Міністерство освіти і науки України
Житомирський державний університет імені Івана Франка

**О.П. Довгопятий, Є.О. Севостьянов,
А.Л. Таргонський**

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ.
ЧАСТИНА I

Навчально-методичний посібник

Житомир
Вид-во ЖДУ імені Івана Франка
2022

УДК 517.95
ББК 22.161.6
В22

Рекомендовано до друку вченою радою Житомирського державного університету імені Івана Франка (протокол № 18 від 30 вересня 2022 р.)

Рецензенти:

В.П. Журавльов – доктор фіз.-мат. наук, доцент, завідувач кафедри вищої та прикладної математики Поліського національного університету, м. Житомир

П.П. Москвін – доктор фіз.-мат. наук, професор, завідувач кафедри фізики та вищої математики державного університету «Житомирська політехніка», м. Житомир

А.О. Погоруй – доктор фіз.-мат. наук, професор, завідувач кафедри алгебри та геометрії Житомирського державного університету імені Івана Франка

В22 Математичний аналіз. Частина I / Довгопятий О.П., Севостьянов Є.О., Таргонський А.Л. – Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2022. - 66 с.

Навчально-методичний посібник стосується двох початкових розділів математичного аналізу: границя послідовності та границя функцій. Розглянуті питання про границі послідовності і границі функцій, класифікацію їх точок розриву. Кожен розділ містить в собі мінімальні теоретичні відомості, необхідні для розв'язання задач, та приклади їх розв'язання. Окремо наведені текстові питання, що мають рівень складності вище середнього, та типові задачі для самостійного розв'язання по 30 варіантів кожна.

УДК 517.95
ББК 22.161.6
В22

2022

ЗМІСТ

Перелік умовних позначень **5**

1 Границя послідовності **6**

1.1 Означення границі послідовності 6
1.2 Завдання для самостійної роботи № 1 10
1.3 Дії над границями. Обчислення границь 11
1.4 Завдання для самоконтролю 16
1.5 Завдання для самостійної роботи № 2 18
1.6 Монотонні послідовності 18
1.7 Завдання для самоконтролю 20
1.8 Завдання для самостійної роботи № 3 21
1.9 Критерій Коші 21
1.10 Завдання для самоконтролю 25
1.11 Завдання для самостійної роботи № 4 26
1.12 Верхня та нижня границя послідовності 26
1.13 Завдання для самоконтролю 31
1.14 Завдання для самостійної роботи № 5 33
1.15 Число e 34
1.16 Завдання для самостійної роботи № 6 35

2 Границя функції **36**

2.1 Означення і властивості границі функції 36
2.2 Завдання для самоконтролю 43
2.3 Завдання для самостійної роботи № 7 46
2.4 Чудові границі 47
2.5 Завдання для самоконтролю 51
2.6 Завдання для самостійної роботи № 8 52
2.7 Нескінченні границі та границі на нескінченності 53
2.8 Завдання для самоконтролю 56
2.9 Завдання для самостійної роботи № 9 58

2.10 Точки розриву та їх класифікація 59
2.11 Завдання для самоконтролю 63
2.12 Завдання для самостійної роботи № 10 65

Рекомендована література **66**

Перелік умовних позначень

$\mathbb{N}$	множина натуральних чисел, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{Z}$	множина цілих чисел, $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$
$\mathbb{R}$	множина дійсних чисел
$\mathbb{Q}$	множина раціональних чисел, $\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$
$[x]$	ціла частина числа x : найбільше ціле число, що не перевищує x
$A \Rightarrow B$	з умови A випливає умова B
$A \Leftrightarrow B$	умови A і B рівносильні
$\forall$	«для будь якого, для кожного, для всіх»
$\exists$	«існує, знайдеться»
!	«єдиний»
$x \in A$	«елемент x належить множині A»
$A \subset B$	«множина A включається у множину B», тобто, кожен елемент $x \in A$ також задовольняє умову $x \in B$
$f : D \to \mathbb{R}$	функція, область визначення якої є множина D, зі значеннями в $\mathbb{R}$
$f(A)$	$f(A) = \{y \in \mathbb{R}^n : \exists\, x \in D : f(x) = y\}$ – образ множини $A \subset D$ при відображенні f
$f^{-1}(B)$	$f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists\, y \in B : f(x) = y\}$ – (повний) прообраз множини B при відображенні f
$f^{-1} : f(D) \to D$	обернене відображення до відображення f, $f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall\, x \in D$, $f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall\, y \in f(D)$
$\lvert x\rvert$	Покладемо $\lvert x\rvert = \begin{cases} x\,, & x \geqslant 0 \\ -x\,, & x < 0 \end{cases}$
$C(D)$	клас неперервних функцій $f : D \to \mathbb{R}$

1 Границя послідовності

1.1 Означення границі послідовності

Найважливішим для розуміння поняття послідовності є розуміння поняття функції, добре відоме зі шкільного курсу. Нагадаємо, що *функцією*, або *відображенням* називається перетворення $y = f(x)$, визначене на деякій множині A, таке що кожному елементу $x \in A$ ставиться у відповідність деякий єдиний елемент $y \in \mathbb{R}$, що записується у вигляді $y = f(x)$. Загальноприйняте позначення функції таке: $f : A \to \mathbb{R}$. Зверніть увагу, що відповідність $y = \pm\sqrt{x}$ функцією не є (чому?).

Означення 1.1. *Послідовність* – це функція, яка визначена на множині $\mathbb{N}$ натуральних чисел, тобто, кожному елементу ряду $1, 2, 3, \ldots$ ставиться у відповідність елемент ряду $f(1), f(2), f(3) \ldots$. Скорочено: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Іншими словами, кожному натуральному числу $n \in \mathbb{N}$ ставиться у відповідність число $y = f(n)$.

Зауважимо, що для нашого подальшого дослідження позначення $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ незручне. Використовують інше позначення: замість $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ пишуть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, маючи на увазі, що x_n позначає $y = f(n)$. Іноді тут пишуть x_n, $n = 1, 2, \ldots$, або просто коротко x_n. Можуть використовуватися інші літери латинського алфавіту, наприклад, y_n, z_n і т.ін., так само, як можуть писати замість x_n також $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$, $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ і т.п. Вибір «літер» для позначення послідовності може залежати від бажання викладача або студента, так само як і вибір позначення будь-яких інших математичних об'єктів.

Приклад 1. *Вираз* $x_k = \frac{k+1}{k+2}$, $k = 1, 2, \ldots$, *є послідовністю, бо кожному натуральному числу* k *ставиться у відповідність число* $x_k = \frac{k+1}{k+2}$. *Наприклад, числу* 10 *відповідає число* $x_{10} = \frac{10+1}{10+2} = \frac{11}{12}$.

Означення 1.2. Число $A \in \mathbb{R}$ називається *границею послідовності* x_n, $n = 1, 2, \ldots$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться натуральне число $N = N(\varepsilon) \geqslant 1$ таке, що $|x_n - A| < \varepsilon$ при всіх $n \geqslant N$. Послідовність x_n називається *збіжною,* якщо в неї існує границя A. В протилежному випадку послідовність називається *розбіжною.*

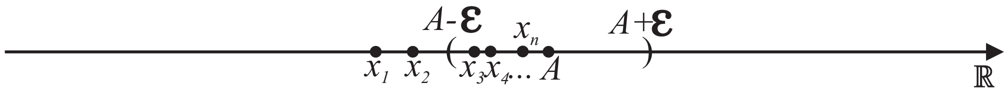
Позначення:

$$A = \lim_{n\to\infty} x_n \,.$$

Також використовують позначення $x_n \to A$ при $n \to \infty$ та говорять, що *послідовність* x_n *прямує до числа* A *при* $n \to \infty$. Вживають як запис $A = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, так і запис $x_n \to A$ – залежить від зручності викладення та бажання людини, що проводить міркування.

Означення границі послідовності на мові околів

Околом точки A радіусу $\varepsilon > 0$ будемо називати інтервал $(A-\varepsilon, A+\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x-A| < \varepsilon\}$. Число A будемо називати границею послідовності x_n, $n = 1, 2, \ldots$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ зовні околу $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ міститься не більше, як скінченна кількість елементів послідовності x_n (див. малюнок 1).



Малюнок 1: Означення границі послідовності на мові околів

Зауваження 1.1. Дуже грубо кажучи, границя послідовності x_n – це деяке число A, якому «приблизно дорівнює значення цієї послідовності при достатньо великих n». Таке формулювання передбачає лише інтуїтивне розуміння границі і не претендує на більше; слід розуміти, що ніяких «приблизних значень» і «округлень» в математиці нема, натомість є коректними висловлювання про «приблизне значення з точністю до», наприклад, «округлення числа $1,2344$ з точністю до одної тисячної». Запам'ятайте це! Для сприйняття об'єкту використовуємо інтуїтивне означення, для коректного формулювання – тільки формальне Означення 1.2.

Приклад 2. *Покажемо, границею послідовності*

$$x_n = \frac{1}{n}, n = 1, 2, \ldots ,$$

є число $a = 0$.

Для розв'язання цієї задачі зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і розв'яжемо нерівність $|x_n - a| = \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$. Будемо мати:

$$\left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon ,$$

звідки $1 < n\varepsilon$ і $n > \frac{1}{\varepsilon}$. В таком випадку, в якості $N(\varepsilon)$ можна взяти $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, де $[x]$ позначає цілу частину числа x. $\square$

Чому не можна взяти в якості N число $\frac{1}{\varepsilon}$? Тому що, взагалі кажучи, $\frac{1}{\varepsilon}$ не є натуральним числом. А номер $N(\varepsilon)$ має бути натуральним.

Також може виникнути питання, чому не можна так само розв'язати нерівність $\left|\frac{1}{n} - a\right| < \varepsilon$ відносно n для якого-небудь іншого a, скажімо, для $a = 1$, і не показати, що число 1 також є границею даної послідовності?

Відповідь на це питання випливає з огляду на наступне твердження.

Твердження 1.1. *Якщо послідовність x_n, $n = 1, 2, \ldots$, має границю $a \in \mathbb{R}$, то вона єдина.*

Твердження 1.1, зокрема, означає, що нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$ лише для одного $a \in \mathbb{R}$ може розв'язатися так, щоб n належало деякому півінтервалу $[N(\varepsilon), \infty)$. Якщо ми будемо розв'язувати нерівність $\left|\frac{1}{n} - 1\right| < \varepsilon$, то такого півінтервалу для n не вийде (перевірте!).

Приклад 3. *Знайти $N \in \mathbb{N}$, таке, що при всіх $n \geqslant N$ виконана умова $\frac{1}{n} < 0,001$.*

Розв'язання. Користуючись результатом прикладу 2, ми маємо: $N \geqslant \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Підставляючи сюди $\varepsilon := 0,001$, маємо, що $N \geqslant \left[\frac{1}{0,001}\right] + 1 = 1000 + 1 = 1001$. В якості N можна взяти $N := 1001$. $\square$

Приклад 4. *Довести, що послідовність*

$$x_n = \frac{5n+6}{5n+1}$$

збігається до числа $a = 1$ при $n \to \infty$. Знайти номер N цієї послідовності, такий що $|x_n - 1| < \frac{1}{20}$ при $n \geqslant N$.

Розв'язок. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Будемо мати:

$$|x_n - a| = \left|\frac{5n+6}{5n+1} - 1\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|\frac{5n+6-5n-1}{5n+1}\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{5}{5n+1} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow 5 < (5n+1)\varepsilon\,,$$

$$\Rightarrow \frac{5}{\varepsilon} < 5n+1, \quad n > \frac{1}{5}\left(\frac{5}{\varepsilon} - 1\right)\,,$$

$$N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{5}\left(\frac{5}{\varepsilon} - 1\right)\right] + 1\,.$$

Якщо в останньому співвідношенні обрати $\varepsilon = \frac{1}{20}$, будемо мати: $N\left(\frac{1}{20}\right) = \left[\frac{1}{5}(100 - 1)\right] + 1 = 20$. $\square$

Існує чималo розбіжних послідовностей, стосовно чого розглянемо наступний приклад.

Приклад 5. *Довести, що послідовність* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ *розбіжна.*

Розв'язання. Доведемо розбіжність у відповідності до Означення 1.2, а саме, доведемо, що жодне число $A \in \mathbb{R}$ не є границею послідовності x_n. Це означатиме, що знайдеться принаймні одне $\varepsilon > 0$ таке, що для будь-яких $N \in \mathbb{N}$ знайдуться $n > N$ такі, що $|x_n - A| \geqslant \varepsilon$.

Зауважимо, що $x_{2n} = (-1)^{2n} = 1$, а $x_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1$ при всякому $n \in \mathbb{N}$. Отже, доцільно розглянути наступні три випадки.

1) $A = 1$. Тоді маємо нерівність $|x_n - 1| > \varepsilon$. Якщо покласти $n = 2m+1$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, то $x_{2m+1} = -1$, отже, $|x_n - 1| = |-1-1| = 2 > \varepsilon$. Зафіксуємо, наприклад, $\varepsilon = 1$, і зафіксуємо довільне $N \in \mathbb{N}$. Тоді з огляду на написане вище, нерівність $|x_n - 1| > \varepsilon$ виконується для будь-яких $n > N$, що мають вигляд $n = 2m + 1$ (тобто, усіх непарних n, більших N). Отже, число $A = 1$ не є границею послідовності x_n.

2) $A = -1$. Тоді маємо нерівність $|x_n+1| > \varepsilon$. Якщо покласти $n = 2m$, то $x_{2m} = 1$, отже, $|x_n+1| = |1+1| = 2 > \varepsilon$. Зафіксуємо, наприклад, $\varepsilon = 1$, і зафіксуємо довільне $N \in \mathbb{N}$. Тоді з огляду на написане вище, нерівність $|x_n + 1| > \varepsilon$ виконується для будь-яких $n > N$, що мають вигляд $n = 2m$ (тобто, усіх парних n, більших N). Отже, число $A = -1$ не є границею послідовності x_n.

3) $-1 \neq A \neq 1$. Покладемо $\varepsilon := \min\{|A-1|, |A+1|\}$. Тоді $|x_n - A| \geqslant \varepsilon$ при всіх $n \in \mathbb{N}$ (чому?). При обраному $N \in \mathbb{N}$ для виконання нерівності $|x_n - A| > \varepsilon$ маємо право розглянути довільне $n > N$.

Висновок: послідовність $x_n = (-1)^n$ розбігається, бо немає такого числа $A \in \mathbb{R}$, що було б її границею. $\square$

1.2 Завдання для самостійної роботи № 1

Задача 1. *Довести, що число* $a \in \mathbb{R}$ *є границею послідовності* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *для кожного з варіантів. Знайти номер* $N \in \mathbb{N}$ *такий, що* $|x_n - a| < 0,001$ *при всіх* $n \geqslant N$.

Варіант	**Число** a**, послідовність** x_n**,** $n = 1, 2, \ldots$
1	$a = 1, \qquad x_n = \frac{n^2+5}{n^2-6}$
2	$a = 1, \qquad x_n = \frac{3n^2+6}{3n^2-7}$
3	$a = 1, \qquad x_n = \frac{5n^2+5}{5n^2-6}$
4	$a = 1, \qquad x_n = \frac{n^3+5}{n^3-6}$
5	$a = 1, \qquad x_n = \frac{n^4+5}{n^4-6}$
6	$a = 2, \qquad x_n = \frac{2n^2+5}{n^2-6}$
7	$a = 2, \qquad x_n = \frac{2n^3+5}{n^3-6}$
8	$a = 2, \qquad x_n = \frac{2n^4+5}{n^4-6}$
9	$a = 0, \qquad x_n = \frac{1}{n^4-6}$
10	$a = 0, \qquad x_n = \frac{1}{n^3-6}$
11	$a = 0, \qquad x_n = \frac{1}{n^2-6}$
12	$a = 0, \qquad x_n = \frac{1}{n-6}$
13	$a = 3, \qquad x_n = 3 + \frac{1}{n}$
14	$a = 3, \qquad x_n = 3 - \frac{1}{n}$
15	$a = 3, \qquad x_n = 3 - \frac{1}{n^4-6}$
16	$a = 0, \qquad x_n = \frac{1}{\ln n}$
17	$a = 0, \qquad x_n = \frac{2n+1}{2n^2+1}$
18	$a = 0, \qquad x_n = \frac{2n^2+1}{2n^3+1}$
19	$a = 0, \qquad x_n = \frac{2n^3+1}{2n^4+1}$
20	$a = 1, \qquad x_n = \frac{n+10}{n+11}$
21	$a = 1, \qquad x_n = \frac{2n+1}{2n+4}$
22	$a = 5/2, \qquad x_n = \frac{5n^2+1}{2n^2+1}$
23	$a = 5/3, \qquad x_n = \frac{5n^2+1}{3n^2+1}$
24	$a = 5/4, \qquad x_n = \frac{5n^2+1}{4n^2+1}$
25	$a = 6, \qquad x_n = \frac{6n^2+1}{n^2+1}$
26	$a = 6, \qquad x_n = \frac{6n^2-1}{n^2-1}$
27	$a = 5, \qquad x_n = \frac{5n^2+10}{n^2+1}$
28	$a = 5, \qquad x_n = \frac{1}{n^2} + \frac{5n^2+1}{n^2+1}$

Варіант	Число a, послідовність x_n, $n = 1, 2, \dots$
29	$a = 10, \qquad x_n = \frac{10n^2+1}{n^2-1}$
30	$a = 9, \qquad x_n = \frac{9n^2+1}{n^2+4}$

1.3 Дії над границями. Обчислення границь

Основні властивості границь

1. Якщо границя послідовності існує, то вона єдина.

