

УДК 517.548.4

Коломієць Таміла Юріївна,
*аспірант кафедри математичного аналізу
(Житомирський державний університет
імені Івана Франка)*

**ЗНАХОДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ
В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ
ТА ЇХ СИСТЕМ ЗА ДОПОМОГОЮ МОНОГЕННИХ ФУНКЦІЙ
НА ВІДПОВІДНИХ АСОЦІЙОВАНИХ АЛГЕБРАХ**

У статті розкрито суть методу знаходження розв'язків диференціальних рівнянь в частинних похідних та систем таких рівнянь за допомогою моногенних функцій на відповідних асоційованих алгебрах. Зроблено висновок щодо важливості даного підходу в контексті науки і практики. Висунуто пропозиції щодо подальших перспектив даного дослідження.

Ключові слова: диференціальні рівняння в частинних похідних (ДРЧП), моногенні функції, алгебри, умови Коші-Рімана.

Постановка проблеми. При вивченні фізичних, біологічних та економічних процесів, як правило, виникає потреба побудови для них адекватних динамічних математичних моделей та дослідження їх властивостей. У багатьох випадках поняттю "математична модель процесу" відповідають деякі цілком визначені диференціальні рівняння (ДР) або системи диференціальних рівнянь (СДР) (звичайних чи в частинних похідних), розв'язки яких дозволяють з певною точністю описати даний процес. Досить часто такі ДР, а особливо системи ДРЧП, не піддаються дослідженню класичними методами і для знаходження їх розв'язків потрібно розвивати нові підходи. Одним із таких підходів є метод, що ґрунтується на використанні властивостей диференційованих (або моногенних) функцій на комутативних алгебрах.

Аналіз попередніх досліджень. У роботах П. Кетчума [1], І. П. Мельниченка [2], І. П. Мельниченка, С. А. Плакси [3] досліджувалися розв'язки багатовимірного рівняння Лапласа. Узагальнення такого методу на широкий клас ДРЧП з постійними коефіцієнтами зроблено в [4].

В [5] і [6] цей метод застосовується для знаходження розподілу одновимірного блукання частинки в Ерлангівських середовищах 2-го і 3-го порядків відповідно. У роботі [7] метод узагальнено на ДРЧП з лінійно залежними змінними коефіцієнтами.

Мета статті – проаналізувати суть методу знаходження розв'язків ДРЧП та їх систем за допомогою диференційованих функцій на асоційованих алгебрах та його застосування для отримання розв'язків рівнянь певних галузей науки.

Виклад основного матеріалу. Диференціальні рівняння – це рівняння, що встановлюють залежність між незалежними змінними, числами, невідомими функціями та їх похідними. Якщо шукана функція є функцією однієї змінної, то ДР називається *звичайним*. Якщо шукана функція залежить від двох і більше змінних, то ДР має назву *диференціальне рівняння в частинних похідних*.

Система диференціальних рівнянь – сукупність ДР з шуканими функціями.

Моногенна функція – це функція гіперкомплексної змінної, яка має скінченну за Гато похідну. У випадку комплексної функції комплексної змінної моногенність функції

еквівалентна її диференційованості в сенсі комплексного аналізу, тобто, якщо така функція моногенна в деякій області, то в кожній точці цієї області справедливі *умови Коші-Рімана*, що є важливими в даному підході.

Алгебра або гіперкомплексна система – це лінійний простір, операція множення елементів якого задовольняє аксіоми асоціативності та дистрибутивності відносно додавання. Це частинний випадок загальної алгебри (розділу математики, який вивчає аксіоматично впроваджені алгебраїчні структури), об'єктами вивчення якої є елементи довільної природи (групи, кільця, поля і модулі), на відміну від алгебраїчних виразів, що вивчаються в "шкільній" алгебрі. Прикладами алгебр є системи дійсних чисел $\mathbb{R}$, комплексних чисел $\mathbb{C}$, подвійних чисел $\mathbb{W}$, дуальних чисел $\mathbb{D}$, кватерніонів $\mathbb{Q}$, октоніонів $\mathbb{O}$ (алгебра Келі). Крім алгебр скінченної розмірності досліджуються нескінченновимірні алгебри, зокрема банахові алгебри, які активно розвивались І. М. Гельфандом, М. А. Наймарком, С. М. Мазуром та іншими алгебраїстами.

Слід відмітити, що важливість гіперкомплексних систем для можливих застосувань була відома давно. Наприклад, комплексні числа застосовувались у гідродинаміці, літакобудуванні, антенній техніці, квантовій фізиці та інших галузях. За допомогою функції Жуковського розраховували форму крила літака таку, щоб він тримався у повітрі [8]. Дуальні числа застосовувались в теорії гвинтів та при описанні руху твердих тіл [9]. Кватерніони описують повороти тривимірного простору і використовуються у 3D-моделюванні, симуляторах.

