УДК 517.11 :07

О.П. Коломійцев

ПОНЯТТЯ СЛІДУВАННЯ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ.

Проаналізована спроба введення поняття слідування в шкільний курс математики в 70-х роках. Розглянуті питання введення поняття слідування в сучасний шкільний курс математики.

Поняття слідування відноситься до одного з найважливіших логічних понять математики. Це поняття використовується при формулюванні і доведенні теорем, розв`язуванні різних математичних задач. Значна кількість теорем шкільної математики вивчається в геометрії. Тому доцільно на початку шкільного курсу геометрії дати означення поняття слідування.

В шкільній математиці 70-х років уже була спроба ввести в явній формі поняття логічного слідування ([1], с. 17). Це було зроблено в алгебрі, де поняття слідування, крім теорем, використовується і при розв'язуванні рівнянь. Розділ «Рівносильні речення» протримався в шкільних підручниках алгебри 7 класу не більше 10-ти років і був виключений спочатку з шкільної програми, а потім і з підручників. Зупинимось коротко на цій важливій, але, на жаль, невдалій спробі.

В пункті 5 названого вище підручника алгебри [1] наводяться приклади двох тверджень з геометрії:

«$\angle A$ і $\angle B$ - вертикальні» і «$\angle A = \angle B$» .

Далі відзначається, що коли істинне перше твердження, то істинне і друге, і в такому разі кажуть, що з першого твердження випливає друге. Сказане узагальнюється так:

«Взагалі, з одного речення випливає друге, якщо завжди, коли істинне перше речення, істинне і друге».

Потім наводяться два приклади з алгебри, де показано, що друге речення може випливати або не випливати з першого.

Дається означення рівносильності речень:

«Якщо з першого речення випливає друге і з другого випливає перше, то ці речення називаються рівносильними».

Відзначається, що слідування позначається знаком $\Rightarrow$, а рівносильність знаком $\Leftrightarrow$.

Цікаво, що в той час, коли цей матеріал вивчався в школі, вчителі 7 -го класу, з якими автор працював на курсах підвищення кваліфікації, не могли пояснити, що означає слідування. Зате й учні, й учителі чітко формулювали наведене вище означення рівносильності. Таке становище можна пояснити тільки певною неохайністю при поясненні поняття слідування в шкільному підручнику.

Спочатку зупинимось на невдалій термінології. В шкільному підручнику йде мова про істинність чи хибність речень. Але ж не кожне речення може бути істинним чи хибним. В українській мові, як і в математичній логіці, для речень, які приймають одне з двох логічних значень істинності чи хибності, є відповідні терміни: висловлення, висловлювання, твердження. Далі ми будемо користуватись терміном «твердження».

Неправильно використано термін «рівносильність». Те, що в шкільному підручнику називають рівносильністю, в математичній логіці називають еквівалентністю і позначають $\Leftrightarrow$ або $\leftrightarrow$. А термін «рівносильність» у математичній логіці використовують для логічних тверджень, які приймають однакові значення істинності, і позначають знаком =.

Тепер зупинимось на поясненні терміна «слідування» в шкільному підручнику. Як вже відзначалось, в одному місці сказано, що з одного речення випливає друге, якщо завжди, коли істинне перше речення, істинне й друге. По-перше, чого це ж саме не сказати простіше і чіткіше: «Якщо з істинності першого твердження випливає істинність другого твердження, то кажуть, що з першого твердження випливає друге». Або так:

«Якщо при істинності першого твердження виявляється істинним друге твердження, то кажуть, що з першого твердження випливає друге».

В другому місці підручника сказано, що слідування позначається знаком $\Rightarrow$. І ніде не сказано, що «з одного речення випливає друге» це те ж саме, що «з одного речення слідує друге». Обов'язково треба було б підкреслити, що терміни «випливає» і «слідує» використовуються в підручнику в одному і тому ж розумінні.

І ще необхідно додати, що поняття «слідує» («випливає») пояснено в шкільному підручнику тільки для випадку істинності першого твердження. Таке обмеження недоцільне.

Відзначимо ще, що форма пояснення поняття слідування в підручнику не дає змоги користуватися ним у міркуваннях при доведенні теорем і розв'язуванні задач.