2. Якщо послідовність збігається, то вона *обмежена,* іншими словами, існує стала $C > 0$ така, що $|x_n| \leqslant C$ при всіх $n \in \mathbb{N}$. Обернене твердження невірне, як показує приклад 5.

3. Якщо збігаються послідовності x_n і y_n, то збігаються їх сума, різниця і добуток також збігаються, причому $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ і $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Також, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$.

4. Послідовність x_n, $n = 1, 2, \dots$ збігається тоді і тільки тоді, коли вона є *фундаментальною* (задовольняє *умову Коші*), тобто, для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться натуральне число $N = N(\varepsilon) \geqslant 1$ таке, що $|x_n - x_m| < \varepsilon$ при всіх $m, n \geqslant N$.

5. Якщо послідовність x_n, $n = 1, 2, \dots$, зображується у вигляді $x_n = z_n \cdot y_n$, причому z_n – обмежена послідовність, а y_n – нескінченно мала, то також послідовність x_n нескінченно мала.

6. (*Збіжність сталої послідовності*). Якщо починаючи з деякого номера $N \in \mathbb{N}$ послідовність x_n задовольняє умову $x_n = C = const$, $n = N, N+1, N+2, \dots$, то вона збігається до числа C.

7. (*Граничний перехід у нерівностях*). Якщо $x_n \geqslant 0$ при всіх $n \geqslant 1$, і послідовність x_n збігається при $n \to \infty$ до числа $a \in \mathbb{R}$, то $a \geqslant 0$. Аналогічно, якщо $x_n \leqslant 0$ при всіх $n \geqslant 1$, і послідовність x_n збігається при $n \to \infty$ до числа $a \in \mathbb{R}$, то $a \leqslant 0$.

Означення 1.3. Послідовність x_n називається *нескінченно великою додатною*, якщо для будь-якого $M > 0$ знайдеться номер $N = N(M) \in \mathbb{N}$ такий, що $x_n > M$ при всіх $n > M$. Послідовність x_n називається *нескінченно великою від'ємною*, якщо для будь-якого $M < 0$ знайдеться номер

$N = N(M) \in \mathbb{N}$ такий, що $x_n < M$ при всіх $n > M$. Послідовність x_n називається *нескінченно великою*, якщо для будь-якого $M > 0$ знайдеться номер $N = N(M) \in \mathbb{N}$ такий, що $|x_n| > M$ при всіх $n > M$.

8. (*Зв'язок між нескінченно великою і нескінченно малою послідовністю*). Якщо послідовність x_n, $x_n \neq 0$ при $n = 1, 2, \dots$, є нескінченно малою, то обернена послідовність $z_n := \frac{1}{x_n}$ є нескінченно великою, і навпаки.

9. Якщо послідовність x_n обмежена знизу числом $m > 0$, а послідовність y_n є нескінченно великою, то послідовність $z_n := x_n \cdot y_n$ – нескінченно велика.

Приклади нескінченно великих послідовностей: $x_n = n$, $x_n = n^2$, $x_n = n^n$, $x_n = \ln n$ і т.п. (Обґрунтуйте, що ці послідовності справді є такими!).

Звертаємо Вашу увагу, що розв'язання задач, пов'язаних з границями послідовностей, переважно спирається на правила 1–7, перелічені вище. Не можна користуватися так званими «інтуїтивними», або «очевидними» міркуваннями. Розв'язки завжди мають ґрунтуватися на добре відомих фактах, теоремах, твердженнях, правилах. Як виключення можна також користуватися результатами розв'язаних раніше задач. Застерігаємо Вас від неправильно розв'язаних задач з цілком правильною відповіддю – викладач має повне право ігнорувати такі розв'язки! В математичному аналізі по замовчуванню діє правило: краще правильний розв'язок з технічною помилкою у відповіді, ніж правильна відповідь, що ґрунтується на логічно помилкових міркуваннях.

Приклад 6. *Знайти границю послідовності*

$$x_n = \frac{5n^2 + 6n^3}{14n^2 - 2n^4}.$$

Розв'язання. Розділимо почленно чисельник і знаменник даного дробу на старшу степінь при n, тобто, на n^4. Будемо мати:

$$\frac{5n^2 + 6n^3}{14n^2 - 2n^4} = \frac{\frac{5}{n^2} + \frac{6}{n}}{\frac{14}{n^2} - 2}. \tag{1.3.1}$$

В чисельнику дробу в правій частині (1.3.1) обидва члени прямують до нуля. Дійсно, за теоремою про границю добутку послідовностей (властивість 3 на стор. 11) будемо мати, що $\frac{5}{n^2} = 5 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \to 5 \cdot 0 \cdot 0 = 0$ при $n \to \infty$.

(Тут ми скористалися результатом прикладу 2: $\frac{1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$). Міркуючи аналогічно, $\frac{6}{n} \to 6 \cdot 0$ при $n \to \infty$. За теоремою про границю суми послідовностей (властивість 3 на стор. 11) $\frac{5}{n^2} + \frac{6}{n} \to 0 + 0 = 0$ при $n \to \infty$. Далі, досліджуємо знаменник. Міркуючи аналогічно, отримаємо, що знаменник дробу у правій частині (1.3.1) прямує до -2. Тоді за теоремою про границю частки виразів (властивість 3 на стор. 11)

$$\frac{\frac{5}{n^2} + \frac{6}{n}}{\frac{14}{n^2} - 2} \to \frac{0}{-2}, \qquad n \to \infty\,.$$

Цим доведено, що послідовність x_n має границю 0 при $n \to \infty$. □

Приклад 7. *Знайти границю послідовності*

$$u_n = \frac{1}{5n} + \frac{7n}{4n+3}\,.$$

Розв'язання. Дана послідовність u_n є сумою двох послідовностей $x_n = \frac{1}{5n}$ і $y_n = \frac{7n}{4n+3}$. З'ясуємо поведінку кожної з них. За теоремою про множення границь послідовностей (властивість 3 на стор. 11) $x_n = \frac{1}{5n} \to \frac{1}{5} \cdot 0 = 0$ при $n \to \infty$. (Тут ми скористалися тим, що $\frac{1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$, див. приклад 2, а також тим, що границя сталої послідовності $z_n = \frac{1}{5}$ є стала $\frac{1}{5}$). Друга послідовність $y_n = \frac{7n}{4n+3}$ прямує до $\frac{7}{4}$. Дійсно,

$$\frac{7n}{4n+3} = \frac{7}{4 + \frac{3}{n}} \to \frac{7}{4+0} = \frac{7}{4}\,.$$

Отже, за теоремою про границю суми послідовностей будемо мати:

$$u_n = x_n + y_n \to 0 + \frac{7}{4} = \frac{7}{4}\,.$$

Приклад 8. *Знайти границю послідовності*

$$u_n = \frac{(n+3)(2n+4)(n+5)}{n^3 + 2n + 3}\,.$$

Розв'язання. Розділимо чисельник і знаменник дробу, яким задано послідовність, на n^3. Використовуючи теорему про границю суми, добутку і частки послідовностей (властивість 3 на стор. 11), будемо мати:

$$u_n = \frac{(n+3)(2n+4)(n+5)}{n^3 + 2n + 3} =$$

$$= \frac{(1+\frac{3}{n})(2+\frac{4}{n})(1+\frac{5}{n})}{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^3}} \to \frac{(1+0)(2+0)(1+0)}{(1+0+0)} = \frac{2}{1} = 2\,,$$

$n \to \infty$. Отже,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)(2n+4)(n+5)}{n^3+2n+3} = 2\,. \ \square$$

Невизначеності і їх розкриття

Далеко не в усіх випадках границя послідовності обчислюється безпосередньо. Так відбувається, зокрема, при розв'язанні прикладу 8. Якщо «підставити» як завгодно великі n у дріб $\frac{(n+3)(2n+4)(n+5)}{n^3+2n+3}$, то маємо вираз типу $\frac{\infty}{\infty}$. Зверніть увагу, що цей вираз прямує не до одиниці, як іноді міркують здобувачі (ділячи число ∞ на себе, вони «отримають» одиницю, що не є коректним). Відповіді 0 або ∞ також неправильні (бо реальна відповідь – границя дорівнює 2, див. приклад 8). Також зверніть увагу, що розв'язання задачі стало можливим лише після того, як ми **шляхом деяких елементарних перетворень позбулися виразу типу** $\frac{\infty}{\infty}$. У даному окремому випадку таким перетворенням стало ділення на n^3 чисельника і знаменника цього дробу, хоча цей прийом далеко не завжди допомагає. Скажімо, невизначеністю для послідовності $x_n = \sqrt{5(n+1)} - \sqrt{3n}$ є вираз типу $[\infty - \infty]$, а для нього ділення на n^3 втрачає сенс. Невизначеності в математиці прийнято брати в квадратні дужки: $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Типовою неправильною відповіддю на питання «чому дорівнює границя послідовності?» є вислів типу: «... вона дорівнює невизначеності». Відповідно, відповіддю у правильному напрямку є приблизно наступною: «границя дорівнює такому-то числу, що полягає в розкритті даної невизначеності наступним шляхом». **Розкриття невизначеностей - суть і центр теорії границь**. На жаль, універсальних способів та/або методології розкриття невизначеностей не існує.

Крім вже вказаних вище $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ та $[\infty - \infty]$, невизначеностями також є вирази $[0 \cdot \infty]$, $\left[\frac{0}{0}\right]$, $[0^0]$, $[1^\infty]$, $[\infty^0]$.

Приклад 9. *Знайти границю послідовності*

$$x_n = \sqrt{5(n+1)} - \sqrt{3n}\,.$$

Розв'язання. Маємо невизначеність $[\infty - \infty]$. Щоб розкрити її, винесемо за дужки вираз $\sqrt{n}$. Будемо мати:

$$\sqrt{5(n+1)} - \sqrt{3n} = \sqrt{n} \cdot \left(\sqrt{5\left(1+\frac{1}{n}\right)} - \sqrt{3}\right) \to \infty\,,$$

бо вираз $\left(\sqrt{5(1+\frac{1}{n})}-\sqrt{3}\right)$ прямує до $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ і є обмеженим знизу (чому?), а $\sqrt{n}\to\infty$ при $n\to\infty$ (доведіть це!). Отже, ми маємо право застосувати властивість 9 на стор. 12, згідно якої дана послідовність x_n має нескінченну границю при $n\to\infty$. $\Box$

Приклад 10. *Знайти границю послідовності*

$$x_n=\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1},$$

де, як звично, $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdots n$.

Розв'язання. Доведемо, що дана послідовність є нескінченно малою. Дійсно, послідовність $y_n:=\sin n!$ є обмеженою, бо для будь-яких натуральних n ми маємо, що $|\sin n!|\leqslant 1$. Далі, послідовність $z_n:=\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1}=\frac{n^{\frac{2}{3}}}{n+1}=\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}}$ є нескінченно малою (обґрунтуйте!). Отже, вихідна послідовність $x_n=y_n\cdot z_n$ є добутком нескінченно малої і обмеженої послідовностей, тому вона – нескінченно мала (див. властивість 5 на стор. 11). Іншими словами, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}=0$. $\Box$

Приклад 11. *Знайти границю послідовності*

$$x_n=\frac{1+3+5+\ldots 2n-1}{n^3}.$$

Розв'язання. Чисельник і знаменник одночасно прямують до $+\infty$ при $n\to\infty$. Отже, маємо невизначеність $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Для того, щоб її розкрити, скористаємося формулою для суми n членів арифметичної прогресії. Зауважимо, що в чисельнику дробу, яким виражається дана послідовність, – арифметична прогресія, перший член a_1 якої дорівнює 1, n-тий член a_n дорівнює $2n-1$, а різниця $d=2$. Маємо: $1+3+5+\ldots 2n-1=\frac{1+2n-1}{2}\cdot n=n^2$. Тоді $x_n=\frac{1+3+5+\ldots+2n-1}{n^3}=\frac{n^2}{n^3}=\frac{1}{n}\to 0$ при $n\to\infty$.$\Box$

Приклад 12. *Знайти границю послідовності*

$$x_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}.$$

Розв'язання. Будемо мати:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=$$

$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{(n-1)} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$
$$= \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{n+1} \to \frac{1}{2}, \quad n \to \infty .$$
Висновок: послідовність x_n збігається і її границя дорівнює $1/2$. $\square$

1.4 Завдання для самоконтролю

1. Нехай послідовності x_n і y_n розбігаються. Що можна сказати про збіжність послідовностей $x_n \pm y_n$, $x_n \cdot y_n$ і $\frac{x_n}{y_n}$?

2. Нехай послідовність x_n збіжна, а послідовність y_n розбігається. Що можна сказати про збіжність послідовностей $x_n \pm y_n$, $x_n \cdot y_n$ і $\frac{x_n}{y_n}$?

3. Наведіть приклад послідовностей x_n і y_n таких, що: а) послідовності x_n і y_n збігаються; б) послідовність $\frac{x_n}{y_n}$ є розбіжною. Чи не суперечить цей приклад пункту 3 на сторінці 11?

4. Чи існують такі послідовності x_n і y_n такі, що: а) x_n необмежена, б) y_n обмежена, в) $\frac{x_n}{y_n}$ збіжна до скінченної границі? До нескінченної границі?

5*. Чи є, на Ваш погляд, невизначеністю вираз вигляду $[0^\infty]$? Відповідь обґрунтуйте.

6. Чи може бути множення нескінченно малої послідовності на нескінченно велику знову нескінченно малою? Нескінченно великою?

7. Вкажіть послідовності $x_n > 0$ і $y_n > 0$ такі, що $x_n \to 1$, $y_n \to \infty$ і $x_n^{y_n} \to 2$ при $n \to \infty$. Чи можна побудувати аналогічні послідовності для наперед заданого числа $a > 0$ так, щоб $x_n \to 1$, $y_n \to \infty$ і $x_n^{y_n} \to a$ при $n \to \infty$?

8. Нехай $x_n < y_n$ при всіх $n \in \mathbb{N}$, причому $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ і $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Чи вірно, що $a < b$?

9. Доведіть *принцип двох міліціонерів:* нехай $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ при всіх $n \in \mathbb{N}$, і нехай $x_n \to a$ і $z_n \to a$ при $n \to \infty$. Доведіть, що також $y_n \to a$ при $n \to \infty$.

10. Нехай x_n і y_n збігаються до чисел a і b при $n \to \infty$, відповідно. Припустимо, що $a \leqslant b$. Чи вірно наступне твердження: *існує натуральний номер N_0 такий, що: а) $x_n < y_n$ при $n \geqslant N_0$; б) $x_n \leqslant y_n$ при $n \geqslant N_0$?*

11. Як зміниться відповідь на попереднє питання 10, якщо в ньому додатково вимагати, що $a < b$?

12. Чи може бути ділення двох нескінченно малих послідовностей знову нескінченно малою?

13. Нехай $x_n > 0$ – нескінченно мала послідовність. Чи може бути послідовність $\ln x_n$ нескінченно великою? Чи може такою бути e^{-x_n}?

14. Нехай x_n і y_n – нескінченно малі послідовності. Чи є послідовність $z_n = (x_n)^{y_n}$ збіжною? Чи вірно твердження: ця послідовність завжди є збіжною, але може збігатися до нескінченності?

15. Чи вірно твердження: якщо послідовність x_n збігається, то і послідовність $\ln x_n$ збігається? Що можна сказати про послідовності e^{x_n} та $\sin x_n$?

16. Нехай x_n – послідовність, відносно якої збігається $\ln x_n$. Чи збігається сама послідовність x_n? Аналогічні питання щодо послідовностей $\sin x_n$ та e^{x_n} (якщо вони збігаються, то чи будуть збіжними самі відповідні послідовності x_n?).

17. Побудувати функцію $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ і послідовність $\{x_n\}$ так, щоб: а) послідовність x_n збігалася; б) послідовність $f(x_n)$ розбігалася.

18. Побудувати функцію $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ і послідовність $\{x_n\}$ так, щоб: а) послідовність x_n розбігалася; б) послідовність $f(x_n)$ збігалася.

19. Наведіть приклад послідовності, яка є необмеженою, але не має ані скінченної, ані нескінченної границі.

