: $7\frac{9}{20}-5\frac{17}{30}$.

9. Знайдіть число, обернене до добутку чисел $\frac{22}{35}$ і $\frac{21}{44}$.

10. Обчисліть: $6\frac{6}{17}\cdot2\frac{5}{6}$.

11. Укажіть число, обернене до числа 2,3.

12. Знайдіть $\frac{3}{8}$ від числа $2\frac{2}{3}$.

13. Обчисліть: $\frac{7}{15}:\frac{21}{45}$.

14. Знайдіть значення виразу: $2\frac{1}{4}:\frac{3}{8}:\frac{1}{2}$.

15. Порівняйте: $\frac{6}{7}$ і $\frac{2}{3}$.

16. Знайдіть значення виразу: $\left(3\frac{1}{4}+2\frac{1}{6}\right):2\frac{3}{5}-\frac{2}{3}:\frac{4}{9}$.

17. Продали m порцій морозива, $\frac{5}{8}$ яких становило ескімо. Складіть вираз для визначення кількості порцій ескімо та обчисліть його значення при $m=120$.

18. Довжина трамвайного маршруту $15\frac{3}{4}$ км. На маршруті є 12 зупинок, на кожній з яких трамвай стоїть $1\frac{1}{6}$ хв. За який час трамвай подолає весь маршрут, якщо його швидкість дорівнює $13\frac{1}{8}$ км/год?

19. Запишіть у вигляді десяткового дробу: $\frac{17}{20}$.

20. Округліть до сотих 0,269812.

21. Порівняйте 0,2658 і 0,2668.

22. Перетворіть десятковий дріб у звичайний та обчисліть: $0{,}5-\frac{2}{7}$.

23. Обчисліть: $6{,}386+2{,}62$.

24. Обчисліть: $5{,}28-3{,}856$.

25. Обчисліть: $6{,}25\cdot 0{,}36$.

26. Обчисліть: $85{,}2:6$.

27. Обчисліть: $19{,}798:5{,}21$.

28. Обчисліть: $21{,}6-12{,}6:18+6$.

29. Виконайте дії: $3{,}8\cdot 1{,}7-36{,}24:12$.

30. Знайдіть корінь рівняння: $16(4x-3{,}4)=6{,}08$.

Контрольна робота

1. Знайдіть значення виразу $\left(3\frac{2}{3}+1\frac{3}{4}\right)\div\left(6\frac{7}{12}-2\frac{1}{4}\right)$:

А) $\frac{1}{4}$; Б) $1\frac{1}{4}$; В) $2\frac{1}{4}$; Г) $3\frac{1}{4}$; Д) інша відповідь.

2. За перший місяць побудували $\frac{6}{23}$ дороги, а за другий – $\frac{9}{23}$. Скільки кілометрів дороги було побудовано за два місяці, якщо довжина цієї дороги становить 92 км?

А) 40 км; Б)50 км; В)60 км; Г)70 км; Д) інша відповідь.

3. Обчисліть: $50 - (2{,}3256 : 0{,}068 + 9{,}38)$.

А) 2,42; Б) 4,42; В) 6,42; Г) 8,42; Д) інша відповідь.

4. У грудні фабрика отримала 438,86 тисяч гривень прибутку, а в січні – на 16,4 тисячі гривень більше, ніж у грудні. Скільки тисяч гривень становив прибуток фабрики за груденьі січень разом?

А) 877,72; Б) 894,12; В)887,72; Г) 894,22; Д) інша відповідь.

5. Обчисліть: $\left(5\frac{7}{8} - 2\frac{2}{3} + 4\frac{5}{6}\right) - (15{,}54 - (2{,}45 \cdot 3{,}5))$.

А) $1\frac{23}{200}$ Б)$1\frac{23}{300}$; В) $1\frac{33}{200}$; Г)$1\frac{33}{400}$; Д) інша відповідь.

6. Установіть відповідність між твердженнями про дріб (1-4) та дробом (А-Д), для якого це твердження є правильним:

Твердження про дріб	*Дріб*
1. є скоротним;	А) $\frac{5}{7}$;
2. є неправильним;	Б) $\frac{13}{27}$;
3. менший за 0,5;	В) $\frac{41}{10}$;
4. є оберненим до дробу $1\frac{2}{5}$;	Г) $\frac{7}{10}$;
	Д) $\frac{34}{51}$.

7. Установіть відповідність між числовими виразами (1-4) та значеннями цих виразів (А-Д):

Виконайте дії	*Результат*
1. $\frac{7}{12} + \frac{3}{8}$;	А) $\frac{7}{32}$;
2. $\frac{7}{12} - \frac{3}{8}$;	Б) $\frac{17}{9}$;
3. $\frac{7}{12} \cdot \frac{3}{8}$;	В) $\frac{23}{24}$;
4. $\frac{7}{12} : \frac{3}{8}$;	Г) $\frac{14}{9}$;
	Д) $\frac{5}{24}$.

8. Установіть відповідність між числовими виразами (1-4) та значеннями цих виразів (А-Д):

Виконайте дії	*Результат*
1. $2{,}735 + 0{,}28$;	А) 1,02;
2. $7{,}83 - 5{,}984$;	Б) 39,814;

3. $23{,}42 \cdot 1{,}7$; В) $1{,}846$;

4. $132{,}6 : 13$; Г) $3{,}015$;

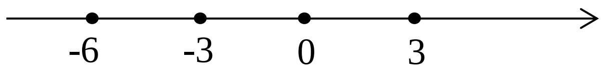
Д) $10{,}2$.

9. Знайдіть різницю двох чисел, якщо відємник дорівнює 65,8 і становить 0,28 зменшуваного.

10. На двох ділянках, площа кожної з яких дорівнює 5,4 га, виростили 30,24 ц льону і 49,68 ц ячменю, не вносячи добрив. На двох інших ділянках, площа яких дорівнює по 7,5 га, виростили 39,75 ц льону і 170,25 ц ячменю, але вже з використанням добрив. Порівняйте врожайність льону і ячменю, вирощених з добривами і без добрив.

7. ДОДАТНІ І ВІД'ЄМНІ ЧИСЛА. МОДУЛЬ І ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Теоретичні відомості



3, 8, 20, 136, 1000 – додатні числа; -3, -6, -15, -63, -5000 – від'ємні числа;

0 – ні додатне, ні від'ємне.

Натуральні числа, протилежні до них, тобто відємні числа, та 0 утворюють множину **цілих чисел.** Множину цілих чисел позначають літерою Z.

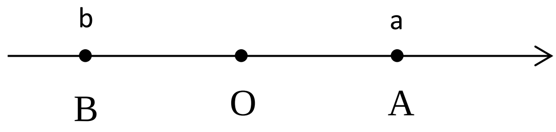
Для того, щоб зрозуміти як виконувати дії над цілими числами потрібно ознайомитися з означенням модуля та його властивостями (табл. 1, табл. 2).

Означення модуля

Таблиця 1

Модулем додатного числа є саме це число, модулем відємного числа – число, йому протилежне, модулем нуля є нуль:	**Геометрично, модуль числа** – це відстань від початку координат до точки, що зображує дане число. **Модуль різниці** двох чисел a і b – це відстань між точками a і b на координатній прямій

Продовження таблиці 1

$\lvert a\rvert = \begin{cases} a \text{ при } a > 0; \\ 0 \text{ при } a = 0; \\ -a \text{ при } a < 0. \end{cases}$	$\lvert a\rvert = OA;\ \lvert b\rvert = OB;\ \lvert a-b\rvert = AB$ 
Наприклад: $\lvert -7\rvert = 7;\ \lvert -14\rvert = 14;\ \lvert 3\rvert = 3;\ \lvert 0\rvert = 0.$	

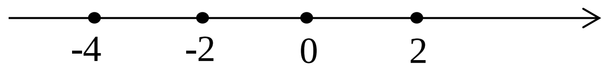
Властивості модуля

Таблиця 2

Властивості модуля	***Формулювання властивості***	***Приклад***
1. $\lvert a\rvert \geq 0$	Модуль будь-якого числа – невідємне число	$\lvert -9\rvert \geq 0$
2. $\lvert -a\rvert = \lvert a\rvert$	Модулі протилежних чисел рівні	$\lvert -13\rvert = \lvert 13\rvert = 13$
3. $a \leq \lvert a\rvert$	Число не перевищує свого модуля	$-8 \leq \lvert -8\rvert = 8$
4. $\lvert a \cdot b\rvert = \lvert a\rvert \cdot \lvert b\rvert$	Модуль добутку дорівнює добутку модулів	$\lvert(-2)\cdot(-3)\rvert = \lvert -2\rvert \cdot \lvert -3\rvert$
5. $\left\lvert \frac{a}{b}\right\rvert = \frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}\ (b \neq 0)$	Модуль дробу дорівнює модулю чисельника, поділеному на модуль знаменника (якщо знаменник не дорівнює нулю)	$\left\lvert \frac{2}{3}\right\rvert = \frac{\lvert 2\rvert}{\lvert 3\rvert} = \frac{2}{3};$ $\left\lvert \frac{-7}{-12}\right\rvert = \frac{\lvert -7\rvert}{\lvert -12\rvert} = \frac{7}{12}$
6. $\lvert a^n\rvert = \lvert a\rvert^n;$ $\lvert a^2\rvert = \lvert a\rvert^2;$ $\lvert a^{2k}\rvert = \lvert a\rvert^{2k}$	Модуль степеня числа дорівнює тому самому степеню модуля даного числа.	$\lvert(-2)^3\rvert = \lvert -2\rvert^3 = 2^3 = 8;$ $\lvert(-5)^2\rvert = \lvert -5\rvert^2 = 5^2 = 25;$ $\lvert 4^2\rvert = \lvert 5\rvert^2 = 4^2 = 16$
7. $\lvert a+b\rvert \leq \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$	Модуль суми не перевищує суми модулів доданків.	$\lvert -4+3\rvert \leq \lvert -4\rvert + \lvert 3\rvert;$ $\lvert -1\rvert \leq 4+3;$ $1 \leq 7.$

Порівняння чисел

Таблиця 3

Із двох чисел меншим є те, зображення якого на горизонтальній координатній прямій розташовано лівіше, більшим – те, зображення якого розташоване правіше.	 $-4 < -2;\ -2 < 0; 2 > 0; 2 > -2.$

Дії з раціональними числами

Таблиця 4

Щоб **додати два від'ємні числа**, треба додати їхні модулі й поставити перед одержаною сумою знак «-».	$-9 + (-6) =$ Знайдемо модулі: $\lvert -9 \rvert = 9, \lvert -6 \rvert = 6.$ Отже, $-9 + (-6) = -(9 + 6) = -15.$
Щоб **додати два числа з різними знаками**, треба від більшого модуля відняти менший і поставити перед одержаним числом знак того доданка, модуль якого більший.	$3 + (-15) =$ Знайдемо модулі: $\lvert -15 \rvert = 15, \lvert 3 \rvert = 3,$ тоді $3 + (-15) = -(15 - 3) = -12.$
Сума двох **протилежних** чисел дорівнює нулю.	$63 + (-63) = 0.$
Щоб від одного числа **відняти** друге, досить до зменшуваного додати число, протилежне від'ємнику: $a - b = a + (-b)$	$-3 - 5 = -3 + (-5) =$ Знайдемо модулі: $\lvert -3 \rvert = 3, \lvert -5 \rvert = 5.$ $-3 - 5 = -3 + (-5) = -(3 + 5) = -8.$ $7 - (-2) = 7 + 2 = 9.$ $-11 - \left(-4\frac{2}{3}\right) = -11 + 4\frac{2}{3} =$ Знайдемо модулі: $\lvert -11 \rvert = 11, \left\lvert 4\frac{2}{3} \right\rvert = 4\frac{2}{3}.$ $-11 - \left(-4\frac{2}{3}\right) = -11 + 4\frac{2}{3} =$ $-\left(11 - 4\frac{2}{3}\right) = -6\frac{1}{3}.$

Щоб знайти **добуток двох чисел із різними знаками**, треба перемножити їхні модулі й поставити перед одержаним числом знак «-».	$9 \cdot (-7) =$ Знайдемо модулі: $\lvert 9\rvert = 9, \lvert -7\rvert = 7.$ $9 \cdot (-7) = -(9 \cdot 7) = -63.$
Щоб **перемножити два від'ємні числа**, треба перемножити їхні модулі.	$-2{,}5 \cdot (-4) =$ Знайдемо модулі: $\lvert -2{,}5\rvert = 2{,}5,\ \lvert -4\rvert = 4.$ $-2{,}5 \cdot (-4) = 2{,}5 \cdot 4 = 10.$
Якщо **добуток** містить парне число від'ємних множників, він є додатним числом, а якщо непарне – від'ємним.	$\underbrace{(-1) \cdot (-1) \dots (-1)}_{20} = (-1)^{20} = 1;$ $\underbrace{(-1) \cdot (-1) \dots (-1)}_{19} = (-1)^{19} = -1$
Щоб знайти **частку** двох чисел з різними знаками, треба поділити модуль діленого на модуль дільника й перед отриманим числом поставити знак «-».	$\frac{13}{21} : \left(-2\frac{8}{35}\right) =$ Знайдемо модулі: $\left\lvert \frac{13}{21} \right\rvert = \frac{13}{21}, \left\lvert -2\frac{8}{35} \right\rvert = 2\frac{8}{35}.$ $\frac{13}{21} : \left(-2\frac{8}{35}\right) = -\left(\frac{13}{21} : 2\frac{8}{35}\right) =$ $= -\left(\frac{13}{21} : \frac{2 \cdot 35 + 8}{35}\right) =$ $= -\left(\frac{13}{21} : \frac{78}{35}\right) = -\left(\frac{13 \cdot 35}{21 \cdot 78}\right) = \frac{5}{18}.$
Щоб знайти **частку** двох від'ємних чисел, треба поділити модуль діленого на модуль дільника.	$-15 : (-2) =$ Знайдемо модулі: $\lvert -15\rvert = 15, \lvert -2\rvert = 2.$ $-15 : (-2) = 15 : 2 = 7{,}5$

Примітка. $(+) \cdot (+) = +; (+) \cdot (-) = -; (-) \cdot (+) = -; (-) \cdot (-) = +;$ $(+):(+) = +;$ $(+)(-) = -;$ $(-):(+) = -;$ $(-):(-) = +.$

Рекомендуємо повторити:

1. Назви компонентів арифметичних дій:
   - При додаванні: доданок, доданок, сума. Приклад: $4 + 9 = 13.$

- При відніманні: зменшуване, від’ємник, різниця.

Приклад: $25 - 11 = 14$.

- При множенні: множник, множник, добуток. Приклад: $6 \cdot 13 = 78$.
- При діленні: ділене, дільник, частка. Приклад: $36 : 2 = 18$.

2. Множини чисел:

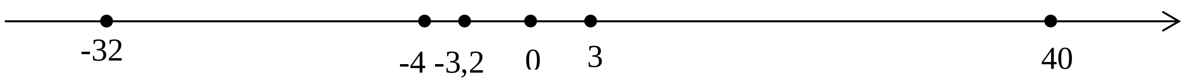
- Натуральні числа (N) – це числа, які використовуються при лічбі предметів (1, 2, 3, .).
- Дробові числа $\left(\frac{1}{3};\ 0{,}56;\ \frac{17}{8}; 6{,}005\right)$.
- Раціональні числа (Q) – це цілі та дробові числа $\left(-5; 6{,}85;\ -3\frac{3}{7}; 122\right)$.
- Ірраціональні числа (I) – це нескінченні неперіодичні десяткові дроби $\left(\sqrt{2};\ \sqrt{3};\ \pi; 0{,}223272 \ldots\right)$.
- Дійсні числа (R) – раціональні та ірраціональні числа разом $\left(-85;\ \sqrt{5}; 6;\ -8\frac{1}{5}; 0{,}63\right)$.

Базові завдання з розв’язаннями та відповідями

1. Розташуйте в порядку зростання числа -32; 3; 0; -4; -3,2; 40.

Розв’язання.

Нанесемо дані числа на числову вісь:



Відповідь.-32; -4; -3,2; 0; 3; 40.

2. Заповніть таблицю:

Число	-6	23	-34,8	0	20,03	-65
Протилежне до числа						
Модуль числа						

Розв’язання.

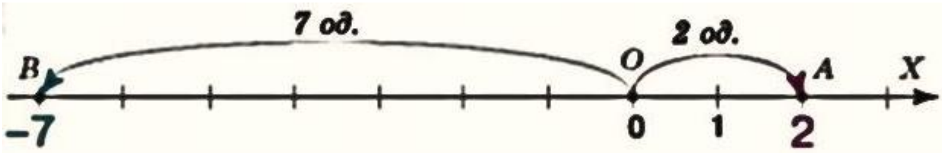
За означеннями протилежного числа і модуля маємо:

Число	-6	23	-34,8	0	20,03	-65
Протилежне до числа	6	-23	34,8	0	-20,03	65
Модуль числа	6	23	34,8	0	20,03	65

3. Знайдіть відстань між точками A(2) і B(-7).

