УДК 517.518.2

Л.П. Таргонський,
кандидат фізико-математичних наук, доцент;
О.І. Ільчук,
асистент
(Житомирський педуніверситет)

ВЛАСТИВОСТІ ОДНОГО КЛАСУ ФУНКЦІОНАЛІВ

Встановлено специфічні особливості одного класу функціоналів. Поширено теореми Вейєрштраса, Больцано-Коші на досліджуваний клас функціоналів.

1. Попередні відомості та основні означення.

Означення 1. *Функціонал* f *будемо називати функціоналом класу К, якщо він визначений на компакті Е метричного простору F і задовольняє умови:*

1) *якщо в точці* $x_0 \in E$ $\quad f(x_0) > 0$, *то* $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists U(x_0) = \{x \mid |x - x_0| < \delta(\varepsilon)\} \quad \forall x \in U(x_0)$:
$-\varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$;

2) *якщо в точці* $x_0 \in E$ $\quad f(x_0) < 0$, *то* $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists U(x_0) = \{x \mid |x - x_0| < \delta(\varepsilon)\} \quad \forall x \in U(x_0)$:
$-\varepsilon + f(x_0) < f(x) < \varepsilon$;

3) *якщо в точці* $x_0 \in E$ $\quad f(x_0) = 0$, *то* f *– неперервний функціонал в точці* x_0, *тобто*
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists U(x_0) = \{x \mid |x - x_0| < \delta(\varepsilon)\} \quad \forall x \in U(x_0): \ -\varepsilon < f(x) < \varepsilon$.

Розглянемо властивості та особливості функціоналів даного класу.

Теорема 1. *Клас С неперервних функціоналів* f, *визначених на компакті Е метричного простору F, належить класу К.*

Доведення. Візьмемо довільний неперервний функціонал $f \in C$, тоді $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists U(x_0) = \{x \mid |x - x_0| < \delta(\varepsilon)\} \quad \forall x \in U(x_0): \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, що рівносильне нерівності $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$, і перевіримо виконання умов *1) – 3)* означення 1.

1) Якщо в точці $x_0 \in E$ $\quad f(x_0) > 0$, то $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists U_1(x_0) = \{x \mid |x - x_0| < \delta(\varepsilon)\} \quad \forall x \in U_1(x_0)$:
$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ (так як $-\varepsilon < f(x_0) - \varepsilon$);

2) Якщо в точці $x_0 \in E$ $\quad f(x_0) < 0$, то $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists U_1(x_0) = \{x \mid |x - x_0| < \delta(\varepsilon)\} \quad \forall x \in U_1(x_0)$:
$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon \Rightarrow f(x_0) - \varepsilon < f(x) < \varepsilon$ (так як $f(x_0) + \varepsilon < \varepsilon$);

3) Якщо в точці $x_0 \in E$ $\quad f(x_0) = 0$, то функціонал $f \in C$ – неперервний в кожній точці компакта *E* і в точці x_0 також.

Умови *1) – 3)* виконуються, тому будь-який неперервний функціонал належить класу *К*.

2. Теореми Вейєрштраса.

Теорема 2. *Якщо функціонал* f *визначений на компакті Е метричного простору F і є функціоналом класу К, то* f *– обмежений на Е.*

Доведення. Зафіксуємо довільне $\varepsilon_0 > 0$ і покриємо кожну точку множини *E* околом $U(x_E)$, визначеним за означенням 1. Множина *E* – компакт, тому з утвореного покриття цієї множини можна вибрати скінченне. В кожному околі функціонал f – обмежений. Розглянемо скінченну множину точок $\{-\varepsilon_0, \varepsilon_0, f(x_j) - \varepsilon, f(x_i) + \varepsilon\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = n+1, n+2, \ldots, m)$, що відповідають скінченній кількості вибраних околів. Позначимо через *M* найбільше з цих чисел, а через *m* – найменше, тоді $\forall x \in E \quad m \le f(x) \le M$. Отже, f – обмежений функціонал на *E*.