1.5 Завдання для самостійної роботи № 2

Задача 2. *Знайти границю послідовності* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *для кожного з варіантів.*

Варіант	Послідовність x_n, $n=1,2,\dots$	Варіант	Послідовність x_n, $n=1,2,\dots$
1	$x_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^5$	16	$x_n = \frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+2}$
2	$x_n = 4^{\frac{n+2}{n+1}}$	17	$x_n = \sqrt[n]{3^n+2^n}$
3	$x_n = \frac{a^n}{1+a^{2n}}$	18	$x_n = \left(\frac{2n-1}{5n+1}\right)^{n^2}$
4	$x_n = \frac{5n-2}{n+1}$	19	$x_n = \frac{1-3n}{7n+4}$
5	$x_n = \frac{n^2}{-3n^2+n+2}$	20	$x_n = \frac{1-3n+7n^2}{3{,}5n^3+n^2}$
6	$x_n = \frac{(n+1)^2}{2n^2+3}$	21	$x_n = \frac{n+3}{n^3+2n^2-5}$
7	$x_n = \frac{3n^3-2n+0{,}5}{7n^5-n^4+n^3-6n}$	22	$x_n = \frac{n^4}{5n^3+n^2+3n+2}$
8	$x_n = \frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$	23	$x_n = \frac{1+2+3+\dots+n}{n+2} - \frac{n}{2}$
9	$x_n = \frac{n!}{(n+1)!-n!}$	24	$x_n = \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{3^n}}$
10	$x_n = \frac{(n-1)!+n!}{(n-1)!-n!}$	25	$x_n = \frac{\sqrt[3]{2n^2-3n}}{n+2}$
11	$x_n = \frac{\sqrt[3]{n^4}+2n-1}{n^2+\sqrt{n}}$	26	$x_n = \frac{(\sqrt{n^2+1}+n)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}$
12	$x_n = \frac{\sqrt[4]{n^5+2n}+3n}{\sqrt[3]{1+2n^4}} + 1$	27	$x_n = \left(\frac{5n-1}{8n}\right)^4$
13	$x_n = \frac{1}{n}\sin(2n!)$	28	$x_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^4$
14	$x_n = \left(\frac{2n-1}{3n}\right)^5$	29	$x_n = \frac{\sqrt[4]{n^2+n}}{n+2}$
15	$x_n = \left(\frac{n-\frac{1}{2}}{2n}\right)^4$	30	$x_n = \frac{\sin n^2}{n}$

1.6 Монотонні послідовності

Означення 1.4. Послідовність x_n називається *монотонно зростаючою,* якщо виконується умова: $x_n \leqslant x_{n+1}$ при всяких $n \in \mathbb{N}$. Аналогічно, послідовність x_n *монотонно спадна,* якщо $x_n \geqslant x_{n+1}$ при всяких $n \in \mathbb{N}$. Послідовність x_n називається *монотонною,* якщо виконується одне з двох: або x_n монотонно спадна, або x_n монотонно зростає.

Вже відома нам послідовність $x_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$, є монотонно спадною. Існує багато немонотонних послідовностей, наприклад, послідовність $x_n = (-1)^n$ не є ані монотонно зростаючою, ані монотонно спадною.

Монотонні послідовності виділяють в окремий клас, тому що вони мають одну важливу особливість.

Теорема 1.1. *Якщо x_n – монотонна послідовність, то вона має скінченну, або нескінченну границю. При цьому, якщо послідовність x_n монотонно зростає і обмежена зверху ($x_n \leqslant M$ при всіх $n \in \mathbb{N}$), то ця границя скінченна і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\limits_{n\to\infty} x_n$. Аналогічно, якщо послідовність x_n монотонно спадає і обмежена знизу ($x_n \geqslant m$ при всіх $n \in \mathbb{N}$, то ця границя скінченна і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\limits_{n\to\infty} x_n$).*

Нагадаємо, що тут число M називається *точною верхньою межею множини* $A \subset \mathbb{R}$, позначається $M := \sup A$, якщо $x \leqslant M$ для всіх $x \in A$ і, крім того, для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться принаймні один елемент $x_\varepsilon \in A$ такий, що $x_\varepsilon > M - \varepsilon$. (Перша з цих умови вказує на оцінку зверху $x \leqslant M$, а друга – що ця оцінка є точною). Аналогічно, число m називається *точною нижньою межею множини* $A \subset \mathbb{R}$, позначається $m := \inf A$, якщо $x \geqslant m$ для всіх $x \in A$ і, крім того, для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться принаймні один елемент $x_\varepsilon \in A$ такий, що $x_\varepsilon < m + \varepsilon$.

Що важливо пам'ятатати?

1. Монотонна послідовність завжди має границю, немонотонна – не завжди.

2. Наявність в монотонної послідовності саме скінченної границі пов'язана з її обмеженістю.

Приклад 13. *Довести збіжність послідовності*

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

Розв'язання. Маємо:

$$x_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right),$$

звідки випливає, що $x_{n+1} = x_n \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \leqslant x_n$. Звідси випливає, що послідовність x_n – спадна. Далі, $x_n \geqslant 0$ при кожному натуральному $n \in \mathbb{N}$. Отже, послідовність x_n є монотонно спадною та обмеженою знизу, тому вона збіжна, причому, до скінченної границі (див. теорему 1.1). □

Приклад 14. *Довести збіжність і знайти границю послідовності*

$$x_1 = \sqrt{c}, x_2 = \sqrt{c + \sqrt{c}}, x_3 = \sqrt{c + \sqrt{c + \sqrt{c}}}, \ldots,$$

$$x_n = \underbrace{\sqrt{c+\sqrt{c+\ldots+\sqrt{c}}}}_{n}, \ldots, c > 0\,.$$

Розв'язання. Зауважимо, що $x_2 = \sqrt{c+x_1}$, $x_3 = \sqrt{c+x_2}, \ldots$, $x_n = \sqrt{c+x_{n-1}}$, $n \in \mathbb{N}$. Методом математичної індукції доведемо, що послідовність x_n є зростаючою, тобто, $x_{n+1} \geqslant x_n$ при всяких $n \in \mathbb{N}$. При $n = 1$ дана нерівність є очевидною, бо $x_2 = \sqrt{c+x_1} = \sqrt{c+\sqrt{c}} \geqslant \sqrt{c} = x_1$. Припустимо, що $x_n \geqslant x_{n-1}$ для деякого $n \in \mathbb{N}$. Доведемо, що $x_{n+1} \geqslant x_n$. Справді, оскільки $x_{n+1} = \sqrt{c+x_n}$, нерівність $x_{n+1} \geqslant x_n$ еквівалентна нерівності $\sqrt{c+x_n} \geqslant x_n$. Оскільки $x_n = \sqrt{c+x_{n-1}}$, остання нерівність означає, що $\sqrt{c+\sqrt{c+x_{n-1}}} \geqslant \sqrt{c+x_{n-1}}$, або, підносячи до квадрату,

$$c + \sqrt{c+x_{n-1}} \geqslant c + x_{n-1}\,.$$

Скорочуючи на c в лівій і правій частині останньої нерівності, ми будемо мати, що

$$\sqrt{c+x_{n-1}} \geqslant x_{n-1}\,,$$

що виконується з огляду на припущення індукції $x_n \geqslant x_{n-1}$. Отже, монотонність послідовності x_n доведена.

Зауважимо також, що послідовність x_n обмежена зверху, наприклад, числом $\sqrt{c}+1$. Доведемо це індукцією по n. При $n = 1$, очевидно, $x_1 \leqslant \sqrt{c}+1$. Припустимо, що при деякому $n = k$ також $x_k \leqslant \sqrt{c}+1$. Тоді при $n = k+1$ будемо мати: $x_{k+1} = \sqrt{c+x_k} \leqslant \sqrt{c+\sqrt{c}+1} < \sqrt{c+2\sqrt{c}+1} = \sqrt{c}+1$. Отже, послідовність x_n збіжна до деякої скінченної границі $a \in \mathbb{R}$ за теоремою 1.1. Знайдемо це число a. З рівності $x_n = \sqrt{c+x_{n-1}}$ піднесенням до квадрату випливає, що $x_n^2 = c + x_{n-1}$. Перейдемо тут до границі при $n \to \infty$. Будемо мати: $a^2 = c + a$, або $a^2 - a - c = 0$. Розв'язучи це рівняння відносно a і враховуючи, що $a \geqslant 0$, маємо: $a = \frac{\sqrt{4c+1}+1}{2}$.$\Box$

1.7 Завдання для самоконтролю

1. Чи є монотонною: а) сума двох монотонно зростаючих послідовностей; б) сума двох довільних монотонних послідовностей; в) добуток двох монотонно зростаючих послідовностей; г) добуток довільних монотонних послідовностей?

2. Чи є монотонною частка двох монотонних послідовностей x_n та y_n (за умови, що $y_n \neq 0 \;\forall\; n \in \mathbb{N}$)?

3. Чи можна навести такі послідовності x_n та y_n, щоб x_n була монотонною, x_n+y_n також, монотонною, але y_n – немонотонна послідовність?

4. Нехай x_n – монотонна додатна послідовність. Чи буде монотонною: а) $\sin x_n$; б) $\ln x_n$?

5. Нехай $a, b, c, d > 0$, а послідовність x_n – монотонна. Чи буде монотонною послідовність $z_n := \frac{ax_n+b}{cx_n+d}$? Якщо ні, знайдіть умови на коефіцієнти a, b, c, d за яких це твердження є вірним.

1.8 Завдання для самостійної роботи № 3

Задача 3. *Довести, що послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ є монотонною починаючи з деякого номера n і знайти її границю.*

Варіант	Послідовність x_n, $n = 1, 2, \dots$	Варіант	Послідовність x_n, $n = 1, 2, \dots$
1	$x_n = \underbrace{\sin\sin\dots\sin}_{n} 1$	16	$x_n = \frac{c^n}{n!}$, $c > 0$
2	$x_n = \frac{c^n}{\sqrt[k]{n!}}$	17	$x_n = \frac{n^k}{c^n}$, $c > 1$, $k > 0$
3	$x_n = \frac{n^n}{(n!)^2}$	18	$x_n = \frac{1}{2^n} \underbrace{\sin\sin\dots\sin}_{n} 1$
4	$x_n = \frac{c^n}{\sqrt[k]{(2n)!}}$	19	$x_n = \frac{n^k}{c^{2n}}$, $c > 1$, $k > 0$
5	$x_n = \frac{1}{n \ln n}$	20	$x_n = \frac{1}{n^2 \ln n}$
6	$x_n = e^{-2n}$	21	$x_n = e^{-3n}$
7	$x_n = \frac{e^{-2n}}{n}$	22	$x_n = \frac{e^{-3n}}{n^2}$
8	$x_n = \frac{c^n}{\sqrt[k]{(2n+1)!}}$	23	$x_n = \frac{c^n}{\sqrt[k]{(3n+1)!}}$
9	$x_n = \frac{1}{5n+7}$	24	$x_n = \frac{1}{5n^2+8}$
10	$x_n = \ln \frac{n+1}{n}$	25	$x_n = \ln \frac{2n+1}{n}$
11	$x_n = \ln \frac{3n+1}{n}$	26	$x_n = \ln \frac{4n+1}{n}$
12	$x_n = \sin \frac{1}{2^n}$	27	$x_n = \sin \frac{1}{3^n}$
13	$x_n = \frac{6}{5n+5}$	28	$x_n = \frac{7}{5n-4}$
14	$x_n = \frac{5}{5n^2+3}$	29	$x_n = \frac{4\sqrt{2}}{n^8}$
15	$x_n = \frac{1}{\ln n^2}$	30	$x_n = \frac{1}{n^{10}+5}$

1.9 Критерій Коші

Означення 1.5. Послідовність a_n називається *фундаментальною*, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує натуральне число $N = N(\varepsilon)$, таке що $|a_n - a_m| < \varepsilon$ для будь-яких натуральних $m, n > N$.

Теорема 1.2. *(Критерій Коші збіжності послідовності). Послідовність збігається тоді і тільки тоді, коли вона фундаментальна.*

Зауваження 1.2. Оскільки критерій Коші – це необхідна і достатня умова збіжності послідовності, це означає, що якщо послідовність не є фундаментальною, то вона є розбіжною. Протилежне твердження до того, що послідовність a_n є фундаментальною, виглядає наступним чином:
знайдеться $\varepsilon > 0$ таке, що для будь якого натурального N знайдуться натуральні числа $n, m > N$, для яких $|a_n - a_m| \geqslant \varepsilon$.

Приклад 15. *Використовуючи критерій Коші, довести, що послідовність a_n є розбіжною, якщо*

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Розв'язання. Розглянемо довільне $m \in \mathbb{N}$, а також $n = 2m$. Розглянемо модуль різниці елементів, які знаходяться під цими номерами. Будемо мати:

$$|a_n - a_m| = |a_{2m} - a_m| = \left| \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \frac{1}{m+3} + \ldots + \frac{1}{2m} \right|.$$

Оскільки вираз, який знаходиться під модулем додатній, від модуля можна позбавитися:

$$|a_n - a_m| = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \frac{1}{m+3} + \ldots + \frac{1}{2m}.$$

Помітимо, що усі додатки більше, або дорівнюють $\frac{1}{2m}$. Звідси маємо:

$$|a_n - a_m| = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \frac{1}{m+3} + \ldots + \frac{1}{2m} > m \cdot \frac{1}{2m} = \frac{1}{2},$$

або більш коротко:

$$|a_n - a_m| > \frac{1}{2}.$$

Отже, ми можемо покласти $\varepsilon = \frac{1}{2}$ і тоді для будь-якого натурального N знайдуться натуральні числа $n, m > N$, для яких $|a_n - a_m| \geqslant \frac{1}{2}$ Тому послідовність a_n не являється фундаментальною, що означає що для неї не виконується критерій Коші. Отже, вона є розбіжною за теоремою 1.2. □

Приклад 16. *Використовуючи критерій Коші, довести збіжність послідовності*

$$x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \ldots + \frac{\sin n}{2^n}.$$

Розв'язання. Доведемо, що дана послідовність є фундаментальною, тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує натуральне число $N = N(\varepsilon)$, таке що $|x_n - x_m| < \varepsilon$ для будь-яких натуральних $m, n > N$.

Оцінимо вираз $|x_n - x_m|$. Без обмеження загальності, можна вважати, що $n > m$. Тоді

$$|x_n - x_m| = \left| \left(\frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \ldots + \frac{\sin n}{2^n} \right) - \left(\frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \ldots + \frac{\sin m}{2^m} \right) \right| =$$

$$= \left| \frac{\sin(m+1)}{2^{m+1}} + \frac{\sin(m+2)}{2^{m+2}} + \ldots + \frac{\sin n}{2^n} \right| .$$

Скористаємося тим, що модуль суми не перевищує суму модулів, а також врахуємо те, що модуль синуса менше, або дорівнює 1.

$$\left| \frac{\sin(m+1)}{2^{m+1}} + \frac{\sin(m+2)}{2^{m+2}} + \frac{\sin n}{2^n} \right| \leqslant \left| \frac{\sin(m+1)}{2^{m+1}} \right| + \left| \frac{\sin(m+2)}{2^{m+2}} \right| + \ldots + \left| \frac{\sin n}{2^n} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{m+2}} + \ldots + \frac{1}{2^n} .$$

Скористаємося правилом суми геометричної прогресії:

$$\frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{m+2}} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{m+1}} \cdot \frac{1 - (1/2)^{n-m}}{1 - 1/2} =$$

$$= \frac{1}{2^m} (1 - (1/2)^{n-m}) .$$

Помітимо, що вираз, який знаходиться в дужках, не перевищує одиниці. Звідси маємо:

$$\frac{1}{2^m} \left(1 - (1/2)^{n-m}\right) \leqslant \frac{1}{2^m} .$$

Отже, $|x_n - x_m| < \frac{1}{2^m}$.

На наступному кроці підберемо m таким чином, щоб виконувалася наступна нерівність:

$$\frac{1}{2^m} < \varepsilon .$$

Розв'язуючи її, ми отримаємо, що

$$2^m > \frac{1}{\varepsilon} ,$$

$$m > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}\,.$$

Покладемо $N = \left[\left|\log_2 \frac{1}{\varepsilon}\right|\right] + 1$. Тоді для довільного натурального $m > N$, маємо, що $\frac{1}{2^m} < \varepsilon$.

Підсумовуючи усі попередні міркування, остаточно маємо, що для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться $N = \left[\left|\log_2 \frac{1}{\varepsilon}\right|\right] + 1$ таке, що для довільних натуральних $n, m > N$ виконується нерівність $|x_n - x_m| < \varepsilon$. Отже, послідовність є фундаментальною, що означає, що вона є збіжною за критерієм Коші збіжності послідовності. $\square$

Приклад 17. *Використовуючи критерій Коші, довести збіжність послідовності*

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}.$$

Розв'язання. Без обмеження загальності, будемо вважати що $n > m$, тоді:

$$|x_n - x_m| = \left|\frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+2)^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right|\,.$$

Від модуля можна позбавитися, оскільки вираз під модулем більше нуля:

$$\left|\frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+2)^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right| = \frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+2)^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\,.$$

Скористаємося для кожного доданку наступною нерівністю:

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

(доведіть її самостійно). Маємо:

$$\frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+2)^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} <$$

$$< \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} + \frac{1}{m+2} - \frac{1}{m+3} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{m} - \frac{1}{n}\,.$$

Підсилимо нерівність позбавившись від різниці:

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{n} < \frac{1}{m}\,.$$

Звідси маємо: $|x_n - x_m| < \frac{1}{m}$. Підберемо m таким чином, щоб виконувалася наступна нерівність:

$$\frac{1}{m} < \varepsilon\,.$$

Будемо мати:

$$m > \frac{1}{\varepsilon}\,.$$

Отже, для будь-яких натуральних $m, n > N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ виконується нерівність $|x_n - x_m| < \varepsilon$. Це і означає, що дана послідовність є фундаментальною, а отже, за критерієм Коші, вона є збіжною (теорема 1.2). □

1.10 Завдання для самоконтролю

1. Чи є фундаментальною:
а) сума двох фундаментальних послідовностей;
б) добуток двох фундаментальних послідовностей;
в) частка двох фундаментальних послідовностей?

