УДК 519.21

А.О.Погоруй,
кандидат фізико-математичних наук, в.о. доцента
(Житомирський педуніверситет)

ОБЧИСЛЕННЯ СТАЦІОНАРНОГО КОЕФІЦІЄНТА ПРОДУКТИВНОСТІ ВИРОБНИЧОЇ ЛІНІЇ З ДВОМА НЕНАДІЙНИМИ АГРЕГАТАМИ

Для марковського випадку виведена формула обчислення коефіцієнта ефективності виробничої лінії з двома ненадійними агрегатами як функції від параметрів системи.

Система складається з двох агрегатів A_1 і A_2, між якими розміщений бункер об'єму V.

Агрегати ненадійні: час безвідмовної роботи A_k — випадкова величина (в.в.), яка має показниковий розподіл з параметром $\lambda_k > 0$, час відновлення – в.в., яка має показниковий розподіл з параметром $\mu_k > 0$, $k = 1,2$.

Функціонування системи проходить так:

1. Якщо всі агрегати діючі, бункер заповнений, то продукт, переходячи послідовно від агрегата A_1 до агрегату A_2, потрапляє до споживача з продуктивністю a.
2. Якщо всі агрегати діючі, а бункер неповний, то A_1 працює з додатковою продуктивністю b, заповнюючи бункер і продовжуючи забезпечувати споживача з продуктивністю a.
3. Якщо бункер пустий, а агрегат A_2 - недіючий, то продукт перестає надходити до споживача, поки не відновиться агрегат A_2.
4. Якщо A_1 – відновлюється , бункер не пустий, а A_2 – діючий, то система продовжує працювати за рахунок продукту, що міститься в бункері.

Позначимо через V_T – об'єм продукту, доставленого споживачу за час [0,T].

Стаціонарна середня продуктивність P системи визначається як

$$P = \lim_{T \to +\infty} \frac{V_T}{T},$$

за умови, що границя існує. Введемо випадковий процес $X(t)$:

$$X(t) = \begin{cases} 00 -- \ \textit{в момент } t \textit{ обидва агрегати недіючі} \\ 01 - \textit{діючий 2-й, відновлюється 1-й} \\ 10 - \textit{діючий 1-й, відновлюється 2-й} \\ 11 - \textit{діючі обидва агрегати} \end{cases}$$

$X(t)$ є марковським процесом з фазовим простором $\{00,01,10,11\}$ і функціями розподілу часів перебування :

$$G_{00} = 1 - e^{-(\mu_1 + \mu_2)t},$$
$$G_{01} = 1 - e^{-(\mu_1 + \lambda_2)t},$$
$$G_{10} = 1 - e^{-(\lambda_1 + \mu_2)t},$$
$$G_{11} = 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}$$

в станах 00,01,10,11 відповідно.

$$C(z) = \begin{cases} b, \ \ Z = \{11, v\}, Z = \{10, v\}, v < V \\ -a, \ \ Z = \{01, v\}, v > 0 \\ 0, \ \textit{в інших випадках} \end{cases}$$

На просторі Z={00,01,10,11}$\times$[0,V], (V – об'єм бункера) введемо функції $C(Z)$, $f(Z)$:

$$f(Z) = \begin{cases} 0, \ \ Z = \{11, v\}, \{10, v\}, v < V \\ -a, \ \ Z = \{01, v\}, v > 0 \\ 0, \ \textit{в інших випадках.} \end{cases}$$

Через $V(t)$ позначимо кількість продукту в бункері в момент часу t .

Неважко переконатися, що $V(t)$ задовольняє рівняння:

$$\frac{dv(t)}{dt} = C(x(t), v(t)), \qquad (1)$$

Рівняння (1) описує стохастичний процес переносу $V(t)$ в марковському середовищі $x(t)$ [1].

Позначимо через $\xi(t)=(x(t),v(t))$.

Тоді

$$\frac{V_T}{T}=\frac{1}{T}\int_0^T f(\xi(t))dt \to P$$

при $T \longrightarrow +\infty$

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(\xi(t))dt = \int_0^T f(Z)\rho(dZ).$$

Якщо процес $\xi(t)$ має стаціонарну міру $\rho(\cdot)$,то

Отже, для визначення стаціонарної продуктивності системи досить знати стаціонарний розподіл процесу ξ (t).