Теорема доведена.

Зауваження 1. Умови *1)* $f(x) > -\varepsilon$ та *2)* $f(x) < \varepsilon$ визначення функціоналів класу *К* є істотними.

Теорема 3. *Якщо функціонал* f *визначений на компакті Е метричного простору F і належить класу К, при цьому* $\sup\limits_{x \in E}\{f(x)\} > 0$, $\inf\limits_{x \in E}\{f(x)\} < 0$, *то існують точки* $x_1, x_2 \in E$ *такі, що* $f(x_1) = \sup\limits_{x \in E}\{f(x)\}$ *та* $f(x_2) = \inf\limits_{x \in E}\{f(x)\}$.

Доведення. За теоремою 2, $\exists M = \sup\limits_{x \in E}\{f(x)\}$ та $\exists m = \inf\limits_{x \in E}\{f(x)\}$.

Доведемо першу частину теореми, тобто $\exists x_1 \in E$ така, що $f(x_1) = \sup\limits_{x \in E}\{f(x)\}$. За умовою теореми 3, $M > 0$. Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$ та розглянемо нерівність $M - \varepsilon < M$. Так як *M* – точна верхня межа, то

$\exists x \in E$: $M - \varepsilon < f(x) \le M$. Якщо $f(x) = M$, то теорема доведена. В протилежному випадку, розглянемо $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ – спадну додатню послідовність, причому $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Їй відповідає послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ така, що $M - \varepsilon_n < f(x_n) \le M$. А це означає, що $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = M$. Так як E – компакт, то з послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ можна вибрати збіжну підпослідовність $\{x_{n_\kappa}\}_{\kappa=1}^{\infty}$ таку, що $\lim_{\kappa\to\infty} x_{n_k} = x_1$, де $x_1 \in E$.

Нехай $f(x_1) > 0$. Якщо $f(x_1) = M$, то теорема доведена. У випадку, коли $f(x_1) < M$, покладемо $0 < \varepsilon < \dfrac{M - f(x_1)}{2}$, тоді за означенням функціоналів класу *К* $\exists U(x_1)$ $\forall x \in U(x_1)$: $-\varepsilon < f(x) < f(x_1) + \varepsilon$. Оскільки $f(x_1) + \varepsilon < \dfrac{f(x_1) + M}{2} < M$, то для достатньо великих номерів n_k виконується нерівність $f(x_{n_k}) > \dfrac{f(x_1) + M}{2} > f(x_1) + \varepsilon$, що суперечить умові 1 означення функціоналів класу *К*. Отже, в даному випадку $f(x_1) = M$.

Нехай $f(x_1) = 0$. За означенням 1, функціонал f — неперервний в точці x_1, тому $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_1) = M$. Тоді *M* дорівнює нулю, що суперечить умові теореми, тому випадок $f(x_1) = 0$ неможливий.

Нехай $f(x_1) < 0$. Покладемо $0 < \varepsilon < \dfrac{M}{2}$, за означенням функціоналів класу *К* $\exists U(x_1)$ $\forall x \in U(x_1)$: $f(x) < \varepsilon < \dfrac{M}{2}$. Тому для достатньо великих номерів n_k виконується нерівність $f(x_{n_k}) < \dfrac{M}{2}$, а це суперечить умові $\lim_{\kappa\to\infty} f(x_{n_k}) = M$. Таким чином, випадок $f(x_1) < 0$ неможливий.

Доведемо другу частину теореми, коли $m < 0$. Розглянемо функціонал $g(x) = -f(x)$. Очевидно, що функціонал $g(x)$ належить до функціоналів класу *К*. Так як $\sup_{x\in E}\{-f(x)\} = -m > 0$, то, за доведеною першою частиною, $\exists x_2 \in E$ така, що $f(x_2) = m$.

Теорема доведена.

Зауваження 2. Для випадків: *1)* $\sup_{x\in E}\{f(x)\} < 0$ та *2)* $\inf_{x\in E}\{f(x)\} > 0$ твердження теореми 2 хибне.