Розглянемо, як можна познайомити учнів з поняттям слідування на початку вивчення курсу геометрії. Домовимось позначати слідування знаком $\rightarrow$.

Серед простих речень української мови можна виділити такі речення, в яких щось стверджується і можна встановити хибність чи істинність того, що стверджується. Будемо називати такі речення простими, звичайними твердженнями. Наприклад: $2 \times 2 = 4$, $3 + 4 = 9$, $2 < 5$, $3 > 9$, 5 - просте число, 9 - парне число. Про кожне таке твердження можна сказати, хибне воно чи істинне. Питальні, окличні речення, речення з побажанням або проханням і т.п., тобто такі, що не можна сказати, істинне чи хибне те, про що в них говориться, не є прикладами тверджень. Значну частину серед тверджень у математиці займають твердження зі змінною, для яких визначено область допустимих значень змінної. Якщо в твердженні зі змінною підставити замість змінної одне з допустимих значень, то одержимо звичайне твердження. Прикладами тверджень зі змінною є рівняння, умови теорем, висновки теорем і т.п. Наприклад: $x^2 = 4$, $x \in R$ є твердженням із змінною, а $1^2 = 4$, $2^2 = 4$, $3^2 = 4$ є вже звичайними твердженнями, одержаними з попереднього заміною x на 1,2, 3. При цьому перше і третє твердження хибні, а друге істинне, бо x = 2 є одним з коренів рівняння $x^2 = 4$. Ще приклад: $2x + 3y = 16$ і $x - 2y = 1$; $x, y \in R$. З логічної точки зору ця система двох рівнянь з двома невідомими є системою двох тверджень з двома змінними. Щоб одержати з кожного з цих тверджень звичайні твердження, потрібно замість обох змінних підставити значення з множини визначення. При x = 5 і y = 2 одержуємо: 10 + 6 = 16 і 5 - 4 = 1. А при x = 7 і y = 3 одержуємо 14 + 9 = 16 і 7 - 6 = 1. У першому випадку система звичайних тверджень істинна, в другому випадку ця система хибна.

В розглянутому прикладі система двох тверджень із змінними є прикладом складного твердження, яке побудовано з простих тверджень за допомогою сполучника «і». Складним твердженням будемо називати твердження, побудоване з двох або більшої кількості простих тверджень.

Розглянемо приклад зі шкільного курсу геомерії. Теорема: «Вертикальні кути рівні». Сформулюємо цю теорему в еквівалентній розгорнутій формі: «Якщо кути α та β є вертикальними, то кути α та β є рівними» .

В цій теоремі використано два прості твердження з двома змінними. Область визначення цих тверджень: α, $\beta \in (0; \pi)$. Твердження «кути α та β є вертикальними» позначимо буквою A, друге твердження «кути α та β є рівними» позначимо буквою B. Тоді теорему можна записати: «Якщо A, то B». Вся теорема теж є твердження (складне, з двома змінними), бо вона складається з двох тверджень, з'єднаних сполучником «якщо ..., то ...», і може бути позначена однією буквою, наприклад C. Одержуємо «C = Якщо A, то B», де знак = означає логічну рівносильність.

Тепер, коли ми встановили, що становлять собою компоненти слідування, можемо дати означення цієї визначеної в математиці логічної операції.

«Слідуванням з твердження A твердження B називають таке третє твердження C , що хибне тоді і тільки тоді, коли A - істинне, B - хибне».

Позначивши слідування знаком «$\rightarrow$ », маємо: $C = A\rightarrow B$.

Доцільно вибрати скорочені позначення істинності та хибності тверджень. Істинність позначають «І» або «Т», або «1». Хибність позначають «Х» або «F», або «0». Виберемо цифровий варіант. Тоді означення слідування, еквівалентне попередньому означенню, можна подати таблицею.

A	B	$A\rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Саме в такій формі дають означення слідування в математичній логіці і використовують назву «імплікація». Операції слідування відповідає сполучник «якщо ..., то ...», правда, тоді, коли він виражає логічний зв'язок між твердженнями. В математиці цей сполучник саме в такому розумінні і використовується. Наведемо приклад, коли сполучник «якщо ..., то ...» не відповідає логічному слідуванню: «Якщо нагрівати тіло, то воно збільшується в об'ємі».

