Алгебра

Дослідження розв'язків систем диференціальних рівнянь в частинних похідних за допомогою моногенних функцій на комутативних алгебрах

Коломієць Т.Ю., Погоруй А.О.
Житомирський державний університет імені Івана Франка
e-mail: tamila.kolomiiets@gmail.com, pogor@zu.edu.ua

У доповіді представлено метод знаходження розв'язків деяких систем диференціальних рівнянь в частинних похідних (ДРЧП) з постійними коефіцієнтами за допомогою властивостей моногенних (диференційованих за Гато) функцій на комутативних алгебрах, асоційованих з цими рівняннями.

У роботах [1, 2] досліджувалися розв'язки багатовимірного диференціального рівняння Лапласа. Узагальнення такого методу на широкий клас ДРЧП з постійними коефіцієнтами зроблено в [3], а з лінійно залежними змінними коефіцієнтами – в [4].

Для натуральних r, m введемо поліном над полем чисел $\mathbb{K}$

$$P(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) = \sum_{i_1+i_2+\dots+i_m=r} C_{i_1,i_2,\dots,i_m}(x_1, x_2, \dots, x_m)\xi_1^{i_1}\xi_2^{i_2}\dots\xi_m^{i_m}, \quad (1)$$

де $C_{i_1,\dots,i_m}(x_1, \dots, x_m)$ – $\mathbb{K}$-значні неперервні функції m змінних $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{K}$.

Розглянемо диференціальне рівняння

$$P(\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_m)[u(x_1, x_2, \dots, x_m)] = 0, \partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}. \quad (2)$$

Теорема 1. *Нехай* P – *поліном виду* (1), *функція* $\vec{f}: \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{A}$ *моногенна і має вигляд* $\vec{f}(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{n} \vec{e}_k u_k(\vec{x})$, *причому* $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m$ – *такий базис підпростору* $\boldsymbol{B}$ *алгебри* $\boldsymbol{A}$, *що* $P(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m) = 0$. *Тоді функції* $u_k(\vec{x})$, $k = 1, \dots, n$ *є розв'язками рівняння* (2).

Розглянемо систему ДРЧП виду

$$\begin{cases} D_{11}u_1(\vec{x}) + D_{12}u_2(\vec{x}) + \dots + D_{1n}u_n(\vec{x}) = 0, \\ D_{21}u_1(\vec{x}) + D_{22}u_2(\vec{x}) + \dots + D_{2n}u_n(\vec{x}) = 0, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ D_{n1}u_1(\vec{x}) + D_{n2}u_2(\vec{x}) + \dots + D_{nn}u_n(\vec{x}) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

де $u_i(x_1, x_2, \dots, x_m)$ – $\mathbb{K}$-значні неперервні функції m змінних $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{K}$, а D_{ij} – деякі диференціальні оператори, які задовольняють умову комутативності, тобто, $D_{ij}D_{kl} = D_{kl}D_{ij}$, $i, j, k, l = 1,2, \dots, n$.

Теорема 2. *Нехай* $u_i(\vec{x})$, $i = 1, \dots, n$ – *розв'язок системи* (3). *Тоді* $\forall \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ *має місце*

$$\det(D)\big(\lambda_1 u_1(\vec{x}) + \lambda_2 u_2(\vec{x}) + \dots + \lambda_n u_n(\vec{x})\big) = 0,$$

де $D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{n1} & D_{n2} & \dots & D_{nn} \end{pmatrix}$ – матриця операторів D_{ij} системи (3), а $\det(D)$ – формальний детермінант матриці D.

Якщо ми маємо лінійно незалежні розв'язки $v_i(\vec{x})$, $i = 1,2, \dots, m$ рівняння $\det(D)v(\vec{x}) = 0$, одержані за допомогою теореми 1, то, оскільки $v_i(\vec{x})$ можуть бути лінійною комбінацією розв'язків (3), у деяких випадках розв'язки системи (3) вдається знайти у вигляді

$$u_i(\vec{x}) = c_{i1}v_1(\vec{x}) + c_{i2}v_2(\vec{x}) + \dots + c_{im}v_m(\vec{x}), i = 1,2, \dots, n, c_{ik} \in \mathbb{K}.$$

Література:

[1] Ketchum P. W. A complete solution of Laplace's equation by an infinite hypervariable / P. W. Ketchum // American Journal of Mathematics. – 1929. – No. 51. – P. 179-188.

[2] Мельниченко И. П. Коммутативные алгебры и пространственные потенциальные поля / И. П. Мельниченко, С. А. Плакса. К.: Ин-т математики НАН Украины, 2008. – 230 с.

[3] Pogorui A. A. Solutions for PDEs with constant coefficients and derivability of functions ranged in commutative algebras / A. A. Pogorui, R. M. Rodríguez-Dagnino, M. Shapiro // Math. Meth. Appl. Sci. – 2014. – Vol. 37, No. 17. – P. 2799-2810.

[4] Pogorui A. A. Solutions of some Partial Differential Equations with variable coefficients by properties of Monogenic functions / A. A. Pogorui, R. M. Rodríguez-Dagnino // Укр. мат. вісн. – 2016. – Т. 13, № 1. – С. 103-113.