Процес $\xi(t)$ є марковским [2], його інфінітезімальний оператор має вигляд [3]:

$$A\varphi(x,v)=C(x,v)\frac{\partial\varphi(x,v)}{\partial v}+Q[P-I]\cdot\varphi(x,v),$$

де

$$Q[P-I]=\begin{pmatrix} -(\mu_1+\mu_2) & \mu_1 & \mu_2 & 0 \\ \lambda_2 & -(\mu_1+\lambda_2) & 0 & \mu_1 \\ \lambda_1 & 0 & -(\lambda_1+\mu_2) & \mu_2 \\ 0 & \lambda_1 & \lambda_2 & -(\lambda_1+\lambda_2) \end{pmatrix}$$

Якщо існує стаціонарна міра $\rho(\cdot)$ процесу ξ(t), то для $\forall\varphi\in$ D(A):

$$\int_Z A\varphi(Z)\rho(dZ)=0\,. \qquad (2)$$

Аналіз властивостей процесу $\xi(t)$ показує, що точки [01,0] , [10, V] , [11, V] фазового простору Z є атомами по v стаціонарної міри $\rho(\cdot)$. Надалі будемо позначати їх так: ρ[01,V] , ρ[10, V] , ρ[11, V].

Зауваження. Будемо вважати, що в атомах [10,V] і [01,0] агрегати A_1 і A_2 не можуть вийти з ладу ($\lambda_1=\lambda_2=0$), оскільки в цих станах вони не задіяні .

Запишемо (2), з урахуванням зауваження, в розгорнутому вигляді:

$$\begin{aligned}&\int_Z A\varphi(z)\overline{\rho}(dz)=\int_V \{[-(\mu_1+\mu_2)\varphi(00,\nu)+\mu_1\varphi(01,\nu)+\mu_2\varphi(10,\nu)]\cdot\rho(00,\nu)+\\&+[C(01,\nu)\frac{\partial\varphi(01,\nu)}{\partial\nu}+\lambda_2\varphi(00,\nu)-(\lambda_2+\mu_1)\varphi(01,\nu)+\mu_1\varphi(11,\nu)]\rho(01,\nu)+\\&+[C(10,\nu)\frac{\partial\varphi(10,\nu)}{\partial\nu}+\lambda_1\varphi(00,\nu)-(\mu_2+\lambda_1)\varphi(10,\nu)+\mu_2\varphi(11,\nu)]\rho(10,\nu)+\\&+[C(11,\nu)\frac{\partial\varphi(11,\nu)}{\partial\nu}+\lambda_1\varphi(01,\nu)+\lambda_2\varphi(10,\nu)-(\lambda_1+\lambda_2)\varphi(11,\nu)]\rho(11,\nu)\}d\nu\;+\\&+(-\mu_1\varphi(01,0)+\mu_1\varphi(11,0))\cdot\rho[01,0]+(-\mu_2\varphi(10,V)+\mu_2\varphi(11,V))\cdot\rho[10,V]+\\&+(\lambda_1\varphi(01,V)+\lambda_2\varphi(10,V)-(\lambda_1+\lambda_2)\varphi(11,V))\cdot\rho[11,V]=0\end{aligned} \qquad (3)$$

Змінюючи в (3) порядок інтегрування, одержимо вираз для $A^*\overline{\rho}=0$, где A^* - спряжений до A оператор , а саме:

$$\begin{cases}\begin{cases} a\dfrac{\partial\rho(01,v)}{\partial v}+\mu_1\rho(00,v)-(\lambda_2+\mu_1)\rho(01,v)+\lambda_1\rho(11,v)=0\\ -b\dfrac{\partial\rho(10,v)}{\partial v}+\mu_2\rho(00,v)-(\lambda_1+\mu_2)\rho(10,v)+\lambda_2\rho(11,v)=0\\ -b\dfrac{\partial\rho(11,v)}{\partial v}+\mu_1\rho(01,v)+\mu_2\rho(10,v)-(\lambda_1+\mu_2)\rho(10,v)=0\end{cases}\\ -(\mu_1+\mu_2)\rho(00,v)+\lambda_2\rho(01,v)+\lambda_1\rho(10,v)=0\end{cases} \quad (4)$$