Розв'язання.

На координатній прямій позначимо точки A(2) і B(-7). З умови випливає, що OA=2 од., OB=7 од. оскільки точки A(2) і B(-7) розміщуються по різні сторони від точки O, то $AB = OB + OA = 7 + 2 = 9$ (од.). Отже, шукана відстань дорівнює сумі модулів координат даних точок.

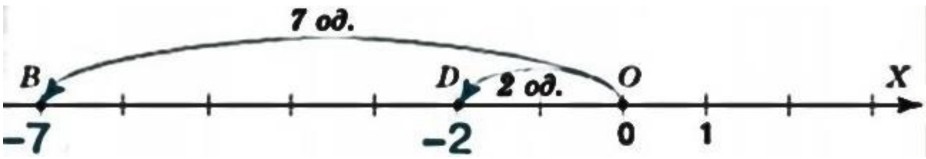


Відповідь. 9 од.

4. Знайдіть відстань між точками D(-2) і B(-7).

Розв'язання.

На координатній прямій позначимо точки D(-2) і B(-7). З умови випливає, що OD=2 од., OB=7 од. оскільки точки D(-2) і B(-7) розміщуються по одну сторону від точки O, то $DB = OB - OD = 7 - 2 = 5$ (од.). Отже, шукана відстань дорівнює різниці більшого і меншого модулів координат даних точок.



Відповідь. 5 од.

5. Знайдіть значення виразу: $(|-2| + |13|) \cdot |-3|$.

Розв'язання.

$(|-2| + |13|) \cdot |-3| = (-(-2) + 13) \cdot \big(-(-3)\big) = (2 + 13) \cdot 3 = 45.$

Відповідь. 45.

6. Знайдіть значення виразу: $|-2{,}1| \cdot |-3{,}7|$.

Розв'язання.

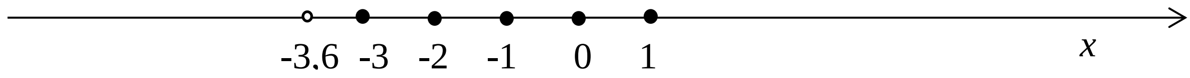
$|-2{,}1| \cdot |-3{,}7| = -(-2{,}1) \cdot \big(-(-3{,}7)\big) = 2{,}1 \cdot 3{,}7 = 7{,}77.$

Відповідь. 7,77.

7. Знайдіть усі цілі значення x, при яких є правильною нерівність: $-3{,}6 < x \le 1$.

Розв'язання.

Зобразимо на координатній осі вказаний проміжок та позначимо на ньому цілі значення змінної:



Отже, -3, -2, -1, 0, 1 – цілі значення x, які задовольняють задану нерівність.

Відповідь. -3, -2, -1, 0, 1.

8. Відомо, що $x \in (0; 1)$. Тоді $|x-1|+x=$

Розв'язання.

Оскільки $x \in (0; 1)$, то $x-1<0$. Отже, $|x-1|=-x+1$.

Таким чином, $|x-1|+x=-(x-1)+x=-x+1+x=1$.

Відповідь. 1.

9. Обчисліть: $3{,}7+(-7{,}3)$.

Розв'язання.

$|-7{,}3|=7{,}3$, $|3{,}7|=3{,}7$. $3{,}7+(-7{,}3)=-(7{,}3-3{,}7)=-3{,}6$.

Відповідь. -3,6.

10. Обчисліть: $-19{,}6+(-4{,}5)$.

Розв'язання.

$|-19{,}6|=19{,}6, |-4{,}5|=4{,}5. -19{,}6+(-4{,}5)=-(19{,}6+4{,}5)=-24{,}1$.

Відповідь. -24,1.

11. Обчисліть: $-231-(765+769)$.

Розв'язання.

$-231-(765+769)=-231-1534=-231+(-1534)=-1765$.

Відповідь. -1765.

12. Обчисліть: $265-(735-865)$.

Розв'язання.

$265-(735-865)=265-\big(735+(-865)\big)=265-\big(-(|-865|-|735|)\big)=$
$265-(-130)=265+130=395$.

Відповідь. 395.

13. Обчисліть: $(-7{,}3+2{,}4+4{,}9)\cdot(-5)$.

Розв'язання.

$(-7{,}3+2{,}4+4{,}9)\cdot(-5)=\big(-7{,}3+(2{,}4+4{,}9)\big)\cdot(-5)=(-7{,}3+7{,}3)\cdot(-5)=$ $0\cdot(-5)=0.$

Відповідь. 0.

14. Виконайте дії: $3{,}2:(-8)+(-4{,}8):(-6)$.

Розв'язання.

$3{,}2:(-8)+(-4{,}8):(-6)=0{,}4.$

$|3{,}2|=3{,}2,\ |-8|=8, |-4{,}8|=4{,}8, |-6|=6.$

1) $3{,}2:(-8)=-(3{,}2:8)=-0{,}4;$
2) $(-4{,}8):(-6)=4{,}8:6=0{,}8;$
3) $-0{,}4+0{,}8=0{,}8-0{,}4=0{,}4.$

Відповідь. 0,4.

15. Виконайте дії: $-84:2{,}1-4{,}64:(-5{,}8)-6:24+1{,}4:(-0{,}28)$.

Розв'язання.

$-84:2{,}1-4{,}64:(-5{,}8)-6:24+1{,}4:(-0{,}28)=-44{,}45.$

$|-84|=84, |2{,}1|=2{,}1, |4{,}64|=4{,}64, |-5{,}8|=5{,}8, |1{,}4|=1{,}4, |-0{,}28|=0{,}28.$

1) $-84:2{,}1=-(84:2{,}1)=-40;$
2) $4{,}64:(-5{,}8)=-(4{,}64:5{,}8)=-0{,}8;$
3) $6:24=0{,}25;$
4) $1{,}4:(-0{,}28)=-(1{,}4:0{,}28)=-5;\quad |-40|=40, |0{,}8|=0{,}8;$
5) $-40-(-0{,}8)=-40+0{,}8=-(40-0{,}8)=-39{,}2;$

$|-39{,}2|=39{,}2, |-0{,}25|=0{,}25;$

6) $-39{,}2-0{,}25=-39{,}2+(-0{,}25)=-(39{,}2+0{,}25)=-39{,}45;$

$|-39{,}45|=39{,}45, |-5|=5;$

7) $-39{,}45+(-5)=-(39{,}45+5)=-44{,}45.$

Відповідь. -44,45.

16. Знайдіть значення виразу: $3\frac{1}{6}+\left(-2\frac{4}{9}\right)-\left(-1\frac{2}{3}\right)$.

Розв'язання.

$3\frac{1}{6}+\left(-2\frac{4}{9}\right)-\left(-1\frac{2}{3}\right)=2\frac{7}{18};$

$\left|3\frac{1}{6}\right|=3\frac{1}{6}, \left|-2\frac{4}{9}\right|=2\frac{4}{9};$

1) $3\frac{1}{6}+\left(-2\frac{4}{9}\right)=3\frac{1^{\backslash 3}}{6}-2\frac{4^{\backslash 2}}{9}=3\frac{3}{18}-2\frac{8}{18}=1\frac{3}{18}-\frac{8}{18}=\frac{1\cdot 18+3}{18}-\frac{8}{18}=$
$\frac{21}{18}-\frac{8}{18}=\frac{21-8}{18}=\frac{13}{18}$;

2) $\frac{13}{18}-\left(-1\frac{2}{3}\right)=\frac{13^{\backslash 1}}{18}+1\frac{2^{\backslash 6}}{3}=\frac{13}{18}+1\frac{12}{18}=1\frac{13+12}{18}=1\frac{25}{18}=1\frac{18+7}{18}=2\frac{7}{18}$.

Відповідь. $2\frac{7}{18}$.

17. Виконайте додавання, обираючи зручний порядок обчислень: $-3\frac{1}{6}+9{,}84+1\frac{1}{6}+(-20{,}84)$.

Розв'язання.

$\left|-3\frac{1}{6}\right|=3\frac{1}{6}$, $\left|1\frac{1}{6}\right|=1\frac{1}{6}$, $|-20{,}84|=20{,}84$, $|9{,}84|=9{,}84$.

Згрупуємо доданки 1, 3 та 2, 4 та виконаємо обчислення:

$$-3\frac{1}{6}+9{,}84+1\frac{1}{6}+(-20{,}84)=\left(-3\frac{1}{6}+1\frac{1}{6}\right)+\big(9{,}84+(-20{,}84)\big)$$
$$=-\left(3\frac{1}{6}-1\frac{1}{6}\right)+\big(-(20{,}84-9{,}84)\big)=-2+(-11)=$$
$$=-(|-2|+|-11|)=-(2+11)=-13.$$

Відповідь. -13.

18. Виконайте додавання, обираючи зручний порядок обчислень: $6{,}29+(-5{,}126)+(-7{,}29)+5{,}126$.

Розв'язання.

Згрупуємо доданки 1, 3 та 2, 4 та виконаємо обчислення:

$$6{,}29+(-5{,}126)+(-7{,}29)+5{,}126=\big(6{,}29+(-7{,}29)\big)+(-5{,}126+5{,}126)$$
$$=-(|-7{,}29|-|6{,}29|)+0=-1+0=-1.$$

Відповідь. -1.

19. Знайдіть значення виразу $-a+b+c-d$,

якщо $a=-4, b=12, c=-6, d=8$.

Розв'язання.

Підставимо задані значення величини у вираз та обчислимо його значення:

$$-a+b+c-d=-(-4)+12+(-6)-8=4+12+(-6)+(-8)$$
$$=16+\big(-(|-6|+|-8|)\big)=16+\big(-(6+8)\big)=$$
$$=16+(-14)=|16|-|-14|=16-14=2.$$

Відповідь. 2.

20. Виконайте дії: $\left(-5\frac{3}{4}\right)\cdot 8+\left(-2\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-1\frac{3}{14}\right)-1\frac{37}{48}\cdot\left(-2\frac{2}{15}\right).$

Розв'язання.

$\left(-5\frac{3}{4}\right)\cdot 8+\left(-2\frac{1}{3}\right):\left(-\frac{14}{17}\right)-1\frac{37}{48}\cdot\left(-2\frac{2}{15}\right)=-39\frac{7}{18}.$

$\left|-5\frac{3}{4}\right|=5\frac{3}{4},\ |8|=8,\ \left|-2\frac{1}{3}\right|=2\frac{1}{3},\ \left|-\frac{14}{17}\right|=\frac{14}{17},\ \left|1\frac{37}{48}\right|=1\frac{37}{48},\ \left|-2\frac{2}{15}\right|=2\frac{2}{15},$

1) $\left(-5\frac{3}{4}\right)\cdot 8=-\left(\frac{5\cdot4+3}{4}\cdot\frac{8}{1}\right)=-\frac{23\cdot\cancel{8}^2}{\cancel{4}_1}=-\frac{46}{1}=-46;$

2) $\left(-2\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-1\frac{3}{14}\right)=2\frac{1}{3}:\frac{14}{17}=\frac{2\cdot3+1}{3}:\frac{14}{17}=\frac{7}{3}\cdot\frac{17}{14}=\frac{\cancel{7}^1\cdot17}{3\cdot\cancel{14}_2}=\frac{1\cdot17}{3\cdot2}=\frac{17}{6}=$
$\frac{2\cdot6+5}{6}=2\frac{5}{6};$

3) $1\frac{37}{48}\cdot\left(-2\frac{2}{15}\right)=-\left(1\frac{37}{48}\cdot2\frac{2}{15}\right)=-\left(\frac{1\cdot48+37}{48}\cdot\frac{2\cdot15+2}{15}\right)=-\left(\frac{85}{48}\cdot\frac{32}{15}\right)=$
$-\frac{\cancel{85}^{17}\cdot\cancel{32}^2}{\cancel{48}_3\cdot\cancel{15}_3}=-\frac{34}{9}=\ =-\frac{3\cdot9+7}{9}=-3\frac{7}{9};$

4) $-46+2\frac{5}{6}=-\left(|-46|-\left|2\frac{5}{6}\right|\right)=-\left(46-2\frac{5}{6}\right)=-\left(45\frac{6}{6}-2\frac{5}{6}\right)=$
$-43\frac{1}{6};$

5) $-43\frac{1}{6}-\left(-3\frac{7}{9}\right)=-43\frac{1}{6}+3\frac{7}{9}=-\left(\left|-43\frac{1}{6}\right|-\left|3\frac{7}{9}\right|\right)=-\left(43\frac{1^{\backslash 3}}{6}-\right.$
$\left.3\frac{7^{\backslash 2}}{9}\right)=-\left(43\frac{3}{18}-3\frac{14}{18}\right)=-\left(42\frac{21}{18}-3\frac{14}{18}\right)=-39\frac{21-14}{18}=-39\frac{7}{18}.$

Відповідь. $-39\frac{7}{18}$.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Розташуйте в порядку спадання числа -2; 35; 0; -42; -310,2; 40,5.

2. Запишіть числа протилежні до даних: -9; 3; -3,8; 0; -3,93; -51.

3. Знайдіть відстань між точками A(-5) і B(-13).

4. Знайдіть відстань між точками A(6) і B(-10).

5. Знайдіть значення виразу: $(|21|+|-15|)\cdot|-2|$.

6. Знайдіть значення виразу: $|-6{,}3|\cdot|2{,}7|$.

7. Знайдіть усі цілі значення x, при яких є правильною нерівність: $-4{,}2\le x<2$.

8. Знайдіть усі цілі значення x, при яких є правильною нерівність: $-6 < x < 3$.

9. Обчисліть значення виразу $|3 - a| - 4{,}2$, якщо $a = 3{,}5$.

10. Відомо, що $x \in (2; 3)$. Тоді $x - |x - 2| =$

11. Обчисліть: $(-4{,}8) + (-6{,}12)$.

12. Обчисліть: $-8{,}9 + 6{,}7$.

13. Обчисліть: $5\frac{5}{8} + (-3\frac{3}{8})$.

14. Обчисліть: $-\big(732 + (294 - 825)\big) + 201$.

15. Обчисліть: $2\frac{1}{10} + (-4\frac{4}{5}) + 1\frac{11}{15} + (-1\frac{1}{6})$.

16. Обчисліть значення виразу:$\left(2\frac{2}{7} - 1\frac{6}{14}\right) + \left(2\frac{1}{3} - 6\frac{4}{9} + 4\frac{1}{9}\right)$.

17. Обчисліть: $\Big(-19{,}2 + 26{,}3 + \big(3{,}7 + (-10{,}8)\big)\Big) \cdot 30$.

18. Обчисліть значення виразу: $5\frac{7}{9} + \left(-8\frac{3}{4}\right) + \left(-3\frac{13}{36}\right) + 2\frac{7}{18}$.

19. Обчисліть значення виразу:

$(-1{,}485) - (-3{,}087) + (-2{,}408) + (-1{,}005)$.

20. Знайдіть значення виразу, якщо $x = 4{,}05$, $y = 3{,}7$:

$5{,}95 + (-7{,}64) + x + (-1{,}26) + (-2{,}18) + y$.

21. Обчисліть значення виразу: $0{,}75 \cdot (-1\frac{1}{3}) \cdot (-0{,}02) \cdot 50$.

22. Обчисліть значення виразу: $(-0{,}5) \cdot \left(-2\frac{1}{2}\right) + (-4\frac{1}{6}) \cdot 11{,}4$.

23. Виконайте дії: $-5{,}6: (-7) - (-3{,}6): 0{,}6$.

24. Виконайте дії: $46: (-2{,}3) + 3{,}74: (-1{,}7) - 7: (-28) - 1{,}4: 0{,}35$.

25. Виконайте додавання, обираючи зручний порядок обчислень:

$-5\frac{2}{7} + (-17{,}02) + 3\frac{5}{7} + 22{,}02$.

26. Знайдіть значення виразу $-a + b + c - d$, якщо $a = 3\frac{1}{3}$, $b = 2\frac{1}{2}$, $c = -1\frac{5}{6}$, $d = 5$.

27. Обчисліть значення виразу: $\big(-3{,}25 - (-1{,}75)\big): (-0{,}6) + 0{,}8 \cdot (-7)$.

28. Виконайте дії: $-1\frac{1}{3}: \frac{8}{15}: \left(-\frac{5}{7}\right) \cdot \left(-3\frac{1}{7}\right)$.

29. Виконайте дії: $\frac{4}{5} : \left(-\frac{8}{3}\right) \cdot \frac{3}{5} : \left(-\frac{9}{5}\right)$.

30. Виконайте дії: $\left(5\frac{5}{9} - 6{,}8\right) : \left(2\frac{13}{30} - 2\frac{1}{12}\right) \cdot 3{,}6$.

Контрольна робота

1. Знайдіть значення виразу $(|3{,}8| + |-2{,}7|) \cdot |-2|$.

А)$-2{,}2$; Б)$2{,}2$; В)-13; Г)13.

2. Обчисліть значення виразу $|-a + 3{,}2| - 2{,}5$, якщо $a = 4{,}7$.

А)-1; Б)-4; В)7,4; Г)12,4.

