НАУКОВИЙ ПОШУК
МОЛОДИХ ДОСЛІДНИКІВ

Збірник наукових праць студентів, магістрантів та викладачів

2023

Житомирський державний університет імені Івана Франка
Фізико-математичний факультет

НАУКОВИЙ ПОШУК МОЛОДИХ ДОСЛІДНИКІВ

Випуск XV

Житомир

Вид-во ЖДУ ім. І. Франка

2023

УДК 378.937
Н32

Рекомендовано вченою радою Житомирського державного університету імені Івана Франка, протокол № 2 від 27.01.2023 року

РЕЦЕНЗЕНТИ: **Світлана ПОПЛАВСЬКА –** кандидат педагогічних наук, доцент, проректор з навчальної роботи, доцент кафедри природничих та соціально-гуманітарних дисциплін Житомирського медичного інституту;
Віталій ГУК – кандидат технічних наук, старший викладач кафедри програмного забезпечення автоматизованих систем Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького;
Ірина КОЛЕСНІКОВА – кандидат педагогічних наук, старший викладач методики викладання навчальних предметів КЗ ЖОІППО ЖОР.

Н32	Науковий пошук молодих дослідників: збірник наукових праць студентів, магістрантів та викладачів / за заг. ред. Постової С.А., Вербівського Д. С., Карплюк С. О., Єремеєвої В. М. – Житомир : Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2023. – Вип. 15. – 90 с. У збірнику представлено результати науково-дослідницької роботи за актуальними напрямками фізико-математичних, психолого-педагогічних наук та інформаційних технологій магістрантів, студентів-дипломників, членів проблемних груп та наукових гуртків, здобувачів, викладачів фізико-математичного факультету Житомирського державного університету імені Івана Франка. **УДК 378.937**

Таміла Коломієць
асистент кафедри алгебри та геометрії
Житомирський державний університет імені Івана Франка

АЛГЕБРАЇЧНИЙ МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

Анотація. *У статті представлено теоретичне обґрунтування алгебраїчного методу знаходження розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними (ДРЧП) та показано важливість його практичного застосування.*

Ключові слова: *скінченновимірна алгебра, моногенна функція, диференціальні рівняння з частинними похідними, умови типу Коші-Рімана.*

Постановка проблеми. При розв'язуванні багатьох практичних задач математичної фізики, гідродинаміки, радіозв'язку, екології, біології, хімії, астрономії, архітектури, медицини та ін. дослідникам доводиться зустрічатися з математичними моделями, які з певною точністю описують той чи інший процес. Якщо шукана величина залежить одночасно від декількох змінних, то математичною моделлю такого процесу зазвичай є відповідне диференціальне рівняння з частинними похідними (ДРЧП). Досить часто такі ДРЧП не піддаються дослідженню традиційними методами і одним із ефективних методів знаходження їх розв'язків є алгебраїчний підхід, що ґрунтується на вивченні властивостей моногенних (диференційовних у відповідному сенсі) функцій на асоційованих з рівнянням комутативних алгебрах.

Аналіз актуальних досліджень. Алгебраїчний метод знаходження розв'язків ДРЧП за допомогою властивостей диференційовних функцій на асоційованих з рівнянням комутативних алгебрах бере свій початок із робіт П. Кетчума, а згодом розвивається у роботах Дж. Ворда, Е. Лорха, Р. Вагнера, Е. Блюма, М. Рошкулеця, К. Кунца. За останні роки активні дослідження у цьому напрямі проводили багато математиків, зокрема, В. Ковальов, І. Мельниченко, А Турбін, М. Шапіро, В. Кравченко, Ф. Соммен, С. Плакса, Д. Рошон, А. Погоруй, Р. Родрігес-Дагніно, В. Шпаківський, Р. Родрігес-Саїд, С. Грищук, Р. Пухтаєвич, Т. Кузьменко, Т. Коломієць та ін.

Суть методу полягає у знаходженні асоційованої з ДРЧП комутативної алгебри та побудові моногенної функції на відповідному підпросторі цієї алгебри, використовуючи умови типу Коші-Рімана. Доведено, що компоненти у розкладі моногенної функції є розв'язками даного ДРЧП.

Мета статті – навести основні теоретичні відомості та необхідні алгебраїчні конструкції, які пояснюють суть алгебраїчного методу дослідження ДРЧП, для можливості їх подальшого практичного застосування.