Досить легко показати це на прикладах. У випадку *1)* візьмемо функцію $f(x) = \begin{cases} -(x-2)^2 - 1, & \text{якщо } x \ne 2, \\ -2, & \text{якщо } x = 2 \end{cases}$ визначену на сегменті $[1,3]$. Дана функція належить класу *К*, $\sup_{[1,3]}\{f(x)\} = -1 < 0$, проте $\forall\, x \in [1,3]$ $f(x) \ne -1$.

Аналогічно можна перевірити другий випадок. Для цього досить розглянути функцію $g(x) = \begin{cases} (x-2)^2 + 1, & \text{якщо } x \ne 2, \\ 2, & \text{якщо } x = 2 \end{cases}$ визначену на сегменті $[1,3]$.

3. Теорема Больцано-Коші.

Теорема 4. *Нехай Е – зв'язний компакт метричного простору F, на якому визначено функціонал f, що належить класу К і для якого виконуються умови:*

1) *Для* $\forall x \in E$ *виконується одна з умов, або* $\underline{\lim}_{\substack{t\to x,\\ f(t)>0}} f(t) > 0$, *або* $\overline{\lim}_{\substack{t\to x,\\ f(t)<0}} f(t) < 0$.
2) $\exists x_1, x_2$ *такі, що* $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$.

Тоді існує така точка с, що належить компакту Е, що $f(c) = 0$.

Доведення. Припустимо супротивне: $\forall x \in E$ $f(x) \ne 0$. Утворимо розбиття множини *Е* на дві підмножини $E_1 = \{x \in E \mid f(x) > 0\}$ та $E_2 = \{x \in E \mid f(x) < 0\}$. Очевидно, що $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2 = \varnothing$. Оскільки E — зв'язна множина, то в одному з класів E_1 чи E_2 знаходиться точка скупчення іншої множини. Позначимо цю точку через x_0. Нехай $x_0 \in E_1$. Тоді, за умовою теореми, $f(x_0) > 0$. Зафіксуємо довільне $\varepsilon_0 > 0$. Так як $f \in K$, то для $\varepsilon_0 > 0$ $\exists U(x_0) = \{x \,\big|\, |x - x_0| < \delta(\varepsilon_0)\}$ $\forall x \in U(x_0)$: $f(x) > -\varepsilon_0$.

Оскільки в довільному околі точки x_0 міститься безліч точок множини E_2, то нехай $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – послідовність точок множини E_2 така, що $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Тоді при $n \ge n_0$ $x_n \in U(x_0)$: $-\varepsilon_0 < f(x_n) < 0$. Таким чином, послідовність $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ обмежена, з неї можна вибрати збіжну підпослідовність $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \alpha$, де $-\varepsilon_0 < \alpha < 0$.

За умовою теореми, $\alpha < 0$, тоді покладемо $0 < \varepsilon < -\frac{\alpha}{2}$. З умови, що функціонал f належить класу *K* та $f(x_0) > 0$ випливає, що $\exists U_1(x_0)\ \ \forall x \in U_1(x_0):\ f(x) > -\varepsilon > \frac{\alpha}{2}$. Оскільки для досить великих n_k $x_{n_k} \in U_1(x_0)$, то й $f(x_{n_k}) > \frac{\alpha}{2}$, а це суперечить тому, що $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \alpha$. Отже, припущення невірне, тому $\exists c \in E$ така, що $f(c) = 0$.

Теорема доведена.

Зауваження 3. Умова *1)* теореми 3 істотна.

Покажемо це на прикладі функцій, визначених на сегменті $[1,3]$:

$$f(x) = \begin{cases} -(x-2)^2 & , \text{ якщо } x \neq 2, \\ \quad 2 & , \text{ якщо } x = 2 \end{cases}; \quad g(x) = \begin{cases} (x-2)^2 & , \text{ якщо } x \neq 2, \\ \quad -1 & , \text{ якщо } x = 2. \end{cases}$$

Очевидно, що $\lim_{x\to 2} f(x) = 0$ та $\lim_{x\to 2} g(x) = 0$, тобто дані функції не задовольняють умову *1)* теореми 3. Усі інші умови цієї теореми виконуються, а висновок – ні.

