УДК 517.2

Л.П. Таргонський,
кандидат фізико-математичних наук, доцент;
Т.Л. Таргонська,
студентка
(Житомирський педуніверситет)

ПРО ОДНЕ РОЗШИРЕННЯ СИСТЕМИ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ

У статті розглядається множина чисел, що містить множину дійсних чисел і уявну одиницю, квадрат якої дорівнює одиниці. Вивчаються властивості цієї множини.

Нехай R-множина дійсних чисел. Розглянемо множину матриць виду:

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

де, $a,b \in$ R і позначимо її символом R_j. Легко перевірити, що сума і добуток елементів множини R_j належить цій множині, дії додавання і множення володіють комутативним, асоціативним і дистрибутивним законами. Отже, множина R_j є алгеброю.

Множина R_j називається множиною дійсних j-чисел. Відомо, що матричне рівняння $A+X=B$ має розв'язок $X=B-A$. Якщо A,B∈ R_j, то легко переконатись, що й $B-A \in R_j$. Отже, на множині R_j виконується дія віднімання.

Множина діагональних матриць $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ є підалгеброю алгебри матриць $R_{j.}$

Ця підалгебра ізоморфна системі дійсних чисел R. Щоб довести це твердження, розглянемо відображення φ , що задається співвідношенням:

$$\varphi: \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \to a.$$

Відображення φ є взаємно-однозначним між множиною R і множиною діагональних матриць

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Нехай $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Безпосередньою перевіркою встановлюємо, що:

φ (A+B)= φ (A) + φ (B), φ (AB) = φ (A) · φ (B).

Твердження доведене.

З доведеного твердження випливає, що система дійсних чисел R і множина діагональних матриць виду $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ з точки зору визначених на них операцій додавання і множення не відрізняється одна від одної, і тому ці множини можна ототожнити.

Введемо позначення $J=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Тоді $J^2=1$. Таким чином у множні R_j існує число, яке відмінне від чисел +1 і -1, квадрат якого дорівнює 1.

Розглянемо дійсне j-число (1). За властивостями дій над матрицями маємо:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=a+bj.$$

Отже встановлено, що будь-яке дійсне j-число (1) можна подати у вигляді $a+bj$. Це подання називається **алгебраїчною формою дійсного j-числа.**

Нехай

$$a_1+b_1 j=a_2+b_2 j.$$

Тоді

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix},$$

і тому $a_1=a_2, b_1=b_2$.

2. Дії над дійсними j-числами в алгебраїчній формі.

Нехай $a_1+b_1 j, a_2+b_2 j$ -дійсні j-числа.Тоді:

$$(a_1+\ \ b_1 j)+(a_2+\ \ b_2 j)=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ b_1+b_2 & a_1+a_2 \end{pmatrix}=(a_1+\ \ a_2)+(b_1+\ \ b_2)j$$

Аналогічно:

$$(a_1+b_1 j)(a_2+b_2 j)=(a_1 a_2+b_1 b_2)+(a_1 b_2+b_1 a_2)j.$$

Отже, дії додавання і множення над дійсними j-числами в алгебраїчній формі виконуються за правилами відповідних дій над многочленами з урахуванням, що $j^2=1$. Аналогічне правило справедливе і для дії віднімання.

Виведемо правило ділення дійсних j-чисел в алгебраїчній формі.

Нехай

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}=a_1+a_2 j, B=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_2 & b_1 \end{pmatrix}=b_1+b_2 j,$$

причому A-неособлива матриця. Тоді рівняння $AX=B$ має розв'язок $X=A^{-1}B,$ де

$$A^{-1}=\frac{1}{a_1{}^2-a_2{}^2}\begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix}=\frac{a_1-a_2 j}{a_1{}^2-a_2{}^2}.$$

Таким чином ,

$$X=A^{-1}B=\frac{a_1-a_2 j}{a_1{}^2-a_2{}^2}(b_1+b_2 j)=\frac{a_1 b_1-a_2 b_2}{a_1{}^2-a_2{}^2}+\frac{a_1 b_2-a_2 b_1}{a_1{}^2-a_2{}^2}\,j. \qquad (2)$$

Є дійсне j-число $x_1+x_2 j,$ що

$$(a_1+a_2 j)(x_1+x_2 j)=b_1+b_2 j. \qquad (3)$$

У матричній формі (3) представлена рівністю:

$$AX=B,$$

де X визначається рівністю (2). Отже,

$$x_1+x_2 j=\frac{a_1 b_1-a_2 b_2}{a_1{}^2-a_2{}^2}+\frac{a_1 b_2-a_2 b_1}{a_1{}^2-a_2{}^2}.$$

3. Дільники нуля.

Означення. Дійсне j-число $a+bj\neq 0$ називається дільником нуля, якщо існує дійсне j-число $c+dj\neq 0$ таке , що

$$(a+bj)(c+dj)=0.$$

Приклад.Число $1+j$ є дільником нуля, бо $(1+j)(1-j)=0.$

Теорема1. Множина всіх дільників нуля алгебри R_j є множиною виду $\{a+bj\},$ де $|a|=|b|.$

Доведення. Нехай $a+bj\neq 0$ -дільник нуля. Тоді існує $c+dj\neq 0$ таке, що $(a+bj)(c+dj)=0.$ Звідси одержуємо систему

$$\begin{cases} ac+bd=0 \\ ad+bc=0. \end{cases} \qquad (4)$$

Припустимо, що $|c|\neq|d|.$ Тоді із системи (4) одержуємо, що $a=b=0.$ Це є протиріччям з тим, що $a+bj\neq 0.$ Аналогічно доводиться,що $|a|=|b|.$

Наслідок. Ділення дійсного j-числа на дільник нуля неможливе.