Виклад основного матеріалу. З курсу лінійної алгебри [1] відомо, що *векторний (лінійний) простір* є узагальненням множини всіх векторів на площині чи в просторі з операціями додавання векторів та множення вектора на скаляр. Якщо базис векторного простору складається із скінченної (нескінченної) кількості елементів, то такий простір називають *скінченновимірним (нескінченновимірним) векторним простором*.

Алгебра − це векторний простір, операція множення елементів якого задовольняє аксіоми асоціативності множення і дистрибутивності додавання відносно множення. Існують комутативні, некомутативні, асоціативні і неасоціативні алгебри. Для комутативної алгебри, додатково виконується аксіома комутативності множення. В залежності від розмірності векторного простору *алгебра* може бути *скінченновимірною і нескінченновимірною* [2].

З курсу комплексного аналізу відомо, що умови на дійсну та уявну частини функції комплексної змінної, які забезпечують нескінченну неперервну її диференційовність, називаються *умовами Коші-Рімана* [3]. Узагальнені умови Коші-Рімана для функції гіперкомплексної змінної [4] називають *умовами типу Коші-Рімана*.

Нехай $\mathcal{A}$ – скінченновимірна комутативна унітарна алгебра над полем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (або $\mathbb{C}$). Позначимо через $e_0, e_1, \dots, e_n$ деякий базис алгебри $\mathcal{A}$, де e_0 – одиничний елемент.

Розглянемо $(m+1)$-вимірний підпростір $\mathcal{B}$ алгебри $\mathcal{A}$, $m \leq n$, $m, n \in \mathbb{N}$ з базисом $e_0, e_1, \dots, e_m$. Нехай функція $f: \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ має вигляд

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} e_k u_k(x), \tag{1}$$

де $u_k(x) = u_k(x_0, x_1, \dots, x_m)$ – $\mathbb{K}$-значні функції $(m+1)$-ї змінної $x_i \in \mathbb{K}, i = 0,1, \dots m$. Тобто

$$\mathcal{B} \ni x = \sum_{i=0}^{m} e_i x_i \xrightarrow{f} \sum_{k=0}^{n} e_k u_k(x_0, x_1, \dots, x_m)\,,$$

$$u_k: \mathbb{K}^{m+1} \to \mathbb{K}, k = 0, \dots, n.$$

Означення 1 [5]. Функцію $f: \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ називають *диференційовною* в точці $x^0 \in \mathcal{B}$, якщо для будь-якого $h \in \mathcal{B}$ існує єдиний елемент $f'(x^0) \in \mathcal{A}$ такий, що не залежить від h, і виконується рівність

$$f'(x^0)h = \lim_{\mathbb{K} \ni \varepsilon \to 0} \frac{f(x^0 + \varepsilon h) - f(x^0)}{\varepsilon},$$

де $f'(x^0)h$ – добуток двох елементів $f'(x^0)$ і h алгебри $\mathcal{A}$.

Означення 2 [5]. Функцію $f: \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ називають *моногенною* у $\mathcal{B}$, якщо вона є диференційовною в кожній точці $x \in \mathcal{B}$.

Теорема 1 [5]. *Функція виду* (1) *є диференційовною в точці x^0 тоді і тільки тоді, коли існують неперервні частинні похідні $\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}$, $i = 0, \dots, m$, пропорційні з одним і тим самим коефіцієнтом пропорційності для базисних елементів e_i*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = e_i \alpha(x^0),$$

щоразу, коли $\alpha(x^0) = f'(x^0)$.

При доведенні теореми 1 отримано умови типу Коші-Рімана для диференційовності функції $f(x)$ у векторній формі

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_k} = e_k \, \frac{\partial f(x)}{\partial x_0}, \quad k = 0,1, \dots, m \tag{2}$$

або у координатній формі

$$\begin{gathered}
\sum_{k=0}^{n} e_k \frac{\partial u_k(x)}{\partial x_1} = e_1 \sum_{k=0}^{n} e_k \frac{\partial u_k(x)}{\partial x_0}, \\
\sum_{k=0}^{n} e_k \frac{\partial u_k(x)}{\partial x_2} = e_2 \sum_{k=0}^{n} e_k \frac{\partial u_k(x)}{\partial x_0}, \\
\vdots \\
\sum_{k=0}^{n} e_k \frac{\partial u_k(x)}{\partial x_m} = e_m \sum_{k=0}^{n} e_k \frac{\partial u_k(x)}{\partial x_0}.
\end{gathered} \tag{3}$$

Умови (2) і (3) є *узагальненими рівняннями (умовами типу) Коші-Рімана*.