3. Обчисліть: $-\big(85 - (237 + (-23))\big)$.

А)195; Б)-195; В)129; Г)-129.

4. Обчисліть: $\frac{2}{3} + \left(-\frac{7}{8}\right) + \frac{5}{6} + \left(-\frac{7}{12}\right)$.

А) $\frac{1}{24}$; Б) $-\frac{1}{24}$; В) $\frac{1}{12}$; Г) $-\frac{1}{12}$.

5. Обчисліть: $(-48{,}72 : 12) \cdot (-2)$

А) $9{,}2$; Б) $-9{,}2$; В) $8{,}12$; Г) $-8{,}12$.

6. Встановіть відповідність між виразами (1-4) та значеннями виразів (А-Д):

Вирази:	*Значення виразів:*
1. $-5\frac{3}{8} + 4\frac{9}{10}$;	А) $-\frac{19}{40}$;
2. $-5\frac{3}{8} - 4\frac{9}{10}$;	Б) $26\frac{27}{80}$;
3. $-5\frac{3}{8} \cdot 4\frac{9}{10}$;	В) $-26\frac{27}{80}$;
4. $-5\frac{3}{8} : 4\frac{9}{10}$;	Г) $-10\frac{11}{40}$;
	Д) $-1\frac{19}{196}$.

7. Встановіть відповідність між виразом (1-4) та значенням виразу (А-Д), якщо $l = 3{,}4, k = -2{,}5$:

Значення змінних.	*Значення виразу.*
1. $7{,}2 - l + 2{,}32 + k$;	А)$15{,}42$;
2. $7{,}2 + l + 2{,}32 + k$;	Б) $3{,}62$;
3. $7{,}2 + l + 2{,}32 - k$;	В) $6{,}62$;
4. $7{,}2 - l + 2{,}32 - k$;	Г) $10{,}42$;
	Д) $8{,}62$.

8. Встановіть відповідність між виразами (1-4) та значеннями виразів (А-Д):

Вираз	*Значення виразу*
1) $4{,}2 \cdot (-7) - 9{,}3 : (5{,}8 - 8{,}9)$;	А) 36,4;
2) $-4{,}2 \cdot (-7) - 9{,}3 : (5{,}8 - 8{,}9)$;	Б) 26,4;
3) $-4{,}2 \cdot (-7) - 9{,}3 : (-5{,}8 + 8{,}9)$;	В) 32,4;
4) $4{,}2 \cdot (-7) + 9{,}3 : (5{,}8 - 8{,}9)$;	Г) -32,4;
	Д) $-26{,}4$.

9. Знайдіть значення виразу: $-3\frac{3}{4} - \left(-8\frac{2}{9} - (-4{,}5) : \frac{9}{14}\right) \cdot 2\frac{1}{4}$.

10. Знайдіть значення виразу $5\frac{1}{4}(12 - c) + 3\frac{1}{4}(-c - 8)$ при $c = -0{,}4$.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Розташуйте в порядку спадання числа -2; 35; 0; -42; -310,2; 40,5.

2. Запишіть числа протилежні до даних: -9; 3; -3,8; 0; -3,93; -51.

3. Знайдіть відстань між точками A(-5) і B(-13).

4. Знайдіть відстань між точками A(6) і B(-10).

5. Знайдіть значення виразу: $(|21| + |-15|) \cdot |-2|$.

6. Знайдіть значення виразу: $|-6{,}3| \cdot |2{,}7|$.

7. Знайдіть усі цілі значення x, при яких є правильною нерівність: $-4{,}2 \le x < 2$.

8. Знайдіть усі цілі значення x, при яких є правильною нерівність: $-6 < x < 3$.

9. Обчисліть значення виразу $|3 - a| - 4{,}2$, якщо $a = 3{,}5$.

10. Відомо, що $x \in (2; 3)$. Тоді $x - |x - 2| =$

11. Обчисліть: $(-4{,}8) + (-6{,}12)$.

12. Обчисліть: $-8{,}9 + 6{,}7$.

13. Обчисліть: $5\frac{5}{8} + (-3\frac{3}{8})$.

14. Обчисліть: $-\big(732 + (294 - 825)\big) + 201$.

15. Обчисліть: $2\frac{1}{10} + (-4\frac{4}{5}) + 1\frac{11}{15} + (-1\frac{1}{6})$.

16. Обчисліть значення виразу: $\left(2\frac{2}{7} - 1\frac{6}{14}\right) + \left(2\frac{1}{3} - 6\frac{4}{9} + 4\frac{1}{9}\right)$.

17. Обчисліть: $\left(-19{,}2+26{,}3+\left(3{,}7+(-10{,}8)\right)\right)\cdot 30.$

18. Обчисліть значення виразу: $5\frac{7}{9}+\left(-8\frac{3}{4}\right)+\left(-3\frac{13}{36}\right)+2\frac{7}{18}.$

19. Обчисліть значення виразу:

$(-1{,}485)\ -\ (-3{,}087)+(-2{,}408)+(-1{,}005).$

20. Знайдіть значення виразу, якщо $x=4{,}05,\ \ y=3{,}7$:

$5{,}95+(-7{,}64)+x+(-1{,}26)+(-2{,}18)+y.$

21. Обчисліть значення виразу: $0{,}75\cdot(-1\frac{1}{3})\cdot(-0{,}02)\cdot 50.$

22. Обчисліть значення виразу: $(-0{,}5)\cdot\left(-2\frac{1}{2}\right)+(-4\frac{1}{6})\cdot 11{,}4.$

23. Виконайте дії: $-5{,}6:(-7)-(-3{,}6):0{,}6.$

24. Виконайте дії: $46:(-2{,}3)+3{,}74:(-1{,}7)-7:(-28)-1{,}4:0{,}35.$

25. Виконайте додавання, обираючи зручний порядок обчислень:

$-5\frac{2}{7}+(-17{,}02)+3\frac{5}{7}+22{,}02.$

26. Знайдіть значення виразу $-a+b+c-d$,

якщо $a=3\frac{1}{3},\ b=2\frac{1}{2},\ c=-1\frac{5}{6}, d=5.$

27. Обчисліть значення виразу: $\left(-3{,}25-(-1{,}75)\right):(-0{,}6)+0{,}8\cdot(-7).$

28. Виконайте дії: $-1\frac{1}{3}:\frac{8}{15}:\left(-\frac{5}{7}\right)\cdot\left(-3\frac{1}{7}\right).$

29. Виконайте дії: $\frac{4}{5}:\left(-\frac{8}{3}\right)\cdot\frac{3}{5}:\left(-\frac{9}{5}\right).$

30. Виконайте дії: $\left(5\frac{5}{9}-6{,}8\right):\left(2\frac{13}{30}-2\frac{1}{12}\right)\cdot 3{,}6.$

8. ВІДСОТКИ

Теоретичні відомості

Сота частина від числа називається **відсотком** або **процентом**.

Наприклад:

$1\% = \frac{1}{100} = 0{,}01;$ $\quad 10\% = \frac{10}{100} = 0{,}1;$ $\quad 100\% = \frac{100}{100} = 1;$

$2\% = \frac{2}{100} = 0{,}02;$ $\quad 20\% = \frac{20}{100} = 0{,}2;$ $\quad 200\% = \frac{200}{100} = 2;$

$3\% = \frac{3}{100} = 0{,}03$ і т.д. $\quad 30\% = \frac{30}{100} = 0{,}3$ і т.д. $\quad 300\% = \frac{300}{100} = 3$ і т.д

Запис числа у відсотках

Таблиця 1

Щоб записати **десятковий дріб у відсотках** потрібно помножити його на 100.	$0{,}85 = 85\%;$ $5 = 500\%;$ $1{,}71 = 171\%;$ $0{,}325 = 32{,}5\%;$ $\frac{3}{5} = 0{,}6 = 60\%.$

Запис відсотків у вигляді десяткового дробу

Таблиця 2

Щоб **число відсотків записати у вигляді десяткового дробу**, потрібно число відсотків поділити на 100.	$452\% = 4{,}52;$ $6\% = 0{,}06;$ $64\% = 0{,}64;$ $0{,}037\% = 0{,}0037.$

Знаходження відсотків від числа

Таблиця 3

Щоб знайти відсоток від числа, потрібно: 1) виразити відсотки звичайним чи десятковим дробом; 2) помножити дане число на цей дріб.	**Задача 1.** Полуниці містять 6% цукру. Скільки кілограмів цукру міститься в 15 кг полуниць? *Розв'язання.* 1) 15:100=0,15 (кг) – становить 1 % маси всіх полуниць. 2) 0,15·6=0,9 (кг) – становить цукру в 15 кг полуниць. *Відповідь.* 0,9 кг.

Знаходження числа за його відсотком

Таблиця 4

Щоб знайти число за його відсотками, потрібно: 1) записати число відсотків десятковим дробом; 2) поділити відому частину числа на одержаний десятковий дріб.	**Задача 2.** Вершкове морозиво містить 14% цукру. Скільки кілограм морозива виготовили, якщо було використано 49 кг цукру? *Розв'язання.* 1) $14\% = 0{,}14$; 2) $49 : 0{,}14 = 350$ (кг) – виготовили морозива. *Відповідь.* 350 кг.

Знаходження відсоткового відношення двох чисел

Таблиця 5

Відсоткове відношення двох чисел – це їхнє відношення, виражене у відсотках. **Відсоткове відношення** показує, скільки відсотків одне число становить від другого. Щоб знайти **відсоткове відношення двох чисел**, треба їхнє відношення помножити на 100 й до результату дописати знак відсотка.	**Задача 3.** В класі вчаться 12 дівчат і 20 хлопців. Знайдіть відсоткові відношення: 1) кількості дівчат до кількості хлопців; 2) кількості хлопців до кількості дівчат; 3) кількості дівчат до кількості учнів всього класу; 4) кількості хлопців до кількості учнів всього класу. *Розв'язання.* 1) $\frac{12}{20} \cdot 100 = 60$ (%) – кількість дівчат становить 60% від кількості хлопців. 2) $\frac{20}{12} \cdot 100 = 166\frac{2}{3}$ (%) – кількість хлопців становить $166\frac{2}{3}$% від кількості дівчат. 3) $\frac{20}{32} \cdot 100 = 62{,}5$ (%) відсотків становлять хлопці від кількості учнів усього класу. 4) $\frac{12}{32} \cdot 100 = 37{,}5$ (%)відсотків становлять хлопці від кількості учнів усього класу.

Задачі на відсотки часто розв'язують використовуючи пропорції. Наприклад.

Задача 1. Полуниці містять 6% цукру. Скільки кілограмів цукру міститься в 15 кг полуниць?

Розв'язання. Нехай в полуниці міститься x кг цукру. Запишемо коротко умову задачі в такому вигляді:

15 кг – 100 % ;

x кг – 6 %.

Відношення $\frac{15}{100}$ і $\frac{x}{6}$ рівні, оскільки кожне з них показує масу цукру рівну 1%. Тоді запишемо пропорцію і знайдемо її невідомий член:

$\frac{x}{6} = \frac{15}{100}; x = \frac{6 \cdot 15}{100} = 0,9$ (кг).

Відповідь. 0,9 кг цукру міститься в 15 кг полуниці.

Задача 2. Вершкове морозиво містить 14% цукру. Скільки кілограм морозива виготовили, якщо було використано 49 кг цукру?

Розв'язання. Нехай виготовили x кг морозива. Запишемо коротко умову задачі в такому вигляді:

x кг – 100 % ;

49 кг – 14 %.

Відношення $\frac{x}{100}$і $\frac{49}{14}$ рівні, оскільки кожне з них показує масу цукру рівну 1%. Тоді запишемо пропорцію і знайдемо її невідомий член:

$\frac{x}{100} = \frac{49}{14}; x = \frac{49 \cdot 100}{14} = 350$ (кг).

Відповідь. 350 кг морозива було виготовлено.

Задача 3. В класі вчаться 12 дівчат і 20 хлопців. Знайдіть відсоткові відношення: 1)кількості дівчат до кількості хлопців;2)кількості хлопців до кількості дівчат; 3)кількості дівчат до кількості учнів всього класу; 4) кількості хлопців до кількості учнів всього класу.

Розв'язання. 1)Нехай в класі навчається x % дівчат. За умовою:

12 дівчат – x % ;

20 хлопців – 100 %.

Відношення $\frac{12}{20}$ і $\frac{x\,\%}{100\%}$ рівні, оскільки кожне з них показує відношення кількості дівчат до кількості хлопців. Тоді запишемо пропорцію і знайдемо її невідомий член: $\frac{12}{20} = \frac{x}{100}; x = \frac{12 \cdot 100}{20} = 60\ \%$ становить кількість дівчат від кількості хлопців.

2) Нехай в класі навчається x % хлопців. За умовою:

20 хлопців– x % ;

12 дівчат – 100 %.

Відношення $\frac{20}{12}$ і $\frac{x\,\%}{100\%}$ рівні, оскільки кожне з них показує відношення кількості хлопців до кількості дівчат. Тоді запишемо пропорцію і знайдемо її невідомий член: $\frac{20}{12}=\frac{x}{100}; x=\frac{20\cdot 100}{12}=166\frac{2}{3}$ % становлять кількість хлопців від кількості дівчат.

3) Нехай в класі навчається x % дівчат. Всього в класі навчається 32 дитини. За умовою:

12 дівчат– x % ;

32 дитини – 100 %.

Відношення $\frac{12}{32}$ і $\frac{x\,\%}{100\%}$ рівні, оскільки кожне з них показує відношення кількості дівчат до кількості учнів в класі. Тоді запишемо пропорцію і знайдемо її невідомий член: $\frac{12}{32}=\frac{x}{100}; x=\frac{12\cdot 100}{32}=37{,}5$ % становлять дівчата від кількості учнів в класі.

4) Нехай в класі навчається x % хлопців. За умовою:

20 хлопців– x % ;

32 дитини – 100 %.

Відношення $\frac{20}{32}$ і $\frac{x\,\%}{100\%}$ рівні, оскільки кожне з них показує відношення кількості хлопців до кількості дівчат. Тоді запишемо пропорцію і знайдемо її невідомий член: $\frac{20}{32}=\frac{x}{100}; x=\frac{20\cdot 100}{32}=62{,}5$ % становлять кількість хлопців від кількості учнів в класі.

Відповідь. 60%, $166\frac{2}{3}$ %, 37,5%, 62,5%.

Окремі види задач

Задачі на сплави

Задачі на суміші

Задачі на складні (банківські) відсотки

Таблиця 6

<table>
<tr>
<td>Задачі на сплави – задачі на визначення відсоткового вмісту кількох металів або металів з неметалами у сплаві.</td>
<td>Задача 4. Обчислити масу і пробу сплаву срібла з міддю, знаючи, що при сплавленні його з 3 кг чистого срібла можна одержати сплав 900-ї проби, а при сплавленні його з 2 кг сплаву 900-ї проби – сплав 840-ї проби.
Розв'язання.
Нехай сплав містить x кг срібла і y кг міді. При сплавленні цього сплаву з 3 кг чистого срібла маємо (x+3) кг — маса срібла,(x+y+3) кг — загальна маса сплаву. Відношення маси чистого металу до загальної маси сплаву — це проба, яка за умовою є 900-ю, що у частинах дорівнює 0,9. Тому $\frac{x+3}{x+y+3} = 0,9$. Аналогічно одержуємо друге рівняння:$\frac{x+1,8}{x+y+2} = 0,84$
Після спрощення рівнянь маємо систему: $\begin{cases} 9y - x = 3 \\ 21y - 4x = 3 \end{cases} \begin{cases} x = 2,4 \\ y = 0,6 \end{cases}$
x+y = 3 – маса сплаву.
$\frac{2,4}{3} \cdot 1000 = 800$ – проба сплаву.
Відповідь.3 кг 800-ї проби.</td>
</tr>
<tr>
<td>Задачі на суміші – задачі на визначення відсоткового вмісту речовин у суміші</td>
<td>Задача 5. Змішали 20%-вий розчин соляної кислоти з 5%-вим і отримали 600 г 10%-ого розчину. Скільки грамів кожного розчину було взято?
Розв'язання.
<table>
<tr><td></td><td>1-ий розчин</td><td>2-ий розчин</td><td>3-тій розчин</td></tr>
<tr><td>маса</td><td>x</td><td>$600 - x$</td><td>600</td></tr>
<tr><td>% кислоти</td><td>20</td><td>5</td><td>10</td></tr>
<tr><td>маса кислоти</td><td>$0.2x$</td><td>$0.05(600 - x)$</td><td>60</td></tr>
</table>
$0.2x + 0.05(600 - x) = 60$; $0.2x + 30 - 0.05x = 60$; $0.15x = 30$; $x = 200$(г).
Тоді маса другого розчину: $600 - 200 = 400$(г).
Відповідь. змішали 200 г 20% та 400 г 5% розчину соляної кислоти.</td>
</tr>
</table>

Задачі на складні (банківські) відсотки – задачі, які відображають відносини між банком та клієнтом. Формула для складних відсотків: $\boldsymbol{a_n = a_0(1 + \frac{p}{100})^n}$, де a_n – сума, яку отримає вкладник, якщо покладе a_0 грн. під p% річних на n років.	**Задача 6.** Вкладник поклав у банк 4500 грн. під 9% річних. Якою буде сума на його рахунку через рік? *Розв'язання.* За умовою $a_0 = 4500$ грн., $p = 9\%$, $n = 1$. Підставляємо у формулу: $a_n = 4500 \cdot \left(1 + \frac{9}{100}\right)^1 = 4500 \cdot 1{,}09 = 4905$ грн. Відповідь. 4 905 грн..