Інтерес до імплікації з'явився у вчених ще задовго до того, як в середині XIX століття виникла математична логіка. Вчення про цю операцію уточнювалось і розвивалось у стародавній Греції в мегаро-стоїчній школі (III і IV ст. до н.е.), в логіці схоластів і працях інших логіків аж до нашого часу [2].

Наведене табличне означення імплікації зручніше для використання, ніж словесне, завдяки своїй наочності. Але тут же в учнів виникає питання: чого це з хибного твердження слідують хибне та істинні твердження? Щоб пояснити це, скористаємось прикладом, який наводить М.М. Швець [3]. Батько каже дочці: «Якщо завтра буде хороша погода, то підемо в зоопарк». Домовимось вважати вислів батька хибним, якщо він обманив доньку, та істинним, якщо не обманив. Переглянемо всі можливі випадки істинності тверджень «буде хороша погода» і «підемо в зоопарк».

Не хороша погода	- 0	не пішли в зоопарк	- 0	не обманив	- 1
не хороша погода	- 0	пішли в зоопарк	- 1	не обманив	- 1
хороша погода	- 1	не пішли в зоопарк	- 0	обманив	- 0
хороша погода	- 1	пішли в зоопарк	- 1	не обманив	- 1

Як бачимо, істинність тверджень у наведеному прикладі повністю збігається з таблицею означення слідування.

З означення логічного слідування випливає правило висновку, яким ми користуємось у міркуваннях при доведенні теорем. Сформулюємо це правило: якщо істинні твердження P і $P\rightarrow Q$, то істинним є і твердження Q.

Доведення зразу ж випливає з огляду 1-го і 3-го стовпчиків та четвертого рядка табличного означення слідування. Згідно з цим правилом, щоб довести теорему $A \rightarrow B$, достатньо підібрати такий ланцюжок аксіом і доведених теорем:

$$A \rightarrow A_1 , A_1 \rightarrow A_2 , A_2 \rightarrow A_3 , ... , A_{n-1} \rightarrow A_n , A_n \rightarrow B.$$

Ще потрібно відзначити, що кожна доведена теорема вигляду $A \rightarrow B$ є умовним твердженням. Відповідно до правила висновку, при істинності твердження A можна перейти до істинності твердження B. Якщо ж відомо, що для цієї доведеної теореми істинним є твердження B, то про твердження A ніякого висновку ми зробити не можемо. Це підтверджують другий і четвертий рядочки означення слідування, де видно, що твердження А може бути хибним, а може бути й істинним. Для вирішення питання про твердження А потрібно доводити обернену теорему $B \rightarrow A$.

Ми проаналізували невдалу спробу введення до шкільного курсу математики поняття слідування і розглянули, як можна було б знову ввести це надзвичайно важливе для математики поняття в шкільний курс. Виклад матеріалу розрахований на вчителів математики, які вивчали математичну логіку. Зауважимо, що елементи математичної логіки почали вивчати в під інституті не пізніше, ніж з 1963 року.

Після ознайомлення учнів із поняттям логічного слідування можна поступово вивчати такі важливі поняття, як ознаки, властивості, необхідні та достатні умови, означення, пряма та обернена теореми, протилежна теорема, а також доведення від супротивного. Математична логіка може допомогти чітко викласти ці поняття на рівні шкільного курсу математики.

Виникає питання про введення до шкільного курс математики логічних операцій заперечення, кон'юнкції, диз'юнкції. Звичайно, було б доре дати учням означення цих операцій. Але тут інтуїція учнів працює значно краще, ніж тоді, коли вони використовують у міркуваннях поняття слідування. Тому, при обмеженні часу на вивчення логічних основ математики в шкільному курсі, доцільно в першу чергу познайомити учнів із поняттям слідування.

1. Макаричев Ю.М. та інші Під ред. А.І. Маркушевича. Алгебра. Підручник для 7 класу середньої школи. - Київ.: Радянська школа., 1984. - 140 с.
2. Калужнін Л.А. Что такое математическая логика. - М.: Наука, 1964. - 152 с.
3. Швець М.М. Азбука математичної логіки. -К.: Радянська школа, 1965. - 154 с.

Коломійцев Олег Петрович - старший викладач кафедри математики Житомирського державного педагогічного інституту ім. І. Франка.

Наукові інтереси:

- інформатика;
- методика математики та інформатики;
- математична логика.