Для $r, m \in \mathbb{N}$ введемо однорідний поліном над полем чисел $\mathbb{K}$

$$P(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m) := \sum_{i_0 + i_1 + \dots + i_m = r} C_{i_0, i_1, \dots, i_m} \xi_0^{i_0} \xi_1^{i_1} \dots \xi_m^{i_m}, \tag{4}$$

де $C_{i_0, i_1, \dots, i_m} \in \mathbb{K}$.

Розглянемо ДРЧП виду

$$P(\partial_0, \partial_1, \dots, \partial_m) \, [u(x_0, x_1, \dots, x_m)] = 0, \tag{5}$$

де $\partial_k := \frac{\partial}{\partial x_k}$.

Теорема 2 [5]. *Нехай P є поліном виду* (4)*. Нехай функція*

$$f : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$$

виду (1) *і її похідні $f', f'', \dots, f^r$ будуть моногенними. Припустимо, що базис $e_0, e_1, \dots, e_m$ підпростору $\mathcal{B}$ алгебри $\mathcal{A}$ такий, що*

$$P(e_0, e_1, \dots, e_m) = 0.$$

Тоді функції $u_k(x)$, $k = 0, \dots, n$ є розв'язками рівняння (5).

Теоретичні аспекти та практичне застосування описаного вище алгебраїчного підходу можна знайти, наприклад, у роботах $[5 - 9]$.

Висновки та перспективи подальших досліджень. Даний матеріал є базовим для розуміння суті алгебраїчного методу та можливості його подальшого практичного застосування при знаходженні розв'язків ДРЧП, які виникають для задач математичної фізики, теорії випадкових процесів, економічних процесів та інших розділів науки.

Також ДРЧП є складовою математичних освітніх компонент у ЖДУ імені Івана Франка. Алгебраїчний підхід − як один із ефективних методів дослідження розв'язків ДРЧП − може бути реалізований у процесі навчання здобувачів першого, другого та третього рівнів вищої освіти спеціальностей 014.04 Середня освіта (Математика) та 111 Математика, зокрема, при написанні курсових, дипломних, кваліфікаційних та наукових робіт з цієї тематики.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ ТА ЛІТЕРАТУРИ

1. Михайленко В. В., Добряков Л. Д. Вища математика. Книга 1. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Підручник. – Житомир: ЖДТУ, 2004 – 554 с.
2. Чеботарев Н. Г. Введение в теорию алгебр. Изд. 3-е: Издательство ЛКИ, 2008. – 88 с.
3. Мельник Т. А. Комплексний аналіз: Підручник. – Київ: ВПЦ «Київський університет», 2015. – 192 с.
4. Городецький В. В., Боднарук С. Б. Вступ до теорії гіперкомплексних чисел та їх функцій: Навчальний посібник. – Чернівці: Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, 2021. – 136 с.
5. Pogorui A. A., Rodríguez-Dagnino R. M., Shapiro M. Solutions for PDEs with constant coefficients and derivability of functions ranged in commutative algebras // Math. Meth. Appl. Sci. – 2014. – Vol. 37, No. 17. – P. 2799 – 2810.
6. Плакса С. А. Моногенні функції в комутативних алгебрах і еліптичні рівняння математичної фізики // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2021. – Т. 18, № 1. – С. 508 – 554.
7. Шпаківський В. С. Гіперкомплексний метод розв'язування лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними // Труды ИПММ НАН Украины. – 2018. – Т. 32. – С. 147 – 168.

8. Kolomiiets T., Pogorui A., Rodríguez-Dagnino R. M. The distribution of random motion with Erlang-3 sojourn times // Random Operators and Stochastic Equations. – 2015. – Vol. 23, No. 2. – P. 69 – 79.

9. Pogorui A., Kolomiiets T., Rodríguez-Dagnino R. M. An algebraic approach for solving fourth-order partial differential equations // Fascicola matematica. – 2019. – Tom XXVI, Issue No. 1. – P. 155 – 162.