2. Чи будь-яка монотонна, обмежена послідовність є фундаментальною?

3. Чи будь-яка фундаментальна послідовність є монотонною і обмеженою?

4. Довести, що для будь-якого додатного числа $\alpha \leqslant 1$ послідовність $x_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha}$ не є фундаментальною.

5. Довести, що для будь-якого числа $\alpha \geqslant 2$ послідовність $x_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha}$ є фундаментальною.

6. Довести, що для будь-якого числа $a > 1$ послідовність $x_n = \frac{\sin 1}{a} + \frac{\sin 2}{a^2} + \ldots + \frac{\sin n}{a^n}$ є фундаментальною.

1.11 Завдання для самостійної роботи № 4

Задача 4. *Використовуючи критерій Коші, довести збіжність, або розбіжність послідовності.*

Варіант	**Послідовність** x_n, $n = 1, 2, \ldots$	**Варіант**	**Послідовність** x_n, $n = 1, 2, \ldots$
1	$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$	16	$x_n = \arcsin\frac{1}{2} + \arcsin\frac{1}{2^2} + + \arcsin\frac{1}{2^3} + \ldots + \arcsin\frac{1}{2^n}$
2	$x_n = \frac{\cos 1}{2} + \frac{\cos 2}{2^2} + \ldots + \frac{\cos n}{2^n}$	17	$x_n = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \ldots + a_n q^n$ $\lvert a_k\rvert < M$ для будь якого k, $\lvert q\rvert < 1$
3	$x_n = \frac{1}{2^3} + \frac{2^2}{3^3} + \ldots + \frac{n^2}{(n+1)^3}$	18	$x_n = \frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 9} + \ldots + \frac{4n-3}{4n+1}$
4	$x_n = \frac{cos 1!}{1\cdot 2} + \frac{cos 2!}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{\cos n!}{n\cdot(n+1)}$	19	$x_n = \frac{\sin 1}{4} + \frac{\sin 2}{4^2} + \ldots + \frac{\sin n}{4^n}$
5	$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \ldots \frac{3}{\sqrt[3]{n}}$	20	$x_n = \frac{\cos 1}{4} + \frac{\cos 2}{4^2} + \ldots + \frac{\cos n}{4^n}$
6	$x_n = \frac{\sin 1!}{1\cdot 2} + \frac{\sin 2!}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{\sin n!}{n\cdot(n+1)}$	21	$x_n = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^3}$
7	$x_n = \frac{\cos 1!}{5+1} + \frac{\cos 2!}{5^2+1} + \ldots + \frac{\cos n!}{5^n+1}$	22	$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$
8	$x_n = 1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \ldots + \frac{1}{n^8}$	23	$x_n = \frac{\sin 1!}{2} + \frac{\sin 2!}{2^2} + \frac{sin 3!}{2^3} + \ldots + \frac{\sin n!}{2^n}$
9	$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$	24	$x_n = \frac{\cos 1!}{2} + \frac{\cos 2!}{2^2} + \frac{\cos 3!}{2^3} \ldots + \frac{\cos n!}{2^n}$
10	$x_n = \frac{\sin 1}{3} + \frac{\sin 2}{3^2} + \frac{\sin 3}{3^3} + \ldots + \frac{\sin n}{3^n}$	25	$x_n = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \ldots + \frac{1}{n^4}$
11	$x_n = \frac{2}{3^2} + \frac{3}{4^2} + \ldots + \frac{n+1}{(n+2)^2}$	26	$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt[5]{2}} + \frac{1}{\sqrt[5]{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[5]{n}}$
12	$x_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$	27	$x_n = \frac{\cos 1}{1\cdot 2} + \frac{\cos 2}{2\cdot 3} + \frac{\cos 3}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{\cos n}{n(n+1)}$
13	$x_n = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{4^2} + \ldots + \frac{n}{(n+1)^2}$	28	$x_n = \frac{\sin 1}{1\cdot 2} + \frac{\sin 2}{2\cdot 3} + \frac{\sin 3}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{\sin n}{n(n+1)}$
14	$x_n = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$	29	$x_n = 1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \ldots + \frac{1}{n^5}$
15	$x_n = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \ldots + \frac{1}{\ln(n+1)}$	30	$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt[6]{2}} + \frac{1}{\sqrt[6]{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[6]{n}}$

1.12 Верхня та нижня границя послідовності

Означення 1.6. Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_n$ деяка послідовність, а $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ – зростаюча послідовність натуральних чисел. Тоді послідовність $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$ називається *підпослідовністю* послідовності x_n.

Наприклад, розглянемо послідовність натуральних чисел. Послідовність $2, 4, 6 \ldots$ парних натуральних чисел, взятих в їх природньому порядку, є її підпослідовністю. В свою чергу, послідовність

$$6, 4, 2, 8, 10, 12, 14, 16 \ldots$$

не є підпослідовністю послідовності натуральних чисел (чому?).

Нехай x_k – довільна послідовність чисел. Якщо вона обмежена знизу, то можна розглянути послідовність $i_n = \inf\limits_{k\geqslant n} x_k$. Оскільки $i_n \leqslant i_{n+1}$ для будь-якого $n \in \mathbb{N}$, то або послідовність i_n має скінченну границю $\lim\limits_{n\to\infty} i_n = l$, або $i_n \to +\infty$.

Означення 1.7. Число $\lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\geqslant n} x_k$ називається нижньою границею послідовності x_k і позначається $\varliminf\limits_{k\to\infty} x_k$. Якщо $i_n \to +\infty$, то кажуть, що нижня границя послідовності дорівнює плюс нескінченності, і пишуть $\varliminf\limits_{k\to\infty} x_k = +\infty$. Якщо вихідна послідовність x_k не обмежена знизу, то при будь-якому натуральному n будемо мати $i_n = \inf\limits_{k\geqslant n} x_k = -\infty$. В цьому випадку говорять, що нижня границя послідовності дорівнює мінус нескінченності, і пишуть $\varliminf\limits_{k\to\infty} x_k = -\infty$.

Враховуючи усі перелічені варіанти, запишемо коротко означення нижньої границі послідовності x_k:

$$\varliminf_{k\to\infty} x_k := \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} x_k\,.$$

Аналогічно, розглядаючи послідовність $s_n = \sup\limits_{k\geqslant n} x_k$, приходимо до визначення верхньої границі послідовності x_k.

Означення 1.8.

$$\varlimsup_{k\to\infty} x_k := \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} x_k\,.$$

Розглянемо декілька прикладів обчислення верхніх та нижніх границь послідовності.

Приклад 18. $x_k = (-1)^k, k \in \mathbb{N}$.

Розв'язання. В попередніх параграфах було доведено, що дана послідовність розбіжна. Тим не менш, вона має верхню і нижню границю

$$\varliminf_{k\to\infty} x_k = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} x_k = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} (-1)^k = \lim_{n\to\infty} (-1) = -1\,,$$
$$\varlimsup_{k\to\infty} x_k = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} x_k = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} (-1)^k = \lim_{n\to\infty} 1 = 1\,. \ \Box$$

Зауваження 1.3. У будь-якої обмеженої послідовності існує скінченні верхня і нижня границі. Верхня та нижня границя існують для будь-якої послідовності (але можуть приймати нескінченні значення).

Приклад 19. $x_k = k^{(-1)^k}, k \in \mathbb{N}$.
Розв'язання.

$$\varliminf_{k\to\infty} k^{(-1)^k} = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} k^{(-1)^k} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0\,,$$

$$\varlimsup_{k\to\infty} k^{(-1)^k} = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} k^{(-1)^k} = \lim_{n\to\infty} (+\infty) = +\infty\,. \ \square$$

Приклад 20. $x_k = k, k \in \mathbb{N}$.
Розв'язання.

$$\varliminf_{k\to\infty} k = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} k = \lim_{n\to\infty} n = +\infty\,,$$

$$\varlimsup_{k\to\infty} k = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} k = \lim_{n\to\infty} (+\infty) = +\infty\,. \ \square$$

При знаходженні верхньої та нижньої границі корисними є деякі теореми. Перед тим як їх сформулювати, введемо поняття *часткової границі*.

Означення 1.9. Число (або символ $+\infty$, або $-\infty$) називають *частковою границею* послідовності (в подальшому, будемо їх також називати *граничними точками*), якщо в ній є підпослідовність, яка збігається до цього числа.

Теорема 1.3. *Для будь-якої послідовності нижня границя є її найменшою частковою границею, а верхня границя – найбільшою частковою границею.*

Наслідок 1.1. *Послідовність має границю (скінченну, або нескінченну) тоді і тільки тоді, коли нижня і верхня границя співпадають.*

Наслідок 1.2. *Послідовність є збіжною тоді і тільки тоді, коли збігається будь-яка її підпослідовність.*

Теорема 1.4. *Якщо $A_1, A_2, A_3 \ldots A_k$ – граничні точки послідовності x_n і кожен член x_n є хоча б в одній з підпослідовностей $y_{1n}, y_{2n}, y_{3n}, \ldots, y_{kn}$ таких що*

$$\lim_{n\to\infty} y_{1n} = A_1\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} y_{2n} = A_2\,,$$

$$\ldots$$

$$\lim_{n\to\infty} y_{kn} = A_k\,,$$

то інших граничних точок у послідовності x_n немає.

Приклад 21. *Знайти усі граничні точки послідовності $x_n = (-1)^n$.*

Розв'язання. Розглянемо підпослідовність, складену з членів з непарними номерами. Оскільки $(-1)^{2k-1} = -1$, для будь-якого натурального k дана послідовність має вигляд $-1, -1, \ldots, -1, \ldots$. Очевидно, дана послідовність збігається до числа -1. Розглянемо підпослідовність, складену з членів з парними номерами. Оскільки $(-1)^{2k} = 1$ для будь-якого натурального k, дана послідовність має вигляд $1, 1, \ldots, 1, \ldots$. Очевидно, дана послідовність збігається до числа 1. Доведемо, що інших граничних точок у послідовності немає. Так як кожен член відноситься до однієї з підпослідовностей (тому що будь-який номер є або парним, або непарним), то інших граничних точок послідовність не має. □

Зауваження 1.4. Знаючи усі часткові границі, неважко знайти верхню і нижню границі. Справді, так як для будь-якої послідовності нижня границя є найменшою із її часткових границь, а верхня границя – найбільшою, можна стверджувати, що верхня границя послідовності дорівнює 1, а нижня -1, що співпадає з результатом отриманим раніше.

Приклад 22. *Знайти верхню та нижню границі послідовності*

$$x_n = 1 - \frac{1}{n}.$$

Розв'язання. Знайдемо границю цієї послідовності:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1\,.$$

Для збіжних послідовностей, значення верхньої та нижньої границь, співпадають зі значенням границі послідовності. Отже,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = 1\,. \ \square$$

Приклад 23. *Знайти верхню та нижню границю послідовності*

$$x_n = 1 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2}.$$

Розв'язання. Розіб'ємо нашу послідовність на 4 підпослідовності: $x_{4n}, x_{4n-1}, x_{4n-2}, x_{4n-3}$. Будь-який член послідовності x_n належить одній з них (бо кожне натуральне число дає остачу 0,1,2, або 3 при діленні на 4). Розглянемо послідовність x_{4n-1}. Будемо мати:

$$x_{4n-1} = 1 + \frac{4n-1}{4n}\cos\frac{(4n-1)\pi}{2} =$$

$$= 1 + \frac{4n-1}{4n}\cos\left(2\pi n - \frac{\pi}{2}\right) = 1 + \frac{4n-1}{4n}\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= 1 + \frac{4n-1}{4n}\cdot 0 = 1\,.$$

Розглянемо послідовність x_{4n-3} :

$$x_{4n-3} = 1 + \frac{4n-3}{4n-2}\cos\frac{(4n-3)\pi}{2} =$$

$$= 1 + \frac{4n-3}{4n-2}\cos\left(2\pi n - \frac{3\pi}{2}\right) = 1 + \frac{4n-3}{4n-2}\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) =$$

$$= 1 + \frac{4n-3}{4n-2}\cdot 0 = 1\,.$$

Знайдемо границі цих підпослідовностей (тобто, знайдемо дві часткові границі вихідної послідовності). Будемо мати:

$$\lim_{n\to\infty} x_{4n-1} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{4n-3} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1\,.$$

Знайдемо границі інших двох підпослідовностей.

$$x_{4n} = 1 + \frac{4n}{4n+1}\cos\frac{4\pi n}{2} = 1 + \frac{4n}{4n+1}\cos(2\pi n) = 1 + \frac{4n}{4n+1}\cos(0) =$$

$$= 1 + \frac{4n}{4n+1}\cdot 1 = 1 + \frac{4n}{4n+1}\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{4n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{4n}{4n+1}\right) = 2$$

$$x_{4n-2} = 1 + \frac{4n-2}{4n-1}\cos\frac{(4n-2)\pi}{2} =$$

$$= 1 + \frac{4n-2}{4n-1}\cos(2\pi n - \pi) = 1 + \frac{4n-2}{4n-1}\cos(-\pi) =$$

$$= 1 + \frac{4n-2}{4n-1}\cdot(-1) = 1 - \frac{4n-2}{4n-1}\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{4n-2} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{4n-2}{4n-1}\right) = 0\,.$$

Отже, маємо:

$$\lim_{n\to\infty} x_{4n} = 2\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{4n-1} = 1\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{4n-2} = 0\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{4n-3} = 1\,.$$

Як вже було зазначено, кожний член послідовності відноситься до однієї з цих підпослідовностей, що означає, що більше часткових границь у цієї послідовності немає. Оскільки, найбільше значення часткової границі 2, а найменше 0 можемо зробити висновок:

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = 0$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = 2\,. \ \square$$

1.13 Завдання для самоконтролю

1. Побудувати приклад послідовності:
а) яка не має скінченних часткових границь;
б) яка має скінченну часткову границю, але не є збіжною;
в) яка має нескінченну множину часткових границь;
г) яка має в якості своєї часткової границі кожне дійсне число.

2. Чи можна стверджувати, що послідовність, яка складається лише з простих чисел, є підпослідовністю послідовності натуральних чисел?

3. Чи будь-яка монотонна, обмежена послідовність є фундаментальною?

4. Чи співпадають верхня та нижня границі фундаментальної послідовності?

5. Чи співпадають верхня та нижня границі монотонної послідовності?

6. Чи може нижня границя послідовності бути більшою за верхню границю послідовності?

7. Чи існує послідовність, множина часткових границь якої співпадає з множиною простих чисел?

8. Чи існує послідовність, множина часткових границь якої співпадає з відрізком $[0,1]$?

1.14 Завдання для самостійної роботи № 5

Задача 5. *Знайти верхню та нижню границі послідовності.*

Варіант	Послідовність x_n, $n = 1, 2, \ldots$	Варіант	Послідовність x_n, $n = 1, 2, \ldots$
1	$x_n = (-1)^{n-1}(2 + \frac{3}{n})$	16	$x_n = 1 + n \sin \frac{\pi n}{3}$
2	$x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$	17	$x_n = \frac{n^2}{1+n^2} \cos \frac{\pi n}{3}$
3	$x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3 \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$	18	$x_n = (1 + \frac{1}{n})^n \cdot (-1)^n$
4	$x_n = \frac{n-1}{n+1} \cos \frac{2\pi n}{3}$	19	$x_n = \frac{n}{n+1} \sin^2 \frac{\pi n}{3}$
5	$x_n = (-1)^n \cdot n$	20	$x_n = 4(2 - \frac{2}{n}) + 3 \cdot (-1)^n$
6	$x_n = 1 + n \sin \frac{\pi n}{2}$	21	$x_n = \frac{1}{2}((\sqrt{5} + \sqrt{3}) + (-1)^n(\sqrt{5} - \sqrt{3}))$
7	$x_n = \frac{n^2}{1+n^2} \cos \frac{2n\pi}{3}$	22	$x_n = (-1)^{n-1}(4 + \frac{5}{n})$
8	$x_n = (1 + \frac{1}{n})^n \cdot (-1)^n + \sin \frac{n\pi}{4}$	23	$x_n = \frac{(-1)^n}{n^3} + \frac{3+(-1)^n}{4}$
9	$x_n = \frac{n}{n+1} \sin^2 \frac{n\pi}{4}$	24	$x_n = 3 + 4 \cdot (-1)^{n+1} + 5 \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$
10	$x_n = 3(1 - \frac{1}{n}) + 2(-1)^n$	25	$x_n = \frac{n-1}{n+1} \cos \frac{\pi n}{2}$
11	$x_n = \frac{1}{2}((e + \pi) + (-1)^n(e - \pi))$	26	$x_n = 1 + n \sin \frac{2\pi n}{3}$
12	$x_n = (-1)^{n-1}(3 + \frac{4}{n})$	27	$x_n = \frac{n^2}{1+n^2} \cos \frac{\pi n}{2}$
13	$x_n = \frac{(-1)^n}{n^2} + \frac{2+(-1)^n}{3}$	28	$x_n = (1 + \frac{1}{n})^n \cdot (-1)^n \sin \frac{2\pi n}{3}$
14	$x_n = 2 + 3 \cdot (-1)^{n+1} + 4 \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$	29	$x_n = \frac{n}{n+1} \sin^2 \frac{\pi n}{2}$
15	$x_n = \frac{n-1}{n+1} \cos \frac{\pi n}{3}$	30	$x_n = \frac{1}{2}((\sqrt{13} + \sqrt{11}) + (-1)^n(\sqrt{13} - \sqrt{11}))$

1.15 Число e

Розглянемо послідовність $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Очевидно, ця послідовність відповідає невизначеності вигляду $[1^\infty]$. Можна показати, що вона монотонно зростає і обмежена, тому має скінченну границю (див. теорему 1.1). Границю цієї послідовності позначимо символом e. Число e є *ірраціональним* (не зображується в вигляді частки a/b двох цілих чисел) та *трансцендентним* (не є коренем жодного полінома з цілими коефіцієнтами). Можна показати, що першими знаками числа e є $2,71$. Наразі усі знаки числа e невідомі, хоча, в той самий час, з'ясована достатньо велика кількість знаків після коми. Слід зауважити, що для наших подальших досліджень точне значення цих знаків не є принциповим, крім того, рівність

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

є саме означенням числа e, а не однією з його властивостей.