Зауваження 4. Нехай підмножина K_1 класу *K* визначена умовами:

1) якщо в точці $x_0 \in E$ $\ f(x_0) > 0$, то $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists U(x_0) = \{x \,|\, |x - x_0| < \delta(\varepsilon)\}\ \ \forall x \in U(x_0)$:
$0 < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$;

2) якщо в точці $x_0 \in E$ $\ f(x_0) < 0$, то $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists U(x_0) = \{x \,|\, |x - x_0| < \delta(\varepsilon)\}\ \ \forall x \in U(x_0)$:
$-\varepsilon + f(x_0) < f(x) < 0$;

3) якщо в точці $x_0 \in E$ $\ f(x_0) = 0$, то f – неперервний функціонал в точці x_0.

Тоді теорема Больцано-Коші для функціоналів класу K_1 справедлива в класичному формулюванні, тобто виконання умови *1)* для цього випадку не потрібне.

4. Теорема про рівномірну збіжність функціоналів класу *K*.

Теорема 5. *Нехай послідовність* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset K$, *де* $f_n(x)$ *— функціонал визначений на компакті E метричного простору F, рівномірно збіжна до функціонала* $f(x)$ *на множині E. Тоді* $f(x)$ *є функціоналом класу K.*

Доведення. Нехай $x_0 \in E$ та $f(x_0) > 0$. Візьмемо $\forall \varepsilon > 0$, тоді:

$$\exists N \quad \forall n > N \quad \forall x \in E : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow f(x) < f_n(x) + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Зафіксуємо $n_0 > N$. Тоді $f(x) < f_{n_0}(x) + \frac{\varepsilon}{4}$. Оскільки $f_{n_0}(x) \in K$, то існує окіл $U_{n_0}(x_0)$ такий, що $\forall x \in U_{n_0}(x_0)$: $f_{n_0}(x) < f_{n_0}(x_0) + \frac{\varepsilon}{4}$. Отже, $\forall x \in U_{n_0}(x_0)$: $f(x) < f_{n_0}(x) + \frac{\varepsilon}{4} < f_{n_0}(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}$. Так як $|f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{4}$, то $f_{n_0}(x_0) < f(x_0) + \frac{\varepsilon}{4}$, а це означає, що $f(x) < f_{n_0}(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} < f(x_0) + \frac{3}{4}\varepsilon < f(x_0) + \varepsilon$.

Залишилось довести, що $\forall x \in U_{n_0}(x_0):\ f(x) > -\varepsilon$.

При $n_0 > N$ з нерівності $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4}$ одержуємо, що $\forall x \in E:\ f(x) > f_n(x) - \frac{\varepsilon}{4}$. Оскільки $f(x_0) > 0$, то для достатньо великих n та $f_n(x_0) > 0$, можна вважати, що $f_{n_0}(x_0) > 0$. Звідси та з означення функціоналів класу *K* одержуємо, що $\exists U'_{n_0}(x_0)\ \ \forall x \in U'_{n_0}(x_0):\ f_{n_0}(x) > -\frac{\varepsilon}{4}$. Отже, з нерівності $f(x) > f_n(x) - \frac{\varepsilon}{4}$ випливає, що $\forall x \in U'_{n_0}(x_0):\ f(x) > -\frac{\varepsilon}{2}$. Якщо, $x \in U(x_0) \bigcap U'_{n_0}(x_0)$, то $-\varepsilon < -\frac{\varepsilon}{2} < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$, що й потрібно було довести.