Останнім часом активно досліджуються властивості моногенних функцій на гіперкомплексних системах та їх застосування для дослідження ДР. Метод знаходження розв'язків ДРЧП за допомогою моногенних функцій бере свій початок із добре відомого факту: дійсна і уявна частини комплексної аналітичної функції є гармонічними функціями, тобто є розв'язками двовимірного ДР Лапласа. Суть методу полягає у знаходженні узгодженої з ДР комутативної алгебри та побудові моногенної функції на відповідному підпросторі цієї алгебри, використовуючи умови типу Коші-Рімана.

Перед нами стоїть проблема поширення такого алгебраїчного методу на випадок некомутативних алгебр та

узагальнення на системи ДРЧП. Виконання деяких умов, які справджуються для комутативних алгебр, вже перевірено для некомутативних алгебр. Також доведено теорему про знаходження лінійної комбінації розв'язків системи ДРЧП. Далі, використовуючи цю теорему та описаний алгебраїчний метод, будемо шукати самі розв'язки системи ДРЧП.

Важливість даного методу полягає в тому, що він дозволяє знаходити розв'язки ДРЧП у випадках, для яких традиційні методи неефективні. Зокрема, І. П. Мельниченко та С. А. Плакса знайшли розв'язки СДР, яка описує просторово стаціонарні потенціальні соленоїдальні поля з осью симетрією. Нами були отримані розв'язки мультителеграфних рівнянь, які є щільністю перехідних ймовірностей випадкового блукання в ерлангівському середовищі на прямій. Властивості моногенних функцій на комутативних алгебрах активно досліджуються у роботах В. С. Шпаківського, О. Ф. Геруса.

Висновки. Дослідження ДРЧП за допомогою моногенних функцій на алгебрах іноді дають можливість ефективно знаходити розв'язки цих рівнянь та описувати їх характеристики. Розв'язування ДРЧП та систем ДРЧП з використанням комутативних і некомутативних алгебр дають можливість одержувати розв'язки задач математичної фізики, теорії випадкових процесів та інших розділів науки, де використовується математичне моделювання.

З методичної точки зору, одержані результати та розвинуті методи можуть бути використані при вивченні ДРЧП та для застосувань до дослідження ДРЧП.

Список використаних джерел та літератури

1. Ketchum P. W. A complete solution of Laplace's equation by an infinite hypervariable / P. W. Ketchum // American Journal of Mathematics. – 1929. – No. 51. – P. 179-188.
2. Мельниченко И. П. Алгебры функционально-инвариантных решений трехмерного уравнения Лапласа / И. П. Мельниченко // Укр. мат. журн. – 2003. – Т. 55, № 9. – С. 1284-1290.
3. Мельниченко И. П. Коммутативные алгебры и пространственные потенциальные поля / И. П. Мельниченко,

С. А. Плакса. К.: Институт математики НАН Украины, 2008. – 230 с.

4. Pogorui A. A. Solutions for PDEs with constant coefficients and derivability of functions ranged in commutative algebras / A. A. Pogorui, R. M. Rodríguez-Dagnino, M. Shapiro // Math. Meth. Appl. Sci. – 2014. – Vol. 37, No. 17. – P. 2799-2810.
5. Pogorui A. The distribution of random evolutions in Erlang semi-Markov media / A. Pogorui // Theor. of Stoch. Process. – 2011. – Vol. 17, No. 1. – P. 90-99.
6. Kolomiets T. The distribution of random motion with Erlang-3 sojourn times / T. Kolomiets, A. Pogorui, R. M. Rodríguez-Dagnino // Random Operators and Stochastic Equations. – 2015. – Vol. 23, No. 2. – P. 67-83.
7. Pogorui A. A. Solutions of some Partial Differential Equations with variable coefficients by properties of Monogenic functions / A. A. Pogorui, R. M. Rodríguez-Dagnino // Український математичний вісник. – 2016. – Vol. 13, No. 1. – P. 103-113.
8. Лаврентьев М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1973. – 749 с.
9. Диментберг Ф. М. Винтовое исчисление и его приложения в механике / Ф. М. Диментберг. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1965. – 200 с.

Kolomiets T. Yu. Finding of solutions of partial differential equations and their systems using monogenic functions in the proper associated algebras.

In the article the method of finding of solutions of partial differential equations and their systems is presented. The monogenic functions on the proper associated algebras were used. A conclusion about importance of this approach in the context of science and practice is done. Propositions are given about the further prospects of this research.

Keywords: partial differential equations (PDEs), monogenic functions, algebras, terms of Cauchy-Riemann.

Коломиец Т. Ю.

Нахождение

решений

дифференциальных уравнений в частных производных и их систем с помощью моногенных функций на соответствующих ассоциированных алгебрах.

В статье раскрыта сущность метода нахождения решений дифференциальных уравнений в частных производных и их систем с помощью моногенных функций на соответствующих ассоциированных алгебрах. Сделан вывод о важности данного подхода в контексте науки и практики. Выдвинуты предположения о дальнейших перспективах данного исследования.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения в частных производных (ДУЧП), моногенные функции, алгебры, условия Коши-Римана.