Приклад 24. *Знайти границю*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n .$$

Розв'язок. Будемо мати:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)} = \frac{1}{e\cdot 1} = \frac{1}{e} = e^{-1}.\square$$

1.16 Завдання для самостійної роботи № 6

Задача 6. *Знайти границю послідовності.*

Варіант	Послідовність x_n, $n = 1, 2, \ldots$	Варіант	Послідовність x_n, $n = 1, 2, \ldots$
1	$x_n = \left(1 - \frac{1}{5n}\right)^n$	16	$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+4}$
2	$x_n = \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^n$	17	$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+5}$
3	$x_n = \left(1 - \frac{1}{5n}\right)^{5n}$	18	$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+6}$
4	$x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{5n}$	19	$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n+4}$
5	$x_n = \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^n$	20	$x_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{n+4}$
6	$x_n = \left(1 - \frac{1}{5n}\right)^{2n+2}$	21	$x_n = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$
7	$x_n = \left(1 + \frac{1}{5n}\right)^n$	22	$x_n = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)}{\frac{1}{n}}$
8	$x_n = \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^n$	23	$x_n = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{3n}\right)}{\frac{1}{n}}$
9	$x_n = \left(1 + \frac{1}{5n}\right)^{5n}$	24	$x_n = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{5n}\right)}{\frac{1}{n}}$
10	$x_n = \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^n$	25	$x_n = \frac{\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right)}{\frac{1}{n}}$
11	$x_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$	26	$x_n = n(\ln(n+1) - \ln n)$
12	$x_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n}$	27	$x_n = n(\ln(2n+1) - \ln n)$
13	$x_n = \left(\frac{5n}{n+1}\right)^n$	28	$x_n = n(\ln(5n+1) - \ln n)$
14	$x_n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n$	29	$x_n = n(\ln(n+1) - \ln(5n))$
15	$x_n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{1/n}$	30	$x_n = 5n(\ln(5(n+1)) - \ln n)$

2 Границя функції

2.1 Означення і властивості границі функції

Будемо називати *околом точки* x_0 *радіусу* $\delta > 0$ симетричний інтервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta\}$ і позначати його $B(x_0, \delta)$. *Виколотим околом* цієї ж точки будемо називати цей самий інтервал без самої точки x_0. Позначення: $B^*(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$.

Переходимо до поняття границі функції в точці. В аналізі прийнято використовувати два означення границі, розглянемо їх.

Означення 2.1. Припустимо, що функція $f : B^*(x_0, \delta_0) \to \mathbb{R}$ визначена в деякому виколотому околі $B^*(x_0, \delta_0)$ точки x_0. Число $A \in \mathbb{R}$ називається *границею функції* f *у точці* x_0, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться число $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ таке, що $|f(x) - A| < \varepsilon$ при всіх $0 < |x - x_0| < \delta$. Позначення:

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x) \,.$$

Також використовують позначення $f(x) \to A$ при $x \to x_0$ та говорять, що *функція* f *прямує до числа* A *при* $x \to x_0$.

Означення 2.2. Припустимо, що функція $f : B^*(x_0, \delta_0) \to \mathbb{R}$ визначена в деякому виколотому околі $B^*(x_0, \delta_0)$ точки x_0. Число $A \in \mathbb{R}$ називається *границею функції* f *у точці* x_0, якщо для будь-якої послідовності $x_n \to x_0$, $n \to \infty$, $x_n \neq x_0$, виконується умова: $f(x_n) \to A$, $n \to \infty$.

Як ми бачимо, означення 2.2 спирається на поняття збіжної послідовності, що одразу створює зв'язок границі функції з границею послідовності. З приводу означень 2.1 і 2.2 маємо наступне

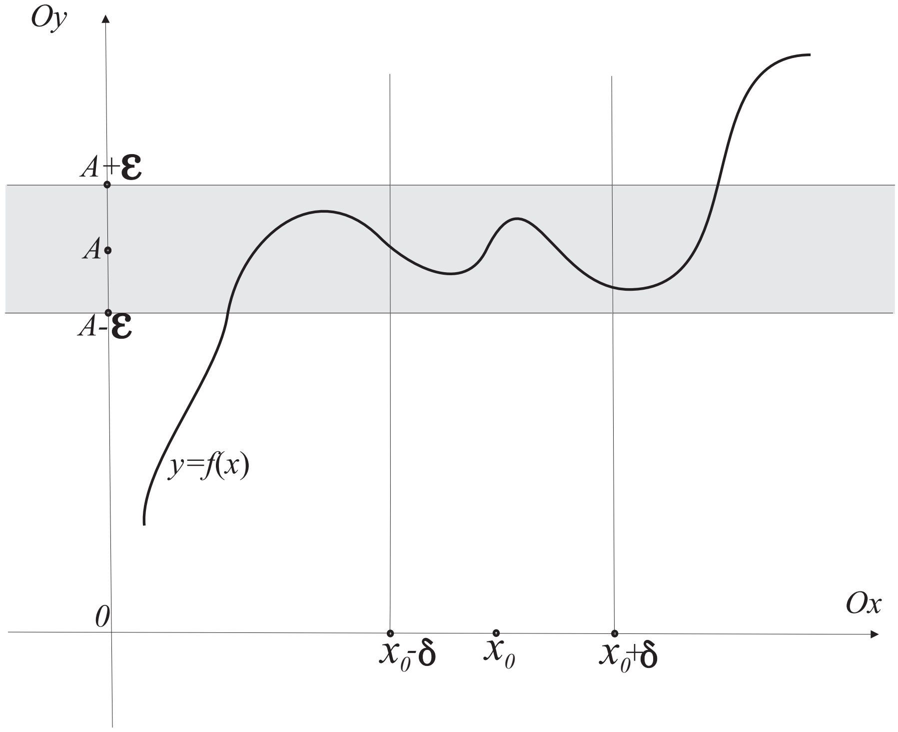
Твердження 2.1. *Означення 2.1 і 2.2 еквівалентні.*

В означенні 2.1 (як і означенні 2.2) головними є слова «**для будь-якого** ε». Як правило, **для деякого** ε означення 2.1 і 2.2 виконуються **завжди** (чому?), тому ці означення у зазначеній трохи зміненій інтерпретації фактично втрачають сенс. **Ще раз:** число ε у нас **будь-яке**, а число δ – **деяке.** Запам'ятайте це!

Геометрична інтерпретація границі

По осі Oy розглянемо *ε-смужку* у вигляді відкритого інтервалу

$$B(A, \varepsilon) = (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$$



Малюнок 2: Геометрична інтерпретація означення 2.1

(див. малюнок 2). Число A буде границею функції f в точці x_0, якщо *для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *ми можемо підібрати по осі* Ox *інтервал* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ *так, щоб всі значення функції* f *в цьому інтервалі (за виключенням точки* x_0*) потрапляли в* ε*-смужку* $B(A, \varepsilon)$.

Зверніть увагу, що в означенні границі не припускається визначення функції в самій точці x_0, а лише в деякому виколотому її околі. Таке припущення робиться з метою більш широкої степені загальності цього означення, бо існує багато функцій, не визначених в самій точці, але які мають там скінченну границю. Наприклад, можна показати, що функція $\varphi(x) = \frac{\sin x}{x}$ має границю при $x \to 0$ і вона дорівнює 1; в той самий час, сама функція не визначена в точці $x_0 = 0$.

З означення границі одразу випливає, що:

1) Функція $f(x) = x + c$ має границю в будь-якій точці x_0 при будь-якій сталій $c \in \mathbb{R}$, і вона дорівнює $x_0 + c$;

2) Функція $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$, має границю в будь-якій точці x_0 і вона дорівнює c («константа прямує сама до себе»).

Деякі властивості границь функції

Нехай функції f і g визначені в деякому околі точки x_0 і мають границі $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ і $B = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$. Мають місце наступні твердження:

1) границі функцій f і g єдині (тобто, числа A і B, якщо вони існують, визначаються однозначно);

2) існує границя функцій $\lambda \cdot f(x)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$, $f(x) \pm g(x)$ і $f(x) \cdot g(x)$, причому

$$\lim_{x\to x_0} (\lambda \cdot f(x)) = \lambda \cdot \lim_{x\to x_0} f(x) = \lambda A\,,$$

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x) = A \pm B\,,$$

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = A \cdot B\,;$$

3) якщо додатково $B \neq 0$, то існує границя функції $\frac{f(x)}{g(x)}$, причому

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \frac{A}{B}\,;$$

4) існує границя функції $|f(x)|$ при $x \to x_0$, причому

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |\lim_{x\to x_0} f(x)| = |A|\,.$$

Границя складної функції

5) Нехай функція $f : B(x_0, \varepsilon_0) \setminus x_0 \to \mathbb{R}$ визначена в деякому виколотому околі $B^*(x_0, \varepsilon_0) = B(x_0, \varepsilon_0) \setminus \{x_0\}$ точки x_0, а функція $g : B(y_0, \varepsilon_1) \setminus \{y_0\} \to \mathbb{R}$ визначена в деякому виколотому околі $B^*(y_0, \varepsilon_1) = B(y_0, \varepsilon_1) \setminus \{y_0\}$ точки y_0, причому $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$ і $\exists \lim\limits_{y\to y_0} g(y) := A$, крім того, $f(x) \neq y_0$ при $x \in B(x_0, \varepsilon_0) \setminus \{x_0\}$. Тоді

$$\exists \lim_{x\to x_0} g(f(x)) = A\,.$$

Неперервні функції

Функція $f : B(x_0, \varepsilon_0) \to \mathbb{R}$ називається *неперервною у точці* x_0, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Означення неперервності включає до себе визначеність функції f у самій точці x_0. Згідно властивостей 1)–4), наведених вище, сума, різниця, добуток, частка (якщо знаменник не дорівнює нулю) і суперпозиція неперервних функцій є неперервною функцією.

Нехай A – відрізок, інтервал, або півінтервал (скінченний або нескінченний). Функція f називається неперервною на множині A, якщо функція f є неперервною в кожній точці множини A. Клас усіх функцій, неперервних на A, позначається $C(A)$. Без доведення приймемо наступну

Теорема 2.1. *Усі елементарні функції (степенева, показникова, дробово-лінійна, логарифмічна, тригонометричні) є неперервними в області свого визначення. Зокрема,* $\lim\limits_{x\to x_0} x^\alpha = x_0^\alpha$ *для будь-якого* $\alpha > 0$ *і будь-якого* $x_0 \in \mathbb{R}$. *Так само,* $\lim\limits_{x\to x_0} e^x = e^{x_0}$, $\lim\limits_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$ *для будь-якого* $x_0 \in \mathbb{R}$, *і т.п.*

Приклад 25. *Обчислити*

$$\lim_{x\to 4}\left(5(x+3) - \frac{x}{x-3}\right).$$

Розв'язання. Очевидно, вираз під границею не містить невизначеностей при $x \to 4$, а всі вирази під знаком границі – неперервні функції в околі точки $x_0 = 4$. В такому випадку, залишається підставити під знак границі 4 замість x. Будемо мати:

$$\lim_{x\to 4}\left(5(x+3) - \frac{x}{x-3}\right) = 5(4+3) - \frac{4}{4-3} = 35 - 4 = 31\,. \ \square$$

Приклад 26. *Обчислити*

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}.$$

Розв'язання. Підстановкою $x \mapsto 1$ у чисельник та знаменник даного виразу, переконуємося, що обидва вони прямують до нуля при $x \to 1$. Отже, маємо невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Щоб її позбавитися, розкладемо чисельник і знаменник на множники. За формулою різниці квадратів ми одразу отримуємо $x^2 - 1 = (x - 1)(x+1)$. Розв'язуючи рівняння $2x^2 - x - 1 = 0$ через дискриминант, ми отримуємо, що $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{1}{2}$. Отже, $2x^2 - x - 1 = 2\,(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right)$. Враховуючи дані обчислення, а також властивості 1)–4) на сторінці 38, ми будемо мати, що

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{2\,(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{x+1}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)} = \frac{1+1}{2(1+\frac{1}{2})} = \frac{2}{3}\,.\square$$

Приклад 27. *Обчислити*

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}\,.$$

Розв'язання. Підстановкою $x \mapsto 1$ у чисельник та знаменник даного виразу, переконуємося, що обидва вони прямують до нуля при $x \to 1$. Отже, маємо невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Подальший розв'язок задачі полягає в розкритті цієї невизначеності. Для цього скористаємося теоремою Безу: якщо *поліном* $p(x)$ *має коренем число* $x_0 = 1$, *то він ділиться без решти на* $x - x_0$, тобто,

$$x^3-3x+2=(x-1)q(x)\,,$$

де $q(x)$ – деякій невідомий поліном степені 2. Знайдемо $q(x)$ діленням x^3-3x+2 у стовпчик на $x-1$. Будемо мати:

$$\begin{array}{l|l}
x^3-3x+2 & x-1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3-x^2} & x^2+x-2 \\
x^2-3x+2 & \\
\underline{x^2\ \ -x} & \\
\quad -2x+2 & \\
\quad \underline{-2x+2} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

Отже, $x^3-3x+2=(x-1)(x^2+x-2)$, $q(x)=x^2+x-2$.