Рекомендуємо повторити:

- Правила множення і ділення чисел на 100.
  - ➢ Щоб помножити ціле число на 100, потрібно до нього справа приписати два нулі.
  - ➢ Щоб помножити десятковий дріб на 100, потрібно кому перенести на дві цифри вправо.
  - ➢ Щоб поділити ціле число на 100 потрібно виділивши дві цифри справа поставити кому.
  - ➢ Щоб поділити десятковий дріб на 100 потрібно кому перенести вліво на дві цифри. Якщо ділене містить меншу кількість знаків перед комою, ніж дві, то зліва від числа приписують необхідну кількість нулів.
- Пропорцією називається рівність двох відношень $\frac{m}{k} = \frac{n}{t}$ або $m{:}k = n{:}t$, m, t називають крайніми членами пропорції, а k, n – середніми.
- Основна властивість пропорції: добуток крайніх членів дорівнює добутку середніх, тобто $m \cdot t = k \cdot n$.

Базові завдання з розв'язаннями та відповідями

1. Знайдіть 9 % від числа 63.

Розв'язання.

1) $63{:}\,100\% = 0{,}63$ – становить 1% від 63;

2) $0{,}63 \cdot 9 = 5{,}67$.

Відповідь. 5,67.

2. Запишіть у вигляді десяткового дробу 93%.

Розв'язання.

$93: 100\% = 0{,}93$.

Відповідь. 0,93.

3. Запишіть у відсотках 0,703.

Розв'язання.

$0{,}703 \cdot 100\% = 70{,}3\%$.

Відповідь. 70,3%.

4. До магазину завезли 600 кг шоколадних цукерок, печива та мармеладу. Цукерки становили 40% завезеного товару, печиво 25%. Скільки кілограмів мармеладу завезли до магазину?

Розв'язання.

1) $40 + 25 = 65$ (%) – завезеного товару становлять шоколадні цукерки та печиво.

2) $100 - 65 = 35$ (%) – становить мармелад.

3) $600: 100 = 6$ (кг) – становить 1% маси завезеного товару.

4) $6 \cdot 35 = 210$ (кг) –завезли мармеладу.

*Відповідь***.** 210 кг.

5. Знайдіть число, якщо 13% цього числа становить 39.

Розв'язання.

1) $13\% = 0{,}13$;

2) $39: 0{,}13 = 300$.

Відповідь. 300.

6. За день робітник виготовив 48 деталей, що становить 120% кількості деталей, яку він мав виготовити за планом. Скільки деталей робітнику потрібно було виготовити за планом?

Розв'язання.

1) $48: 120 = 0{,}4$ (деталі) – становить 1% плану.

2) $0{,}4 \cdot 100 = 40$ (деталей) – треба було виготовити за планом.

Відповідь. 40 деталей.

7. У гаю ростуть дуби, клени та берези. Дуби становлять 15% усіх дерев, клени – 23%, а беріз росте 248. Скільки всього дерев росте в гаю?

Розв'язання.

1) $15 + 23 = 38$ (%) – усіх дерев становлять дуби та клени.

2) $100 - 38 = 62$ (%) – усіх дерев становлять берези.

3) $248 : 62 = 4$ (дерева) – становлять 1% усіх дерев.

4) $4 \cdot 100 = 400$ (дерев) – росте в гаю.

Відповідь. 400 дерев.

8. Ціна деякого товару знизилася з 60 грн. до 54 грн. на скільки відсотків знизилася ціна товару?

Розв'язання.

1) $60 - 54 = 6$ (грн.) – знизилась ціна;

2) $\frac{6}{60} \cdot 100\% = 10\%$ - відсоткове відношення 6 грн. до початкової ціни товару, тобто 60 грн.

Відповідь. ціна товару знизилася на 10%.

9. Із 150 найменувань товару, що їх виготовляє фабрика, 30 нової моделі. Скільки відсотків товару нової моделі випускає фабрика?

Розв'язання.

1) $\frac{30}{150} = \frac{\cancel{30}^1}{\cancel{150}_5} = \frac{1}{5} = 0{,}2$ – відношення кількості нової моделі до загальної кількості найменувань;

2) $0{,}2 \cdot 100\% = 20\%$ - товару нової моделі випускає фабрика.

Відповідь. фабрика випускає 20% товару нової моделі.

10. Іван прочитав 105 сторінок книги в котрій було 280 сторінок. Скільки відсотків сторінок прочитав Іван?

Розв'язання.

1) $\frac{105}{280} = \frac{\cancel{105}^3}{\cancel{280}_8} = \frac{3}{8} = 0{,}375$ – відношення кількості прочитаних сторінок до загальної кількості сторінок в книзі;

2) $0{,}375 \cdot 100\% = 37{,}5\%$ - прочитав Іван.

Відповідь. Іван прочитав 37,5 % книги.

11. Книга коштувала 250 грн. спочатку її ціну знизили на 16%, а потім нов підвищили на 20 %. Якою стала ціна книги після цих змін?

Розв'язання.

1) 100%-16%=84% - становить ціна книги від початкової ціни після зменшення;

2) $\frac{84}{100} \cdot 250 = 210$ (грн.) – ціна після зменшення на 10%.

3) $100\% + 20\% = 120\%$ - становить ціна книги від 210 грн. після підвищення на 20%;

4) $\frac{120}{100} \cdot 210 = 252$ (грн.) – ціна книги після всіх змін.

Відповідь. 252 грн.

12. Вкладник вніс в Ощадбанк 300 грн. Ощадбанк нараховує щорічно 12 % від суми внеску. Якою стане сума на рахунку вкладника через 2 роки?

Розв'язання.

Підставимо значення з умови задачі у формулу $a_n = a_0(1 + \frac{p}{100})^n$, де $a_0 = 3000$ грн., $p = 12\%, n = 2$.

$a_2 = 3\,000 \cdot \left(1 + \frac{12}{100}\right)^2 = 3\,000 \cdot 1{,}12^2 = 3\,000 \cdot 1{,}2544 = 3763{,}2$ (грн.) – буде у вкладника на рахунку через 2 роки.

Відповідь. 3763,2 грн.

13. Вкладник вніс до банку 2000 грн., а через рік отримав 2160 грн. Під який відсоток річних були покладені гроші?

Розв'язання.

Підставимо значення з умови задачі у формулу $a_n = a_0(1 + \frac{p}{100})^n$, де $a_0 = 2000$ грн., $a_n = 2160$ грн., $n = 1$.

$2160 = 2\,000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^1$; $2160 = 2000 \cdot 1 + 2000 \cdot \frac{p}{100}$; $2160 = 2000 + 20p$; $2160 - 2000 = 20p$; $160 = 20p$; $p = 160 : 20 = 8$ %.

Відповідь. вкладник поклав свої гроші під 8 % річних.

14. Сплав містить 50 г олова і 200 г міді. Який відсотковий уміст олова у сплаві?

Розв'язання.

1) 50+200=250 (г) – маса всього сплаву;

2) $\frac{50}{250} \cdot 100\% = \frac{\cancel{50}^1}{\cancel{250}_5} \cdot 100\% = \frac{1}{\cancel{5}_1} \cdot \cancel{100}^{20}\% = 20\%$ - відсотковий уміст олова у сплаві.

Відповідь. відсотковий уміст олова у сплаві становить 20%.

15. У сплаві міді та цинку мідь становить $\frac{1}{7}$ частину маси цинку. Який відсотковий уміст міді у сплаві?

Розв'язання.

1) $1 + 7 = 8$ – частин містилося у сплаві.

2) $\frac{1}{8} \cdot 100 = \frac{1}{\cancel{8}_2} \cdot \cancel{100}^{25} = \frac{25}{2} = 12{,}5\%$ - уміст міді у сплаві.

Відповідь. відсотковий уміст міді у сплаві становить 12,5%.

16. 2 кг сплаву міді з оловом містить 40% міді. Скільки потрібно додати до цього сплаву олова, щоб отриманий сплав містив 16% міді?

Розв'язання.

1) $\frac{40}{100} \cdot 2 = 0{,}8$ (кг) – маса міді у сплаві;

Нехай олова потрібно додати х кг, тоді маса отриманого сплаву буде $(2 + x)$ кг. Оскільки маса міді у сплаві не змінюється, то 16% від $(2 + x)$ становитиме 0,8 кг. Запишемо це у вигляді рівняння:

2) $\frac{16}{100}(x + 2) = 0{,}8;$

$0{,}16x + 0{,}32 = 0{,}8;\ 0{,}16x = 0{,}48;\ x = 0{,}48 : 0{,}16;\ x = 3.$

Відповідь. потрібно додати 3 кг олова.

17. Свіжі гриби містять 90% води, а сушені – 15%. Скільки сушених грибів можна одержати із 17 кг сіжих?

Розв'язання.

1) $100\% - 90\% = 10\%$ - суха маса у свіжих грибах виражена у відсотках;

2) $\frac{10}{100} \cdot 17 = 1{,}7$ кг – суха маса у свіжих грибах;

3) $100\% - 15\% = 85\%$ - суха маса у сухих грибах виражена у відсотках;

На 85 % сухої грибів припадає 1,7 кг, а нам потрібно дізнатися всю масу сухих грибів, тому:

4) $1{,}7 : \frac{85}{100} = 1\frac{7}{10} \cdot \frac{100}{85} = \frac{1\cdot 10+7}{10} \cdot \frac{100}{85} = \frac{17}{10} \cdot \frac{100}{85} = \frac{\cancel{17}^{1}}{\cancel{10}_{1}} \cdot \frac{\cancel{100}^{10}}{\cancel{85}_{5}} = \frac{1\cdot \cancel{10}^{2}}{1\cdot \cancel{5}_{1}} = 2$ (кг) – маса сухих грибів.

Відповідь. 2 кг.

18. У розчині є 40 % солі. Якщо додати 120 г солі, то в розчині міститиметься 70 % солі. Скільки грамів солі було в розчині спочатку?

Розв'язання.

Нехай x – маса солі у розчині спочатку, що становить 40% від маси розчину, яка дорівнюватиме $\frac{100}{40}x = \frac{\cancel{100}^{5}}{\cancel{40}_{2}}x = 2{,}5\,x$. Якщо додати 120 г солі, то маса солі стане $(x + 120)$ г, а маса всього розчину буде дорівнювати $(2{,}5x + 120)$ г, причому вміст солі зміниться до 70 %. Запищемо рівняння і розвяжемо його.

$(x + 120) = \frac{70}{100}(2{,}5x + 120)$;

$x + 120 = 1{,}75x + 84$;

$x - 1{,}75x = 84 - 120$;

$-0{,}75x = -36$;

$x = -36 : (-0{,}75)$;

$x = 48$ (г) – маса солі, яка була спочатку у розчині.

Відповідь. 48 г.

19. Змішали 2 л молока, жирність якого дорівнює 6%, і 3 л молока, жирність якого дорівнює 8%. Знайдіть у відсотках жирність утвореної суміші.

Розв'язання.

1) $\frac{6}{100} \cdot 2 = 0{,}12$ л – жира в 2 л молока;

2) $\frac{8}{100} \cdot 3 = 0{,}24$ л – жира в 3 л молока;

3) $0{,}12 + 0{,}24 = 0{,}36$ л –жира разом;

4) $\frac{0{,}36\cdot 100}{5} = \frac{36}{5} = 7{,}2$ % - жирність в 5 л молока.

Відповідь. 7,2%.

20. Є два види руди з різних родовищ: у руді з першого родовища міститься 6% міді, а в руді з другого родовища – 11 %. Скільки потрібно взяти тонн руди з першого родовища та змішати з рудою з другого родовища, щоб одержати 20 т руди із вмістом міді 8%?

Розв'язання.

Нехай з першого родовища було взято x тонн руди, а з другого – y тонн руди. У руді з першого родовища, за умовою міститься 6% міді, що в кілограмах дорівнюватиме $\frac{6}{100}x = 0{,}06x$ (т). Аналогічно знайдемо масу міді у руді з другого родовища $\frac{11}{100}y = 0{,}11y$ (т). За умовою вміст міді, у суміші руди з першого та другого родовищ становить $\frac{8}{100} \cdot 20 = 1{,}6$ (т). Тобто, якщо ми додамо суміші з двох родовищ, то отримаємо суміш масою 20 т, а якщо будемо додавати маси міді з двох родовищ, то отримаємо 1,6 (т). Складемо систему рівнянь і розв'яжемо її.

$$\begin{cases} x + y = 20; \\ 0{,}06x + 0{,}11y = 1{,}6; \end{cases}$$

Виразимо x з першого рівняння, а друге рівняння помножимо на 100.

$$\begin{cases} x = 20 - y; \\ 6x + 11y = 160; \end{cases}$$

Підставимо значення x з першого рівняння у друге:

$$\begin{cases} x = 20 - y; \\ 6(20 - y) + 11y = 160; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 20 - y; \\ 120 - 6y + 11y = 160; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 20 - y; \\ 5y = 40; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 20 - y; \\ y = 40 : 5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 12; \\ y = 8. \end{cases}$$

Відповідь. потрібно взяти 6 т руди з першого родовища і 8 т з другого.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Знайдіть:

1)1% від числа 76; 4) 30% від числа 120;

2)7% від числа 300; 5) 94% від числа 16,5;

3) 26% від числа 10; 6) 156% від числа 62.

2. Запишіть у вигляді десяткового дробу:

1) 6%; 2) 14%; 3) 40%; 4) 84%; 5) 160%; 6) 600%.

3. Запишіть у відсотках:

1) 0,24; 2) 0,04; 3)0,4; 4) 0,682; 5) 1,6; 6) 8.

4. Учасники авторалі мали подолати 565 км. Першого дня було пройдено 72% маршруту. Скільки кілометрів було пройдено першого дня?

5. До магазину завезли 200 банок з варення. 24%цієї кількості становили банки з полуничним варенням, 32% - з малиновим, а решту – з вишневим. Скільки банок вишневого варення завезли до магазину?

6. За чотири дні яхта пройшла 800 км. За перший день було пройдено 30% усієї відстані, за другий день - $\frac{5}{8}$ того, що було пройдено за перший день, а за третій день – 128% того, що було пройдено за другий. Скільки кілометрів пройшла яхта за четвертий день?

7. Знайдіть число, якщо: а) 1% цього числа дорівнює 7; б) 1% цього числа дорівнює 0,36; в) 12% цього числа дорівнює 4,8; с) 104% цього числа дорівнюють 260.

8. За перший тиждень турист пройшов 32 км, що становить 40% туристського маршруту. Скільки кілометрів становить довжина маршруту?

9. У саду ростуть яблуні та вишні, причому яблуні становлять 41% усіх дерев. Вишень росте на 54 дерева більше, ніж яблунь. Скільки дерев росте в саду? Скільки серед них є вишень?

10. У саду ростуть кущі червоних, рожевих і білих троянд. Червоні троянди становлять 40% усіх кущів, рожеві – 58% решти, а білих троянд росте 126 кущів. Скільки всього кущів троянд росте в саду?

11. Скільки відсотків число 40 становить від 100.

12. Ціна товару зросла зі 140 грн до 175 грн. На скільки відсотків підвищилася ціна товару?

13. Відомо, що 380 кг руди першого виду містять 68,4 кг заліза, 420 кг руди другого виду – 96,6 кг заліза. У якій руді, першого чи другого виду, вищий відсотковий вміст заліза?

14. Шафа коштувала 4200 грн. Спочатку її ціну знизили на 10%, а потім нову ціну підвищили на 25%. Якою стала ціна шафи після цих змін? На скільки відсотків змінилася початкова ціна шафи?

15. На кондитерській фабриці виробляли шоколадні цукерки та карамель. Шоколадні цукерки спочатку становили 80% продукції, а через деякий час – 90%. На скільки відсотків при цьому зменшилося виробництво карамелі?

16. Петро П'ятак поклав у банк 14 000 грн під 10% річних. Якою буде сума на його рахунок через рік? Через два роки?

17. Банк сплачує своїм вкладникам 8% річних. Скільки грошей треба покласти в банк, щоб через рік отримати 60 грн прибутку?

18. У банк поклали 12 000 грн. Через рік вкладник зняв 2400 грн, а ще через рік на цьому рахунку виявилося 10 710 грн. Скільки відсотків річних нараховує банк?

19. Вкладник поклав у банк 4000 грн. за перший рік йому було нараховано певний відсоток річних, а другого року банківський відсоток було збільшено на 4 %. На кінець другого року на рахунку стало 4664 грн. Скільки відсотків становила банківська ставка у перший рік?