Звідки випливає, що

$$a\rho(01,v)-b\rho(10,v)-b\rho(11,v)=C_0=const \quad (5)$$

Із (4) маємо для атомів:

$$\begin{cases} a\rho(01,0+)-\mu_1\rho[01,0]=0\\ \mu_1\rho[01,0]-b\rho(11,0+)=0\\ \rho(10,0+)=0\end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} -a\rho(01,V-)+\lambda_1\rho[11,V]=0\\ b\rho(11,V-)+\mu_2\rho[10,V]-(\lambda_1+\lambda_2)\rho[11,V]=0\\ b\rho(01,V-)-\mu_1\rho[10,V]+\lambda_1\rho[11,V]=0\end{cases}$$

З урахуванням співвідношень (5),(6), одержимо:

$$\left.\begin{aligned} a\rho(01,0+)-b\rho(10,0+)-b\rho(11,0+)=0\\ a\rho(01,V-)-b\rho(10,V-)-b\rho(11,V-)=0\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Із (5) і (7) випливає:

$$a\rho(01,v)-b\rho(10,v)-b\rho(11,v)=0$$

Звідки, використовуючи останнє рівняння системи (4), неважко переконатися, що перші два рівняння (4) можна записати у вигляді:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\rho(01,v)}{\partial v}=\left(-\dfrac{\lambda_1}{b}+\dfrac{\mu_2\lambda_2}{a(\mu_2+\mu_1)}+\dfrac{\mu_1}{a}\right)\rho(01,v)+\dfrac{\mu_2\lambda_1}{a(\mu_2+\mu_1)}\rho(10,v)\\ \dfrac{\partial\rho(10,v)}{\partial v}=\left(\dfrac{\lambda_2 a}{b^2}+\dfrac{\mu_2\lambda_2}{b(\mu_2+\mu_1)}\right)\rho(01,v)+\left(-\dfrac{\lambda_2}{b}+\dfrac{\mu_1\lambda_1}{b(\mu_2+\mu_1)}+\dfrac{\mu_2}{b}\right)\rho(10,v)\end{cases} \quad (8)$$

Систему (8) запишемо у вигляді:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\rho(01,v)}{\partial v}=c_{11}\rho(01,v)+c_{12}\rho(10,v)\\ \dfrac{\partial\rho(10,v)}{\partial v}=c_{21}\rho(01,v)+c_{22}\rho(10,v)\end{cases} \quad (9)$$

Розв'язуючи (9), одержимо:

$$\rho(01,v)=c_1e^{\delta_1 v}+c_2e^{\delta_2 v},$$

$$\rho(10,v)=c_1\frac{1}{c_{12}}(\delta_1-c_{11})e^{\delta_1 v}+c_2\frac{1}{c_{12}}(\delta_2-c_{11})e^{\delta_2 v},$$ де

$$\delta_1=\frac{c_{22}+c_{12}+\sqrt{(c_{22}-c_{11})^2+4c_{12}c_{21}}}{2}$$

$$\delta_2=\frac{c_{22}+c_{12}-\sqrt{(c_{22}-c_{11})^2+4c_{12}c_{21}}}{2}$$

З урахуванням (6):

$$\rho(10,0+) = 0 \Rightarrow c_2 = c_1 \frac{c_{11} - \delta_1}{\delta_2 - c_{11}}$$

Таким чином, шукані щільності мають вигляд:

$$\rho(01,v) = c\left(e^{\delta_1 v} + \frac{c_{11} - \delta_1}{\delta_2 - c_{11}} e^{\delta_2 v}\right),$$

$$\rho(10,v) = \frac{c}{c_{22}}(\delta_1 - c_{11})(e^{\delta_1 v} - e^{\delta_2 v}).$$