Аналогічно, за теоремою Безу

$$x^4-4x+3=(x-1)q_1(x)\,,$$

де $q_1(x)$ – деякій невідомий поліном степені 2. Знайдемо його діленням x^4-4x+3 у стовпчик на $x-1$. Будемо мати:

$$\begin{array}{l|l}
x^4-4x+3 & x-1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3-4x+3} & x^3+x^2+x-3 \\
x^3-4x+3 & \\
\underline{x^3-x^2} & \\
x^2-4x+3 & \\
\underline{x^2\ \ -x} & \\
\quad -3x+3 & \\
\quad \underline{-3x+3} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

Отже, $x^4-4x+3=(x-1)(x^3+x^2+x-3)$, $q_1(x)=x^3+x^2+x-3$. В такому випадку,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x-2)}{(x-1)(x^3+x^2+x-3)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^3+x^2+x-3}\,. \tag{2.1.1}$$

Знову маємо невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для того, щоб її позбутися, слід ще раз провести ту саму процедуру: поділити в стовпчик чисельник і знаменник виразу (2.1.1) на $x-1$. Будемо мати:

$$\begin{array}{r|l} x^3+x^2+x-3 & x-1 \\ \cline{2-2} \underline{x^3-x^2} & x^2+2x+3 \\ 2x^2+x-3 & \\ \underline{2x^2-2x} & \\ 3x-3 & \\ \underline{3x-3} & \\ 0 & \end{array}$$

Отже, $x^3+x^2+x-3=(x-1)(x^2+2x+3)$. Шляхом знаходження коренів полному через дискриминант (або за теоремою Вієта) будемо мати: $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$. Тоді

$$\frac{x^2+x-2}{x^3+x^2+x-3}=\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+2x+3)}=\frac{x+2}{x^2+2x+3}\,. \tag{2.1.2}$$

Тоді з (2.1.1) та (2.1.2), а також з огляду на властивості 1)–4) на сторінці 38, ми отримаємо, що

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x^2+2x+3}=\frac{1+2}{1^2+2\cdot 1+3}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}\,. \ \square$$

Приклад 28. *Обчислити*

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)\,.$$

Розв'язання. Маємо невизначеність $[\infty-\infty]$. Шляхом перетворень позбудемося її. Використовуючи ділення в стовпчик (як у прикладі 27), будемо мати:

$$x^m-1=(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\ldots+x+1)\,,$$

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)\,.$$

Тоді, зводячи вираз під знаком границі до спільного знаменника, будемо мати:

$$\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} = -\left(\frac{m}{x^m - 1} - \frac{n}{1-x^n}\right) = \tag{2.1.3}$$

$$= -\left(\frac{m}{(x-1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x + 1)} - \frac{n}{(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)}\right) =$$

$$= -\frac{m\,(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1) - n(x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x + 1)}{(x-1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x + 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)}\,.$$

Зауважимо, що число $x_0 = 1$ є коренем чисельнику у виразі (2.1.3), тому цей вираз ділиться націло на $x - 1$ за теоремою Безу. Ділячи його в стовпчик, будемо мати:

$$m\left(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x\right) - n\left(x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x\right) =$$

$$= (x-1)\left(mx^{n-2} + 2mx^{n-3} + \ldots + m(n-1) - \right.$$
$$\left. - nx^{m-2} - 2nx^{m-3} - \ldots - (m-1)n\right)\,. \tag{2.1.4}$$

З (2.1.3) та (2.1.4) випливає, що

$$\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} = \tag{2.1.5}$$

$$= -\frac{mx^{n-2} + 2mx^{n-3} + \ldots + m(n-1) - nx^{m-2} - 2nx^{m-3} - \ldots - (m-1)n}{(x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x + 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)}\,.$$

У правій частині формули (2.1.5) невизначеності при $x \to 1$ вже нема. У чисельнику сума двох арифметичних прогресій:

$$\lim_{x\to 1}\left(mx^{n-2} + 2mx^{n-3} + \ldots + m(n-1) - nx^{m-2} - 2nx^{m-3} - \ldots - (m-1)n\right) =$$

$$= m + 2m + \ldots + m(n-1) - n - 2n - \ldots - (m-1)n =$$

$$= \frac{m + m(n-1)}{2}\cdot(n-1) + \frac{n + n(m-1)}{2}\cdot(m-1) = \frac{mn(n-m)}{2}\,. \tag{2.1.6}$$

Очевидно, крім того, що

$$\lim_{x\to 1}\left((x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x + 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)\right) = \tag{2.1.7}$$

$$= (\underbrace{1 + \ldots + 1}_{n}) \cdot (\underbrace{1 + \ldots + 1}_{m}) = mn\,.$$

Поєднуючи (2.1.5), (2.1.6) і (2.1.7), з огляду на теорему про арифметичні дії над границями (властивості 1)–4) на сторінці 38) ми отримаємо, що

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)=-\frac{mn(n-m)}{2mn}=\frac{m-n}{2}\,. \ \square$$

2.2 Завдання для самоконтролю

1. Чи є вірним твердження: «нехай функції f і g визначені в деякому околі точки x_0 і мають границі $A=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ і $B=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, $g(x)\neq 0$, тоді при $x\to x_0$ має границю функція $\varphi(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ і вона дорівнює $\frac{A}{B}$»?

2. Доведіть, що якщо функція $f(x)$ є *обмеженою* в деякому виколотому околі U точки x_0 (тобто, існує стала $C>0$ така, що $|f(x)|\leqslant C$ при $x\in U$), а функція $g(x)$ є *нескінченно малою* при $x\to x_0$ (тобто, $g(x)\to 0$ при $x\to x_0$), то функція $\varphi(x):=f(x)\cdot g(x)$ є нескінченно малою при $x\to x_0$.

3. Нехай

$$f(x)=x\sin\frac{1}{x}\,,\quad g(x)=\begin{cases}1\,, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}\,.$$

За наведеною вище вправою 2 $f(x)=x\sin\frac{1}{x}\to 0$ при $x\to 0$, оскільки $f(x)=x$ – нескінченно мала функція при $x\to 0$, а $g(x)=\sin\frac{1}{x}$, $|g(x)|\leqslant 1$ при $x\neq 0$, – обмежена функція в деякому виколотому околі точки $x_0=0$.

Розглянемо складну функцію $F(x)=g(f(x))$. Доведемо, що ця функція не має границі в нулі. Дійсно, якщо покласти $x_n=\frac{1}{\pi n}$, $n=1,2,\ldots$, то

$$F(x_n)=g(f(x_n))=g(\sin\pi n)=g(0)=0\to 0\quad\text{при}\quad n\to\infty\,.$$

Якщо ж покласти $y_n=\frac{1}{\pi/2+2\pi n}$, $n=1,2,\ldots$, то

$$F(y_n)=g(f(y_n))=g(\sin(\pi/2+2\pi n))=g(1)=1\to 1\quad\text{при}\quad n\to\infty\,.$$

Якщо функція F мала б границю при $x\to 0$, то з огляду на означення 2.2 функція F має одночасно прямувати як до 0, так і до 1, що суперечить єдиності границі функції F (властивість 1) на сторінці 38).

Висновок: складна функція $F(x)=g(f(x))$ не має границі при $x\to 0$; у той самий час, за сказаним вище, кожна з функцій f та g має границю при $x\to 0$. **Чи не суперечить цей факт властивості 5) на сторінці 38 про існування границі складної функції?**

4. Розглянемо означення 2.2:

Припустимо, що функція $f : B^*(x_0, \delta_0) \to \mathbb{R}$ *визначена в деякому виколотому околі* $B^*(x_0, \delta_0)$ *точки* x_0. *Число* $A \in \mathbb{R}$ *називається границею функції* f *у точці* x_0, *якщо для будь-якої послідовності* $x_n \to x_0$, $n \to \infty$, $x_n \neq x_0$, *виконується умова:* $f(x_n) \to A$, $n \to \infty$.

Чи можна в цьому означенні позбутися умови $x_n \neq x_0$: а) якщо не відомо, що функція f визначена в самій точці x_0?; б) якщо відомо, що функція f визначена в самій точці x_0? Чи зміниться сам зміст «нового» означення границі функції у випадку б) у порівнянні з «оригінальним» формулюванням означення 2.2?

5. Чи можна навести приклад функцій f і g, визначених в деякому виколотому околі точки $x_0 \in \mathbb{R}$ таких, що:

а) функція f має границю в точці x_0, функція g не має границі в точці x_0, а функція $F(x) = f(x) \cdot g(x)$ має границю в точці x_0?;

б) функція f має границю в точці x_0, функція g не має границі в точці x_0, а функція $F(x) = f(x) \cdot g(x)$ не має границі в точці x_0?

в) функція f не має границі в точці x_0, функція g не має границі в точці x_0, а функція $F(x) = f(x) \cdot g(x)$ має границю в точці x_0?

6. Чи можна навести приклад функцій f і g, визначених в деякому виколотому околі точки $x_0 \in \mathbb{R}$ таких, що:

а) функція f має границю в точці x_0, функція g не має границі в точці x_0, а функція $F(x) = f(x) + g(x)$ має границю в точці x_0?;

б) функція f має границю в точці x_0, функція g не має границі в точці x_0, а функція $F(x) = f(x) + g(x)$ не має границі в точці x_0?

в) функція f не має границі в точці x_0, функція g не має границі в точці x_0, а функція $F(x) = f(x) + g(x)$ має границю в точці x_0?

7. Чи можна навести приклад функцій f і g, визначених в деякому виколотому околі точки $x_0 \in \mathbb{R}$ таких, що:

а) функція $F(x) := f + g$ має границю в точці x_0, а функція $G(x) = f(x) \cdot g(x)$ не має границі в точці x_0?;

б) функція $F(x) := f + g$ не має границі в точці x_0, а функція $G(x) = f(x) \cdot g(x)$ має границю в точці x_0?;

в) функції $F(x) := f + g$ та $G(x) = f(x) \cdot g(x)$ не мають границі в точці x_0, а функція $H(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ має границю в точці x_0?;

8. Припустимо, що функція f визначена в деякому виколотому правому півоколі $(x_0, x_0 + \delta_0)$ точки x_0. Число $A \in \mathbb{R}$ називається *границею функції* f *у точці* x_0 *праворуч,* якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться число $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ таке, що $|f(x) - A| < \varepsilon$ при всіх $x \in (x_0, x_0 + \delta)$.

Позначення:

$$A = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)\,.$$

Припустимо, що функція f визначена в деякому виколотому лівому півоколі $(x_0 - \delta_0, x_0)$ точки x_0. Число $A \in \mathbb{R}$ називається *границею функції f у точці x_0 ліворуч,* якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться число $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ таке, що $|f(x) - A| < \varepsilon$ при всіх $x \in (x_0 - \delta, x_0)$. Позначення:

$$A = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x)\,.$$

Доведіть, що функція f, визначена в декому виколотому околі точки x_0, має границю в цій точці тоді і тільки тоді, коли вона має границю праворуч, границю ліворуч, і ці границі співпадають, причому, співпадають з границею функції f у даній точці.

2.3 Завдання для самостійної роботи № 7

Задача 7. *Знайти* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, *якщо функція* f *і точка* x_0 *задані для кожного з варіантів.*

Варіант	**Функція** $f(x)$, **точка** x_0	**Варіант**	**Функція** $f(x)$, **точка** x_0
1	$f(x) = \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$, $x_0 = 0$	16	$f(x) = \frac{x^{10}-1}{x^5-1}$, $x_0 = 1$
2	$f(x) = \frac{(1+2x)(1+3x)(1+4x)-1}{x}$, $x_0 = 0$	17	$f(x) = \frac{x^9-1}{x^5-1}$, $x_0 = 1$
3	$f(x) = \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{5x}$, $x_0 = 0$	18	$f(x) = \frac{x^8-1}{x^5-1}$, $x_0 = 1$
4	$f(x) = \frac{(1+2x)(1+3x)(1+4x)-1}{5x}$, $x_0 = 0$	19	$f(x) = \frac{x^{10}-1}{x^9-1}$, $x_0 = 1$
5	$f(x) = \frac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$, $x_0 = 0$	20	$f(x) = \frac{x^m-1}{x^n-1}$, $x_0 = 1$, $m, n \in \mathbb{N}$
6	$f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$, $x_0 = 3$	21	$f(x) = \ln \frac{x^{10}-1}{x^9-1}$, $x_0 = 1$
7	$f(x) = \frac{2x^2-10x+12}{x^2-8x+15}$, $x_0 = 3$	22	$f(x) = \sin \frac{x^{10}-1}{x^9-1}$, $x_0 = 1$
8	$f(x) = \frac{3x^2-15x+18}{x^2-8x+15}$, $x_0 = 3$	23	$f(x) = \left(\frac{x^{10}-1}{x^9-1}\right)^2$, $x_0 = 1$
9	$f(x) = \frac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$, $x_0 = 1$	24	$f(x) = \left(\frac{x^{10}-1}{x^9-1}\right)^3$, $x_0 = 1$
10	$f(x) = \frac{2x^4-6x+4}{x^5-4x+3}$, $x_0 = 1$	25	$f(x) = \sin \ln \frac{x^{10}-1}{x^9-1}$, $x_0 = 1$
11	$f(x) = \frac{x^4-3x+2}{2x^5-8x+6}$, $x_0 = 1$	26	$f(x) = \sin \cos \frac{x^{10}-1}{x^9-1}$, $x_0 = 1$
12	$f(x) = \frac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}$, $x_0 = -1$	27	$f(x) = \ln \sin \cos \frac{x^{10}-1}{x^9-1}$, $x_0 = 1$
13	$f(x) = \frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$, $x_0 = 1$	28	$f(x) = \ln \frac{x^m-1}{x^n-1}$, $x_0 = 1$, $m, n \in \mathbb{N}$
14	$f(x) = \frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}$, $x_0 = 2$	29	$f(x) = \frac{x+x^2+...+x^n-n}{x-1}$, $x_0 = 1$
15	$f(x) = \frac{x^4-8x^2+16}{x^3-2x^2-4x+8}$, $x_0 = 2$	30	$f(x) = \sin^3 \left(\frac{x^8-1}{x^5-1}\right)^3$, $x_0 = 1$

2.4 Чудові границі

Ми вже побачили, що обчислення границь пов'язано з розкриттям невизначеностей. Далеко не завжди це є легким процесом. Навіть у випадку поліноміальних і дробово-лінійних виразів, як це було при розгляданні прикладів 26–28, ми мали справу з деякими перетвореннями, що займають як менше сторінки (приклади 26–27), так і значно більше (приклад 28). Загальною ідеєю розв'язання прикладів 26–28 є розклад виразів на множники; в той самий час, є багато прикладів, де цей прийом не дасть бажаного результату. Також серед цих прикладів є чимало таких, де «загальна ідея» не вгадується, бо елементарні перетворення не позбавляють невизначеностей і не розкривають їх.

З метою спрощення розв'язання такого типу задач впроваджено поняття **чудових границь**. Чудові границі – це загалом п'ять рівностей, які слід запам'ятати. Вони широко використовуються в загальній фізико-математичній літературі, кожна по замовчуванню має свій номер. Справедлива наступна теорема.

Теорема 2.2. *Є правильними наступні рівності:*

$$1)\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1\,,$$

$$2)\lim_{x\to0}(1+x)^{1/x}=e\,,$$

$$3)\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a\,, a>0, a\neq1\,,$$

$$4)\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}\,, a>0, a\neq1\,,$$

$$5)\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^\beta-1}{x}=\beta\,, \beta\in\mathbb{R}\,.$$

Зауважимо, що кожна чудова границя «прив'язана» до функцій певного типу. При справі з тригонометричними функціями слід «виходити» на першу чудову границю, степеневими – на п'яту, логарифмічними – на четверту. При роботі з виразами «вираз у степені вираз» ми працюємо з другою чудовою границею. Якщо у невизначеності присутня показникова функція, то це є модифікацією третьої чудової границі. Слід також розуміти, що по заданому виразу майже завжди видно, до якої чудової границі його можна звести. Ми побачимо це на прикладах, котрі розглядатимуться нижче.

Еквівалентні функції

Властивості 1)–5) дуже тісно пов'язані з поняттям еквівалентних функцій, яке використовується при обчисленнях і значно полегшає обчислення границь.

Функції f і g, визначені в деякому виколотому околі точки x_0, називаються *еквівалентними* при $x \to x_0$, якщо існує функція φ, визначена в деякому виколотому околі U точки x_0, така що $f(x) = g(x) \cdot \varphi(x)$ при всіх $x \in U$, причому $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 1$. Позначення: $f \sim g$ при $x \to x_0$. Зокрема, з огляду на властивості 1)–5) маємо: $\sin x \sim x$ при $x \to 0$, $(1+x)^\beta - 1 \sim x\beta$ при $x \to 0$ і т.п. Справедлива наступна

Теорема 2.3. *(i) Якщо функції f і g еквівалентні при $x \to x_0$ і хоча б одна з них має границю при $x \to x_0$, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$. (ii) Якщо функції f і g еквівалентні при $x \to x_0$ і, крім того, h – деяка функція, визначена в деякому виколотому околі точки x_0, то $fh \sim gh$ при $x \to x_0$.*

Зауваження 2.1. Твердження (ii) теореми 2.3 означає, що будь-які множники у виразах можна змінювати на еквівалентні до них. Підкреслимо, що це правило не розповсюджується на доданки. Розглянемо, наприклад, функцію $\varphi(x) = \sin x - x$. Якщо доданки можна було б змінювати на еквівалентні, то ми мали б за першою чудовою границею, що $\sin x - x \sim 0$ при $x \to 0$. Проте, з умови $\varphi(x) \sim 0$ випливає, що $\varphi(x) \equiv 0$ у деякому околі нуля (обґрунтуйте це!). Отримана суперечність вказує на те, що $\sin x - x \not\sim 0$ при $x \to 0$.

Звернемося до прикладів з використанням чудових границь.