20. Сплав містить 8% міді. Скільки кілограмів міді міститься в 360 кг сплаву?

21. До сплаву масою 600 г, що містить 20 % міді, додали 40 г міді. Яким став відсотковий вміст міді в новому сплаві?

22. До сплаву магнію й алюмінію, який містив 12 кг алюмінію, додали 5 кг магнію, після чого відсотковий вміст магнію у сплаві збільшився на 20 %. Скільки кілограмів магнію було в сплаві спочатку?

23. Скільки золота 375-ї проби треба сплавити із 30 г золота 750-ї проби, щоб одержати сплав золота 500-ї проби?

24. Морська вода містить 6% солі. Скільки солі міститься в 250 кг морської води?

25. Відомо, що 280 г першого розчину містять 98 г солі, а 220 г другого розчину – 88 г солі. У якому розчині, першому чи другому, вищий відсотковий вміст солі?

26. Було 300 г шестивідсоткового розчину солі. Через деякий час 60 г води випарувалось. Яким став відсотковий вміст солі в розчині?

27. Скільки кілограмів води треба випарити з 0,5 т целюлозної маси, яка містить 85% води, щоб отримати масу з вмістом 75% води?

28. Змішали 30-відсотковий розчин соляної кислоти з 10-відсотковим розчином і отримали 800 г 15-відсоткового розчину. Скільки грамів кожного розчину взяли для цього?

29. До розчину, який містив 40 г солі, додали 200 г води, після чого його концентрація зменшилася на 10%. Скільки грамів води містив розчин і якою була його концентрація?

30. Щоб отримати соляну кислоту, 2 кг хлористого водню розчинили у певному об'ємі води. Потім, щоб підвищити концентрацію отриманої на 25 %, додали ще 9 кг хлористого водню. Скільки соляної кислоти було отримано?

Контрольна робота

1. Знайдіть 6 % від 350.

А) 35; Б) 21; В) 3,5; Г) 2,1; Д) Інша відповідь.

2. Знайдіть число, якщо 28 % цього числа становить 35.

А) 225; Б) 175; В) 125; Г) 75; Д) Інша відповідь.

3. Скільки відсотків становить число 63 від 315.

А) 50%; Б) 40%; В) 30%; Г) 20%; Д) Інша відповідь.

4. Ціна товару знизилася зі 200 грн. до 140 грн.. На скільки відсотків знизилася ціна товару?

А) на 50%; Б) на 40%; В) на 30%; Г) на 20%; Д) Інша відповідь.

5. Кількість кленів становлять 40% від кількості дубів, що ростуть у парку. Скільки відсотків становить кількість дубів від кількості кленів?

А) 150%; Б) 250%; В) 350%; Г) 450%; Д) Інша відповідь.

6. В саду росте 36 вишень та 60 яблунь. Встановіть відповідність між завданням (1-4) та складеним відсотковим відношенням (А-Д):

Знайдіть відсоткове відношення:	*Відношення, у %*
1. кількості вишень до кількості яблунь;	А) $166\frac{2}{3}$;
2. кількості яблунь до кількості вишень;	Б) 40,5;
3. кількості вишень до кількості дерев у саду;	В) 60;
4. кількості яблунь до кількості дерев у саду.	Г) 37,5;
	Д) 62,5.

7. Банк сплачує своїм вкладникам 8% річних. Встановіть відповідність між сумою грошей (А-Д), яку треба покласти на рахунок, щоб через рік отримати прибуток (1-4).

Прибуток, у грн.	*Сума вкладу, у грн.*
1. 60;	А) 1500;
2. 80;	Б) 1000;
3. 100;	В) 500;
4. 120	Г) 1250;
	Д) 750.

8. Сплав міді і цинку вагою 20кг містить 30% міді. Додали 22кг цинку. Встановіть відповідність між масою міді(А-Д), яку потрібно додати, щоб у сплаві містилося (1-4) % цинку.

Кількість %-ів цинку у сплаві	*Маса міді, у кг*
1. 25%;	А) 48;
2. 50%;	Б) 52;
3. 60%	В) 6;
4. 75%.	Г) 102;
	Д) 30.

9. У бібліотеці є лише підручники, словники, довідники та художня література. Відсотковий розподіл кількості цих книг у бібліотеці відображено на рисунку 1.

1) Визначте загальну кількість книг, якщо кількість підручників дорівнює 72.

2) Скільки потрібно придбати додатково підручників, щоб отримана після цього їх сумарна кількість відносилася до кількості довідників як 4:1.

Рис. 1

10. Початкова вартість сукні становила 144 грн.. унаслідок уцінення вартість цієї сукні було зменшено на 60%. 1) Обчисліть вартість сукні після уцінення (у грн.). 2) Скільки відсотків становить початкова вартість сукні від її вартості після уцінення?

9. ТЕКСТОВІ ЗАДАЧІ НА РУХ

У задачах на рух зустрічаються такі поняття.

- *Відстань* – це величина, яка характеризує рух і вказує, який шлях подолав об'єкт руху за певний час. Одиниці вимірювання відстані: сантиметри (см), метри (м), кілометри (км) тощо.
- *Час* – це величина, яка характеризує рух і вказує, за який час об'єкт руху подолає певну відстань. Одиниці вимірювання часу: секунди (с), хвилини (хв), години (год) тощо.
- *Швидкість* – це величина, яка характеризує рух і вказує, який шлях подолав об'єкт руху за одиницю часу. Одиниці вимірювання швидкості: метр за секунду (м/с), кілометр за секунду (км/с), кілометр за годину (км/год), метр за хвилину (м/хв) тощо.

Також потрібно нагадати як переводити ці величини. У таблиці 1, 2 та 3, наведені приклади переведення одиниць вимірювання величин, які ми будемо використовувати в процесі розв'язування задач.

Переведення одиниць вимірювання часу

Таблиця 1

Перевести з	*Перевести у*			
	хв	год	днів (діб)	тижнів
1 хв. це:	1	1/60=0,0167	$6,94*10^{-4}$	$9,92*10^{-5}$
1 год. це:	60	1	1/24=0,0417	$5,95*10^{-3}$
1 день (доба) це:	1440	24	1	1/7=0,143
1 тиждень це:	10080	168	7	1

Переведення одиниць вимірювання відстані

Таблиця 2

	метр	*дециметр*	*сантиметр*	*міліметр*	*кілометр*
1 метр це:	1	10	100	1000	0.001
1 дециметр. це:	0.1	1	10	100	0.0001
1 сантиметр це:	0.01	0.1	1	10	0.00001
1 міліметр це:	0.001	0.01	0.1	1	0.000001
1 кілометр це:	1000	10^4	10^5	10^6	1

Переведення одиниць вимірювання швидкості

Таблиця 3

Перевести з	*Перевести у*			
	км/с	км/год	м/с	м/хв
1 км/с це:	1	3600	1000	60000
1 км/год це:	3600	1	1/24=0,0417	$5{,}95*10^{-3}$
1 м/с це:	0.001	3.6	1	60
1 м/хв це:	~0.000016	0.06	~0.016	1

Зокрема, загальноприйнятою системою позначень є:

- відстань позначається буквою S;
- швидкість – буквою V;
- час – буквою t.

Дані величини пов'язані такими співвідношеннями (див. таблицю 4).

Співвідношення між відстанню, швидкістю та часом

Таблиця 4

Назва величини	*Формула*	*Правило*
Відстань, S	$S = v \cdot t$	Щоб знайти відстань, треба швидкість помножити на час
Швидкість, v	V = $\frac{S}{t}$	Щоб знайти швидкість, треба відстань поділити на час.
Час, t	t = $\frac{S}{V}$	Щоб знайти час, треба відстань поділити на швидкість.

Як правило, в задачах розглядається рух принаймні двох об'єктів (може бути і більше).

Способи розв'язування задач на рух

Задачі на рух можна розвязувати за допомогою трьома способами – арифметичним, алгебраїчним та графічним.

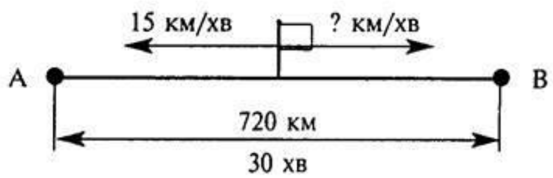
Арифметичний спосіб.

Арифметичний спосіб полягає в тому, що задача розв'язується окремими арифметичними діями. Значення невідомої величини визначається через відомі за умовою задачі величини.

Проілюструємо його при розв'язуванні наступної задачі.

Задача. Два літаки одночасно вилетіли з аеродрому в протилежних напрямках. Через півгодини після вильоту відстань між ними була 720 км. Перший літак летів зі швидкістю 15 км/хв. З якою швидкістю летів другий літак?

Короткий запис до цієї задачі (графічний):



Розв'язання.

1) 15 • 30 = 450 (км) – пролетів перший літак;

2) 720 – 450 = 270 (км) – пролетів другий літак;

3) 270: 30 = 9 (км/хв) – швидкість другого літака.

Відповідь: 9 км/хв.

Алгебраїчний спосіб

Розв'язування задач алгебраїчним способом здійснюється за допомогою рівнянь. Для того, щоб розв'язати задачу за допомогою рівняння, треба спочатку за умовою задачі скласти його. Для цього співвідношення між величинами в задачі необхідно перевести на математичну мову.

Розглянемо в якості зразка наступну задачу.

Задача. Відстань від річки до турбази туристи розраховували пройти за 6 год. Однак після 2 години шляху вони зменшили швидкість на 1 км / год і в результаті спізнилися на турбазу на 1 год. З якою швидкістю йшли туристи спочатку?

Аналіз Задачі наочно представляє наступна таблиця:

	Запланований рух	Фактичний рух	
		І частина шляху	ІІ частина шляху
S	$6x$ км	$2x$ км	$5(x-1)$ км
V	x км/ч	x км/год	$(x-1)$ км/ч
t	6 год	2 год	5 год (запіз. на 1 год)

Розв'язання.

Отже, згідно з наміченим планом руху туристи повинні подолати $6x$ км. Фактично вони пройшли в сумі дві ділянки: $(2x + 5\,(x-1))$ км. Незважаючи на запізнення в часі, вони подолали запланований шлях, тому можна скласти рівняння: $2x + 5\,(x-1) = 6x$

Розв'язуємо його.

$2x + 5x - 5 = 6x$

$7x - 6x = 5$

$x = 5$ (км/год) - запланована швидкість туристів.

*Відовідь***:** 5 (км/год)

Графічний спосіб

Використовуючи траєкторії, ми можемо розв'язувати задачі на рух. Розглянемо деякі з них. У всіх задачах на рух, якщо не зазначено інше, рух відбувається протягом одного дня.

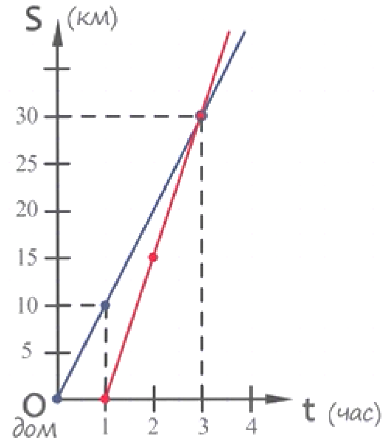
Розглянемо в якості зразка наступну задачу.

Задача. Від селища до станції велосипедист виїхав зі швидкістю 10 км/год, а повертався зі швидкістю 15 км/год, тому він витратив на зворотний шлях на 1 год менше. Знайдіть відстань від селища до станції.

Розв'язання.

1. Задаємо прямокутну систему координат sOt з горизонтальною віссю абсцис Ot і вертикальною віссю ординат Os, де по осі Ot будемо відзначати час, в годинах, а по осі Os- відстань, відповідну часу t.

2. Визначимо ключові точки графіків руху велосипедиста від селища до станції і назад. За умовою Задача від селища до станції велосипедист виїхав зі швидкістю 10 км/год.



Отже, графік променя руху велосипедиста має початок в точці з координатами (0; 0) і проходить через точку (1; 10), так як швидкість 10 км/год означає, що за 1 годину велосипедист долає 10км шляху.

Про зворотний шлях від станції до селища сказано, що велосипедист повертався зі швидкістю 15 км/год, тому він витратив на зворотний шлях на 1 год менше. Зобразимо це рух у вигляді променя з початком в точці з координатами (1; 0), що проходить через точку (2; 15), так як швидкість 15 км/год означає, що за кожну годину руху він змінює свій шлях на 15 км.

3. Виберемо зручний масштаб поділів на осях координат. По осі абсцис Ot за 1год приймемо 1 ділення, а по осі Os – за 5км приймемо 1 ділення. Побудуємо один промінь з початком в точці (0; 0), що проходить через точку (1; 10), і другий промінь з початком в точці (1; 0), що проходить через точку (2; 15). За графіком неважко помітити, що ці промені перетнулися в точці з координатами (3; 30). Абсциса цієї точки показує час руху велосипедиста від будинку до станції, а її ордината - відстань від будинку до станції.

Таким чином, ми відповіли на головне питання задачі 30км – відстань від будинку до станції.

*Відповідь***:** 30 км.

Типи задач на рух

Зустрічний рух

При розв’язуванні завдань на зустрічний рух істотною характеристикою є швидкість зближення рухомих об'єктів. Відстань, на яке зближуються рухомі об'єкти за одиницю часу, називають *швидкістю зближення*. При зустрічному русі швидкість зближення дорівнює сумі швидкостей рухомих об'єктів, тобто $V_{\text{збл}} = V_1 + V_2$.

Відстань між пунктами визначається за формулою $S = V_{\text{сбл}} * t_{\text{зуст}}$ Розглянемо розв'язання задачі на зустрічний рух.

Задача. Два велосипедиста виїхали назустріч один одному. Швидкість одного з низ 12 км/год, а іншого – 10 км/год. Через 3 години вони зустрілися. Яка відстань було між ними на початку шляху?

Умову задачі зручно оформляти у вигляді таблиці:

	v, км/ч	t, ч	s, км
I велосипедист	12	3	?
II велосипедист	10	3	?

Розв'язання.

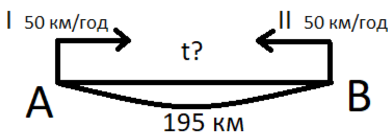
1) 12 + 10 = 22 (км / год) швидкість зближення велосипедистів

2) 22 · 3 = 66 (км) було між велосипедистами на початку шляху.

Відповідь: 66 км.

Задача. З пункту А і пункту В машини рухаються назустріч один одному зі швидкостями 50 км/год і 80 км/год. Відстань між пунктами – 195 км. Через скільки часу машини зустрінуться?

Короткий запис до цієї задачі (графічний):



Розв'язання.

Нехай х – час, яке їдуть машини, тоді шлях першої машини – $50x$, а шлях другої машини – $80x$. Їх сума і буде дорівнює відстані між пунктами А і В $50x + 80x = 195$. Розв'яжемо рівняння:

$50x + 80x = 195$

$130x = 195$

x = 1,5 (год) – час, через який зустрілися машини.

Відовідь: 1,5 год.

Рух у в протилежних напрямках

При розв’язуванні завдань такого типу сумарна швидкість має іншу назву. Відстань, на яку видаляються рухомі предмети за одиницю часу, називають *швидкістю віддалення*.

При русі в протилежних напрямках швидкість віддалення дорівнює сумі швидкостей рухомих об'єктів, тобто

$V_{уд} = V_1 + V_2$.

Задача. О 8 годині з аеродрому вилетіли одночасно в протилежних напрямах два літака. В 11 годин відстань між ними було 3540 км. Один з них летів зі швидкістю 620км / год. З якою швидкістю летів інший літак?

Заповнимо допоміжну таблицю.

	I літак	II літак	Додаткова умова
S			$S_1 + S_2$ = 3540 км
V	620 км/год	?	
t	3 год	3 год	

Розв’язання.

I спосіб

Легко визначити час, за який літаки разом подолали відстань у 3540 км: $11 - 8 = 3$ (год)

А тепер намітимо план розв’язання задачі та реалізуємо його:

1) Знаючи V_1 і t_1, знаходимо S_1: $620 * 3 = 1860$ (км).

2) по додатковій умові визначаємо S_2: $3540 - 1860 = 1680$ (км).

3) Знаючи S_2 і t_2, знаходимо V_2 : $1680 : 3 = 560$ (км/год)

Задача досить легко розв’язується за допомогою рівняння.

II спосіб

Позначимо через x км/год швидкість другого літака, тоді $(620 + x)$ км/год – швидкість видалення літаків один від одного. За 3 год вони віддаляться на $(620 + x) * 3$ км, що становить 3540 км.