Цей наслідок є частинним випадком загальновідомого алгеброїчного твердження про неможливість ділення на дільники нуля.

4. Цілі j-числа.

Означення. **Цілим j-числом** називається дійсне j-число $a+bj$, де a і b -цілі числа.

Очевидно,що будь-яке непарне ціле число $p>2$ розкладається на множники у множині R_j.

Дійсно,

$$p=\left(\frac{p+1}{2}+\frac{p-1}{2}\,j\right)\left(\frac{p+1}{2}-\frac{p-1}{2}\,j\right).$$

Теорема2. Якщо цілі числа a і c не рівні нулю, то неможливий розклад:

$$2=(a+bj)(c+dj), \qquad (5)$$

за винятком тривіального випадку $2=2\cdot 1.$

Доведення. Припустимо, що існують цілі j-числа $a+bj, c+dj$, які задовільняють умові теореми і для яких справедлива рівність (5). З рівності (5) одержуємо систему:

$$\begin{cases} ac+bd=2 \\ ad+bc=0 \end{cases}$$

з якої знову одержуємо систему:

$$\begin{cases} (a+b)(c+d)=2 \\ (a-b)(c-d)=2 \end{cases} \qquad (6)$$

Розв'язання системи (6) зводиться до розв'язку системи

$$\begin{cases} a+b=t_1 \\ c+d=t_2 \\ a-b=t_3 \\ c-d=t_{4,} \end{cases} \qquad (7)$$

де, пари $(t_1,t_2),(t_3,t_4)$ пробігають незалежно одна від другої множину $E=\{(2,1),(1,2),(-1,-2),(-2,-1)\}$.

Завершується доведення теореми розв'язуванням системи (7) після підстановки замість $(t_1,t_2),(t_3,t_4)$ їх значень з множини E.

5. Критерій рівності $a^p+b^p=c^p$.

Нехай $a\in R(a\neq 0)$, $m+nj\in R_j$. Згідно з [1:105] покладемо за означенням

$$a^{m+nj}=\frac{a^m}{2}\left(\left(a^n+a^{-n}\right)+j\left(a^n-a^{-n}\right)\right). \qquad (8)$$

<u>Теорема3</u>: Нехай $p>2$ непарне натуральне число, $a,b,c\in R-\{0\}$.

Для того, щоб $a^p+b^p=c^p$ або $a+b=c$, необхідно і досить, щоб вираз

$$a^{m+nj}+b^{m+nj}-c^{m+nj}$$

був дільником нуля при $m=\frac{p+1}{2}, n=\frac{p-1}{2}$.

Доведення.

$$a^{m+nj}=\frac{a^m}{2}\left(a^n+a^{-n}+j\left(a^n-a^{-n}\right)\right)$$

$$b^{m+nj}=\frac{b^m}{2}\left(b^n+b^{-n}+j\left(b^n-b^{-n}\right)\right)$$

$$c^{m+nj}=\frac{c^m}{2}\left(c^n+c^{-n}+j\left(c^n-c^{-n}\right)\right).$$

Звідси і з того, що $m+n=p, m-n=1,$ одержуємо:

$$a^{m+nj}+b^{m+nj}-c^{m+nj}=\frac{1}{2}\left(a^p+a+b^p+b-c^p-c+j\left(a^p-a+b^p-b-c^p+c\right)\right)$$

Необхідність. Нехай $a^p+b^p=c^p$. Тоді $a+b-c\neq 0,$ бо $p>2.$ Маємо:

$$a^{m+nj}+b^{m+nj}-c^{m+nj}=\frac{1}{2}(a+b-c)(1-j),$$

що є дільником нуля.

Достатність. Нехай

$$a^p+a+b^p+b-c^p-c+j\left(a^p-a+b^p-b-c^b+c\right)$$

є дільником нуля. За теоремою 1,

$$\left|a^p+a+b^p+b-c^p-c\right|=\left|a^p-a+b^p-b-c^p+c\right|.$$

Якщо

$$a^p+a+b^p+b-c^p-c=a^p-a+b^p-b-c^p+c,$$

то

$$a+b=c.$$

Якщо

$$a^p + a + b^p + b - c^p - c = -\left(a^p - a + b^p - b - c^p + c\right),$$

то

$$a^p + b^p = c^p.$$

Теорема доведена.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 575 с.

Матеріал надійшов до редакції 20.11.01 р.

Таргонский Л.Ф., Таргонская Т.Л. Об одном обобщении множества действительных чисел.

В статье рассматривается множество чисел, содержащее множество действительных чисел и мнимую единицу, квадрат которой равен единице. Изучаются свойства этого множества.

Targonsky L.P.,Targonska T.L. About a Generalization of the Multitude of Real Numbers.

The multitude of numbers containing the multitude of real numbers and imaginary ones the square of which is equal to one is considered in this article. The characteristics of this multitude are dealt with.