Приклад 29. *Обчислити границю*

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}.$$

Розв'язання. Підстановкою $x \mapsto 4$ переконуємося, що дана функція відповідає невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$. Підведемо її під п'яту чудову границю. Позначимо $\sqrt{x} - 2 := t$, тоді $t \to 0$. Будемо мати: $x = (t+2)^2$,

$$\frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2} = \frac{\sqrt{2t^2 + 8t + 9} - 3}{t} =$$

$$3 \cdot \frac{\sqrt{\frac{2t^2}{9} + \frac{8t}{9} + 1} - 1}{t} = 3 \cdot \frac{\sqrt{\frac{2t^2}{9} + \frac{8t}{9} + 1} - 1}{\left(\frac{2t^2}{9} + \frac{8t}{9}\right) t} \cdot \left(\frac{2t^2}{9} + \frac{8t}{9}\right) \sim 3 \cdot \frac{1}{2t} \cdot \left(\frac{2t^2}{9} + \frac{8t}{9}\right) =$$

$$= 3 \cdot \left(\frac{t}{9} + \frac{4}{9}\right) \to \frac{4}{3}\,, \quad t \to 0\,.$$

У співвідношенні $3 \cdot \frac{\sqrt{\frac{2t^2}{9}+\frac{8t}{9}+1}-1}{\left(\frac{2t^2}{9}+\frac{8t}{9}\right)t} \cdot \left(\frac{2t^2}{9} + \frac{8t}{9}\right) \sim 3 \cdot \frac{1}{2t} \cdot \left(\frac{2t^2}{9} + \frac{8t}{9}\right)$ ми скористалися теоремою 2.3 для функції $f(t) = \frac{\sqrt{\frac{2t^2}{9}+\frac{8t}{9}+1}-1}{\left(\frac{2t^2}{9}+\frac{8t}{9}\right)}$ і $g(t) = \frac{1}{2}$, при цьому, $h(t) = 3\left(\frac{2t^2}{9} + \frac{8t}{9}\right)$. У свою чергу, еквівалентність функцій f і g є результатом п'ятої чудової границі ($\beta = \frac{1}{2}$), а також теореми про границю складної функції $g(f(t))$, див. властивість 5 на стор. 38 ($f(t) = \frac{2t^2}{9} + \frac{8t}{9}$, $g(y) = \frac{\sqrt{y+1}-1}{y}$). $\square$

Приклад 30. *Обчислити границю*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}\,.$$

Розв'язання. Підстановкою $x \mapsto 0$ переконуємося, що дана функція відповідає невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$. Скористаємося формулою косинуса подвійного кута. Маємо:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x\,,$$

тоді

$$\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}\,.$$

Отже,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\frac{x^2}{4}}{x^2} = \frac{1}{2}\,.$$

В даному випадку ми скористалися першою чудовою границею, застосованою у вигляді: $\sin\frac{x}{2} \sim \frac{x}{2}$ і $\sin^2\frac{x}{2} \sim \frac{x^2}{4}$. $\square$

Приклад 31. *Обчислити границю*

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}\,.$$

Розв'язання. Підстановкою $x \mapsto 0$ переконуємося, що дана функція відповідає невизначеності $[1^\infty]$. Зведемо обчислення даного прикладу до другої чудової границі. Якщо позначити $\frac{1+\tan x}{1+\sin x} = 1 + t$, то $t \to 0$ і $t = \frac{\tan x - \sin x}{1+\sin x}$. Тоді

$$\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}} = (1+t)^{\frac{1}{\sin x}} =$$

$$\left((1+t)^{1/t}\right)^{\frac{t}{\sin x}} \sim e^{\frac{t}{\sin x}} =$$

$$= e^{\frac{(\tan x - \sin x)}{(1+\sin x)\sin x}} = e^{\frac{\left(\frac{1}{\cos x} - 1\right)}{(1+\sin x)}} \to e^0 = 1\,,$$

$x \to 0$. □

Приклад 32. *Обчислити*

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^{x^2} - b^{x^2}}{(a^x - b^x)^2}\,, a > 0, b > 0\,.$$

Розв'язання. Маємо невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$. Зауважимо, що згідно третьої чудової границі

$$a^{x^2} - b^{x^2} = b^{x^2}\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{x^2} - 1\right) = b^{x^2}x^2 \cdot \frac{\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{x^2} - 1\right)}{x^2} \sim b^{x^2}x^2 \ln\frac{a}{b}\,,$$

$$(a^x - b^x)^2 = b^{2x}\frac{\left(\left(\frac{a}{b}\right)^x - 1\right)^2}{x^2} \cdot x^2 \sim b^{2x}\ln^2\frac{a}{b}x^2\,.$$

В такому випадку,

$$\frac{a^{x^2} - b^{x^2}}{(a^x - b^x)^2} \sim \frac{b^{x^2}x^2\ln\frac{a}{b}}{b^{2x}\ln^2\frac{a}{b}x^2} = b^{x^2 - 2x} \cdot \ln^{-1}\frac{a}{b} \to \ln^{-1}\frac{a}{b}\,, x \to 0\,.\square$$

Приклад 33. *Обчислити*

$$\lim_{x \to 1}(1-x)\log_x 2\,.$$

Розв'язання. Будемо мати, що $(1-x)\log_x 2 = (1-x)\frac{\ln 2}{\ln x}$. Очевидно, цей вираз відповідає невизначеності $0 \cdot \infty$. Щоб позбутися неї, зробимо деякі елементарні перетворення та скористаємося четвертою чудовою границею. Будемо мати:

$$(1-x)\frac{\ln 2}{\ln x} = \{x = 1+t, t \to 0\} = -t\frac{\ln 2}{\ln(1+t)} \sim -\ln e \ln 2 = \ln\frac{1}{2}\,. \ \square$$

2.5 Завдання для самоконтролю

1. Нехай функції $f \sim g$ при $x \to x_0$. Чи вірно, що $g \sim f$?

2. *Відношенням* ρ на множині M називається будь-яка підмножина ρ декартового добутку $M \times M$. Відношення називається відношенням *еквівалентності,* якщо воно *рефлексивне* ($(f, f) \in \rho$ для будь-якого $f \in M$), *симетричне* ($(f, g) \in \rho \Rightarrow (g, f) \in \rho$) та *транзитивне* ($(f, g) \in \rho, (g, h) \in \rho \Rightarrow (f, h) \in \rho$). Доведіть, що наведене вище поняття еквівалентних функцій при $x \to x_0$ дійсно є відношенням еквівалентності.

3. Нехай $f \sim g$ при $x \to x_0$. Чи вірно, що для функції h, яка має границю в точці x_0, виконана умова $f + h \sim g + h$ при $x \to x_0$?

4. Нехай f і g – функції, визначені в деякому виколотому околі точки x_0, причому в цьому околі $g \neq 0$ і $\frac{f}{g} \to 1$ при $x \to x_0$. Чи вірно, що $f \sim g$ при $x \to x_0$? Чи вірно обернене твердження?

5. Будемо міркувати наступним чином. Розглянемо функцію $\varphi(x) = 1$. При $x \neq 0$ за першою чудовою границею будемо мати:

$$1 = \frac{\sin x - x}{\sin x - x} \sim \frac{0}{\sin x - x} \to 0$$

при $x \to 0$. Отже, $1 \to 0$ при $x \to 0$, що не може виконуватись. В чому причина такого висновку (який наведений вище крок виявився помилковим)?

2.6 Завдання для самостійної роботи № 8

Задача 8. *Знайти* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, *якщо функція* f *і точка* x_0 *задані для кожного з варіантів* ($\tan x$ *позначає тангенс* x, *а* $\cot x$ *– котангенс* x.)

Варіант	**Функція** $f(x)$, **точка** x_0	**Варіант**	**Функція** $f(x)$, **точка** x_0
1	$f(x) = \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$, $x_0 = -8$	16	$f(x) = \frac{\sin x - \sin a}{x-a}$, $x_0 = a \in \mathbb{R}$
2	$f(x) = \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$, $x_0 = 3$	17	$f(x) = \frac{\cos x - \cos a}{x-a}$, $x_0 = a \in \mathbb{R}$
3	$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$, $x_0 = -2$	18	$f(x) = \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$
4	$f(x) = \frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$, $x_0 = 16$	19	$f(x) = \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$
5	$f(x) = \frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$, $x_0 = 8$	20	$f(x) = \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$, $x_0 = 1$
6	$f(x) = \frac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{x}$, $x_0 = 0$	21	$f(x) = \left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$, $x_0 = 0$
7	$f(x) = \frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x+x^2}$, $x_0 = 0$	22	$f(x) = \left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$, $x_0 = 0$
8	$f(x) = \frac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$, $x_0 = 0$	23	$f(x) = (\tan x)^{\tan 2x}$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$
9	$f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$, $x_0 = 0$	24	$f(x) = (\sin x)^{\tan x}$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$
10	$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)}$, $x_0 = 0$	25	$f(x) = \left(\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right)^{\cot x}$, $x_0 = 0$
11	$f(x) = \frac{\sin 5x}{3x}$, $x_0 = 0$	26	$f(x) = \frac{a^{a^x} - a^{x^a}}{a^x - x^a}$, $x_0 = a$, $a > 0$
12	$f(x) = \frac{\sin mx}{\sin nx}$, $x_0 = \pi$, $m, n \in \mathbb{N}$	27	$f(x) = \frac{a^x - a^b}{x-b}$, $x_0 = b$, $a > 0$
13	$f(x) = x \cot 3x$, $x_0 = 0$	28	$f(x) = \frac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^2+e^{2x})}$, $x_0 = 0$
14	$f(x) = \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$, $x_0 = 0$	29	$f(x) = \frac{\ln(1+xe^x)}{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$, $x_0 = 0$
15	$f(x) = \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$, $x_0 = 0$	30	$f(x) = \frac{\ln\left(nx+\sqrt{1-n^2x^2}\right)}{\ln\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)}$, $x_0 = 1$

2.7 Нескінченні границі та границі на нескінченності

Так само, як і у випадку послідовностей, для функцій можна визначити їх прямування до нескінченності. Зокрема, є коректними означення, що стосуються $x \to \infty$ та $x \to \pm\infty$.

Означення 2.3. Нехай функція f визначена в деякому виколотому околі точки $x_0 \in \mathbb{R}$. Будемо говорити, що f є *нескінченно великою* при $x \to x_0$, якщо для будь-якого $M > 0$ існує $\delta = \delta(M) > 0$ таке, що при $0 < |x| < \delta$, виконується умова $f(x) > M$. Будемо говорити, що f є *нескінченно великою додатною* при $x \to x_0$, якщо для будь-якого $M > 0$ існує $\delta = \delta(M) > 0$ таке, що при $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується умова $f(x) > M$. Будемо говорити, що f є *нескінченно великою від'ємною* при $x \to x_0$, якщо для будь-якого $M < 0$ існує $\delta = \delta(M) > 0$ таке, що при $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується умова $f(x) < M$.

Означення 2.4. Нехай функція f визначена в деякому нескінченному інтервалі (δ_0, ∞), $\delta_0 \in \mathbb{R}$. Будемо говорити, що f *має своєю границею число* $A \in \mathbb{R}$ *при* $x \to +\infty$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, $\delta > \delta_0$, таке що $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $x \in (\delta, \infty)$.

Означення 2.5. Нехай функція f визначена в деякому нескінченному інтервалі $(-\infty, \delta_0)$, $\delta_0 \in \mathbb{R}$. Будемо говорити, що f *має своєю границею число* $A \in \mathbb{R}$ *при* $x \to -\infty$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta = \delta(\varepsilon) < 0$, $\delta < \delta_0$, таке що $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $x \in (-\infty, \delta)$.

Означення 2.6. Нехай функція f визначена зовні деякого скінченного інтервала $(-\delta_0, \delta_0)$, $\delta_0 > 0$. Будемо говорити, що f *має своєю границею число* $A \in \mathbb{R}$ *при* $x \to \infty$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, $\delta > \delta_0$, таке що $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $|x| > \delta$.

Можна також визначити прямування функції до ∞, $+\infty$ та $-\infty$ при $x \to \infty$, $\pm\infty$. Це означення дається аналогічно означенням, наведеним вище (спробуйте сформулювати їх самостійно!). Має місце наступна

Теорема 2.4. *Якщо функція $f(x)$ є нескінченно великою при $x \to x_0$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (нескінченно великою додатною, або від'ємною), то обернена до неї $\varphi(x) := \frac{1}{f(x)}$ є нескінченно малою, тобто, $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$. Обернене твердження для довільної нескінченно малої функції φ також вірне за умови, що ця функція не обертається в нуль в деякому виколотому околі точки x_0.*

Деякі властивості нескінченно малих функцій

1. Сума, різниця та добуток нескінченно малих функцій є нескінченно малою функцією.

2. Множення нескінченно малої функції на обмежену є нескінченно малою функцією. Нагадаємо, що функція $f(x)$, визначена в деякому виколотому околі точки $x_0 \in \mathbb{R}$, називається *обмеженою,* якщо існує стала $C > 0$ така, що $|f(x)| \leqslant C$ при всіх x, що належать даному виколотому околу. Формулювання обмеженої функції, а також твердження пунктів 1-2 є вірним не тільки для скінченних точок x_0, але й $x_0 = \infty, \pm\infty$ (що в такому випадку природньо вважати околом точки x_0 з огляду на означення 2.4–2.6?).

Розглянемо деякі приклади щодо обчислення границь на нескінченності.

Приклад 34. *Обчислити*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right).$$

Розв'язання. Оскільки границь $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\sqrt{x+1}$ та $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\sqrt{x}$ не існує (доведіть це!), даний приклад відповідає випадку, коли під знаком границі нема невизначеності у класичному сенсі цього слова. Тим не менш, запропонована для обчислення границя існує і дорівнює нулю (доведемо це). За формулою з тригонометрії про різницю синусів, будемо мати:

$$\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x} = 2\sin\left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right). \quad (2.7.1)$$

З'ясуємо поведінку виразу $\sqrt{x+1}-\sqrt{x+1}$ при $x\to+\infty$. Домножуючи і ділячи вираз $\sqrt{x+1}-\sqrt{x+1}$ на спряжений до нього, будемо мати:

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x+1} =$$

$$= \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\cdot\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}. \quad (2.7.2)$$

Очевидно, знаменник у правій частині (2.7.2) прямує до нескінченності (доведіть це строго!), тому сам вираз у (2.7.2) прямує до нуля як обернена до нескінченно великої функції (теорема 2.4).

Тоді з (2.7.1) випливає, що $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)=0$. Дійсно, оскільки $y=\sin x$ – неперервна функція на $\mathbb{R}$, то $f_1(x):=\sin\left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right)\to \sin 0 = 0$ при $x\to\infty$. Крім того, очевидно, функція $f_2(x):=\cos\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right)$

обмежена на $\mathbb{R}$, оскільки $|f_2(x)| \leqslant 1$ при всіх $x \in \mathbb{R}$. Отже, у (2.7.1) маємо множення нескінченно малої функції f_1 на обмежену функцію f_2 при $x \to +\infty$. Тоді функція $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$ є нескінченно малою за властивістю 2 на сторінці 54. Отже, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}\right) = 0$. □

Приклад 35. *Обчислити*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^8 + 7x^2 + 1}{6x^8 + 6x^7 + 3x^3 - 8}\,.$$

Розв'язання. Розділимо чисельник і знаменник на x у найстарший степені серед усіх, що зустрічаються в даному виразі. В даному випадку це x^8. Будемо мати:

$$\frac{5x^8 + 7x^2 + 1}{6x^8 + 6x^7 + 3x^3 - 8} = \frac{5 + \frac{7}{x^6} + \frac{1}{x^8}}{6 + \frac{6}{x} + \frac{3}{x^5} - \frac{8}{x^8}}\,.$$

Усі дроби $\frac{7}{x^6}$, $\frac{1}{x^8}$, $\frac{6}{x}$, $\frac{3}{x^5}$ і $\frac{8}{x^8}$ прямують до нуля при $x \to \infty$ як функції, чиї обернені є нескінченно великими при таких x. Тому

$$\frac{5 + \frac{7}{x^6} + \frac{1}{x^8}}{6 + \frac{6}{x} + \frac{3}{x^5} - \frac{8}{x^8}} \to \frac{5}{6}\,, \quad x \to \infty\,.$$ □

Приклад 36. *Обчислити*

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\ln \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{x + \sqrt{x^2-1}} \cdot \ln^{-2} \frac{x+1}{x-1} \right).$$

Розв'язання. Легко бачити, що маємо в даному прикладі справу з невизначеністю $[0 \cdot \infty]$. Щоб її позбутися, зведемо розв'язання до четвертої чудової границі. Зобразимо $\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}} = 1 + t$, тоді

$$t = \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{x^2-1}}{x + \sqrt{x^2-1}} =$$

$$= \frac{2}{\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{x^2-1}\right)} \to 0 \qquad \text{при} \qquad x \to +\infty\,.$$

За четвертою чудовою границею

$$\ln \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{x + \sqrt{x^2-1}} = \ln(1+t) \sim t =$$

$$= \frac{2}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{x^2-1}\right)}\,, \quad x \to +\infty\,. \tag{2.7.3}$$

Аналогічно, позначаючи $\frac{x+1}{x-1} = 1+p$, ми отримаємо, що

$$p = \frac{2}{x-1} \to 0\,, \quad x \to +\infty\,.$$

Тоді за четвертою чудовою границею

$$\ln^{-2}\frac{x+1}{x-1} = \ln^{-2}(1+p) \sim p^{-2} = \frac{(x-1)^2}{4}\,. \tag{2.7.4}$$

З огляду на формули (2.7.3) та (2.7.4), ми отримаємо, що

$$\ln\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\ln^{-2}\frac{x+1}{x-1} \sim$$

$$\sim \frac{2}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{x^2-1}\right)}\cdot\frac{(x-1)^2}{4} =$$

$$= \frac{2}{\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}\cdot\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}{4} \to \frac{1}{8}\,, \quad x \to +\infty\,.\square$$

2.8 Завдання для самоконтролю

1. Чи є нескінченно великою: а) сума двох нескінченно великих функцій f і g?; б) добуток двох нескінченно великих функцій f і g? Як зміняться відповіді на ці питання, якщо замість нескінченно великих функцій ми будемо розглядати нескінченно великі додатні f і g?

2. Якою буде функція $f + C$, $C \in \mathbb{R}$, при $x \to x_0$, якщо відомо, що при таких x сама функція f є нескінченно великою?

3. Нехай функція f має скінченну границю $A \in \mathbb{R}$ при $x \to \infty$. Що можна сказати про границю функції $\varphi(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ в точці $x_0 = 0$?