Звідси розв’язуємо рівняння:

$(620 + x) * 3 = 3540.$

$620 + x = 1180$

$x = 560.$

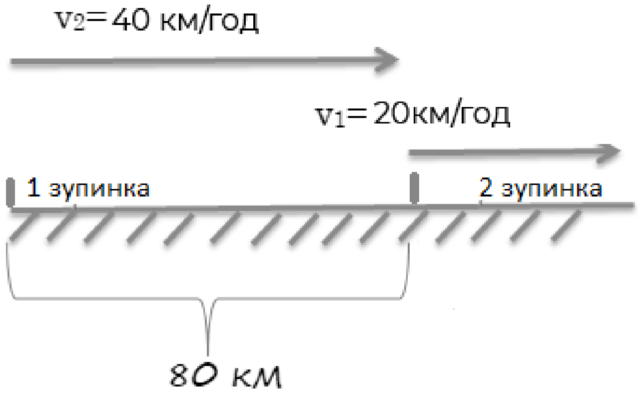
Відповідь: 560 км/год.

Рух в одному напрямку (навздогін)

При русі в одному напрямку (навздогін) швидкість зближення об'єктів дорівнює різниці їх швидкостей:

$$V_{\text{сбл}} = V_1 - V_2 \ (V_1 > V_2)$$

Задача. Відстань між двома автомобільними зупинками дорівнює 80 км. Одночасно з цих зупинок в одному напрямку виїхали мотоцикліст та автомобіліст, так що мотоцикліст пливе попереду. Швидкість мотоцикліста дорівнює 20 км/год, швидкість автомобіля - 40 км/год. На якій відстані від своєї зупинки автомобіль наздожене мотоцикл?



Розв'язання:

1) 40-20 = 20 (км/год) - швидкість зближення.

2) 80 : 20 = 4 (год) - через такий час автомобіль наздожене мотоцикл.

3) 4 * 40 = 160 (км) - такий шлях пройде автомобіль, перш ніж наздожене мотоцикл.

Відповідь: 160 км.

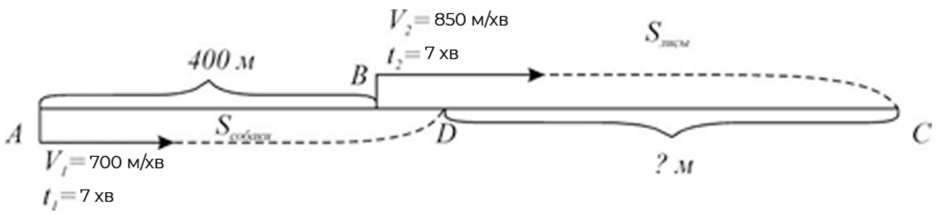
Рух в одному напрямку (з відставанням)

При русі в одному напрямку (з відставанням) швидкість віддалення об'єктів дорівнює різниці їх швидкостей.

$$V_{\text{від}} = V_1 - V_2 \ (V_1 > V_2)$$

Задача. Собака женеться за лисицею зі швидкістю 700 м/хв, а лисиця тікає від неї зі швидкістю 850 м/хв. Зараз між собакою і лисицею відстань 400 м. Яким стане відстань між ними через 7 хвилин?

Розв'язання:



I спосіб

На малюнку видно, що виконується рівність

$AB + BC = AD + CD,$ де:

$AB = 400$ м – це початкове відстань між собакою і лисицею.

BC – це відстань, на яку втекла лисиця за 7 хвилин.

AD – це відстань, яку подолала собака за 7 хвилин.

CD – це шукане відстань, тобто кінцеве відстань між собакою і лисицею (через 7 хвилин).

Отже, виконуємо дії:

1) $700 \cdot 7 = 4900$ (м) – $S_{собаки}$.

2) $850 \cdot 7 = 5950$ (м) – $S_{лиси}$.

3) $(400 + 5950) - 4900 = 1450$ (м) – шукана відстань S

II спосіб

Якщо уявити собі, що собака і лисиця кинулися бігти друг від друга з одного місця, то в цьому випадку задача розв'язується так:

1) 850 – 700 = 150 (м / хв) - швидкість віддалення лисиці від собаки.

2) $150 \cdot 7 = 1050$ (м) - відстань, на яке віддалиця лисиця через 7 хвилин.

А тепер, з огляду на те, що лисиця спочатку мала додаткове «запасну» відстань в 400 м від собаки, досить просто його додати до знайденого відстані:

3) 1050 + 400 = 1450 (м) - шукане відстань.

Відповідь: 1450 м.

Рух по воді

При розв’язуванні завдань на рух по річці допомагають знання з життєвого досвіду:

Озеро (море) – стояча вода, тому при русі вона не допомагає, але і не перешкоджає руху катера (або іншого об'єкта). Очевидно, що катер рухається з тією швидкістю, яка називається власною швидкістю катера (швидкістю, обумовленої потужністю його двигуна).

$$V_{\text{катера}} = V_{\text{власна}}$$

При русі за течією річки (часто говорять - «вниз» по річці) швидкість катера збільшується, тому що рухається вода як би «підштовхує», тобто прискорює його рух. В цьому випадку до власної швидкості катера необхідно додати швидкість течії річки.

$$V_{\text{катера}} = V_{\text{власна}} + V_{\text{течії}}$$

При русі проти течії річки («вгору» по річці) швидкість катера зменшується, тому що річка уповільнює його рух, «зносить» катер. У цьому випадку від власної швидкості катера слід відняти швидкість течії річки

$$V_{\text{катера}} = V_{\text{власна}} - V_{\text{течії}}$$

Задача. Швидкість теплохода за течією річки дорівнює 49 км/год, а швидкість течії річки – 4 км/год. Який шлях пройде теплохід за 2 год проти течії річки? Запиши розв’язок задачі за допомогою формули.

	V, км/год	*t, год*	*S, км*
За теч.	*49*	*?*	*?*
Проти теч.	*41*	*2*	*?*

Розв’язання:

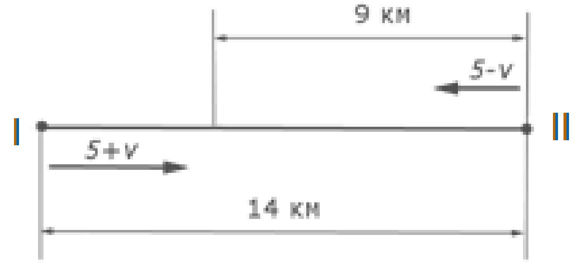
Швидкість теплохода у стоячій воді дорівнює v= (49-4) (км/год), а його щвидкість проти течії річки*:* $v_{\text{пт.}} = v_{\text{в.}} - v_{\text{т.}} = ((49-4)-4)$ (км/год). Тоді за 2 год теплохід пройде шлях $S = v_{\text{пт.}} * t = \big((49-4)-4\big) * 2$ (км). Знайдемо значення виразу: $S = \big((49-4)-4\big) * 2 = (45-4) * 2 = 41 * 2 = 82$ (км).

Відповідь: 82 км.

Задача. Моторний човен пройшов за течією річки 14 км, а потім 9 км проти течії, витративши на весь шлях 5 годин. Швидкість човна в стоячій воді 5 км / год. Знайдіть швидкість течії річки.

Розв'язання.

Позначимо буквою v швидкість течії річки і будемо вважати, що швидкість v вимірюється в км/год. Зобразимо дані, наведені в умові на малюнку



Тоді

$5 + v$ – швидкість, з якою човен йшов за течією річки (в км / год);

$\frac{14}{5+v}$ – час руху човна за течією річки (в годинах);

$5 - v$ – швидкість, з якою човен йшов проти течії річки (в км / год);

$\frac{9}{5-v}$ – час руху човна проти течії річки (в годинах);

Тепер можна скласти рівняння, беручи до уваги той факт, що човен знаходився в дорозі 5 годин:

$$\frac{14}{5+v} + \frac{9}{5-v} = 5$$

Розв'яжемо це рівняння:

$$14(5 - v) + 9(5 + v) = 5(25 - v^2)$$

$$v^2 - v - 2 = 0$$

$$v_1 = -1,$$

$$v_2 = 2$$

За змістом задачі перший корінь повинен бути відкинутий.

Відповідь: 2 км / год.

Базові задачі з розв'язаннями

1. Із селища вийшли одночасно в протилежних напрямах два пішохода. Середня швидкість одного пішохода – 5 км / год, іншого – 4 км / год. Через скільки годин відстань між ними буде 27 км?

Короткий запис до цієї задачі (рис. 1):

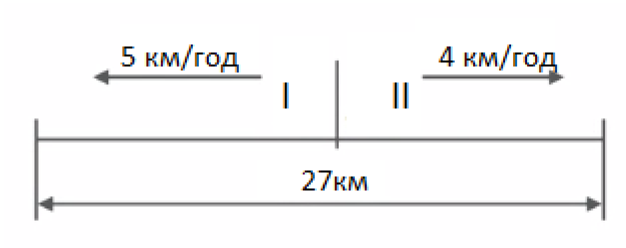


Рис. 1

Розв'язання.

Щоб знайти час руху пішоходів, потрібно знати відстань і швидкість пішоходів. Ми знаємо, що за кожну годину один пішохід віддаляється від селища на 5 км, а інший пішохід віддаляється від селища на 4 км. Можемо знайти їх швидкість віддалення.

1) $4 + 5 = 9$ (км/год)

Ми знаємо швидкість віддалення і знаємо всю відстань – 27 км. Можемо знайти час, через який пішоходи віддалятися один від одного на 27 км, для цього потрібно відстань розділити на швидкість.

2) $27 : 9 = 3$ (год)

Відповідь. Через три години відстань між переходами буде 27 км.

2. Два пішохода одночасно вийшли назустріч один одному з двох пунктів, відстань між якими 18 км. Швидкість одного з них 5 км/год, а іншого – 4 км/год. Через скільки годин вони зустрілися?

Короткий запис до цієї задачі (рис. 2):

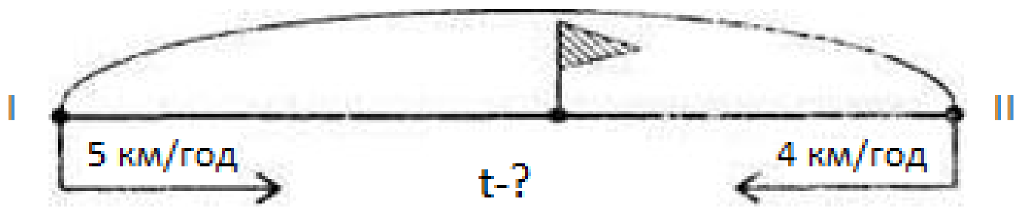


Рис. 2

Розв'язання.

Знаючи швидкість зближення пішоходів і все відстань, яку їм треба пройти, можемо знайти час, через яке пішоходи зустрінуться.

1) 5 + 4 = 9 (км / год) – їх спільна швидкість

2) 18: 9 = 2 (год)

Таким чином, пішоходи зустрінуться через 2 ч від початку руху

Відповідь. 2 год.

3. Два автомобілі виїхали одночасно назустріч один одному з двох пунктів, відстань між якими 600 км, і через 5 год зустрілися. Один з них їхав швидше за іншого на 16 км / год. Визначте швидкості автомобілів.

Умову задачі зручно оформляти у вигляді таблиці 1:

Табл.1

	v, км/ч	t, ч	s, км
I автомобіль	?	5	600
II автомобіль	на 16 більше	5	600

Розв'язання.

1) 600 : 5 = 120 (км / год) - швидкість зближення автомобілів

2) 120 - 16 = 104 (км / год) - швидкість зближення, якби швидкість автомобілів була однаковою

3) 104 : 2 = 52 (км / год) - швидкість першого автомобіля.

4) 52 + 16 = 68 (км / год) - швидкість другого автомобіля.

Відповідь. 68 км / год.

4. Від станції Л відправився поїзд зі швидкістю 60 км / год. Через 2 год з цієї ж станції в протилежному напрямку вийшов другий поїзд зі швидкістю 70 км / год. Яка відстань буде між поїздами через 3 години після виходу другого поїзда?

Короткий запис до цієї задачі (рис. 3):

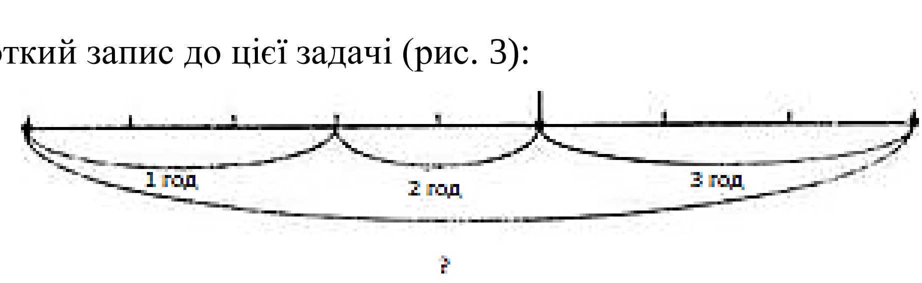


Рис. 3

Розв'язання.

1) 60 + 70 = 130 (км / год) – швидкість віддалення поїздів.

2) 130 · 3 = 390 (км) відстань, яку подолали поїзди за 3 год.

3) 60 · 2 = 120 (км) – відстань, пройдена першим поїздом за 2 год.

4) 390 + 120 = 510 (км) – відстань між поїздами.

Відповідь. 510 км.

5. Відстань 360 км катер проходить за 15 год, якщо рухається проти течії річки, і за 12 год, якщо рухається за течією. Скільки часу буде потрібно катеру, щоб проплисти 135 км по озеру?

Умову задачі зручно оформляти у вигляді таблиці 2:

Табл. 2

	v, км/ч	t, ч	s, км
за течією		12	360
проти течії		15	360
по річці	?		135

Таблиця підказує послідовність дій: знайти спочатку швидкість руху катера за течією і проти течії, потім, використовуючи формули, – власну швидкість катера і, нарешті, час, за який він пропливе 135 км по озеру

Розв'язання.

1) 360: 12 = 30 (км / год) – швидкість катера за течією річки.

2) 360: 15 - 24 (км / год) – швидкість катера проти течії річки.

3) 24 + 30 - 54 (км / год) – подвоєна власна швидкість катера.

4) 54: 2 = 27 (км / год) – власна швидкість катера

5) 135: 27 = 5 (год) – час, за яке пропливе катер 135 км.

Відповідь. 5 год.

6. З пункту А в пункт В, відстань між якими 50 км, одночасно виїхали автомобіліст і велосипедист. Відомо, що в годину автомобіліст проїжджає на 40 км більше, ніж велосипедист. Визначте швидкість велосипедиста, якщо відомо, що він прибув в пункт В на 4 години пізніше автомобіліста. Відповідь дайте у км / год.

Умову задачі зручно оформляти у вигляді таблиці.

У ній відразу можна внести відстань –ё і велосипедист, і автомобіліст проїхали по 50 км. Можна внести швидкість – вона дорівнює x і $x + 40$ для велосипедиста і автомобіліста відповідно. Залишилося заповнити графу «час». Його ми знайдемо за формулою t = $\frac{S}{V}$. Для велосипедиста отримаємо t = $\frac{50}{x}$, для автомобіліста отримаємо t = $\frac{50}{x+40}$

	v, км/ч	t, ч	s, км
велосипедист	x	$\frac{50}{x}$	50
автомобіліст	$x + 40$	$\frac{50}{x+40}$	50

Залишається записати, що велосипедист прибув в кінцевий пункт на 4 години пізніше автомобіліста.

Розв'язання.

$\frac{50}{x+40} + 4 = \frac{50}{x}$; $\frac{50(x+40)-50x}{x(x+40)} = 4$; $\frac{2000}{x(x+40)} = 4$; $\frac{500}{x(x+40)} = 1$; $x(x + 40) = 500$; $x^2 + 40x - 500 = 0$.

Ми отримали квадратне рівняння. Розв'язавши його, отримаємо наступні корні: $x_1 = 10$; $x_2 = -50$

Ясно, що x_2 не підходить за змістом Задачі – швидкість велосипедиста не повинна бути від'ємною.

*Відповідь.*10 км/год.

7. Вінні-Пух і П'ятачок одночасно вирушили в гості один до одного, але оскільки обидва всю дорогу рахували галок, то не помітили один одного при зустрічі. Після зустрічі П'ятачок підійшов до будинку Вінні-Пуха через 4 хвилини, а Вінні-Пух до дому П'ятачка – через 1 хвилину. Скільки хвилин був в дорозі кожен з них?

Розв'язання.

1) На площині з координатами (t; s), де t – час (у хвилинах), s – відстань від будинку Вінні-Пуха, зобразимо графіки руху Вінні-Пуха і П'ятачка. На малюнку це відрізки AK і BL відповідно, O – точка перетину графіків, яка відповідає їх зустрічі (рис. 4).

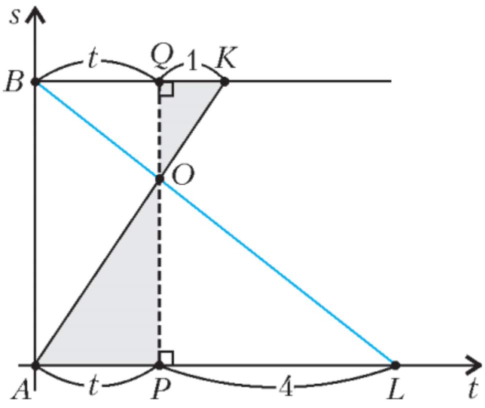


Рис. 4

2) Проведемо відрізок PQ, що проходить через точку O, перпендикулярно осі часу. Позначимо AP = t (час до зустрічі). З подібності трикутників QOK і POA, а також QOB і POL маємо: $\frac{1}{t} = \frac{t}{4}$, що дає t = 2.