Нехай $f(x_0) < 0$. В цьому випадку, розглянемо функціонал $(-f(x))$, який також належить класу *K*. Оскільки $-f(x_0) > 0$, то, за доведеною першою частиною теореми $\forall \varepsilon > 0\ \exists U(x_0)\ \ \forall x \in U(x_0)$: $-\varepsilon < -f(x) < -f(x_0) + \varepsilon$, або $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < \varepsilon$, що й треба було довести.

Нехай $f(x_0)=0$. За означенням рівномірної збіжності $\forall\varepsilon>0$ $\exists N(\varepsilon)$ $\forall n>N(\varepsilon)$ $\forall x\in E$: $|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{4}$.

Нехай $n_0>N$. Тоді $\forall x\in E$: $f_{n_0}(x)-\frac{\varepsilon}{4}<f(x)<f_{n_0}(x)+\frac{\varepsilon}{4}$. Якщо $f_{n_0}(x_0)>0$, то за означенням функціоналів класу K $\forall\varepsilon>0$ $\exists U_{n_0}(x_0)$ $\forall x\in U_{n_0}(x_0)$: $-\frac{\varepsilon}{4}<f_{n_0}(x)<f_{n_0}(x_0)+\frac{\varepsilon}{4}$. А це означає, що $\forall x\in U_{n_0}(x_0)$: $-\frac{\varepsilon}{2}<f(x)<f_{n_0}(x)+\frac{\varepsilon}{2}$. З нерівності $|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{4}$ в даному випадку маємо $|f_{n_0}(x_0)|<\frac{\varepsilon}{4}$. З останньої нерівності та з $-\frac{\varepsilon}{2}<f(x)<f_{n_0}(x)+\frac{\varepsilon}{2}$ одержуємо, що $\forall x\in U_{n_0}(x_0)$: $-\varepsilon<-\frac{\varepsilon}{2}<f(x)<\frac{3}{4}\varepsilon<\varepsilon$, а це доводить теорему для цього випадку.

Якщо $f_{n_0}(x_0)<0$, то, розглядаючи функціонал $(-f(x))$, зводимо цей випадок до попереднього.

Якщо $f_{n_0}(x_0)=0$, то $f_{n_0}(x)$ за означенням класу K є неперервним функціоналом в точці x_0, тому $\forall\varepsilon>0$ $\exists U(x_0)$ $\forall x\in U(x_0)$: $|f_{n_0}(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Отже, остаточно $\forall x\in U(x_0)$: $-\varepsilon<-\frac{3}{4}\varepsilon<f(x)<\frac{3}{4}\varepsilon<\varepsilon$, що й доводить теорему для цього випадку.

Теорема доведена.

Відомо, що образ компакта при неперервному відображенні є компакт. Виявляється, для функціоналів класу *K* це твердження хибне, тобто, якщо *E* — компакт і функціонал f належить класу *K*, то $f(E)$ не буде компактом.

Розглянемо функцію $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & \text{якщо } 0<|x|\le 1,\\ 2, & \text{якщо } x=0.\end{cases}$

Нехай $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ — послідовність, що задовольняє умови $0<y_n<1$ та $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=1$. Оскільки $1\notin f(E)$, де $E=[-1;1]$, то $f(E)$ — не є компактом.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Люстерник Л. А. , Соболев В.И. Элементы функционального анализа.– М. – Л.: ГИТТЛ , 1951. – 360 с.
2. Колмогоров А.М. , Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа.– М.: Наука, 1972. – 496 с.
3. Александров П.С. Введение в общую теорию множеств и функций.– М. – Л.: ОГИЗ-Гостехиздат, 1948. – 412 с.

Матеріал надійшов до редакції 15.11.01 р.

Таргонский Л.Ф., Ильчук Е.И. Свойства одного класса функционалов.

Установлены специфические особенности одного класса функционалов. Распространены теоремы Вейерштрасса, Больцано-Коши на исследуемый класс функционалов.

Targonsky L.P., Ilchuk O.I. Properties of a Class of Functionals.

The specific features of a class of functionals are established. The Weierstrass and Bolzano-Cauchy's theorems are applied to the investigated class of functionals.