4. Чи можна підібрати функції f і g так, щоб їх сума при $x \to 0$ була нескінченно великою, а добуток – нескінченно малою функцією при тих самих x? А навпаки?

5. Чи існує $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$? А $\lim\limits_{x\to\infty} |\sin x|$?

6. Чи можна підібрати так функції f і g, щоб їх сума, добуток і різниця при $x \to \infty$ була нескінченно великою функцією, а $\frac{f}{g}$ прямувало б до нуля при тих самих x?

7. Знайдіть $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x}$.

8. Знайдіть $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x^2}$.

9. Чи можна підібрати функції f і g так, щоб кожна з них була нескінченно великою в околі точки $x_0 = 0$, але сума мала б у нулі скінченну границю?

10. Знайдіть область визначення функції

$$f(x) = \sin\left(\cos\left(\ln^2\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)\right)\right)$$

та доведіть її неперервність в усіх точках області визначення.

2.9 Завдання для самостійної роботи № 9

Задача 9. *Знайти границю функції f для кожного з варіантів.*

Варіант	**Границя**	**Варіант**	**Границя**
1	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}$	16	$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}\right)$
2	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^3}$	17	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^2+3x}-\sqrt{x^2-2x}\right)$
3	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}$	18	$\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{3}}\left((x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}}\right)$
4	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$	19	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{x}$
5	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$	20	$\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\ln(x+1)-\ln x\right)$
6	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\ln(x+1)-\sin\ln(x)\right)$	21	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\tan\frac{100+x^2}{1+100x^2}\right)$
7	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^2-x+1\right)}{\ln(x^{10}+x+1)}$	22	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$
8	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(2+e^{3x}\right)}{\ln(3+e^{2x})}$	23	$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$
9	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}{\ln\left(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}\right)}$	24	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x^2+x}-\sqrt{1-x+x^2}\right)$
10	$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+2^x\right)\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)$	25	$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1+x^2+x}-\sqrt{1-x+x^2}\right)$
11	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$	26	$\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{x}{x+1}\right)$
12	$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$	27	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+2x^2+3x^2+4}{5x^5-x^6}$
13	$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}$	28	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+2x^{18}+3x^2+4}{5x^5-x^6}$
14	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}$	29	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+2x^2+3x^2+4}{x+7}$
15	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}\right)$	30	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2x^3+3x^2+4}{3x^3+7}$

2.10 Точки розриву та їх класифікація

В попередніх параграфах було розглянуто поняття неперервності функції. Нагадаємо, що функція $f : B(x_0, \varepsilon_0) \to \mathbb{R}$ називається *неперервною у точці* x_0, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Проте ця умова може порушуватись в деяких точках.

Означення 2.7. Припустимо, що функція задана в деякому виколотому околі точки x_0. Будемо називати точку x_0 *точкою розриву*, якщо функція в ній не задана, або не є неперервною.

Приклад 37. *Перевірити, чи є функція $f(x) = [x]$ неперервною в точці 1.*

Розв'язання. Припустимо, що дана функція є неперервною в точці 1, а отже має в цій точці границю. Тоді для будь-якої послідовності $x_n \to 1$, послідовність $f(x_n)$ повинна збігатися до одного і того ж самого значення. Розглянемо дві послідовності: $a_n = 0,9,\ 0,99,\ 0,999...$, $b_n = 1,1,\ 1,01,\ 1,001...$.

Очевидно, що обидві послідовності збігаються до 1, але $f(a_n) = 0$ для будь-якого n, а $f(b_n) = 1$. Прийшли до протиріччя, а отже функція не має границі в цій точці, а тому не являється неперервною. □

Є досить багато причин, за яких функція може не виявитись неперервною в деякій точці. Зокрема, в ній може не існувати границя. Може також статися, що границя в ній існує, але сама функція в цій точці не задана, або значення границі може не співпасти зі значенням функції. Отже, можна зробити висновок, що точки розриву можна певним чином класифікувати. Для того щоб це зробити, згадаємо означення лівосторонньої та правосторонньої границі, а також одну з теорем, яку необхідно було довести в якості завдання для самоконтролю, в одному із попередніх параграфів:

Означення 2.8. Припустимо, що функція f визначена в деякому виколотому правому півоколі $(x_0, x_0 + \delta_0)$ точки x_0. Число $A \in \mathbb{R}$ називається *границею функції f у точці x_0 праворуч,* якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться число $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ таке, що $|f(x) - A| < \varepsilon$ при всіх $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Позначення:

$$A = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)\,.$$

Означення 2.9. Припустимо, що функція f визначена в деякому виколотому лівому півоколі $(x_0 - \delta_0, x_0)$ точки x_0. Число $B \in \mathbb{R}$ називається *границею функції f у точці x_0 ліворуч,* якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться число $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ таке, що $|f(x) - B| < \varepsilon$ при всіх

$x \in (x_0 - \delta, x_0)$. Позначення:

$$B = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x)\,.$$

Теорема 2.5. Функція f, визначена в декому виколотому околі точки x_0, має границю в цій точці тоді і тільки тоді, коли вона має границю праворуч, границю ліворуч, і ці границі співпадають, причому, співпадають з границею функції f у даній точці.

Отже, якщо функція не має границю в певній точці, це означае що, або лівостороння границя і правостороння границя не співпадають, або хоча б одна з них не існує.

Для неперервних функцій лівостороння та правостороння границі співпадають, але для функцій які мають розрив, це не завжди так. Наведемо приклади обчислення лівосторонньої та правосторонньої границі деяких функцій:

Приклад 38. *Знайти лівосторонню та правосторонню границі функції $f(x) = x^2 + x + 1$ в точці 1.*

Розв'язання. Очевидно, що дана функція є неперервною на всій області визначення (як і будь-який многочлен), отже, правостороння і лівостороння границі в кожній точці співпадають як з границею функції, так і з значенням, яке досягається в цій точці. Звідси маємо:

$$\lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{x \to 1-0} f(x) = f(1) = 3\,.\square$$

Приклад 39. *Знайти лівосторонню та правосторонню границі функції $f(x)$ в точці 0, якщо*

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \le 0 \\ x - 1, & \text{якщо } x > 0 \end{cases}$$

Розв'язання. Процес знаходження лівосторонньої на правосторонньої границі є досить схожим на знаходження границі. Різниця полягає в тому, що в таких завданнях, як правило, функція поводить себе по різному в правому та лівому півоколах, що треба враховувати при розв'язку завдання. Зокрема, $f(x) = x^2$ та $f(x) = x - 1$ в лівому та правому півоколах відповідно. Звідси маємо:

$$\lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to +0} (x - 1) = -1\,,$$

$$\lim_{x\to -0} f(x) = \lim_{x\to -0} x^2 = 0\,.$$

За теоремою 2.5 маємо, що границя функції в цій точці не існує. Отже функція має розрив (як стане зрозуміло трохи пізніше, розрив першого роду).□

Проте, кусково-задана функція може і не мати розриву.

Приклад 40. *Знайти лівосторонню та правосторонню границі функції в точці 0, якщо*

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \textit{якщо } x \leqslant 0\,, \\ x^4, & \textit{якщо } x > 0 \end{cases}$$

Розв'язання. Будемо мати, що

$$\lim_{x\to +0} f(x) = \lim_{x\to +0} x^4 = 0\,,$$

$$\lim_{x\to -0} f(x) = \lim_{x\to -0} \sin x = 0\,.$$

За теоремою 2.5 можемо зробити висновок, що $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Крім цього, звернемо увагу, що $f(0) = 0$. Отже, $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$, а тому функція неперервна в цій точці (як і в будь-якій іншій, бо $g(x) = \sin x$, а також $h(x) = x^4$ є неперервними). □

Зауваження 2.2. Якщо ми маємо справу з кусково-заданою функцією і на кожному з проміжків вона задається неперервною функцією точками які потребують дослідження на явність розриву, є ті, в яких вона змінює свій аналітичний запис. Для розглянутих функцій такою є точка нуль, оскільки вона має різний аналітичний запис в правому і лівому півоколах цієї точки. Якщо функції на деяких проміжках не є неперервними, то крім цього треба дослідити «проблемні» точки кожної з функцій.

Приклад 41. *Знайти лівосторонню та правосторонню границі функції $f(x) = \frac{1}{x}$ в точці 0.*

Розв'язання. В данному прикладі слід звернути увагу на різницю між тим як поводить себе функція зліва і справа від нуля. Ще зі школи ми знаємо, що при достатньо малих додатних x, функція приймає як завгодно великі додатні значення. Якщо ж ми прямуємо до нуля зліва, ми маємо протилежну ситуацію і функція приймає як завгодно великі за модулем значення, але вони при цьому від'ємні. Отже, маємо:

$$\lim_{x\to +0} f(x) = \lim_{x\to +0} \frac{1}{x} = +\infty\,,$$

$$\lim_{x\to -0} f(x) = \lim_{x\to -0} \frac{1}{x} = -\infty \,.\square$$

Наведемо наступну класифікацію точок розриву функції:

1) **Точка усувного розриву**

Якщо функція $f(x)$ має скінченну границю в точці x_0, але в цій точці функція не задана, або значення функції не співпадає зі значенням границі у цій точці, то точку x_0 називають точкою *усувного розриву*.

Приклад 42. *Функція*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}\,, & \text{якщо } x \neq 0\,, \\ 0\,, & \text{якщо } x = 0 \end{cases}$$

має усувний розрив в точці 0. Справді, оскільки $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, маємо $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$ $\square$

Зауваження 2.3. З функції $f(x)$, яка має усувний розрив в точці x_0, досить просто зробити неперервну. Для цього досить довизначити (в тому випадку, якщо $f(x)$ не визначена в цій точці), або змінити значення (якщо воно не співпадає зі значенням границі) функції $f(x)$ таким чином, щоб $f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

2) **Розрив першого роду**

Якщо функція $f(x)$ має скінченні односторонні границі зліва і справа, які не співпадають, то кажуть, що функція $f(x)$ має *розрив першого роду* в точці x_0.

Приклад 43. *Функція*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x > 0\,, \\ 0, & \text{якщо } x = 0\,, \\ -1, & \text{якщо } x < 0 \end{cases}$$

має розрив першого роду в точці 0. Справді:

$$\lim_{x\to +0} f(x) = \lim_{x\to +0} 1 = 1\,,$$

$$\lim_{x\to -0} f(x) = \lim_{x\to -0} -1 = -1\,.$$

Отже, функція має скінченні односторонні границі, але вони не співпадають. Це означає, що функція має в точці 0 розрив першого роду. $\square$

Зауважимо, що значення функції в цій точці не співпадає як з правою границею, так і з лівою.

Зауваження 2.4. В деяких джерелах не виділяють точки усувного розриву в окремий клас і відносять їх до розривів першого роду.

3) **Розрив другого роду**

Точка x_0 називається *точкою розриву другого роду* функції $f(x)$, якщо границя справа $\lim\limits_{x_0+0} f(x)$, або зліва $\lim\limits_{x_0-0} f(x)$ не існує або нескінченна.

Приклад 44. *Функція $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$ має розрив другого роду в точці 0.*

Справді, впровадимо заміну $y = \frac{1}{x}$. Використавши результат отриманий в прикладі 41, маємо що якщо $x \to +0$, то $y \to +\infty$, а також те що якщо $x \to -0$, то $y \to -\infty$. Отже:

$$\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0} 2^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to+\infty} 2^y = +\infty\,,$$

$$\lim_{x\to-0} f(x) = \lim_{x\to-0} 2^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to-\infty} 2^y = 0\,.$$

Правостороння границя нескінченна, а отже функція справді має розрив другого роду в точці 0. □

У деяких читачів може скластися неправильне враження, що функція завжди має скінченну кількість точок розриву. Взагалі кажучи, множина точок розриву може не тільки мати нескінченну кількість елементів, а і співпадати з областю визначення функції. Наведемо приклад функції з такою властивістю.

Приклад 45. *Функція*

$$\mathfrak{D}(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{якщо } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

називається функцією Діріхле. Вона має розрив в усіх точках своєї області визначення (пропонуємо читачам довести цей факт самостійно, а також встановити якого роду вона має розриви).

2.11 Завдання для самоконтролю

1. Чи може функція $f(x)$ мати розрив в точці x_0, але функція $|f(x)|$ бути неперервною в цій точці? Чи можлива зворотня ситуація? (тобто, $|f(x)|$ має розрив, але $f(x)$ неперервна в точці x_0?).

2. Чи можна сказати, що кожна функція у всіх точках своєї області визначення або неперервна, або має розрив?

3. Чи може функція приймати як додатні, так і від'ємні значення на проміжку, не маючи на ньому жодного нуля?

4. Побудуйте декілька прикладів функцій, які, як і функція Діріхле, мають розриви в усіх точках своєї області визначення.

5. Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ мають усувний розрив в точці x_0. Чи обов'язково будуть мати розрив в цій точці функції:
a) $f(x) + g(x)$
б) $f(x) - g(x)$
c) $f(x) \cdot g(x)$
d) $f(x)/g(x)$

6. Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ мають розрив першого роду в точці x_0. Чи обов'язково будуть мати розрив в цій точці функції:
a) $f(x) + g(x)$
б) $f(x) - g(x)$
c) $f(x) \cdot g(x)$
d) $f(x)/g(x)$

7. Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ мають розрив другого роду в точці x_0. Чи обов'язково будуть мати розрив в цій точці функції:
a) $f(x) + g(x)$
б) $f(x) - g(x)$
c) $f(x) \cdot g(x)$
d) $f(x)/g(x)$

8. Чи можна довизначити функцію $f(x) = \frac{sinx}{x}$ в нулі таким чином, щоб вона стала неперервною? Чи завжди, якщо функція не задана в якійсь точці, її можна довизначити таким чином, щоб вона стала неперервною?

2.12 Завдання для самостійної роботи № 10

Задача 10. *Знайти усі точки розриву функції $f(x)$, а також встановити їх вид.*

Варіант	**Функція**	**Варіант**	**Функція**
1	$f(x) = \frac{x^4-2x^3}{x-2}$	16	$f(x) = e^{\frac{1}{4-x}}$
2	$f(x) = x^3 - \frac{\lvert x+2\rvert}{x+2} + 3$	17	$f(x) = \frac{1}{5^{x-6}-1}$
3	$f(x) = \frac{x^4-2x^3}{\lvert x-2\rvert}$	18	$f(x) = \frac{\sin x}{2x}$
4	$f(x) = \begin{cases} x-4 & \text{якщо } x < -1 \\ x^2-6 & \text{якщо } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ x^3-1 & \text{якщо } x > 1 \end{cases}$	19	$f(x) = \begin{cases} x-4 & \text{якщо } x < -1 \\ x^2-6 & \text{якщо } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ x^3-1 & \text{якщо } x > 1 \end{cases}$
5	$f(x) = \frac{4^{\frac{1}{x+2}}}{3-x}$	20	$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$
6	$f(x) = e^{\frac{1}{3-x}}$	21	$f(x) = \frac{x^6-5x^5}{x-5}$
7	$f(x) = \frac{1}{4^{x-5}-1}$	22	$f(x) = x^5 - \frac{\lvert x-1\rvert}{x-1} + 7$
8	$f(x) = \frac{\sin x}{3x}$	23	$f(x) = \frac{x^6-x^5}{\lvert x-1\rvert}$
9	$f(x) = \frac{x+6}{x-3}$	24	$f(x) = \frac{1}{3^{x-4}-1}$
10	$f(x) = \frac{x^5-1}{x^5-1}$	25	$f(x) = \frac{6^{\frac{3}{x+4}}}{5-x}$
11	$f(x) = \frac{x^5-3x^4}{x-3}$	26	$f(x) = e^{\frac{1}{5-x}}$
12	$f(x) = x^4 - \frac{\lvert x-2\rvert}{x-2} + 1$	27	$f(x) = \frac{1}{6^{x-7}-1}$
13	$f(x) = \frac{x^5-3x^4}{\lvert x-3\rvert}$	28	$f(x) = \frac{\sin x}{4x}$
14	$f(x) = \begin{cases} x-4 & \text{якщо } x < -1 \\ x^2-6 & \text{якщо } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ x^3-1 & \text{якщо } x > 1 \end{cases}$	29	$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{якщо } x < -\pi \\ \sin x & \text{якщо } -\pi \leqslant x \leqslant \pi \\ x-\pi & \text{якщо } x > \pi \end{cases}$
15	$f(x) = \frac{5^{\frac{2}{x+3}}}{4-x}$	30	$f(x) = \frac{x+2}{x-7}$

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

[1] Давидов М.О. *Курс математичного аналізу. Ч. 1.* / М.О. Давидов – К.: Вища школа. - 1990.

[2] Давыдов Н.А. *Сборник задач по математиескому анализу* / Н.А. Давыдов, П.П. Коровкин, В.Н. Никольский. – М.: Просвещение, 1973.

[3] Кудрявцев Л.Д. *Курс математиеского анализа, т. 1* / Л.Д. Кудрявцев. – М.: Высшая школа, 1981.

[4] Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 1.* / Г.М. Фихтеногольц. – М.: ФИЗМАТГИЗ, 1966.

[5] Зорич В.А. *Математический анализ, часть 1.* / В.А. Зорич. – М.: ФАЗИС, 1997.