Відповідь. Вінні-Пух був у дорозі 3 хвилини, а П'ятачок – 6 хвилин.

8. Теплохід, швидкість якого в нерухомій воді дорівнює 25 км / год, проходить за течією річки і після стоянки повертається в початковий пункт. Швидкість течії дорівнює 3 км / год, стоянка триває 5 годин, а в вихідний пункт теплохід повертається через 30 годин після відплиття з нього. Скільки кілометрів пройшов теплохід за весь рейс?

Умову задачі зручно оформляти у вигляді таблиці:

	v, км/ч	t, ч	s, км
за течією	$25 + 3 = 28$	$\frac{S}{28}$	S
проти течії	$25 - 3 = 22$	$\frac{S}{22}$	S
стоянка	?	5	–

Розв'язання.

Нехай шукана величина дорівнює 2S.

Складемо за умовою задачі рівняння $\frac{S}{28} + \frac{S}{22} + 5 = 30$

Звідки $\frac{S}{28} + \frac{S}{22} = 25;\quad \frac{11S+14S}{28*11} = 25;\quad \frac{25S}{308} = 25;\quad S = 308$

Відповідь. 308 км.

9. Велосипедист виїхав з постійною швидкістю з міста A в місто B, відстань між якими дорівнює 70 км. На наступний день він відправився назад зі швидкістю на 3 км / год більше попередньої. По дорозі він зробив зупинку на 3 години. В результаті він витратив на зворотний шлях стільки ж часу, скільки на шлях з А в В. Знайдіть швидкість велосипедиста на дорозі з А в В. Відповідь дайте у км / год.

Нехай швидкість велосипедиста на дорозі з А в В дорівнює х. Тоді його швидкість на зворотному шляху дорівнює х + 3. Відстань в обох стрічках таблиці пишемо однакове – 70 кілометрів. Залишилося записати час.

Оскільки t = $\frac{S}{V}$. на шлях з А в В велосипедист витратить час t = $\frac{70}{x}$. а на зворотний шлях час t = $\frac{70}{x+3}$.

	v, км/ч	t, ч	s, км
туди	x	$\frac{70}{x}$	70
назад	$x+3$	$\frac{70}{x+3}$	70

На зворотному шляху велосипедист зробив зупинку на 3 години і в результаті витратив стільки ж часу, скільки на шляху з А в В. Це означає, що на зворотному шляху він крутив педалі на 3 години менше.

Розв’язання.

$\frac{70}{x+3}+3=\frac{70}{x}$; $\frac{70}{x}-\frac{70}{x+3}=3$; $\frac{70(x+3)-70x}{x(x+3)}=3$; $\frac{210}{x(x+3)}=3$; $\frac{70}{x(x+3)}=1$;

$x^2+3x-70=0$

Ми отримали квадратне рівняння. Розв’язавши його, отримаємо наступні корні: $x_1=7$; $x_2=-10$.

Зрозуміло, що x_2 не підходить за змістом Задача – швидкість велосипедиста не повинна бути негативною.

Відповідь. 7 км/год.

10. Моторний човен пройшов проти течії річки 255 км і повернувся в пункт відправлення, витративши на зворотний шлях на 2 години менше. Знайдіть швидкість човна в нерухомій воді, якщо швидкість течії дорівнює 1 км/год. Відповідь дайте у км / год.

Розв’язання.

Нехай швидкість човна в нерухомій воді дорівнює x.

Тоді швидкість руху моторки за течією дорівнює $x + 1$, а швидкість, з якою вона рухається проти течії $x - 1$.

Відстань і в ту, і в іншу сторону однаково і дорівнює 255 км.

Занесемо швидкість і відстань в таблицю.

Заповнюємо графу «час». Ми вже знаємо, як це робити.

Табл. 3

	v, км/ч	t, ч	s, км
за течією	$x + 1$	$\frac{255}{x+1}$	255
проти течії	$x - 1$	$\frac{255}{x-1}$	255

Розв'язання.

$$\frac{255}{x+1} + 2 = \frac{255}{x-1}$$

$$\frac{255}{x-1} - \frac{255}{x+1} = 2$$

$$\frac{255(x+1) - 255(x-1)}{(x+1)(x-1)} = 2$$

$$\frac{510}{x^2-1} = 2$$

$$\frac{255}{x^2-1} = 1$$

$$x^2 - 1 = 255$$

$$x^2 = 256$$

Взагалі це рівняння має два кореня: $x_1 = 16$ і $x_2 = -16$ (обидва цих числа при зведенні в квадрат дають 256). Але звичайно ж, від'ємна відповідь не підходить – швидкість човна повинна бути додатною.

Відповідь. 16 км/год.

11. Поїзд, затриманий на 12 хв на перегоні завдовжки 60 км ліквідквав запізнення, збільшивши швидкість на 15 км/год.Знайдіть початкову швидкість поїзда.

Розв'язання. Нехай початкова швидкість поїзда – x км/год, тоді після збільшення його швидкість стала (x+15) км/год. Перегон завдовжки 60 км він мав подолати за $\frac{60}{x}$ год, а подолав за $\frac{60}{x+15}$ год. За умовою задачі $t_1 - t_2$ = 12/60 = 1/5 =0,2.

Складемо рівняння:

$$\frac{60}{x} - \frac{60}{x+15} = \frac{1}{5};$$

$$\frac{60}{x} - \frac{60}{x+15} - \frac{1}{5} = 0;$$

$$\frac{300x + 4500 - 300x - x^2 - 15x}{5x(x+15)} = 0$$

$$\frac{-x^2 - 15x + 4500}{5x(x+15)} = 0;$$

ОДЗ: $5x(x+15) \neq 0; x \neq 0; x \neq -15$

$x^2 + 15x - 4500 = 0;$

$D = 225 + 18000 = 18225;\ \sqrt{D} = 135;$

$x_1 = \frac{-15+135}{2} = 60;\ x_2 = \frac{-15-135}{2} = -75$ — не задовільняє умову задачі

Відповідь. 60 км/год.

12. З одного міста в інше, відстань між якими 180 км, виїхали одночасно легковий і вантажний автомобілі. Швидкість легкового автомобіля на 30 км/год більша, ніж вантажного, тому він прибув до пункту призначення на 1 год раніше за вантажний. Знайдіть швидкість кожного автомобіля.

Розв'язання. Нехай x км/год – швидкість вантажного автомобіля, тоді (x+30) км/год – швидкість легкового автомобіля.

$\frac{180}{x}$ год – час руху вантажного автомобіля, $\frac{180}{x+30}$ год – час руху легкового автомобіля. За умовою задачі час руху легкового автомобіля на 1 год менший від часу вантажного автомобіля. Складемо рівняння:

$$\frac{180}{x} - \frac{180}{x+30} = 1;$$

$$\frac{180}{x} - \frac{180}{x+30} - 1 = 0;$$

$$\frac{180x + 5400 - 180x - x^2 - 30x}{x(x+30)} = 0;$$

$$\frac{-x^2 - 30x + 5400}{x(x+30)} = 0;$$

ОДЗ: $x(x+30) \neq 0; x \neq 0; x \neq -30.$

$$-x^2 - 30x + 5400 = 0;$$

$$x^2 + 30x - 5400 = 0;$$

За теоремою, оберненою до теореми Вієта:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -30 \\ x_1 \cdot x_2 = -5400 \end{cases}$$

$x_1 = 60;\ x_2 = -90 -$ не задовільняє умову задачі

$x + 30 = 60 + 30 = 90$

Відповідь. 60 км/год; 90 км/год.

13. З двох пунктів, відстань між якими 20 км, вийшли одночасно назустріч один одному два туристи і зустрілися через 2 години. Визначте, з якою швидкістю йшов кожний турист, якщо одному на подолання всього шляху знадобилося на 1 годину 40 хвилин більше, ніж іншому.

Розв'язання. Нехай x км/год – швідкість першого туриста, y км/год – швидкість другого туриста. Тоді 2(x+y) = 20; а тому x+y = 10.

$\frac{20}{x}$ год – час руху першого туриста, $\frac{20}{y}$ год – час руху другого туриста. За умовою задачі один турист затратив на 1 год 40 хвилин більше, отже

$$\frac{20}{x} - \frac{20}{y} = 1\frac{2}{3};$$

$$\frac{20}{x} - \frac{20}{y} - \frac{5}{3} = 0;$$

$$\frac{4}{x} - \frac{4}{y} = \frac{1}{3}.$$

Складемо систему рівнянь:

$\begin{cases} x = 10 - y \\ \frac{4}{x} - \frac{4}{y} = \frac{1}{3} \end{cases}$; $\begin{cases} x = 10 - y \\ \frac{4}{10-y} - \frac{4}{y} - \frac{1}{3} = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 10 - y \\ \frac{12y-120+12y-10y+y^2}{3y(10-y)} = 0 \end{cases}$;

$$\begin{cases} x = 10 - y \\ \dfrac{y^2 + 14y - 120}{3y(10 - y)} = 0; \end{cases}$$

ОДЗ: $3y(10 - y) \neq 0; y \neq 0; y \neq 10.$

$y^2 + 14y - 120 = 0$

За теоремою, оберненою до теореми Вієта:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = -14 \\ y_1 \cdot y_2 = -120 \end{cases}$$

$y_1 = 6;\ y_2 = -20$ – не задовільняє умову задачі;

Отже, х=10 – 6 = 4.

Відповідь. 4 км/год; 6 км/год.

14. Два пішоходи вийшли назустріч один одному і зустрілися через 3 год 20 хв. Скільки часу потрібно кожному, щоб пройти весь шлях, якщо перший прийшов в той пункт, з якого вийшов другий на 5 год пізніше, ніж другий в той пункт, звідки вийшов перший?

Розв'язання. Особливістю цієї задачі є те, що в ній немає ніяких даних про пройдений шлях. У задачах такого типу весь пройдений шлях приймається за одиницю. Нехай перший пішоход затратив на весь шлях х год, а другий – у год. Тоді $\frac{1}{x}$ – швидкість першого, а $\frac{1}{y}$ – швидкість другого пішохода. За умовою задачі складемо систему рівнянь:

$\begin{cases} 3\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x} + 3\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{y} = 1 \\ x - y = 5 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{10} \\ x = y + 5 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1}{y+5} + \frac{1}{y} - \frac{3}{10} = 0 \\ x = y + 5 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{10y+10y+50-3y^2-15y}{10y(y+5)} = 0 \\ x = y + 5 \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{-3y^2 + 5y + 50}{10y(y + 5)} = 0 \\ x = y + 5 \end{cases}$$

ОДЗ: $10y(y + 5) \neq 0; y \neq 0; y \neq -5;$

$3y^2 - 5y - 50 = 0; \quad D = 25 + 4 \cdot 3 \cdot 50 = 625;\ \sqrt{D} = 25;$

$y_1 = \dfrac{5 + 25}{6} = 5;\ y_2 = \dfrac{5 - 25}{6} = -3\dfrac{1}{3}$ – не задовольняє умову задачі

$x_1 = 5 + 5 = 10$

Відповідь. 10 год і 5 год.

15. Моторний човен проплив 30 км за течією річки і 8 км проти течії річки, витративши на весь шлях 5 годин. Знайти власну швидкість човна, якщо швидкість течії річки 3 км/год.

Розв'язання. Нехай x км/год – власно швидкість човна, тоді (x+3) км/год – швидкість човна за течією, а (x–3) км/год – швидкість човна проти течії;

$\frac{30}{x+3}$ год – час руху човна за течією, а $\frac{8}{x-3}$ год – час руху човна проти течії.

За умовою задачі човен витратив на весь шлях 5 год. Складемо рівняння:

$$\frac{30}{x+3} + \frac{8}{x-3} = 5;$$

$$\frac{30}{x+3} + \frac{8}{x-3} - 5 = 0;$$

$$\frac{30x - 90 + 8x + 24 - 5x^2 + 45}{(x+3)(x-3)} = 0;$$

$$\frac{-5x^2 + 38x - 21}{(x+3)(x-3)} = 0;$$

ОДЗ: $(x+3)(x-3) \neq 0; x \neq 3; x \neq -3.$

$-5x^2 + 38x - 21 = 0$

$D = 1444 - 4 \cdot 5 \cdot 21 = 1024 = 32^2$

$x_1 = \frac{38-32}{10} = 0{,}6$ – не задовільняє умову задачі;

$$x_2 = \frac{38+32}{10} = 7$$

Відповідь. 7 км/год

16. Турист на моторному човні, власна швидкість якого 15 км/год, проплив проти течії річки 27 км і повернувся назад на плоту.Знайдіть швидкість течії річки, якщо на плоту турист плив на 6 год 40 хв довше, ніж на човні.

Розв'язання. Нехай x км/год – швидкість течії річки; (15–x) км/год – швидкість човна проти течії річки; $\frac{27}{x}$ год – час руху плота, а $\frac{27}{15-x}$ год – час руху човна. За умовою задачі турист на плоту плив на 6 год 45 хвилин ($= 6\frac{3}{4}$ год) довше, ніж на човні. Складемо рівняння:

$$\frac{27}{x} - \frac{27}{15-x} = 6\frac{3}{4};$$

$$\frac{27}{x} - \frac{27}{15-x} - \frac{27}{4} = 0;$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{15-x} - \frac{1}{4} = 0$$

$$\frac{4(15-x) - 4x - x(15-x)}{4x(15-x)} = 0;$$

$$\frac{60 - 23x + x^2}{4x(15-x)} = 0;$$

ОДЗ: $4\mathrm{x}(15 - \mathrm{x}) \neq 0; \mathrm{x} \neq 0; \mathrm{x} \neq 15.$

$$\mathrm{x}^2 - 23\mathrm{x} + 60 = 0$$

За теоремою, оберненою до теореми Вієта:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 23 \\ x_1 \cdot x_2 = 60 \end{cases}$$

$x_1 = 3, x_2 = 20$ — не задовольняє умову задачі

Відповідь. 3 км/год

17. Катер пройшов 48 км по озеру, а потім 22 км по річці, що впадає в це озеро за 3 год. Знайдіть власну швидкість катера, якщо швидкість течії річки 2 км/год.

Розв'язання. Нехай x км/год – власна швидкість катера, тоді (x–2) км/год – швидкість катера проти течії річки.

$\frac{48}{\mathrm{x}}$ год – час руху катера по озеру, а $\frac{22}{\mathrm{x}-2}$ год – час руху катера по річці. За умовою задачі катер витратив на весь шлях 3 години. Складемо рівняння:

$$\frac{48}{\mathrm{x}} + \frac{22}{\mathrm{x}-2} = 3;$$

$$\frac{48}{\mathrm{x}} + \frac{22}{\mathrm{x}-2} - 3 = 0$$

$$\frac{48\mathrm{x} - 96 + 22\mathrm{x} - 3\mathrm{x}^2 + 6\mathrm{x}}{\mathrm{x}(\mathrm{x}-2)} = 0;$$

$$\frac{-3x^2 + 76x - 96}{x(x-2)} = 0;$$

$$\frac{3x^2 - 76x + 96}{x(x-2)} = 0$$

ОДЗ: $x(x-2) \neq 0; x \neq 0; x \neq 2;$

$$3x^2 - 76x + 96 = 0$$

$$D = 15776 - 4 \cdot 3 \cdot 96 = 4624 = 68^2$$

$x_1 = \frac{76-68}{6} = \frac{4}{3}$ – не задовільняє умову задачі

$x_2 = \frac{76+68}{6} = 24.$

Відповідь. 24 км/год.

18. Моторний човен проплив за течією річки 18 км і повернувся назад, затративши на весь шлях 1 годину 45 хвилин. Знайти власну швидкість човна і швидкість течії, якщо відомо, що 6 км за течією річки від пропливає на 5 хвилин швидше, ніж проти течії.

Розв'язування. Нехай х км/год – власна швидкість човна, а у км/год – швидкість течії. Тоді (х+у) км/год – швидкість човна за течією, (х–у) км/год – швидкість проти течії.

$\frac{1}{x+y}$ год і $\frac{1}{x-y}$ год – час, затрачений на 1 км за течією і проти течії відповідно.

Складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{18}{x+y} + \frac{18}{x-y} = 1\frac{3}{4} \\ \frac{6}{x-y} - \frac{6}{x+y} = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}, \end{cases}$$

Нехай $\frac{1}{x+y} = a, \ \frac{1}{x+y} = b,$ тоді $\begin{cases} 18a + 18b = \frac{7}{4} \\ 6b - 6a = \frac{1}{12} \end{cases}$

$$\begin{cases} 18(a+b) = \frac{7}{4} \\ 6(b-a) = \frac{1}{12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b=\dfrac{7}{72} \\ b-a=\dfrac{1}{72} \end{cases}$$

Додаємо рівняння системи.

$$2b=\frac{8}{72}=\frac{1}{9};$$

$$b=\frac{1}{18};$$

Тоді $a=\frac{1}{24}$.