Використовуючи співвідношення (5), маємо:

$$\rho(11,v) = \frac{a}{b}\rho(01,v) - \rho(10,v),$$

$$\rho(00,v) = \frac{\lambda_2}{\mu_1 + \mu_2}\rho(01,v) + \frac{\lambda_1}{\mu_1 + \mu_2}\rho(10,v);$$

Атоми процесу $\xi(t)$ знаходимо із систем (6):

$$\rho[01,0] = \frac{a}{\mu_1}\rho(01,0+),$$

$$\rho[11,V] = \frac{a}{\lambda_1}\rho(01,V-),$$

$$\rho[10,V] = \frac{b}{\mu_2}\rho(10,V-) + a\rho(01,V-);$$

Константа c є нормуючим множником, який знаходимо із рівності:

$$\int_z \rho(z)dz = 1.$$

Після беспосередніх обчислень, маємо:

$$c = \left[\left(\frac{e^{\delta_1 V} - 1}{\delta_1}\right)\left(1 + \frac{a}{b} + \frac{\lambda_2}{\mu_1 + \mu_2} + \frac{\delta_1 - c_{11}}{c_{22}} \cdot \frac{\lambda_1}{\mu_1 + \mu_2}\right) + \left(\frac{e^{\delta 1\, V} - 1}{\delta_2}\right)^{-1}\left(\frac{c_{11} - \delta}{\delta_2} \cdot \right.\right.$$

$$\left.\left(1 + \frac{a}{b} + \frac{\lambda_2}{\mu_1 + \mu_2}\right) - \frac{\lambda_1}{\mu_1 + \mu_2}\right) + \frac{c_{11} - \delta_1}{\delta_2 - c_{11}} a\left(\frac{1}{\mu_1} + \left(\frac{1}{\lambda_1} + 1\right)e^{\delta_2 V}\right) + \frac{a}{\mu_1} + \left(\frac{1}{\lambda_1} + 1\right)e^{\delta_2 V} +$$

$$\left. + \frac{b}{\mu_2} \cdot \frac{\delta_1 - c_{11}}{c_{22}}\left(e^{\delta_1 V} - e^{\delta_2 V}\right)\right]^{-1}$$

Звідки

$$P = a\int_0^V \left(\rho(11,v) + \rho(01,v)\right)dv + a \cdot \rho[11,V]$$

$$P = C \cdot \left[\frac{e^{\delta_1 V} - 1}{\delta_1} \cdot \left(1 + \frac{a}{b} - \frac{\delta_1 - c_{11}}{c_{22}}\right) + \frac{e^{\delta_2 V} - 1}{\delta_2} \cdot \left(\frac{c_{11} - \delta_1}{\delta_2 - c_{11}} \cdot \left(1 + \frac{a}{b}\right) + 1\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{a}{\lambda_1} \cdot \left(e^{\delta_1 V} + \frac{c_{11} - \delta_1}{\delta_2 - c_{11}} e^{\delta_2 V}\right)\right].$$

•••С•• ••••••••••• •••••••••

1. Korolyuk V.S., Turbin A.F. Mathematical Foundation of the State Lumping of Large System.–Kluwer Academic Publishers.1994.

2. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов: В 3–х т.-М.:Наука, 1973. Т.2.

3. Погоруй А.А., Турбин А.Ф. Расчет стационарных показателей эффективности систем управления. //Интеллектуализация систем обработки.-К.: ИМ АН Украины,1995.

4. Погоруй А.А. Стационарный коэффициент производительности линии с произвольным числом накопителей //Тезисы международного симпозиума "Надежность и качество 99", Пенза, 1999.

Матеріал надійшов до редакції 18.03.2000 р.

Погоруй А.А. Вычисление стационарного коэффициента производительности линии с двумя ненадежными агрегатами.

Для марковского случая получена формула для вычисления коэффициента еффективности производственной линии с двумя ненадежными агрегатами как функции от параметров системы.

Pohgorui A.O. Calculation of productivity stationer coefficient of productive line with two unreliable devices.

The article presents a formula for calculation of coefficient of effectiveness of productive line with two unreliable devices (Markov case) as function of system parameters.