Повертаємось до заміни:

$$\begin{cases} x+y=24 \\ x-y=18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=21 \\ y=3 \end{cases}$$

Відповідь. 21 км/год; 3 км/год.

19. Швидкий потяг за розкладом повинен був пройти залізничний перегін АВ без зупинки за 4 год. Але на відстані 150 км від А його затримали на 20 хв. Щоб прибути на станцію В за розкладом, потяг пройшов решту шляху з швидкістю на 15 км/год. більшою, ніж початкова. Знайти довжину перегону АВ.

Розв'язання. Нехай x км – довжина перегону. Тоді швидкість потяга за розкладом $\frac{x}{4}$ км/год, а після зупинки він рухався із швидкістю ($\frac{x}{4}$ + 15) км/год.

Отже, до зупинки він рухався 150 : $\frac{x}{4}$ = $\frac{600}{x}$ (год.), а після зупинки –

$(x-150):\left(\frac{x}{4}+15\right)=\frac{4(x-150)}{x+60}$ $(год)$

З урахуванням часу, затраченого на зупинку, потяг пройшов залізничний перегін за ($\frac{600}{x}$ + $\frac{4(x\quad 150)}{x+60}$ + $\frac{1}{3}$) (год.), що за умовою дорівнює 4. Складемо рівняння:

$$\frac{600}{x}+\frac{4(x\quad 150)}{x+60}+\frac{1}{3}=4,$$

Розв'яжемо його:

$$\frac{600}{x} + \frac{4(x \quad 150)}{x+60} - \frac{11}{3} = 0,$$

$$3(600x + 36000 + 4x^2 - 600x) - 11x^2 - 660x = 0,$$

$$x^2 - 660x + 108000 = 0,$$

$$x_1 = 300,\ x_2 = 360.$$

Перевірка показує, що обидва корені рівняння задовольняють умову задачі.

Відповідь. 300 км або 360 км.

20. По колу радіусом 2 м рівномірно в одному напрямку рухаються дві точки. Одна з них робить повний оберт на 3,14с швидше ніж друга. Час між двома послідовними зустрічами точок дорівнює 6,28с. Знайти швидкості руху точок.

Розв'язання. Точки рухаються по колу довжина якого дорівнює $2\pi r$, де r – радіус кола. За умовою $r = 2$, тому довжина кола дорівнює 4π.

Нехай *x м/с* – швидкість першої точки, тоді час, за який точка пройде один оберт дорівнює $\frac{4\pi}{x}$с. Аналогічно, *y м/с* – швидкість другої точки (причому $x > y$), за $\frac{4\pi}{y}$с вона робить один оберт. За першою умовою задачі маємо рівняння: $\frac{4\pi}{y} - \frac{4\pi}{x} = 3{,}14$.

Друга умова означає, що за $6{,}28c$ перша точка пройде по колу шлях на 4π більший, ніж друга точка. Це дає друге рівняння

$6{,}28x - 6{,}28y = 4\pi$.

Приймаємо $\pi = 3{,}14$ і одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{4}{y} - \frac{4}{x} = 1, \\ x - y = 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{4(x-y)}{xy} = 1, \\ x - y = 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \cdot y = 8, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

Враховуючи, що $x > y$, знаходимо $x = 4$, $y = 2$.

Відовідь. швидкість руху першої точки *4 м/с*, другої – *2 м/с.*

Задачі для самостійного розв'язування

1. Поїзд був у дорозі 4 години і пройшов 240 км. Щогодини він проходив однакову відстань. Скільки кілометрів проходив поїзд щогодини?

2. Автомобіль за 3 години проїхав 240 км. З якою швидкістю він рухався?

3. За день туристи йшли пішки 2 години зі швидкістю 4 км/год, потім їхали автобусом 3 години зі швидкістю 45 км/год. Яку відстань подолали туристи за день?

4. Протягом двох днів велосипедист був у дорозі 12 годин і за цей час проїхав 180 км. Скільки кілометрів проіде мотоцикліст за 20 годин, якщо його швидкість на 36 км/год більша від швидкості велосипедиста?

5. Автомобіль їхав 2 години зі швидкістю 66 км/год. Після цього йому залишилося проїхати відстань у 3 рази більшу, ніж та, що він уже проїхав. Яку відстань мав проїхати автомобіль?

6. Асфальтною дорогою автомобіль проїхав відстань 210 км зі швидкістю 70 км/год, а грунтовою – 90 км зі швидкістю 45 км/год. За який час автомобіль проїхав усю відстань?

7. З двох міст одночасно назустріч один одному рушили вантажний та легковий автомобілі. Легковий автомобіль проїжджав 55 кілометрів за годину, а вантажний – 38 кілометрів за годину. Через 7 годин автомобілі зустрілися. Визначте відстань між містами.

8. З двох міст одночасно виїхали назустріч один одному два мотоцикліста і через 5 годин вони зустрілись. Один рухався зі швидкістю 46 км/год, а інший – 52 км/год. Яка відстань між цими містами. Розв'яжіть задачу двома способами.

9. Велосипедист їде зі швидкістю 10 км/год. Вслід за ним на відстані 45 км їде автомобіль зі швидкістю 55 км/год. Через який час автомобіль наздожене велосипедиста?

10. Від двох причалів одночасно назустріч один одному вийшли два катера, які зустрілися через 3 години. Швидкість першого катера 15,4 км/год, а другого – 18,25 км/год. Чому дорівнює відстань між причалами?

11. Від селища до міста 21,4 км. Із селища та з міста виїхали одночасно два велосипедиста, які зустрілись через годину швидкість одного велосипедиста 10,6 км/год. Яка швидкість другого велосипедиста?

12. З міста А до міста В, відстань між якими 690 км, виїхав легковий автомобіль зі швидкістю 64,2 км/год. Одночасно назустріч йому з міста В виїхав мотоцикліст. Через 6 годин вони зустрілись. З якою швидкістю рухався мотоцикліст?

13. Відстань між містами 485 км. З цих міст назустріч один одному одночасно вийшли два автобуси з екскурсантами. Один автобус їхав зі швидкістю 46,2 км/год, а інший – 50,8 км/год. Через який час автобуси зустрінуться?

14. Два пароплави одночасно відійшли від причалу в протилежних напрямках. Швидкість одного пароплава 21 км/год,а іншого – на 3 км/год менша. На якій відстані один від одного вони будуть через 6 годин?

15. Відстань між турбазами 90 км. З однієї турбази вийшла група лижників і пройшла до привалу 30% шляху. В цей час з іншої турбази їм назустріч вийшла група лижників. Який шлях до привалу пройде друга група лижників?

16. Пліт і човен одночасно рушили на зустріч один одному по річці. Вони знаходяться на відстані 24 км один від одного. Через який час вони зустрінуться, якщо власна швидкість човна 8 км/год, а швидкість течії річки 2км/год?

17. Моторний човен, що має швидкість руху 20 км/год, проходить відстань між двома пунктами по річці туди і назад без зупинки за 6 год. 15 хв. Відстань між пунктами 60 км. Знайти швидкість течії річки.

18. Моторний човен та яхта, знаходячись на озері на відстані 30 км один від одного, рухаються назустріч один одному і зустрічаються через одну годину. Якби моторний човен знаходився на відстані 20 км яхти і доганяв її, то на це знадобилось би 3 год. 20 хв. Знайти швидкості моторного човна та яхти.

19. Відстань між станціями А та В 160 км. Потяг вийшов із станції А з запізненням на 20 хв. і проїхав відстань до станції В із швидкістю, що перевищує швидкість за розкладом на 16 км/год. Яка швидкість потяга за розкладом якщо відомо, що на станцію В він прибув вчасно?

20. Катер пройшов 18 км за течією річки, а потім 20 км проти течії. На весь шлях він витратив 2 год. Знайти швидкість течії річки, якщо власна швидкість катера 20 км/год.

21. Моторний човен пройшов 60 км проти течії річки і 60 км за течією, витративши на шлях проти течії на 50хв. більше, ніж на шлях за течією. Знайти швидкість течії річки, якщо швидкість човна у стоячій воді дорівнює 21 км/год.

22. Катер пройшов 48 км по озеру, а потім 22 км по річці, що впадає в це озеро, за 3 год. Знайдіть власну швидкість катера, якщо швидкість течії річки 2 км/ год.

23. Поїзд, затриманий на 12 хвилин , на перегоні завдовжки 60 км ліквідував запізнення, збільшивши швидкість на 15 км/год. Знайдіть початкову швидкість поїзда.

24. З одного міста в інше, відстань між якими 180 км, виїхали одночасно легковий і вантажний автомобілі. Швидкість легкового автомобіля на 30 км/год більша, ніж вантажного, тому він прибув до пункту призначення на 1 год раніше за вантажний. Знайти швидкість кожного автомобіля.

25. Пасажир проїхав потягом 120км і, пробувши на станції 40 хв., повернувся назад другим поїздом, який проїжджає за годину на 6 км більше, ніж перший. Скільки кілометрів за хвилину проїжджає кожен потяг, якщо поїздка триває 8 год?

26. Від вершини прямого кута по його сторонах починають одночасно рухатись два тіла. Через 15с відстань між ними дорівнює 3м. З якою швидкістю рухалось кожне тіло, якщо відомо, що перше пройшло за 6с таку саму відстань, яку друге пройшло за 8с.

27. Із населених пунктів М і С, віддалених один від одного на 50 км, виїхали одночасно два мотоциклісти і зустрілися через 30 хв. Знайти швидкість кожного мотоцикліста, якщо відомо, що перший із них приїхав у М на 25 хв. раніше, ніж другий у С. Допускаючи, що стрілки годинника рухаються рівномірно, визначте, через який час після того, як годинник показував 4 години, хвилинна стрілка дожене годинну.

28. Два тіла рухаються по колу зі сталими швидкостями в один бік. Перше тіло проходить коло на 3с швидше другого і доганяє друге тіло кожні півтори хвилини. За який час кожне тіло проходить коло?

29. Два тіла рухаються по колу, довжина якого 1,2 м, зі сталими швидкостями. Якщо вони рухатимуться у різних напрямках, то зустрінуться через 15с. при русі в одному напрямку одна точка наздоганятиме іншу через кожні 60с. знайти швидкості руху точок.

Контрольна робота

1. Оберіть праильний варіант для одиниці вимірювання часу.

А	Б	В	Г	Д
км	Км/год	год	м	год/км

2. Сергій та Антон побачили один одного на відстані 60 м. Сергій бігає з постійною швидкістю 6 м/с, а Антон — з постійною швидкістю 4 м/с. Через скільки секунд Сергій прибіжить до Антона, якщо Антон стоятиме на місці?

А	Б	В	Г	Д
12	10	5	8	7

3. Два поїзди вийшли одночасно з двох міст назустріч один одному і зустрілися через 2 год. Швидкість першого поїзда 80 км/год, другого – 70км/год. Яка відстань між містами?

А	Б	В	Г	Д
200 км	400 км	300 км	20 км	7 км

4. Два човни рухалися в протилежних напрямках. Швидкість першого 30 км/год, а другого 40 км/год.Через який час відстань між ними буде 140 км?

А	Б	В	Г	Д
1 год	2 год	3 год	4 год	5 год

5. З двох сіл назустріч один одному вийшли два пішохода. Швидкість одного 5 км/год, а другого –7 км/год. Через 3 години вони зустрілися. Яку відстань вони подолали?

А	Б	В	Г	Д
15 км	36 км	21 км	105 км	150 км

6. Встановіть відповідність між задачею та її розв'язком:

1. Назустріч один одному рухаються 2 автомобілі, перший зі швидкістю 70 км/год, другий – 85 км/год. Якою буде швидкість зближення?

2. Два мотоциклісти рухаються а протилежному напрямку. Швидкістю одного дорівнює 36 км/год, іншого – 40 км/год. Яка швидкість віддалення цих мотоциклістів?

3. В одному напрямку рухаються два пішоходи: перший зі швидкістю 5 км/год, другий 2 км/год.Перший пішоход наздоганяє другого. Якою буде швидкість зближення?

А) 76 км/год Б) 3 км/год В) 15 км/год Г) 76 км/год

7. Встановити відповідність між задачею та її розв'язком:

1. Два автомобілі одночасно виїхали в одному напрямку. Швидкість першого автомобіля 55 км/год, швидкість другого 60 км/год. Якою буде відстань між ними через 3 години?

2. Два велосипедисти одночасно виїхали в протилежних напрямках. Швидкість першого велосипедиста 15 км/год, швидкість другого 14 км/год. Якою буде відстань між ними через 2 години?

3. Два автомобілі одночасно виїхали з двох міст і зустрілися через 4 години. Швидкість першого автомобіля 55 км/год, швидкість другого 60 км/год. Яка відстань між містами?

4. Два велосипедисти одночасно виїхали назустріч один одному з двох міст. Швидкість першого велосипедиста 15 км/год, швидкість другого 14 км/год. Через скільки годин вони зустрінуться, якщо відстань між містами 87 км?

А) 15 год. Б) 15 км В) 3 год. Г) 58 км Д) 460 км

8. З пунктів A і B одночасно по шосе назустріч один одному виїхали два велосипедисти. Вони їхали без зупинок зі сталими швидкостями: перший – зі швидкістю x *км/год,* другий – зі швидкістю y *км/год* $(x > y)$. Через t годин ($t > 1$) вони зустрілися в точці C і, не зупиняючись, продовжили рух без зміни напрямків. До кожного запитання (1–4) доберіть правильну відповідь.

1. На скільки кілометрів зменшилася відстань по шосе між велосипедистами через 1 годину після початку руху?

2. Чому дорівнює відстань по шосе між пунктами A і B ($км/год$)?

3. На скільки кілометрів більше проїхав перший велосипедист, ніж другий, за час від початку руху до моменту зустрічі?

4. За скільки годин перший велосипедист подолає відстань по шосе від точки C до пункту $B?$

А) $(x + y)t$ Б) $(x - y)t$ В) $yt\ x$ Г) $(x{-}y)t\ y$ Д) $x + y$

9. Моторний човен проплив за течією річки 18 км і повернувся назад, затративши на весь шлях 1 годину 45 хвилин. Знайти власну швидкість човна і швидкість течії, якщо відомо, що 6 км за течією човен пропливає на 5 хвилин швидше, ніж проти течії.

10. Два пішоходи вийшли одночасно назустріч один одному і зустрілися через 3 год 20 хв. Скільки часу потрібно кожному, щоб пройти весь шлях, якщо перший прийшов в той пункт, з якого вийшов другий на 5 год пізніше, ніж другий в той пункт, звідки вийшов перший?

Список літератури

1. Головань М.С. Компетенція і компетентність: досвід теорії, теорія досвіду // Вища освіта України. – 2008. – №3. – С.23-30.
2. Головань М.С. Компетенція та компетентність: порівняльний аналіз понять / М.С.Головань // Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології. Науковий журнал. – Суми: СумДПУ ім.. А.С. Макаренка, 2011. – №8(18). – С.224-234.
3. Головань М.С. Математичні компетентності чи математична компетентність? // Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс-2012»: матеріали міжнародної науково-практичної конференції (6-7 грудня 2012 р., м. Суми). Частина І / Упорядник Чашечникова О.С.: Виробничо-видавниче підприємство «Мрія», 2012. –С. 36-38.
4. Зіненко І.М. Визначення структури математичної компетентності учнів старшого шкільного віку // Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології. Науковий журнал. – Суми: СумДПУ ім.. А.С. Макаренка, 2009. – №2. – С. 165-174.
5. Компетентнісний підхід у сучасній освіті: світовий досвід та українські перспективи: Колективна монографія. – К: «К.І.С.», 2004. – 111 с.
6. Овчарук О.В. Компетентності як ключ до формування змісту освіти // Стратегія реформування освіти України. – К: «К.І.С.», 2003. – 295 с.
7. Прус А.В., Швець В.О. Збірник задач з методики навчання математики. – Житомир: «Рута», 2011. – 388 с.
8. Раков С.А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ: Монографія. – Х.: Факт, 2005. – 360 с.
9. Родигіна І.В. Компетентнісно орієнтований підхід до навчання. – Х.: Вид. група «Основа», 2005. – 96с.
10. Швець В.О., Прус А.В. Теорія та практика прикладної спрямованості шкільного кусу стереометрії: навчальний посібник. – Житомир: Вид-во ЖДУ ім.І.Франка, 2007. – 156с.

Навчально-методичне видання

ПРУС АЛЛА ВОЛОДИМИРІВНА

ФОНАРЮК ОЛЕНА ВАСИЛІВНА

ОКРЕМІ ПИТАННЯ МЕТОДИКИ РЕАЛІЗАЦІЇ КОМПЕТЕНТНІСНОГО ПІДХОДУ ДО НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ В ОСНОВНІЙ ШКОЛІ

Частина 1

Навчально-методичний посібник